19. જો $\vec{a}$ અને $\vec{b}$, બે સમરેખ સદિશો હોય, તો નીચે આપેલાં પૈકી કયાં વિધાનો અસત્ય છે :

(A) કોઈક અદિશ λ માટે, $\vec{b} = \lambda\vec{a}$.

(B) $\vec{a} = \pm\vec{b}$

(C) $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ના અનુરૂપ ઘટકો પ્રમાણમાં નથી.

(D) બંને સદિશો $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ ની દિશા સમાન છે, પરંતુ માન ભિન્ન છે.

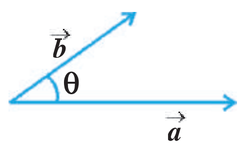
10.6 બે સદિશોનો ગુણાકાર

અત્યાર સુધી આપણે સદિશોનાં સરવાળા અને બાદબાકી વિશે અભ્યાસ કર્યો. અન્ય એક બૈજિક પ્રક્રિયાની ચર્ચા કરીશું. તેને બે સદિશોનો ગુણાકાર કહેવાય છે. આપણને યાદ છે કે બે સંખ્યાઓનો ગુણાકાર એક સંખ્યા છે, બે શ્રેણિકોનો ગુણાકાર પુનઃ શ્રેણિક મળે છે. પરંતુ વિધેયોના સંદર્ભમાં, આપણે તેમનો ગુણાકાર બે રીતે કરી શકીએ, એટલે કે બે વિધેયોનો બિંદુ દીઠ ગુણાકાર અને બે વિધેયોનું સંયોજન. આ જ રીતે, બે સદિશોનો ગુણાકાર પણ બે પ્રકારે વ્યાખ્યાયિત થાય છે, એટલે કે (i) અદિશ કે અંતઃગુણન. તેમાં પરિણામ અદિશ (સંખ્યા) છે. (ii) સદિશ ગુણાકાર અથવા બહિર્ગુણન. અહીં પરિણામ સદિશ છે. આ બે પ્રકારના સદિશોના ગુણાકારના આધાર પર આપણને ભૂમિતિ, યંત્રશાસ્ત્ર અને ઈજનેરીશાખામાં વિવિધ ઉપયોગો મળે છે. આ વિભાગમાં, આપણે આ બે પ્રકારના ગુણાકારોની ચર્ચા કરીશું.

નોંધ : ખરેખર વિધેયોનું સંયોજન તેમનો 'ગુણાકાર' છે તેમ કહેવાય નહિ.

10.6.1 બે સદિશોનું અદિશ (અથવા અંતઃ) ગુણન

***વ્યાખ્યા 2 :** બે શૂન્યેતર સદિશો $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ નો અદિશ ગુણાકાર (Inner Product અથવા Dot Product) એ $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત થાય છે. અત્રે θ એ $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ વચ્ચેનો ખૂણો છે, $0 \le \theta \le \pi$ (આકૃતિ 10.19).*



આકૃતિ 10.19

જો $\vec{a} = \vec{0}$ અથવા $\vec{b} = \vec{0}$ હોય તો θ અવ્યાખ્યાયિત છે અને આ કિસ્સામાં, આપણે $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ વ્યાખ્યાયિત કરીએ છીએ.

અવલોકનો

1. $\vec{a}\cdot\vec{b}$ એક વાસ્તવિક સંખ્યા છે.
2. ધારો કે $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ બે શૂન્યેતર સદિશો છે. જો $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ તો અને તો જ $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ પરસ્પર લંબ છે. એટલે કે $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a}\perp\vec{b}$
3. જો $\theta = 0$, તો $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|$. વિશેષમાં $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2$, આ કિસ્સામાં θ એ 0 છે.
4. જો $\theta = \pi$, તો $\vec{a}\cdot\vec{b} = -|\vec{a}||\vec{b}|$. વિશેષમાં $\vec{a}\cdot(-\vec{a}) = -|\vec{a}|^2$, આ કિસ્સામાં θ એ π છે.
5. અવલોકનો 2 અને 3 ના સંદર્ભમાં, પરસ્પર લંબ એકમ સદિશો $\hat{i}$, $\hat{j}$ અને $\hat{k}$ માટે, આપણી પાસે $\hat{i}\cdot\hat{i} = \hat{j}\cdot\hat{j} = \hat{k}\cdot\hat{k} = 1$, $\hat{i}\cdot\hat{j} = \hat{j}\cdot\hat{k} = \hat{k}\cdot\hat{i} = 0$.
6. બે શૂન્યેતર સદિશો $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ વચ્ચેનો ખૂણો $\cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$ અથવા $\theta = \cos^{-1}\left(\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right)$ દ્વારા મળે છે.
7. અદિશ ગુણાકાર સમક્રમી છે, એટલે કે $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$ (શા માટે ?)

અદિશ ગુણાકારના બે મહત્ત્વના ગુણધર્મો

ગુણધર્મ 1 *(અદિશ ગુણાકારનો સરવાળા પર વિભાજનનો ગુણધર્મ)*

$\vec{a}$, $\vec{b}$ અને $\vec{c}$ કોઈ પણ ત્રણ સદિશો હોય, તો

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$$

ગુણધર્મ 2 *કોઈ પણ બે સદિશો $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ અને કોઈ પણ અદિશ સંખ્યા λ માટે*

$$(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b} = \lambda(\vec{a}\cdot\vec{b}) = \vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})$$

જો બે સદિશો $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ ઘટક સ્વરૂપે $a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ અને $b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ આપેલ હોય, તો તેમનો અદિશ ગુણાકાર નીચે પ્રમાણે કરવામાં આવે છે :

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k})\cdot(b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k})$$

$$= a_1\hat{i}\cdot(b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}) + a_2\hat{j}\cdot(b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}) + a_3\hat{k}\cdot(b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k})$$

$$= a_1b_1(\hat{i}\cdot\hat{i}) + a_1b_2(\hat{i}\cdot\hat{j}) + a_1b_3(\hat{i}\cdot\hat{k}) + a_2b_1(\hat{j}\cdot\hat{i}) + a_2b_2(\hat{j}\cdot\hat{j})$$

$$+ a_2b_3(\hat{j}\cdot\hat{k}) + a_3b_1(\hat{k}\cdot\hat{i}) + a_3b_2(\hat{k}\cdot\hat{j}) + a_3b_3(\hat{k}\cdot\hat{k})$$

(ગુણધર્મ 1 અને 2 નો ઉપયોગ કરતાં)

$$= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

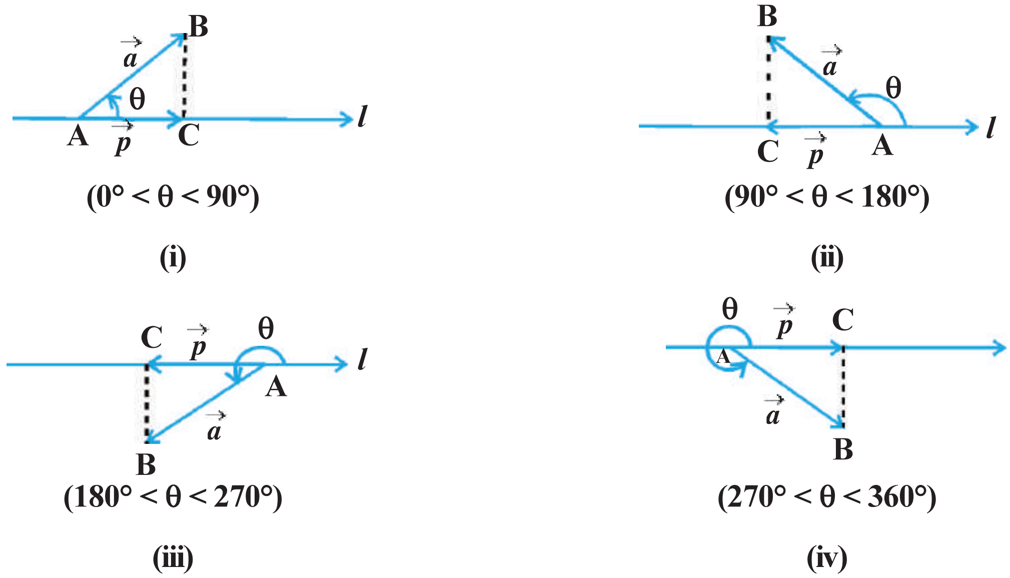
(અવલોકન 5 નો ઉપયોગ કરતાં)

આમ, $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

10.6.2 રેખા પર સદિશનો પ્રક્ષેપ

ધારો કે સદિશ $\overrightarrow{AB}$, એ l દ્વારા દર્શાવાતી એક રેખા સાથે ઘડિયાળના કાંટાની વિરુદ્ધ દિશામાં, θ ખૂણો બનાવે છે (આકૃતિ 10.20). જેનું માન $|\overrightarrow{AB}||\cos\theta|$ હોય અને જેની દિશા અનુક્રમે $\cos\theta$ ધન હોય કે ઋણ હોય તે અનુસાર l ની દિશા કે તેની વિરુદ્ધની દિશા હોય તેવા સદિશ $\vec{p}$ ને $\overrightarrow{AB}$ નો l પર પ્રક્ષેપ સદિશ કહે છે. તેના માન $|\vec{p}|$ ને દિશાયુક્ત રેખા l પર સદિશ $\overrightarrow{AB}$ નો પ્રક્ષેપ કહે છે.

ઉદાહરણ તરીકે, આગળ આપેલ પ્રત્યેક આકૃતિમાં (આકૃતિ 10.20 (i) થી (iv)), $\overrightarrow{AB}$ નો રેખા l પર, પ્રક્ષેપ સદિશ એ સદિશ $\overrightarrow{AC}$ છે.



આકૃતિ 10.20

અવલોકનો

1. જો $\hat{p}$ એ રેખા l પર એકમ સદિશ હોય, તો સદિશ $\vec{a}$ નો રેખા l પરનો પ્રક્ષેપ $\vec{a} \cdot \hat{p}$ દ્વારા મળે છે.

2. સદિશ $\vec{a}$ નો અન્ય સદિશ $\vec{b}$ પરનો પ્રક્ષેપ $\vec{a} \cdot \hat{b}$ અથવા $\vec{a} \cdot \left(\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$ અથવા $\frac{1}{|\vec{b}|}(\vec{a} \cdot \vec{b})$ દ્વારા દર્શાવાય છે.

3. જો $\theta = 0$ હોય તો સદિશ $\overrightarrow{AB}$ નો પ્રક્ષેપ સદિશ $\overrightarrow{AB}$ પોતે જ થશે અને જો $\theta = \pi$ હોય, તો $\overrightarrow{AB}$ નો પ્રક્ષેપ સદિશ $\overrightarrow{BA}$ થશે.

4. જો $\theta = \frac{\pi}{2}$ અથવા $\theta = \frac{3\pi}{2}$ હોય, તો સદિશ $\overrightarrow{AB}$ નો પ્રક્ષેપ સદિશ શૂન્ય સદિશ થશે.

નોંધ : જો α, β અને γ, સદિશ $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ ના દિક્ખૂણાઓ હોય તો તેના દિક્કોસાઈન

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\hat{i}}{|\vec{a}||\hat{i}|} = \frac{a_1}{|\vec{a}|},\ \cos\beta = \frac{a_2}{|\vec{a}|} \text{ અને } \cos\gamma = \frac{a_3}{|\vec{a}|}$$

વળી, નોંધ કરો કે $|\vec{a}|\cos\alpha$, $|\vec{a}|\cos\beta$ અને $|\vec{a}|\cos\gamma$ એ અનુક્રમે અક્ષો OX, OY અને OZ પર સદિશ $\vec{a}$ ના પ્રક્ષેપો છે. એટલે કે સદિશ $\vec{a}$ ના અદિશ ઘટકો a_1, a_2 અને a_3 ખરેખર તો અનુક્રમે x-અક્ષ, y-અક્ષ અને z-અક્ષ પર સદિશ $\vec{a}$ ના પ્રક્ષેપો છે. ઉપરાંત જો $\vec{a}$ એકમ સદિશ હોય, તો તેને તેના દિક્કોસાઈનોના સ્વરૂપમાં $\vec{a} = \cos\alpha\,\hat{i} + \cos\beta\,\hat{j} + \cos\gamma\,\hat{k}$ તરીકે દર્શાવી શકાય.

ઉદાહરણ 13 : જો સદિશો $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ નાં માન અનુક્રમે 1 અને 2 હોય તથા $\vec{a}\cdot\vec{b} = 1$ હોય, તો $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ વચ્ચેનો ખૂણો શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $\vec{a}\cdot\vec{b} = 1$, $|\vec{a}| = 1$ અને $|\vec{b}| = 2$ આપેલ છે.

હવે,

$$\theta = cos^{-1}\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right) = cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

ઉદાહરણ 14 : સદિશો $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ અને $\vec{b} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ વચ્ચેનો ખૂણો θ શોધો.

ઉકેલ : સદિશ, $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ વચ્ચેનો ખૂણો θ, $cos\,\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$ વડે દર્શાવાય છે.

હવે, $\vec{a}\cdot\vec{b} = (\hat{i} + \hat{j} - \hat{k})\cdot(\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) = 1 - 1 - 1 = -1$, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = \sqrt{3}$

માટે, $cos\,\theta = -\frac{1}{3}$ મળે છે.

તેથી માંગેલ ખૂણો $\theta = cos^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right)$ છે.

ઉદાહરણ 15 : જો $\vec{a} = 5\hat{i} - \hat{j} - 3\hat{k}$ અને $\vec{b} = \hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}$ હોય, તો દર્શાવો કે સદિશો $\vec{a} + \vec{b}$ અને $\vec{a} - \vec{b}$ પરસ્પર લંબ છે.

ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે બે શૂન્યેતર સદિશોનો અદિશ ગુણાકાર શૂન્ય હોય, તો તે સદિશો પરસ્પર લંબ હોય છે.

અહીં, $\vec{a} + \vec{b} = (5\hat{i} - \hat{j} - 3\hat{k}) + (\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}) = 6\hat{i} + 2\hat{j} - 8\hat{k}$

અને $\vec{a} - \vec{b} = (5\hat{i} - \hat{j} - 3\hat{k}) - (\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}) = 4\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k}$

તેથી, $(\vec{a} + \vec{b})\cdot(\vec{a} - \vec{b}) = (6\hat{i} + 2\hat{j} - 8\hat{k})\cdot(4\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k})$

$= 24 - 8 - 16 = 0$

તેથી, $\vec{a} + \vec{b}$ અને $\vec{a} - \vec{b}$ પરસ્પર લંબ સદિશો છે.

નોંધ : $|\vec{a}| = |\vec{b}| \Rightarrow \vec{a} + \vec{b}$ તથા $\vec{a} - \vec{b}$ પરસ્પર લંબ છે.

ઉદાહરણ 16 : સદિશ $\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$ નો સદિશ $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ પરનો પ્રક્ષેપ શોધો.

ઉકેલ : સદિશ $\vec{a}$ નો સદિશ $\vec{b}$ પરનો પ્રક્ષેપ $\dfrac{1}{|\vec{b}|}(\vec{a}\cdot\vec{b}) = \dfrac{(2\times1+3\times2+2\times1)}{\sqrt{(1)^2+(2)^2+(1)^2}} = \dfrac{10}{\sqrt{6}} = \dfrac{5}{3}\sqrt{6}$

ઉદાહરણ 17 : જો બે સદિશો $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ માટે $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$ અને $\vec{a}\cdot\vec{b} = 4$ હોય, તો $|\vec{a}-\vec{b}|$ શોધો.

ઉકેલ : અહીં,

$$|\vec{a}-\vec{b}|^2 = \left(\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$$

$$= \vec{a}\cdot\vec{a} - \vec{a}\cdot\vec{b} - \vec{b}\cdot\vec{a} + \vec{b}\cdot\vec{b}$$

$$= |\vec{a}|^2 - 2(\vec{a}\cdot\vec{b}) + |\vec{b}|^2$$

$$= (2)^2 - 2(4) + (3)^2 = 5$$

તેથી, $|\vec{a}-\vec{b}| = \sqrt{5}$

ઉદાહરણ 18 : જો $\vec{a}$ એકમ સદિશ હોય અને $\left(\vec{x}-\vec{a}\right)\cdot\left(\vec{x}+\vec{a}\right) = 8$ હોય, તો $|\vec{x}|$ શોધો.

ઉકેલ : $\vec{a}$ એકમ સદિશ હોવાથી, $|\vec{a}| = 1$.

વળી, $\left(\vec{x}-\vec{a}\right)\cdot\left(\vec{x}+\vec{a}\right) = 8$

અથવા $\vec{x}\cdot\vec{x} + \vec{x}\cdot\vec{a} - \vec{a}\cdot\vec{x} - \vec{a}\cdot\vec{a} = 8$

અથવા $|\vec{x}|^2 - 1 = 8$ એટલે કે $|\vec{x}|^2 = 9$

તેથી, $|\vec{x}| = 3$ (સદિશનું માન અનૃણ હોવાથી)

ઉદાહરણ 19 : કોઈ પણ બે સદિશો $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ માટે સાબિત કરો કે આપણને હંમેશાં

$|\vec{a}\cdot\vec{b}| \le |\vec{a}||\vec{b}|$ મળે છે. *(કોશી-શ્વાર્ઝ અસમતા)*

ઉકેલ : $\vec{a} = \vec{0}$ અથવા $\vec{b} = \vec{0}$ હોય ત્યારે આ અસમતા સ્વાભાવિક રીતે યથાર્થ છે. વાસ્તવમાં આ પરિસ્થિતિમાં આપણી પાસે $|\vec{a}\cdot\vec{b}| = 0 = |\vec{a}||\vec{b}|$ છે. તેથી માની લો કે $|\vec{a}| \ne 0$, $|\vec{b}| \ne 0$.

હવે, $\dfrac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|} = |\cos\theta| \le 1$

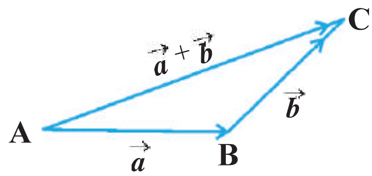
તેથી, $|\vec{a}\cdot\vec{b}| \le |\vec{a}||\vec{b}|$

ઉદાહરણ 20 : કોઈ પણ બે સદિશો $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ માટે દર્શાવો કે $|\vec{a}+\vec{b}| \le |\vec{a}| + |\vec{b}|$

(ત્રિકોણીય અસમતા)

ઉકેલ : $\vec{a} = \vec{0}$ અથવા $\vec{b} = \vec{0}$ માટે અસમતા સ્વાભાવિકપણે યથાર્થ છે. (કેવી રીતે ?)

તેથી $\vec{a} \ne \vec{0}$, $\vec{b} \ne \vec{0}$ લો.



આકૃતિ 10.21

હવે, $|\vec{a}+\vec{b}|^2 = (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})$

$= \vec{a}\cdot\vec{a} + \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{a} + \vec{b}\cdot\vec{b}$

$= |\vec{a}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2$ (સદિશ ગુણાકાર સમક્રમી છે.)

$\le |\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}\cdot\vec{b}| + |\vec{b}|^2$ ($x \le |x|, \forall x \in \mathbf{R}$)

$\le |\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}| + |\vec{b}|^2$ (કોશી-શ્વાર્ઝ અસમતા)

$= (|\vec{a}| + |\vec{b}|)^2$

તેથી, $|\vec{a}+\vec{b}| \le |\vec{a}| + |\vec{b}|$

નોંધ : જો ત્રિકોણીય અસમતામાં સમતા ઉપસ્થિત થાય (ઉદાહરણ 20 જુઓ.) એટલે કે

$$|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|,$$

તો $$|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}|$$

આ દર્શાવે છે કે બિંદુઓ A, B, C સમરેખ છે.

ઉદાહરણ 21 : સાબિત કરો કે બિંદુઓ A $(-2\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k})$, B $(\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k})$ અને C $(7\hat{i} - \hat{k})$ સમરેખ છે.

ઉકેલ : અહીં, $\overrightarrow{AB} = (1+2)\hat{i} + (2-3)\hat{j} + (3-5)\hat{k} = 3\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k}$

$\overrightarrow{BC} = (7-1)\hat{i} + (0-2)\hat{j} + (-1-3)\hat{k} = 6\hat{i} - 2\hat{j} - 4\hat{k}$

$\overrightarrow{AC} = (7+2)\hat{i} + (0-3)\hat{j} + (-1-5)\hat{k} = 9\hat{i} - 3\hat{j} - 6\hat{k}$

માટે $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{14}$, $|\overrightarrow{BC}| = 2\sqrt{14}$ અને $|\overrightarrow{AC}| = 3\sqrt{14}$

તેથી, $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}|$

અને તેથી બિંદુઓ A, B અને C સમરેખ છે.

☞ **નોંધ** ઉદાહરણ 21 માં નોંધ કરો કે $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$ હોવા છતાં પણ બિંદુઓ A, B અને C ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુ નથી.

સ્વાધ્યાય 10.3

1. બે સદિશોનાં માન અનુક્રમે $\sqrt{3}$ અને 2 હોય તથા $\vec{a}\cdot\vec{b}=\sqrt{6}$ આપેલ હોય, તો તે સદિશો વચ્ચેનો ખૂણો શોધો.

2. સદિશો $\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$ અને $3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ વચ્ચેનો ખૂણો શોધો.

3. સદિશ $\hat{i} - \hat{j}$ નો સદિશ $\hat{i} + \hat{j}$ પરનો પ્રક્ષેપ શોધો.

4. સદિશ $\hat{i} + 3\hat{j} + 7\hat{k}$ નો $7\hat{i} - \hat{j} + 8\hat{k}$ પરનો પ્રક્ષેપ શોધો.

5. દર્શાવો કે નીચે આપેલ ત્રણ સદિશો પૈકી પ્રત્યેક સદિશ એકમ સદિશ છે :

$\frac{1}{7}(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$, $\frac{1}{7}(3\hat{i} - 6\hat{j} + 2\hat{k})$, $\frac{1}{7}(6\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k})$.

વળી, સાબિત કરો કે આ સદિશો પરસ્પર લંબ છે.

6. જો $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b}) = 8$ અને $|\vec{a}| = 8|\vec{b}|$ તો, $|\vec{a}|$ અને $|\vec{b}|$ શોધો.

7. $(3\vec{a} - 5\vec{b})\cdot(2\vec{a} + 7\vec{b})$ શોધો.

8. જો બે સદિશો $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ નાં માન સમાન હોય અને તેમની વચ્ચેનો ખૂણો 60° તથા તેમનો અદિશ ગુણાકાર $\frac{1}{2}$ હોય તો તેમનાં માન શોધો.

9. જો એકમ સદિશ $\vec{a}$ માટે $(\vec{x}-\vec{a})\cdot(\vec{x}+\vec{a}) = 12$ હોય તો $|\vec{x}|$ શોધો.

10. જો સદિશો $\vec{a} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$, $\vec{b} = -\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ અને $\vec{c} = 3\hat{i} + \hat{j}$ માટે $\vec{a} + \lambda\vec{b}$ એ $\vec{c}$ ને લંબ હોય, તો λ નું મૂલ્ય શોધો.

11. કોઈ પણ બે શૂન્યેતર સદિશો $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ માટે દર્શાવો કે $|\vec{a}|\vec{b} + |\vec{b}|\vec{a}$ એ $|\vec{a}|\vec{b} - |\vec{b}|\vec{a}$ ને લંબ છે.

12. જો $\vec{a}\cdot\vec{a} = 0$ અને $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ હોય, તો સદિશ $\vec{b}$ વિશે શું તારણ કાઢી શકાય ?

13. જો $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ એકમ સદિશો અને $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$ હોય, તો $\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{c} + \vec{c}\cdot\vec{a}$ નું મૂલ્ય શોધો.

14. જો સદિશ $\vec{a} = \vec{0}$ અથવા $\vec{b} = \vec{0}$ હોય તો $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$. પરંતુ પ્રતીપ, સત્ય હોય તે જરૂરી નથી. તમારા જવાબનું ઉદાહરણ સહિત સમર્થન કરો.

15. જો ત્રિકોણ ABCનાં શિરોબિંદુઓ A, B, C અનુક્રમે (1, 2, 3), (–1, 0, 0), (0, 1, 2) હોય, તો $\angle ABC$ શોધો. ($\angle ABC$ એ $\overrightarrow{BA}$ તથા $\overrightarrow{BC}$ વચ્ચેનો ખૂણો છે.)

16. સાબિત કરો કે બિંદુઓ A (1, 2, 7), B (2, 6, 3) અને C (3, 10, –1) સમરેખ છે.

17. સાબિત કરો કે સદિશો $2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$, $\hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k}$ અને $3\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k}$ કાટકોણ ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓ છે.

પ્રશ્ન 18 માં વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલ વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

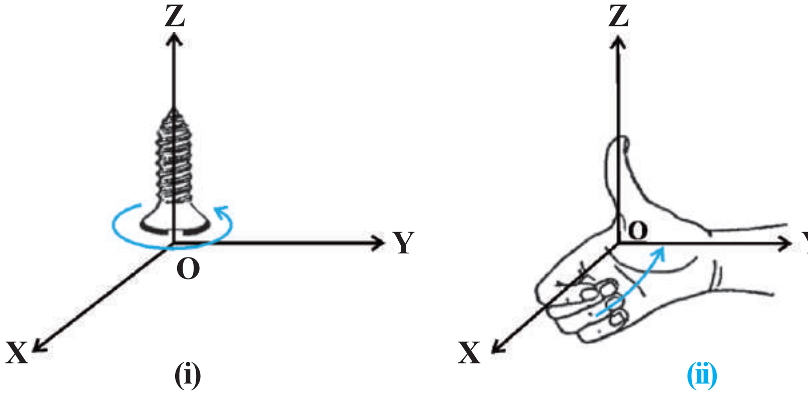
18. જો $\vec{a}$ શૂન્યેતર સદિશ હોય અને તેનું માન 'a' હોય અને λ શૂન્યેતર અદિશ હોય, તો λ ની કઈ કિંમત માટે $\lambda\vec{a}$ એકમ સદિશ થાય.

(A) $\lambda = 1$ (B) $\lambda = -1$ (C) $a = |\lambda|$ (D) $a = \frac{1}{|\lambda|}$

10.6.3 બે સદિશોનો સદિશ (અથવા ક્રૉસ) ગુણાકાર અથવા બહિર્ગુણાકાર

વિભાગ 10.2 માં આપણે ત્રિપરિમાણીય જમણા હાથની લંબચોરસીય યામપદ્ધતિ વિશે ચર્ચા કરી. આ પદ્ધતિમાં, ધન x-અક્ષને જ્યારે ઘડિયાળના કાંટાની વિરુદ્ધ દિશામાં, ધન y-અક્ષમાં પરિવર્તિત કરવામાં આવે ત્યારે જમણા હાથનો (પ્રમાણિત) સ્ક્રૂ z-અક્ષની ધન દિશામાં આગળ વધે છે. (આકૃતિ 10.22 (i))

જમણા હાથની યામપદ્ધતિમાં, જમણા હાથનો અંગૂઠો z-અક્ષની ધન દિશા તરફ કેન્દ્રિત અને આંગળીઓ x-અક્ષની ધન દિશાથી દૂર, y-અક્ષની ધન દિશા તરફ વળેલી રહે છે (આકૃતિ 10.22 (ii)).



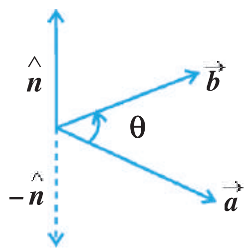
આકૃતિ 10.22

વ્યાખ્યા 3 : *બે શૂન્યેતર સદિશો $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ નો સદિશ ગુણાકાર (Vector product or cross product or outer product), $\vec{a} \times \vec{b}$ વડે દર્શાવાય છે અને*

$$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\theta\, \hat{n}$$

દ્વારા વ્યાખ્યાયિત થાય છે, જ્યાં θ એ $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ વચ્ચેનો ખૂણો $(0 \le \theta \le \pi)$ અને $\hat{n}$ એ બંને સદિશો $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ ને લંબ એકમ સદિશ છે અને $\vec{a}$, $\vec{b}$ અને $\hat{n}$ જમણા હાથની પદ્ધતિ રચે છે (આકૃતિ 10.23). એટલે કે જમણા હાથની પદ્ધતિ $\vec{a}$ થી $\vec{b}$ તરફ ફરતી $\hat{n}$ ની દિશામાં આગળ જાય છે.

જો $\vec{a} = \vec{0}$ અથવા $\vec{b} = \vec{0}$ હોય તો θ વ્યાખ્યાયિત નથી અને આ કિસ્સામાં, આપણે $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ વ્યાખ્યાયિત કરીએ છીએ.



આકૃતિ 10.23

અવલોકનો

1. $\vec{a} \times \vec{b}$ એક સદિશ છે.

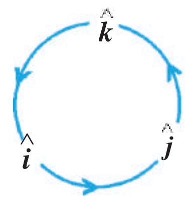
2. ધારો કે $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ શૂન્યેતર સદિશો છે. જો $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ હોય તો અને તો જ $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ એકબીજાને સમાંતર (અથવા સમરેખ) છે. એટલે કે $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$.

   વિશેષમાં, $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$ અને $\vec{a} \times \left(-\vec{a}\right) = \vec{0}$, પ્રથમ પરિસ્થિતિમાં $\theta = 0$ અને દ્વિતીય પરિસ્થિતિમાં $\theta = \pi$. આથી, $sin\ \theta$ ની કિંમત 0 થાય છે.

3. જો $\theta = \frac{\pi}{2}$ હોય તો $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = |\vec{a}||\vec{b}|$.

4. અવલોકનો 2 અને 3 ની દૃષ્ટિએ, પરસ્પર લંબ એકમ સદિશો $\hat{i}$, $\hat{j}$ અને $\hat{k}$ માટે (આકૃતિ 10.24). આપણી પાસે $\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = \vec{0}$,

   $\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$, $\hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}$, $\hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$

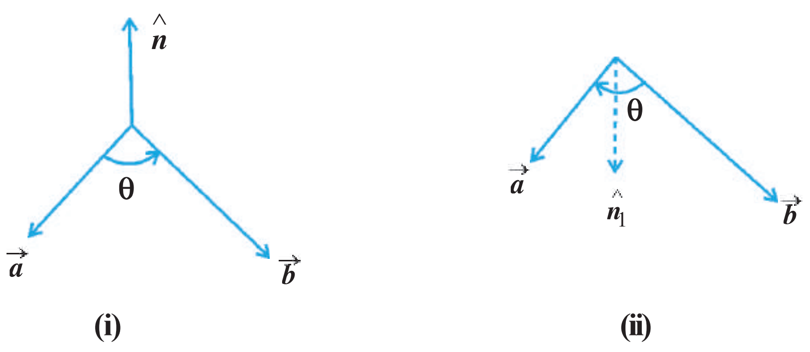


આકૃતિ 10.24

5. સદિશ ગુણાકારના સંદર્ભમાં, બે શૂન્યેતર સદિશો $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ વચ્ચેનો ખૂણો $sin\ \theta = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|}$ સ્વરૂપે પણ દર્શાવી શકાય.

6. શૂન્યેતર સદિશો માટે સદિશ ગુણાકાર સમક્રમી નથી, કારણ કે $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$. વાસ્તવમાં, $\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\ sin\ \theta\ \hat{n}$ જ્યાં $\vec{a}$, $\vec{b}$ અને $\hat{n}$ જમણા હાથની પદ્ધતિનું નિર્માણ કરે છે. θ એ $\vec{a}$ થી $\vec{b}$ તરફ ભ્રમણ દર્શાવે છે (આકૃતિ 10.25 (i)).

   જ્યારે $\vec{b} \times \vec{a} = |\vec{a}||\vec{b}|\ sin\ \theta\ \hat{n}_1$; જ્યાં, $\vec{b}$, $\vec{a}$ અને $\hat{n}_1$ જમણા હાથની પદ્ધતિનું નિર્માણ કરે છે એટલે કે θ એ $\vec{b}$ થી $\vec{a}$ તરફ ભ્રમણ કરે છે આકૃતિ 10.25 (ii).



આકૃતિ 10.25

આમ, આપણે જો $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ ને કાગળના સમતલ પર આવેલા સદિશો ધારી લઈએ તો $\hat{n}$ અને $\hat{n}_1$ બંને કાગળના સમતલને લંબ થશે. પરંતુ $\hat{n}$ ની દિશા કાગળની ઉપર તરફ જ્યારે $\hat{n}_1$ ની દિશા કાગળની નીચે તરફ છે. એટલે કે $\hat{n}_1 = -\hat{n}$.

તેથી, $\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\theta\, \hat{n}$

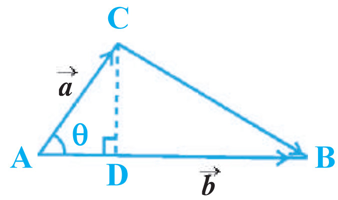
$$= -|\vec{a}||\vec{b}| \sin\theta\, \hat{n}_1$$

$$= -\vec{b} \times \vec{a}$$

7. અવલોકનો 4 અને 5 ના સંદર્ભમાં, આપણી પાસે, $\hat{j} \times \hat{i} = -\hat{k}$, $\hat{k} \times \hat{j} = -\hat{i}$ અને $\hat{i} \times \hat{k} = -\hat{j}$

8. જો $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ ત્રિકોણની પાસપાસેની બાજુઓ દર્શાવતા હોય તો તેનું ક્ષેત્રફળ $\frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|$ દ્વારા મળે છે.

ત્રિકોણના ક્ષેત્રફળની વ્યાખ્યાને આધારે આકૃતિ 10.26 પરથી આપણી પાસે, ત્રિકોણ ABCનું ક્ષેત્રફળ = $\frac{1}{2}$AB · CD. પરંતુ AB = $|\vec{b}|$ (પક્ષ), અને CD = $|\vec{a}|\sin\theta$. આમ, ત્રિકોણ ABCનું ક્ષેત્રફળ = $\frac{1}{2}|\vec{b}||\vec{a}|\sin\theta = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|$.



આકૃતિ 10.26

9. જો $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ સમાંતર બાજુ ચતુષ્કોણની પાસ-પાસેની બાજુઓ દર્શાવે, તો તેનું ક્ષેત્રફળ $|\vec{a} \times \vec{b}|$ સૂત્ર દ્વારા આપવામાં આવે છે. આકૃતિ 10.27 પરથી આપણી પાસે

સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD નું ક્ષેત્રફળ ABCD = AB · DE

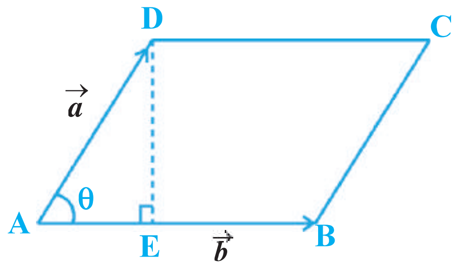
પરંતુ AB = $|\vec{b}|$ (પક્ષ)

અને DE = $|\vec{a}|\sin\theta$

આમ,

સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD નું ક્ષેત્રફળ

$$= |\vec{b}||\vec{a}|\sin\theta = |\vec{a} \times \vec{b}|.$$



આકૃતિ 10.27

હવે, આપણે સદિશ ગુણાકારના બે મહત્ત્વના ગુણધર્મો દર્શાવીશું.

ગુણધર્મ 3 (સરવાળા પર સદિશ ગુણાકારનો વિભાજનનો ગુણધર્મ) : જો $\vec{a}$, $\vec{b}$ અને $\vec{c}$ આપેલ ત્રણ સદિશો અને λ અદિશ હોય તો,

(i) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

(ii) $\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b})$

ધારો કે, બે સદિશો $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ ઘટક સ્વરૂપમાં અનુક્રમે $a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ અને $b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ આપેલ છે. તેમનો સદિશ ગુણાકાર $\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$ સ્વરૂપે આપી શકાય.

સમજૂતી : આપણી પાસે

$$\vec{a}\times\vec{b} = (a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}) \times (b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k})$$

$$= a_1b_1(\hat{i}\times\hat{i}) + a_1b_2(\hat{i}\times\hat{j}) + a_1b_3(\hat{i}\times\hat{k}) + a_2b_1(\hat{j}\times\hat{i}) + a_2b_2(\hat{j}\times\hat{j}) +$$

$$a_2b_3(\hat{j}\times\hat{k}) + a_3b_1(\hat{k}\times\hat{i}) + a_3b_2(\hat{k}\times\hat{j}) + a_3b_3(\hat{k}\times\hat{k}) \quad \text{(ગુણધર્મ 1 દ્વારા)}$$

$$= a_1b_1(\hat{i}\times\hat{i}) + a_1b_2(\hat{i}\times\hat{j}) - a_1b_3(\hat{k}\times\hat{i}) - a_2b_1(\hat{i}\times\hat{j}) + a_2b_2(\hat{j}\times\hat{j}) +$$

$$a_2b_3(\hat{j}\times\hat{k}) + a_3b_1(\hat{k}\times\hat{i}) - a_3b_2(\hat{j}\times\hat{k}) + a_3b_3(\hat{k}\times\hat{k})$$

(કારણ કે $\hat{i}\times\hat{k} = -\hat{k}\times\hat{i}$, $\hat{j}\times\hat{i} = -\hat{i}\times\hat{j}$ અને $\hat{k}\times\hat{j} = -\hat{j}\times\hat{k}$)

$$= a_1b_2\hat{k} - a_1b_3\hat{j} - a_2b_1\hat{k} + a_2b_3\hat{i} + a_3b_1\hat{j} - a_3b_2\hat{i}$$

(કારણ કે $\hat{i}\times\hat{j} = \hat{k}$, $\hat{j}\times\hat{k} = \hat{i}$ અને $\hat{k}\times\hat{i} = \hat{j}$ અને $\hat{i}\times\hat{i} = \hat{j}\times\hat{j} = \hat{k}\times\hat{k} = \vec{0}$

$$= (a_2b_3 - a_3b_2)\hat{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\hat{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\hat{k}$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

નોંધ : આ નિશ્ચાયક નથી, માત્ર રજૂઆત છે.

ઉદાહરણ 22 : જો $\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$ અને $\vec{b} = 3\hat{i} + 5\hat{j} - 2\hat{k}$ હોય, તો $|\vec{a}\times\vec{b}|$ શોધો.

ઉકેલ : આપણી પાસે $\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix}$

$$= (-2-15)\hat{i} - (-4-9)\hat{j} + (10-3)\hat{k}$$

$$= -17\hat{i} + 13\hat{j} + 7\hat{k}$$

તેથી, $|\vec{a}\times\vec{b}| = \sqrt{(-17)^2 + (13)^2 + 7^2} = \sqrt{507}$

ઉદાહરણ 23 : જો $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ હોય, તો સદિશ $(\vec{a}+\vec{b})$ અને $(\vec{a}-\vec{b})$ બંનેને લંબ એકમ સદિશ શોધો.

ઉકેલ : આપણી પાસે $\vec{a}+\vec{b} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$ અને $\vec{a}-\vec{b} = -\hat{j} - 2\hat{k}$ છે. સદિશો $\vec{a}+\vec{b}$ અને $\vec{a}-\vec{b}$ બંનેને લંબ હોય તે સદિશ $(\vec{a}+\vec{b}) \times (\vec{a}-\vec{b})$ છે.

$$(\vec{a}+\vec{b}) \times (\vec{a}-\vec{b}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -2\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k} = \vec{c} \qquad \text{(કહો)}$$

હવે, $|\vec{c}| = \sqrt{4+16+4} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

તેથી, માંગેલ એકમ સદિશ $\dfrac{\vec{c}}{|\vec{c}|} = \dfrac{-1}{\sqrt{6}}\hat{i} + \dfrac{2}{\sqrt{6}}\hat{j} - \dfrac{1}{\sqrt{6}}\hat{k}$

નોંધ : કોઈ પણ સમતલને બે લંબ દિશાઓ હોય છે. આમ, $\vec{a}+\vec{b}$ અને $\vec{a}-\vec{b}$ ને લંબ અન્ય એકમ સદિશ $\dfrac{1}{\sqrt{6}}\hat{i} - \dfrac{2}{\sqrt{6}}\hat{j} + \dfrac{1}{\sqrt{6}}\hat{k}$ પણ લઈ શકાય. પરંતુ તે $(\vec{a}-\vec{b}) \times (\vec{a}+\vec{b})$ નું પરિણામ જ હશે.

ઉદાહરણ 24 : A(1, 1, 1), B(1, 2, 3) અને C(2, 3, 1) શિરોબિંદુઓવાળા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

ઉકેલ : આપણી પાસે $\overrightarrow{AB} = \hat{j} + 2\hat{k}$ અને $\overrightarrow{AC} = \hat{i} + 2\hat{j}$ છે.

આપેલ ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ $\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|$.

હવે, $$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -4\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$$

માટે $\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{16+4+1} = \sqrt{21}$

આમ, માંગેલ ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2}\sqrt{21}$

ઉદાહરણ 25 : જેની પાસ-પાસેની બાજુઓ સદિશો $\vec{a} = 3\hat{i} + \hat{j} + 4\hat{k}$ અને $\vec{b} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ હોય તેવા સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

ઉકેલ : જેની પાસ-પાસેની બાજુઓ સદિશ $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ હોય તેવા સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ $|\vec{a} \times \vec{b}|$ દ્વારા મળે છે.

હવે, $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 5\hat{i} + \hat{j} - 4\hat{k}$

$\therefore \ |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{25+1+16} = \sqrt{42}$ અને તેથી માંગેલ ક્ષેત્રફળ $\sqrt{42}$ છે.

સ્વાધ્યાય 10.4

1. જો $\vec{a} = \hat{i} - 7\hat{j} + 7\hat{k}$ અને $\vec{b} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$ હોય, તો $|\vec{a} \times \vec{b}|$ શોધો.

2. જો $\vec{a} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$ અને $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$ હોય, તો સદિશ $\vec{a}+\vec{b}$ અને $\vec{a}-\vec{b}$ ને લંબ એકમ સદિશ શોધો.

3. જો એકમ સદિશ $\vec{a}$, $\hat{i}$ સાથે $\frac{\pi}{3}$ માપનો ખૂણો, $\hat{j}$ સાથે $\frac{\pi}{4}$ માપનો ખૂણો અને $\hat{k}$ સાથે લઘુકોણ θ બનાવે, તો θ શોધો અને તે પરથી $\vec{a}$ ના ઘટકો શોધો.

4. દર્શાવો કે $(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b}) = 2(\vec{a} \times \vec{b})$

5. જો $(2\hat{i} + 6\hat{j} + 27\hat{k}) \times (\hat{i} + \lambda\hat{j} + \mu\hat{k}) = \vec{0}$ હોય તો λ અને μ શોધો.

6. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ અને $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ આપેલ છે. સદિશો $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ વિશે શું તારણ નીકળે ?

7. સદિશો $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ અનુક્રમે $a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$, $b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ અને $c_1\hat{i} + c_2\hat{j} + c_3\hat{k}$ સ્વરૂપે આપેલ છે. સાબિત કરો કે $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

8. જો $\vec{a} = 0$ અથવા $\vec{b} = 0$, તો $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$. શું પ્રતીપ સત્ય છે ? ઉદાહરણ દ્વારા તમારા જવાબનું સમર્થન કરો.

9. શિરોબિંદુઓ A(1,1,2), B(2,3,5) અને C(1,5,5) વાળા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

10. જો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણની પાસ-પાસેની બાજુઓ સદિશો $\vec{a} = \hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$ અને $\vec{b} = 2\hat{i} - 7\hat{j} + \hat{k}$ હોય, તો તેનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

પ્રશ્નો 11 તથા 12 માં વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલ વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

11. ધારો કે સદિશો $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ આપેલા છે. $|\vec{a}| = 3$ અને $|\vec{b}| = \frac{\sqrt{2}}{3}$ છે. જો $\vec{a} \times \vec{b}$ એકમ સદિશ હોય, તો $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ વચ્ચેનો ખૂણો .... હોય.

(A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{\pi}{4}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{\pi}{2}$

12. લંબચોરસનાં શિરોબિંદુઓ A, B, C, D ના સ્થાનસદિશો અનુક્રમે $-\hat{i} + \frac{1}{2}\hat{j} + 4\hat{k}$, $\hat{i} + \frac{1}{2}\hat{j} + 4\hat{k}$, $\hat{i} - \frac{1}{2}\hat{j} + 4\hat{k}$ અને $-\hat{i} - \frac{1}{2}\hat{j} + 4\hat{k}$ હોય, તો તે લંબચોરસનું ક્ષેત્રફળ

(A) $\frac{1}{2}$ (B) 1 (C) 2 (D) 4

10.7 સદિશોનું અદિશ ત્રિગુણન (પેટી ગુણાકાર)

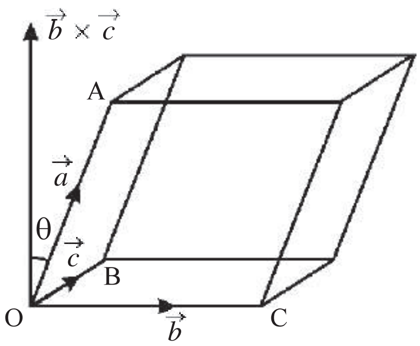
$\vec{a}$, $\vec{b}$ અને $\vec{c}$ કોઈ પણ ત્રણ સદિશ છે. $\vec{a}$ અને $(\vec{b} \times \vec{c})$ નું અદિશ ત્રિગુણન અર્થાત્ સદિશ $\vec{a}$, $\vec{b}$ અને $\vec{c}$ ના આ જ ક્રમમાં ગુણાકાર $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ ને ***અદિશ ત્રિગુણન (Scalar Triple Product)*** કહે છે અને તેને $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$ અથવા $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]$ દ્વારા દર્શાવાય છે.

આમ, $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$

અવલોકન :

(1) $\vec{a}$ તથા $\vec{b} \times \vec{c}$ સદિશ હોવાથી, $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ અદિશ રાશિ છે. અર્થાત્ $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$ અદિશ રાશિ છે.

(2) ભૌમિતિક રીતે, અદિશ ત્રિગુણનનું માન એ એકબીજાને સંલગ્ન બાજુઓ સદિશ $\vec{a}$, $\vec{b}$ અને $\vec{c}$ થી બનતા ***સમાંતર ફલક (parallelopiped)*** નું ઘનફળ છે (આકૃતિ 10.28). ખરેખર તો, $|\vec{b} \times \vec{c}|$ એ સમાંતર ફલકના આધાર સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ છે. સદિશો $\vec{b}$ અને $\vec{c}$ ને સમાવતા સમતલના અભિલંબની દિશામાં $\vec{a}$ નો પ્રક્ષેપ એ તેની ઊંચાઈ છે અને તે $\vec{a}$ ના $\vec{b} \times \vec{c}$ ની ***દિશાના ઘટક (component)*** નું માન છે અર્થાત્ $\frac{|\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|}{|(\vec{b} \times \vec{c})|}$.



આકૃતિ 10.28

તેથી સમાંતર ફલકનું ઘનફળ $\frac{|\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|}{|(\vec{b} \times \vec{c})|} |\vec{b} \times \vec{c}| = |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|$ થશે.

(3) જો $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$, $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ અને $\vec{c} = c_1\hat{i} + c_2\hat{j} + c_3\hat{k}$ હોય, તો

$$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= (b_2c_3 - b_3c_2)\hat{i} + (b_3c_1 - b_1c_3)\hat{j} + (b_1c_2 - b_2c_1)\hat{k}$$

અને તેથી $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

(4) જો $\vec{a}$, $\vec{b}$ અને $\vec{c}$ કોઈ પણ ત્રણ સદિશ હોય, તો

$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}] = [\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}]$

(ત્રણ સદિશના વૃત્તીય ક્રમચયથી અદિશ ત્રિગુણનની કિંમત બદલાતી નથી.)

ધારો કે $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$, $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ અને $\vec{c} = c_1\hat{i} + c_2\hat{j} + c_3\hat{k}$ છે.

ઉપરના અવલોકન માત્રથી,

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$

$$= b_1(a_3c_2 - a_2c_3) + b_2(a_1c_3 - a_3c_1) + b_3(a_2c_1 - a_1c_2)$$

$$= \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & a_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$$

$$= [\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}]$$

આ જ પ્રમાણે, વાચક ચકાસી શકશે કે, $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}]$

આથી, $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}] = [\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}]$

(5) અદિશ ત્રિગુણન $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ માં અંતઃગુણન અને બહિર્ગુણનની અદલબદલ કરી શકાય છે.

એટલે કે,

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$$
$$= [\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}]$$
$$= [\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}]$$
$$= \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$$
$$= (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

(6) $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = -[\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}]$ એટલે કે,

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$
$$= \vec{a} \cdot (-\vec{c} \times \vec{b})$$
$$= -(\vec{a} \cdot (\vec{c} \times \vec{b}))$$
$$= -[\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}]$$

(7) $[\vec{a}, \vec{a}, \vec{b}] = 0$

$$[\vec{a}, \vec{a}, \vec{b}] = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{a}]$$
$$= [\vec{b}, \vec{a}, \vec{a}]$$
$$= \vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{a})$$
$$= \vec{b} \cdot \vec{0} = 0 \qquad (\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0})$$

નોંધ : (1) $[\vec{a}, \vec{a}, \vec{b}] = \vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$

$$= (\vec{a} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}$$
$$= \vec{0} \cdot \vec{b} = 0$$

(2) બે સમાન સદિશ કોઈ પણ ક્રમમાં હોય, તોપણ પરિણામ 7 સત્ય છે.

10.7.1 ત્રણ સદિશની સમતલીયતા

પ્રમેય 1 : ત્રણ સદિશો $\vec{a}$, $\vec{b}$ અને $\vec{c}$ સમતલીય હોય, તો અને તો જ $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = 0$.

સાબિતી : પ્રથમ આપણે ધારીએ કે સદિશ $\vec{a}$, $\vec{b}$ અને $\vec{c}$ સમતલીય છે.

જો $\vec{b}$ અને $\vec{c}$ સમાંતર સદિશ હોય, તો $\vec{b}\times\vec{c} = \vec{0}$ અને તેથી $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = 0$.

જો $\vec{b}$ અને $\vec{c}$ સમાંતર ન હોય, તો $\vec{a}$, $\vec{b}$ અને $\vec{c}$ સમતલીય હોવાથી $\vec{b}\times\vec{c}$ એ $\vec{a}$ ને લંબ છે.

આથી, $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = 0$.

આથી ઊલટું, ધારો કે $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = 0$. જો $\vec{a}$ અને $\vec{b}\times\vec{c}$ બંને શૂન્યેતર હોય, તો એ નિર્ણય કરી શકાય કે $\vec{a}$ અને $\vec{b}\times\vec{c}$ પરસ્પર લંબ સદિશ છે. પરંતુ $\vec{b}\times\vec{c}$ એ $\vec{b}$ અને $\vec{c}$ બંનેને લંબ સદિશ છે. તેથી, $\vec{a}$, $\vec{b}$ અને $\vec{c}$ એક જ સમતલમાં આવેલાં છે. અર્થાત્ તેઓ સમતલીય છે. જો $\vec{a} = \vec{0}$ તો $\vec{a}$ એ કોઈ પણ બે સદિશ સાથે સમતલીય છે. વિશેષ કરીને $\vec{b}$ અને $\vec{c}$ સાથે. જો $(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{0}$, તો $\vec{b}$ અને $\vec{c}$ સમાંતર સદિશ થશે. હવે, કોઈ પણ બે સદિશથી બનતા સમતલમાં તે સદિશ આવેલા હોય છે તથા આ બેમાંથી કોઈ પણ એક સદિશને સમાંતર હોય તેવો અન્ય સદિશ પણ આ સમતલમાં આવેલો હોવાથી $\vec{a}$, $\vec{b}$ અને $\vec{c}$ સમતલીય છે.

નોંધ : ત્રણ સદિશની સમતલીયતા પરથી ચાર બિંદુઓની સમતલીયતાની ચર્ચા કરી શકાય. ખરેખર તો, જો સદિશ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ અને $\overrightarrow{AD}$ સમતલીય હોય, તો ચાર બિંદુઓ A, B, C અને D સમતલીય છે.

ઉદાહરણ 26 : જો $\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$, $\vec{b} = -\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ અને $\vec{c} = 3\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ હોય, તો $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ શોધો.

ઉકેલ : હવે $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -10$

ઉદાહરણ 27 : સદિશ $\vec{a} = \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$, $\vec{b} = -2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$ અને $\vec{c} = \hat{i} - \hat{j} + 5\hat{k}$ સમતલીય છે, તેમ બતાવો.

ઉકેલ : અહીં $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & -4 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 0$

માટે, પ્રમેય 1 પરથી, $\vec{a}$, $\vec{b}$ અને $\vec{c}$ સમતલીય સદિશ છે.

ઉદાહરણ 28 : જો સદિશ $\vec{a} = \hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = 2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$ અને $\vec{c} = \lambda\hat{i} + 7\hat{j} + 3\hat{k}$ સમતલીય હોય, તો λ શોધો.

ઉકેલ : $\vec{a}$, $\vec{b}$ અને $\vec{c}$ સમતલીય હોવાથી, $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0$ અર્થાત્

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ \lambda & 7 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$\therefore \quad 1(-3 + 7) - 3(6 + \lambda) + 1(14 + \lambda) = 0$

$\therefore \quad \lambda = 0$

ઉદાહરણ 29 : બિંદુઓ A, B, C, D ના સ્થાનસદિશ અનુક્રમે $4\hat{i} + 5\hat{j} + \hat{k}$, $-(\hat{j} + \hat{k})$, $3\hat{i} + 9\hat{j} + 4\hat{k}$ અને $4(-\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$ છે. સાબિત કરો કે A, B, C અને D સમતલીય છે.

ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે, જો સદિશ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ અને $\overrightarrow{AD}$ સમતલીય હોય, તો અને તો જ ચાર બિંદુઓ A, B, C અને D સમતલીય હોય અને તે માટે $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = 0$.

હવે, $\overrightarrow{AB} = -(\hat{j} + \hat{k}) - (4\hat{i} + 5\hat{j} + \hat{k}) = -4\hat{i} - 6\hat{j} - 2\hat{k}$

$\overrightarrow{AC} = (3\hat{i} + 9\hat{j} + 4\hat{k}) - (4\hat{i} + 5\hat{j} + \hat{k}) = -\hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k}$

અને $\overrightarrow{AD} = 4(-\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) - (4\hat{i} + 5\hat{j} + \hat{k}) = -8\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$

અહીં $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = \begin{vmatrix} -4 & -6 & -2 \\ -1 & 4 & 3 \\ -8 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0$

તેથી A, B, C અને D સમતલીય છે.

ઉદાહરણ 30 : સાબિત કરો કે $[\vec{a} + \vec{b}, \vec{b} + \vec{c}, \vec{c} + \vec{a}] = 2[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$.

ઉકેલ : $[\vec{a} + \vec{b}, \vec{b} + \vec{c}, \vec{c} + \vec{a}]$

$= (\vec{a} + \vec{b}) \cdot ((\vec{b} + \vec{c}) \times (\vec{c} + \vec{a}))$

$= (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{b} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a})$

$= (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{b} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{a})$ $\qquad (\vec{c} \times \vec{c} = \vec{0})$

$= \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{a}) + \vec{a} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{b} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \cdot (\vec{b} \times \vec{a})$
$+ \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a})$

$= [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] + [\vec{a}, \vec{b}, \vec{a}] + [\vec{a}, \vec{c}, \vec{a}] + [\vec{b}, \vec{b}, \vec{c}] + [\vec{b}, \vec{b}, \vec{a}] + [\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}]$

$= 2[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$ (શા માટે ?)

ઉદાહરણ 31 : સાબિત કરો કે $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} + \vec{d}] = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] + [\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}]$

ઉકેલ : $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} + \vec{d}] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times (\vec{c} + \vec{d}))$

$= \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{d})$

$= \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{d})$

$= [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] + [\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}]$

સ્વાધ્યાય 10.5

1. જો $\vec{a} = \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$, $\vec{b} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$ અને $\vec{c} = 3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ હોય, તો $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]$ શોધો.
2. સાબિત કરો કે સદિશ $\vec{a} = \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$, $\vec{b} = -2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$ અને $\vec{c} = \hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$ સમતલીય છે.
3. જો સદિશ $\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$, $3\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ અને $\hat{i} + \lambda\hat{j} - 3\hat{k}$ સમતલીય હોય, તો λ શોધો.
4. સદિશ $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i}$ અને $\vec{c} = c_1\hat{i} + c_2\hat{j} + c_3\hat{k}$ છે.

(a) જો $c_1 = 1$ અને $c_2 = 2$ હોય, તો $\vec{a}$, $\vec{b}$ અને $\vec{c}$ સમતલીય બને તે માટે c_3 શોધો.

(b) જો $c_2 = -1$ અને $c_3 = 1$ હોય, તો સાબિત કરો કે c_1 ની કોઈ પણ કિંમત માટે $\vec{a}$, $\vec{b}$ અને $\vec{c}$ સમતલીય નથી.

5. સાબિત કરો કે $4\hat{i} + 8\hat{j} + 12\hat{k}$, $2\hat{i} + 4\hat{j} + 6\hat{k}$, $3\hat{i} + 5\hat{j} + 4\hat{k}$ અને $5\hat{i} + 8\hat{j} + 5\hat{k}$ સ્થાનસદિશ ધરાવતાં ચાર બિંદુઓ સમતલીય છે.

6. ચાર બિંદુઓ A(3, 2, 1), B(4, x, 5), C(4, 2, –2) અને D(6, 5, –1) સમતલીય હોય, તો x શોધો.

7. જો $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{b} + \vec{c}$ અને $\vec{c} + \vec{a}$ સમતલીય હોય, તો સાબિત કરો કે $\vec{a}$, $\vec{b}$ અને $\vec{c}$ સમતલીય છે.

પ્રકીર્ણ ઉદાહરણો

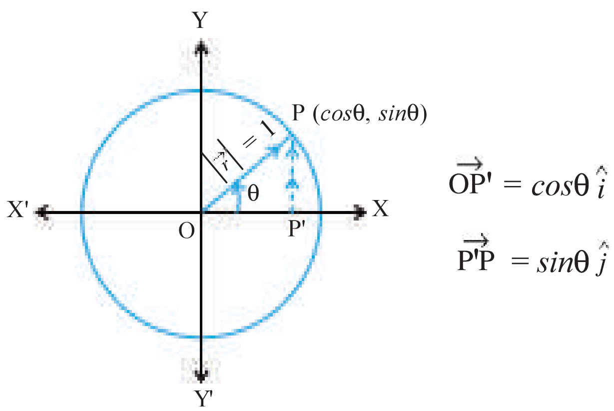
ઉદાહરણ 32 : XY સમતલના બધા જ એકમ સદિશો લખો.

ઉકેલ : ધારો કે $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$ એ XY સમતલમાં એકમ સદિશ છે (આકૃતિ 10.28). હવે આકૃતિ પરથી, આપણી પાસે $x = \cos\theta$ અને $y = \sin\theta$ **($|\vec{r}| = 1$ હોવાથી)**

તેથી આપણે સદિશ $\vec{r}$ ને $\vec{r}\ (= \vec{OP}) = \cos\theta\,\hat{i} + \sin\theta\,\hat{j}$ ... (1)

તરીકે દર્શાવી શકીએ.

સ્પષ્ટપણે, $|\vec{r}| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1$



આકૃતિ 10.28

વળી, θ એ [0, 2π) માં કિંમતો ધારણ કરે છે. તેથી બિંદુ P (આકૃતિ 10.28), ઘડિયાળના કાંટાની વિરુદ્ધ દિશામાં વર્તુળ $x^2 + y^2 = 1$ નિર્મિત કરે છે અને તે શક્ય તમામ દિશાઓને સાંકળે છે. તેથી, (1) XY સમતલમાં પ્રત્યેક એકમ સદિશ આપે છે.

ઉદાહરણ 33 : જો A, B, C અને D ના સ્થાનસદિશો અનુક્રમે $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ અને $2\hat{i} + 5\hat{j}$, $3\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ અને $\hat{i} - 6\hat{j} - \hat{k}$ હોય, તો $\vec{AB}$ અને $\vec{CD}$ વચ્ચેનો ખૂણો શોધો. તારવો કે $\vec{AB}$ અને $\vec{CD}$ સમરેખ છે.

ઉકેલ : નોંધ કરો કે જો AB અને CD વચ્ચેનો ખૂણો θ હોય, તો θ એ $\overrightarrow{AB}$ અને $\overrightarrow{CD}$ વચ્ચેનો પણ ખૂણો છે.

હવે, $\overrightarrow{AB}$ = B નો સ્થાનસદિશ −A નો સ્થાનસદિશ

$$= (2\hat{i} + 5\hat{j}) - (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = \hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k}$$

તેથી $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(1)^2 + (4)^2 + (1)^2} = 3\sqrt{2}$

આ જ પ્રમાણે $\overrightarrow{CD} = -2\hat{i} - 8\hat{j} + 2\hat{k}$ અને $|\overrightarrow{CD}| = 6\sqrt{2}$

આમ, $cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{CD}|}$

$$= \frac{1(-2) + 4(-8) + (-1)2}{(3\sqrt{2})(6\sqrt{2})}$$

$$= \frac{-36}{36} = -1$$

$0 \le \theta \le \pi$ હોવાથી, $\theta = \pi$ મળે છે. આ પરથી સિદ્ધ થાય છે કે $\overrightarrow{AB}$ અને $\overrightarrow{CD}$ સમરેખ છે.

વૈકલ્પિક રીતે, $\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$ દર્શાવે છે કે $\overrightarrow{AB}$ અને $\overrightarrow{CD}$ સમરેખ સદિશો છે.

ઉદાહરણ 34 : સદિશો $\vec{a}$, $\vec{b}$ અને $\vec{c}$ માટે $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, $|\vec{c}| = 5$ છે અને તેમનામાંથી પ્રત્યેક સદિશ બાકીના બે સદિશના સરવાળાને લંબ હોય, તો $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|$ શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = 0$ અને $\vec{b} \cdot (\vec{a} + \vec{c}) = 0$, $\vec{c} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = 0$ આપેલ છે.

હવે, $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|^2 = (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$

$$= \vec{a}\cdot\vec{a} + \vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) + \vec{b}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot(\vec{a}+\vec{c}) + \vec{c}\cdot(\vec{a}+\vec{b}) + \vec{c}\cdot\vec{c}$$

$$= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2$$

$$= 9 + 16 + 25 = 50$$

તેથી, $|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}| = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

ઉદાહરણ 35 : ત્રણ સદિશો $\vec{a}$, $\vec{b}$ અને $\vec{c}$ શરત $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ નું પાલન કરે છે. જો $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 4$ અને $|\vec{c}| = 2$ હોય, તો રાશિ $\mu = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{c} + \vec{c}\cdot\vec{a}$ નું મૂલ્ય મેળવો.

ઉકેલ : અહીં $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ હોવાથી, આપણી પાસે

$$\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=0$$

અથવા $\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}=0$

માટે $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}=-|\vec{a}|^2=-1$ ... (1)

ફરીથી $\vec{b}\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=0$

અથવા $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}=-|\vec{b}|^2=-16$ ... (2)

આ જ પ્રમાણે, $\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}=-4$ ... (3)

(1), (2) અને (3) નો સરવાળો કરતાં આપણી પાસે

$$2(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{c})=-21$$

અથવા $2\mu=-21$, અર્થાત્ $\mu=\frac{-21}{2}$

ઉદાહરણ 36 : પરસ્પર લંબ એકમ સદિશો $\hat{i}$, $\hat{j}$ અને $\hat{k}$ માટે જમણા હાથની પદ્ધતિના સંદર્ભમાં જો $\vec{\alpha}=3\hat{i}-\hat{j}$, $\vec{\beta}=2\hat{i}+\hat{j}-3\hat{k}$ હોય, તો $\vec{\beta}$ ને $\vec{\beta}=\vec{\beta_1}+\vec{\beta_2}$ સ્વરૂપે દર્શાવો, જ્યાં $\vec{\beta_1}$ એ $\vec{\alpha}$ ને સમાંતર છે અને $\vec{\beta_2}$ એ $\vec{\alpha}$ ને લંબ છે.

ઉકેલ : અદિશ λ માટે $\vec{\beta_1}=\lambda\vec{\alpha}$ લો, એટલે કે $\vec{\beta_1}=3\lambda\hat{i}-\lambda\hat{j}$

હવે, $\vec{\beta_2}=\vec{\beta}-\vec{\beta_1}=(2-3\lambda)\hat{i}+(1+\lambda)\hat{j}-3\hat{k}$

તથા $\vec{\beta_2}$ એ $\vec{\alpha}$ ને લંબ હોવાથી, આપણી પાસે $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta_2}=0$

એટલે કે $3(2-3\lambda)-(1+\lambda)=0$ હોવું જોઈએ.

આથી, $\lambda=\frac{1}{2}$.

માટે $\vec{\beta_1}=\frac{3}{2}\hat{i}-\frac{1}{2}\hat{j}$ અને $\vec{\beta_2}=\frac{1}{2}\hat{i}+\frac{3}{2}\hat{j}-3\hat{k}$

પ્રકીર્ણ સ્વાધ્યાય 10

1. XY સમતલમાં x-અક્ષની ધન દિશા સાથે $30°$ નો ખૂણો બનાવતો એકમ સદિશ લખો.
2. બિંદુઓ $P(x_1, y_1, z_1)$ અને $Q(x_2, y_2, z_2)$ ને જોડતા સદિશના અદિશ ઘટકો અને માન શોધો.
3. એક છોકરી પશ્ચિમ દિશામાં 4 કિમી ચાલે છે. પછી તે ઉત્તરથી પૂર્વ તરફ $30°$ ના ખૂણે 3 કિમી ચાલે છે અને થોભે છે. મુસાફરીમાં પ્રારંભ બિંદુથી છોકરીનું સ્થળાંતર શોધો.
4. જો $\vec{a}=\vec{b}+\vec{c}$, તો શું $|\vec{a}|=|\vec{b}|+|\vec{c}|$ સત્ય છે? તમારા જવાબનું સમર્થન કરો.

5. x ના જે મૂલ્ય માટે $x(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$ એકમ સદિશ હોય તે મૂલ્ય શોધો.

6. જે સદિશનું માન 5 એકમ હોય અને સદિશો $\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ અને $\vec{b} = \hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}$ ના પરિણામી સદિશને સમાંતર હોય તે સદિશ શોધો.

7. જો $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = 2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$ અને $\vec{c} = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ હોય, તો સદિશ $2\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}$ ને સમાંતર એકમ સદિશ શોધો.

8. દર્શાવો કે બિંદુઓ A(1, –2, –8), B(5, 0, –2) અને C(11, 3, 7) સમરેખ છે અને B એ AC નું વિભાજન કયા ગુણોત્તરમાં કરે છે તે શોધો.

9. બિંદુઓ P અને Q ના સ્થાનસદિશો $(2\vec{a} + \vec{b})$ અને $(\vec{a} - 3\vec{b})$ છે. જો બિંદુ R એ P અને Q ને જોડતા રેખાખંડનું 1 : 2 ગુણોત્તરમાં બહિર્વિભાજન કરે, તો બિંદુ R નો સ્થાનસદિશ શોધો. વળી, સાબિત કરો કે P એ રેખાખંડ RQ નું મધ્યબિંદુ છે.

10. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણની પાસપાસેની બે બાજુઓ $2\hat{i} - 4\hat{j} + 5\hat{k}$ અને $\hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k}$ છે. તેના વિકર્ણને સમાંતર એકમ સદિશ શોધો. વળી, તેનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

11. સાબિત કરો કે જે સદિશ અક્ષો OX, OY અને OZ સાથે સમાન માપવાળા ખૂણા આંતરતો હોય તેના દિક્કોસાઇન $\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$ છે.

12. ધારો કે $\vec{a} = \hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k}$, $\vec{b} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 7\hat{k}$ અને $\vec{c} = 2\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$ છે. સદિશો $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ ને લંબ હોય તથા $\vec{c} \cdot \vec{d} = 15$ થાય તેવો સદિશ $\vec{d}$ શોધો.

13. જે એકમ સદિશની દિશા સદિશો $2\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$ અને $\lambda\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ ના સરવાળાની દિશામાં હોય તે સદિશનો $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ સાથે અદિશ ગુણાકાર 1 હોય, તો λ શોધો.

14. જો $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ સમાન માનવાળા પરસ્પર લંબ સદિશો હોય, તો સાબિત કરો કે $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ એ $\vec{a}$, $\vec{b}$ અને $\vec{c}$ સાથે સમાન માપવાળા ખૂણા આંતરે છે.

15. આપેલ $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ માટે સાબિત કરો :

જો $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2$ તો અને તો જ $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ પરસ્પર લંબ છે.

પ્રશ્નો 16 તથા 17 માં વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલ વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

16. જો θ એ બે સદિશો $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ ની વચ્ચેનો ખૂણો હોય, તો $\vec{a} \cdot \vec{b} \geq 0$ થવા માટે, ...

(A) $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ (B) $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ (C) $0 < \theta < \pi$ (D) $0 \leq \theta \leq \pi$

17. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a} + \vec{b}$ એકમ સદિશો હોય અને $\vec{a}$ તથા $\vec{b}$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ θ હોય, તો ....

(A) $\theta = \frac{\pi}{4}$ (B) $\theta = \frac{\pi}{3}$ (C) $\theta = \frac{\pi}{2}$ (D) $\theta = \frac{2\pi}{3}$

18. $\hat{i}\cdot(\hat{j}\times\hat{k})+\hat{j}\cdot(\hat{i}\times\hat{k})+\hat{k}\cdot(\hat{i}\times\hat{j})$ નું મૂલ્ય ....

(A) 0 (B) –1 (C) 1 (D) 3

19. જો θ એ કોઈ પણ બે સદિશો $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ વચ્ચેનો ખૂણો હોય, તો θ = ... માટે $|\vec{a}\cdot\vec{b}| = |\vec{a}\times\vec{b}|$.

(A) 0 (B) $\frac{\pi}{4}$ (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) π

સારાંશ

- બિંદુ P(*x*, *y*, *z*) નો સ્થાનસદિશ $\overrightarrow{OP}\ (=\vec{r}) = x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$ અને તેનું માન $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ દ્વારા આપવામાં આવે છે.
- સદિશના અદિશ ઘટકો તેના દિક્ગુણોત્તરો છે, અને તે અનુરૂપ અક્ષોની દિશામાં પ્રક્ષેપો દર્શાવે છે.
- કોઈ પણ સદિશના માન (*r*), દિક્ગુણોત્તરો (*a*, *b*, *c*) અને દિક્કોસાઇનો (*l*, *m*, *n*) નીચે પ્રમાણે સંબંધિત છે : $l = \frac{a}{r},\ m = \frac{b}{r},\ n = \frac{c}{r}$.
- ત્રિકોણની ત્રણ બાજુઓનો ક્રમમાં લીધેલ સદિશ સરવાળો $\vec{0}$ છે.
- એક જ પ્રારંભ બિંદુવાળા સદિશોનો સદિશ સરવાળો જેની પાસપાસેની બાજુઓ આપેલ સદિશો હોય તેવા સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના વિકર્ણ વડે આપવામાં આવે છે.
- આપેલ સદિશનો અદિશ λ સાથેનો ગુણાકાર, સદિશના માનમાં |λ| ના ગુણિત જેટલો ફેરફાર કરે છે અને દિશા અનુક્રમે λ ની કિંમત ધન હોય કે ઋણ હોય તે અનુસાર તેની તે જ રહે છે અથવા વિરુદ્ધ દિશા બને છે.
- આપેલ શૂન્યેતર સદિશ $\vec{a}$ માટે, સદિશ $\hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ એ $\vec{a}$ ની દિશામાં એકમ સદિશ છે.
- જેમના સ્થાનસદિશો અનુક્રમે $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ હોય, તેવાં બિંદુઓ P અને Q ને જોડતા રેખાખંડનું *m* : *n* ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરતા બિંદુ R નો સ્થાનસદિશ

  (i) અંતઃવિભાજન માટે, $\frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$ દ્વારા આપવામાં આવે છે.

  (ii) બહિર્વિભાજન માટે, $\frac{m\vec{b}-n\vec{a}}{m-n}$ દ્વારા આપવામાં આવે છે.
- આપેલ સદિશો $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ નો ખૂણો θ હોય, તો તેમનો અદિશ ગુણાકાર નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત થાય છે : $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta$

  વળી, જ્યારે $\vec{a}\cdot\vec{b}$ આપેલ હોય ત્યારે સદિશો $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ વચ્ચેનો ખૂણો 'θ'; $\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$ પરથી શોધી શકાય છે.

- જો θ એ બે સદિશો $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ વચ્ચેનો ખૂણો હોય, તો તેમનો સદિશ ગુણાકાર $\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\theta \hat{n}$ દ્વારા આપવામાં આવે છે. અહીં, $\hat{n}$ એ $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ ને સમાવતા સમતલને લંબ એકમ સદિશ છે. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{n}$ અક્ષોની જમણા હાથની પદ્ધતિ રચે છે.
- જો આપણી પાસે બે સદિશો $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ ઘટક સ્વરૂપમાં $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ અને $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ હોય અને કોઈ પણ અદિશ λ આપેલ હોય, તો

  $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1)\hat{i} + (a_2 + b_2)\hat{j} + (a_3 + b_3)\hat{k}$;

  $\lambda\vec{a} = (\lambda a_1)\hat{i} + (\lambda a_2)\hat{j} + (\lambda a_3)\hat{k}$;

  અને $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$;

  અને $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$

Historical Note

The word vector has been derived from a Latin word ***vectus***, which means "to carry". The germinal ideas of modern vector theory date from around 1800 when ***Caspar Wessel*** (C.E. 1745 - C.E. 1818) and ***Jean Robert Argand*** (C.E. 1768 - C.E. 1822) described that how a complex number $a + ib$ could be given a geometric interpretation with the help of a directed line segment in a coordinate plane. ***William Rowen Hamilton*** (C.E. 1805 - C.E. 1865) an Irish mathematician was the first to use the term vector for a directed line segment in his book Lectures on ***Quaternions*** (C.E. 1853). ***Hamilton's*** method of quaternions (an ordered set of four real numbers given as: $a + b\hat{i} + c\hat{j} + d\hat{k}$; $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$ following certain algebraic rules) was a solution to the problem of multiplying vectors in three dimensional space. Though, we must mention here that in practice, the idea of vector concept and their addition was known much earlier ever since the time of ***Aristotle*** (384-322 B.C.E.), a Greek philosopher, and pupil of ***Plato*** (427-348 B.C.E.). That time it was supposed to be known that the combined action of two or more forces could be seen by adding them according to ***parallelogram law***. The correct law for the composition of forces, that forces add vectorially, had been discovered in the case of perpendicular forces by ***Stevin-Simon*** (C.E. 1548 - C.E. 1620). In C.E. 1586, he analysed the principle of geometric addition of forces in his treatise ***DeBeghinselen der Weeghconst*** ("Principles of the Art of Weighing"), which caused a major breakthrough in the development of mechanics. But it took another 200 years for the general concept of vectors to form.

In the C.E. 1880, ***Josaih Willard Gibbs*** (C.E. 1839 - C.E. 1903), an American physicist and mathematician, and ***Oliver Heaviside*** (C.E. 1850 - C.E. 1925), an English engineer, created what we now know as vector analysis, essentially by separating the real (scalar) part of quaternion from its imaginary (vector) part. In C.E. 1881 and C.E. 1884, ***Gibbs*** printed a treatise entitled ***Element of Vector Analysis***. This book gave a systematic and concise account of vectors. However, much of the credit for demonstrating the applications of vectors is due to the ***D. Heaviside*** and ***P. G. Tait*** (C.E. 1831 - C.E. 1901) who contributed significantly to this subject.

પ્રકરણ **11**

ત્રિપરિમાણીય ભૂમિતિ

❖ *The moving power of mathematical invention is not reasoning but imagination. – A.DEMORGAN* ❖

11.1 પ્રાસ્તાવિક

ધોરણ XI માં આપણે દ્વિપરિમાણીય વિશ્લેષણાત્મક ભૂમિતિ અને ત્રિપરિમાણીય ભૂમિતિનો ઔપચારિક પરિચય કર્યો. તે અભ્યાસ માત્ર કાર્તેઝિય પદ્ધતિ પૂરતો જ મર્યાદિત હતો. આ પુસ્તકના આ અગાઉના પ્રકરણમાં આપણે સદિશની કેટલીક મૂળભૂત સંકલ્પનાઓનો અભ્યાસ કર્યો. હવે આપણે સદિશ બીજગણિતનો ઉપયોગ ત્રિપરિમાણીય ભૂમિતિમાં કરીશું. આ ત્રિપરિમાણીય ભૂમિતિના અભિગમનો હેતુ એ છે કે, અભ્યાસ સરળ અને સુરુચિવાળો બને*.

Leonhard Euler
(C.E. 1707 - C.E. 1783)

આ પ્રકરણમાં આપણે, બે બિંદુઓને જોડતી રેખાની દિક્કોસાઈન અને તેના દિક્ગુણોત્તર તથા જુદી-જુદી શરતોને અધીન રેખા તથા સમતલનાં સમીકરણોની ચર્ચા કરીશું. આપણે બે રેખા, બે સમતલ, રેખા અને સમતલ વચ્ચેના ખૂણા, બે વિષમતલીય રેખાઓ વચ્ચેનું લઘુતમ અંતર અને સમતલથી બિંદુના અંતરનો અભ્યાસ પણ કરીશું. મહદંશે આપણે ઉપરનાં પરિણામો સદિશ સ્વરૂપમાં મેળવીશું. તેમ છતાં, યોગ્ય સમયે ભૌમિતિક અને વિશ્લેષણાત્મક પરિસ્થિતિનું ચિત્ર વધુ સ્પષ્ટ રજૂ કરવા માટે આપણે આ પરિણામોને કાર્તેઝિય સ્વરૂપમાં પણ વ્યક્ત કરીશું.

11.2 રેખાની દિક્કોસાઈન અને દિક્ગુણોત્તર

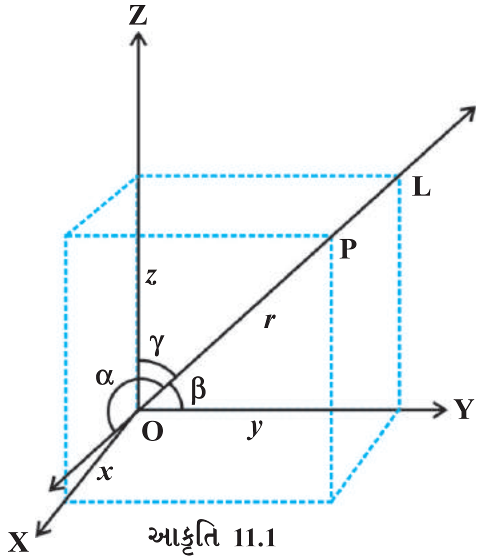
પ્રકરણ 10 માંથી, યાદ કરીએ કે,

જો દિશાયુક્ત રેખા L ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થતી હોય અને x-અક્ષ, y-અક્ષ અને z-અક્ષ સાથે અનુક્રમે α, β અને γ ખૂણા બનાવે, તો α, β અને γ ને L ના દિક્ખૂણાઓ કહીશું તથા આ ખૂણાઓની કોસાઈન, અર્થાત્ $\cos\alpha$, $\cos\beta$ અને $\cos\gamma$ ને દિશાયુક્ત રેખા L ની દિક્કોસાઈન કહીશું.

જો આપણે Lની દિશાને ઉલટાવીએ, તો દિક્ખૂણાઓનાં સ્થાન તેમના પૂરકકોણ, એટલે કે $\pi-\alpha$, $\pi-\beta$ અને $\pi-\gamma$ લેશે. આમ, દિક્કોસાઈનનાં ચિહ્ન તેમનાં મૂળ ચિહ્નથી વિરુદ્ધ થશે.

---

* *For various activities in three dimensional geometry, one may refer to the Book* ***"A Hand Book for designing Mathematics Laboratory in Schools"***, NCERT, 2005



આકૃતિ 11.1

નોંધીએ કે અવકાશમાં આપેલી રેખાને બે વિરોધી દિશા હોય અને તેથી તેની દિક્કોસાઈનના બે સમૂહ હોય છે. અવકાશમાં આપેલી રેખાની દિક્કોસાઈનનો સમૂહ અનન્ય હોય તે માટે, આપણે આપેલી રેખાને દિશાયુક્ત રેખા તરીકે જ લઈશું. આ અનન્ય દિક્કોસાઈન l, m અને n વડે દર્શાવાય છે.

નોંધ : જો અવકાશમાં આપેલી રેખા ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થતી ન હોય, તો તેની દિક્કોસાઈન શોધવા માટે, આપણે આપેલી રેખાને સમાંતર અને ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થતી રેખા દોરીશું. બે સમાંતર રેખાની દિક્કોસાઈનનો સમૂહ સમાન હોવાથી હવે ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થતી એક દિશાયુક્ત રેખા લઈ તેની દિક્કોસાઈન શોધીશું.

રેખાની દિક્કોસાઈનના સમપ્રમાણમાં હોય તેવી કોઈ પણ ત્રણ સંખ્યાઓને રેખાના દિક્ગુણોત્તર કહે છે. જો l, m, n એ રેખાની દિક્કોસાઈન અને a, b, c તેના દિક્ગુણોત્તર હોય, તો કોઈક શૂન્યેતર $\lambda \in R$ માટે, $a = \lambda l$, $b = \lambda m$ અને $c = \lambda n$ થાય.

> ☞ **નોંધ** કેટલાક લેખકો દિક્ગુણોત્તરને દિક્સંખ્યાઓ પણ કહે છે.

જો રેખાના દિક્ગુણોત્તર a, b, c હોય અને રેખાની દિક્કોસાઈન l, m અને n હોય, તો

$$\frac{l}{a} = \frac{m}{b} = \frac{n}{c} = k \text{ (ધારો)}, \ k \text{ શૂન્યેતર અચળ છે.}$$

માટે $\quad l = ak,\ m = bk,\ n = ck \quad$ ... (1)

પરંતુ $\quad l^2 + m^2 + n^2 = 1$

માટે $\quad k^2 (a^2 + b^2 + c^2) = 1$

અથવા $$k = \pm \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

તેથી (1) પરથી, રેખાની દિક્કોસાઈન

$$l = \pm \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\ m = \pm \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\ n = \pm \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \text{ થશે.}$$

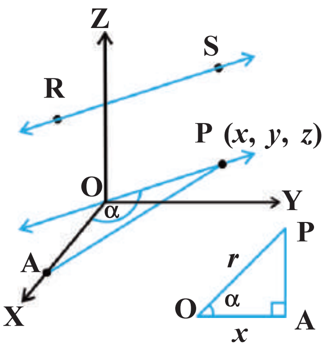
l, m અને n નું ચિહ્ન ધન કે ઋણ લેવું, તે જરૂરિયાત પ્રમાણેના k ના ચિહ્ન પર આધારિત છે.

જો કોઈ રેખાના દિક્ગુણોત્તર a, b, c હોય, તો ka, kb, kc; $k \neq 0$ એ પણ દિક્ગુણોત્તરનો સમૂહ છે. આથી, રેખાના દિક્ગુણોત્તરના કોઈ પણ બે સમૂહ પણ સમપ્રમાણમાં હોય છે. વળી, કોઈ પણ રેખાના દિક્ગુણોત્તરના સમૂહની સંખ્યા અનંત છે.

હવે, આપણે આ વિભાગમાં જે પરિણામ $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ નો ઉપયોગ કર્યો તેની સાબિતી નીચેના વિભાગમાં જોઈએ.

11.2.1 રેખાની દિક્કોસાઈન વચ્ચેનો સંબંધ

l, m, n દિક્કોસાઈનવાળી એક રેખા RS લો. આપેલ રેખાને સમાંતર ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થતી એક રેખા દોરો (જો તે ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થતી ન હોય, તો) અને તેના પર એક બિંદુ $P(x, y, z)$ લો. બિંદુ P માંથી x-અક્ષ પર લંબ PA દોરો. (આકૃતિ 11.2).



આકૃતિ 11.2

OP = r લેતાં, $\cos \alpha = \frac{OA}{OP} = \frac{x}{r}$. આથી $x = lr$

આ જ પ્રમાણે, $y = mr$ અને $z = nr$

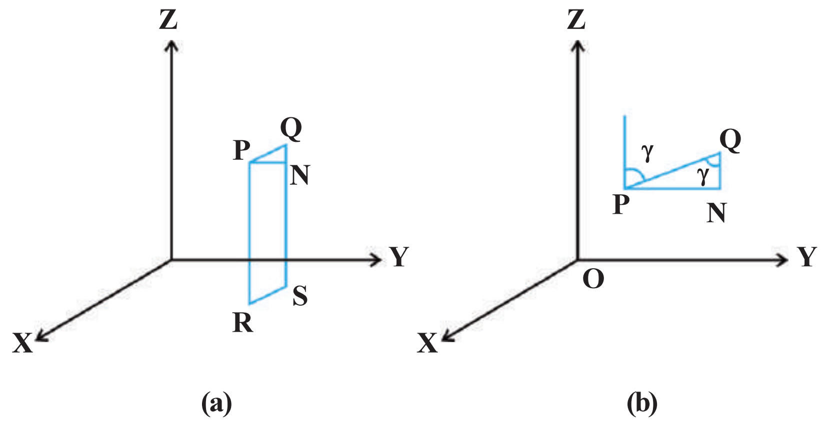
આમ $x^2 + y^2 + z^2 = r^2 (l^2 + m^2 + n^2)$

પરંતુ $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$

આથી $\mathbf{l^2 + m^2 + n^2 = 1}$

11.2.2 બે બિંદુમાંથી પસાર થતી રેખાની દિક્કોસાઈન

આપેલાં બે બિંદુમાંથી એક અને માત્ર એક જ રેખા પસાર થતી હોવાથી, આપણે આપેલાં બિંદુઓ $P(x_1, y_1, z_1)$ અને $Q(x_2, y_2, z_2)$માંથી પસાર થતી રેખાની દિક્કોસાઈન નીચે પ્રમાણે મેળવીશું (આકૃતિ 11.3 (a)).



આકૃતિ 11.3

ધારો કે રેખા PQ ની દિક્કોસાઈન l, m, n છે અને તે x-અક્ષ, y-અક્ષ અને z-અક્ષ સાથે અનુક્રમે α, β અને γ ખૂણા બનાવે છે.

P અને Q માંથી સમતલ-XY ને અનુક્રમે R અને S માં છેદતા લંબ દોરો. P માંથી QS પર તેને N માં છેદતો લંબ દોરો. હવે, કાટકોણ ત્રિકોણ PNQ માં, $\angle PQN = \gamma$ થશે (આકૃતિ 11.3 (b)).

માટે $\cos \gamma = \frac{NQ}{PQ} = \frac{z_2 - z_1}{PQ}$

આ જ પ્રમાણે $\cos \alpha = \frac{x_2 - x_1}{PQ}$ અને $\cos \beta = \frac{y_2 - y_1}{PQ}$

આથી, બિંદુઓ P (x_1, y_1, z_1) અને Q (x_2, y_2, z_2) ને જોડતા રેખાખંડની દિક્કોસાઇન

$\frac{x_2 - x_1}{PQ}, \frac{y_2 - y_1}{PQ}, \frac{z_2 - z_1}{PQ}$ થશે.

અહીં, $PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

☞ **નોંધ :** P (x_1, y_1, z_1) અને Q (x_2, y_2, z_2) ને જોડતા રેખાખંડના દિક્ગુણોત્તર $x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1$ અથવા $x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2$ લઈ શકાય.

ઉદાહરણ 1 : જો રેખા x-અક્ષ, y-અક્ષ અને z-અક્ષ સાથે અનુક્રમે 90°, 60° અને 30° ના ખૂણા બનાવે, તો તેની દિક્કોસાઇન શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે રેખાની દિક્કોસાઇન l, m, n છે. આથી, $l = \cos 90° = 0$, $m = \cos 60° = \frac{1}{2}$, $n = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

નોંધ : જુઓ કે $l^2 + m^2 + n^2 = 1$. ત્રીજો ખૂણો $\gamma = 45°$ લીધો હોય તો ચાલે ?

ઉદાહરણ 2 : જો રેખાના દિક્ગુણોત્તર 2, –1, –2 હોય, તો તેની દિક્કોસાઇન મેળવો.

ઉકેલ : રેખાની દિક્કોસાઇન

$$\frac{2}{\sqrt{(2)^2+(-1)^2+(-2)^2}}, \frac{-1}{\sqrt{(2)^2+(-1)^2+(-2)^2}}, \frac{-2}{\sqrt{(2)^2+(-1)^2+(-2)^2}} \text{ અથવા } \frac{2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{-2}{3}.$$

ઉદાહરણ 3 : બે બિંદુઓ (–2, 4, –5) અને (1, 2, 3) માંથી પસાર થતી રેખાની દિક્કોસાઇન શોધો.

ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે બે બિંદુઓ P (x_1, y_1, z_1) અને Q (x_2, y_2, z_2) માંથી પસાર થતી રેખાની દિક્કોસાઇન

$$\frac{x_2 - x_1}{PQ}, \frac{y_2 - y_1}{PQ}, \frac{z_2 - z_1}{PQ} \text{ છે}$$

અને $PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

અહીં P (–2, 4, –5) અને Q (1, 2, 3) છે.

આથી, $PQ = \sqrt{(1-(-2))^2 + (2-4)^2 + (3-(-5))^2} = \sqrt{77}$

આમ, બિંદુઓ P તથા Q ને જોડતી રેખાની દિક્કોસાઇન

$$\frac{3}{\sqrt{77}}, \frac{-2}{\sqrt{77}}, \frac{8}{\sqrt{77}}$$

ઉદાહરણ 4 : x-અક્ષ, y-અક્ષ અને z-અક્ષની દિક્કોસાઇન શોધો.

ઉકેલ : x-અક્ષ એ x-અક્ષ, y-અક્ષ અને z-અક્ષની સાથે અનુક્રમે 0°, 90° અને 90° ના ખૂણા બનાવે છે. આથી, x-અક્ષની દિક્કોસાઇન $\cos 0°, \cos 90°, \cos 90°$ અર્થાત્, 1, 0, 0. આ જ પ્રમાણે y-અક્ષ અને z-અક્ષની દિક્કોસાઇન અનુક્રમે 0, 1, 0 અને 0, 0, 1 છે.

ઉદાહરણ 5 : સાબિત કરો કે બિંદુઓ A (2, 3, –4), B (1, –2, 3) અને C (3, 8, –11) સમરેખ છે.

ઉકેલ : A અને B ને જોડતી રેખાના દિક્ગુણોત્તર 1 – 2, –2 – 3, 3 + 4 અર્થાત્ –1, –5, 7 છે.

B અને C ને જોડતી રેખાના દિક્ગુણોત્તર 3 – 1, 8 + 2, –11 –3 અર્થાત્ 2, 10, –14 છે.

સ્પષ્ટ છે કે AB અને BC ના દિક્ગુણોત્તર સમપ્રમાણમાં છે. આથી, AB એ BC ને સમાંતર અથવા સંપાતી છે; પરંતુ AB અને BC બંનેમાં B સામાન્ય બિંદુ છે. તેથી A, B, C સમરેખ છે.

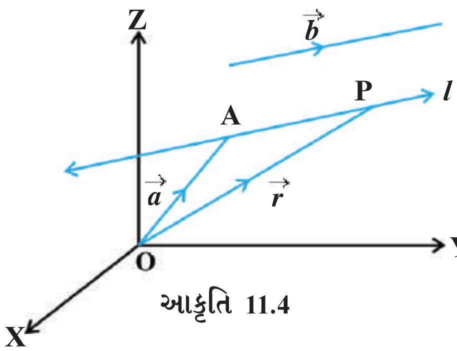
સ્વાધ્યાય 11.1

1. જો કોઈ રેખા x-અક્ષ, y-અક્ષ અને z-અક્ષ સાથે અનુક્રમે 90°, 135°, 45° માપના ખૂણા બનાવે, તો તેની દિક્કોસાઈન શોધો.
2. યામાક્ષો સાથે સમાન ખૂણા બનાવતી રેખાની દિક્કોસાઈન શોધો.
3. જો રેખાના દિક્ગુણોત્તર –18, 12, –4 હોય, તો તેની દિક્કોસાઈન શોધો.
4. સાબિત કરો કે બિંદુઓ (2, 3, 4), (–1, –2, 1), (5, 8, 7) સમરેખ છે.
5. (3, 5, –4), (–1, 1, 2) અને (–5, –5, –2) શિરોબિંદુવાળા ત્રિકોણની બાજુઓની દિક્કોસાઈન શોધો.

11.3 અવકાશમાં રેખાનું સમીકરણ

આપણે ધોરણ XI માં દ્વિપરિમાણમાં રેખાના સમીકરણનો અભ્યાસ કર્યો. આપણે હવે અવકાશમાં રેખાનાં સદિશ અને કાર્તેઝિય સમીકરણનો અભ્યાસ કરીશું.

જો (i) કોઈ રેખા આપેલા બિંદુમાંથી પસાર થતી હોય અને તેની દિશા આપી હોય, અથવા (ii) તે આપેલાં બે બિંદુમાંથી પસાર થાય, તો તે અનન્ય રીતે નક્કી થાય છે.



આકૃતિ 11.4

11.3.1 આપેલા બિંદુમાંથી પસાર થતી અને આપેલ સદિશ $\vec{b}$ ને સમાંતર રેખાનું સમીકરણ

ધારો કે લંબચોરસ કાર્તેઝિય યામપદ્ધતિના ઊગમબિંદુ O ને સાપેક્ષ આપેલા બિંદુ A નો સ્થાનસદિશ $\vec{a}$ છે. બિંદુ A માંથી પસાર થતી અને આપેલા સદિશ $\vec{b}$ ને સમાંતર રેખા l છે. રેખા l પરના સ્વૈર બિંદુ P નો સ્થાન-સદિશ $\vec{r}$ છે (આકૃતિ 11.4).

આથી, $\vec{AP}$ એ સદિશ $\vec{b}$ ને સમાંતર છે અર્થાત્, $\vec{AP} = \lambda\vec{b}$ જ્યાં λ એ કોઈક વાસ્તવિક સંખ્યા છે.

પરંતુ $\vec{AP} = \vec{OP} - \vec{OA}$

અર્થાત્ $\lambda\vec{b} = \vec{r} - \vec{a}$

આથી ઊલટું, પ્રચલ λની પ્રત્યેક કિંમત માટે, આ સમીકરણ રેખા પરના બિંદુ P નો સ્થાનસદિશ આપે છે. આથી, રેખાનું સદિશ સમીકરણ

$$\vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{b} \text{ મળે છે.} \qquad \lambda \in R \qquad \text{.... (1)}$$

નોંધ : જો $\vec{b} = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$, તો રેખાના દિક્ગુણોત્તર a, b, c થશે અને તેથી ઊલટું, જો રેખાના દિક્ગુણોત્તર a, b, c હોય, તો $\vec{b} = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$ એ રેખાને સમાંતર થશે. અહીં, b નો $|\vec{b}|$ સાથે ગૂંચવડો ઊભો કરશો નહિ.

સદિશ સ્વરૂપમાંથી કાર્તેઝિય સ્વરૂપ મેળવવું

ધારો કે આપેલા બિંદુ A ના યામ (x_1, y_1, z_1) અને રેખાના દિક્‌ગુણોત્તર a, b, c છે. રેખા પરના કોઈ પણ બિંદુ P ના યામ (x, y, z) લઈએ, તો

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}; \ \vec{a} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}$$

અને $\vec{b} = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$

આ કિંમતો (1) માં મૂકતા અને $\hat{i}$, $\hat{j}$ અને $\hat{k}$ ના સહગુણકો સરખાવતાં,
(**નોંધ :** ખરેખર તો 'બંને સમાન સદિશના યામ સમાન હોવાથી' એમ કહેવાય.)
આપણને $x = x_1 + \lambda a$; $y = y_1 + \lambda b$, $z = z_1 + \lambda c$ મળે. ... (2)
આ સમીકરણો રેખાનાં પ્રચલ સમીકરણ છે. (2) માંથી પ્રચલ λ નો લોપ કરતાં, આપણને

$$\frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c} \text{ મળે.} \quad \text{... (3)}$$

આ રેખાનું **કાર્તેઝિય સમીકરણ** છે.

> ☞ **નોંધ** જો રેખાની દિક્‌કોસાઈન l, m, n હોય, તો રેખાનું સમીકરણ
>
> $$\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n} \text{ થશે.}$$

ઉદાહરણ 6 : બિંદુ (5, 2, – 4) માંથી પસાર થતી સદિશ $3\hat{i} + 2\hat{j} - 8\hat{k}$ ને સમાંતર રેખાનું સદિશ અને કાર્તેઝિય સમીકરણ મેળવો.

ઉકેલ : આપણી પાસે

$$\vec{a} = 5\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} \text{ અને } \vec{b} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 8\hat{k} \text{ છે.}$$

તેથી, રેખાનું સદિશ સમીકરણ

$$\vec{r} = 5\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} + \lambda(3\hat{i} + 2\hat{j} - 8\hat{k}) \text{ થશે.}$$

હવે, રેખા પરના બિંદુ P (x, y, z) નો સ્થાનસદિશ $\vec{r}$ છે.

તેથી,
$$x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = 5\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} + \lambda(3\hat{i} + 2\hat{j} - 8\hat{k})$$
$$= (5 + 3\lambda)\hat{i} + (2 + 2\lambda)\hat{j} + (-4 - 8\lambda)\hat{k}$$

λ નો લોપ કરતાં, આપણને

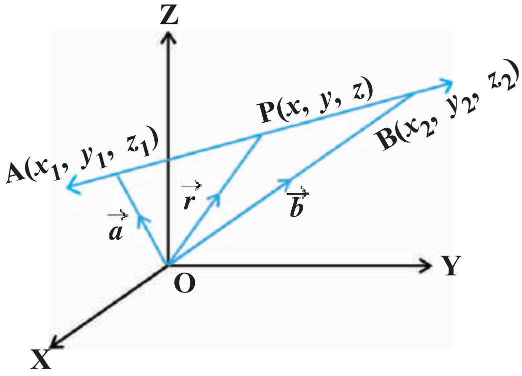
$$\frac{x-5}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+4}{-8} \text{ મળે.}$$

આ કાર્તેઝિય સ્વરૂપમાં રેખાનું સમીકરણ છે.

11.3.2 આપેલાં બે બિંદુઓમાંથી પસાર થતી રેખાનું સમીકરણ

ધારો કે રેખા પરનાં બે બિંદુઓ A (x_1, y_1, z_1) અને B (x_2, y_2, z_2) ના સ્થાનસદિશ અનુક્રમે $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ છે (આકૃતિ 11.5).

સ્વૈર બિંદુ P (x, y, z) નો સ્થાનસદિશ $\vec{r}$ લઈએ, તો P બિંદુ રેખા પર હોય, તો અને તો જ $\overrightarrow{AP} = \vec{r} - \vec{a}$ અને $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$ સમરેખ સદિશ છે.



આકૃતિ 11.5

આથી, P રેખા પર હોય, તો અને તો જ

$$\vec{r} - \vec{a} = \lambda(\vec{b} - \vec{a})$$

અથવા $\quad \boldsymbol{\vec{r} = \vec{a} + \lambda(\vec{b} - \vec{a}), \lambda \in R}$ ... (1)

આ સમીકરણ રેખાનું **સદિશ સમીકરણ** છે.

સદિશ સ્વરૂપમાંથી કાર્તેઝિય સ્વરૂપ મેળવીએ.

આપણી પાસે

$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$, $\vec{a} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}$ અને $\vec{b} = x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k}$ છે.

આ કિંમતો (1) માં મૂકતાં, આપણને

$$x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k} + \lambda[(x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}]$$

$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ ના સહગુણકો સરખાવતાં, આપણને

(**નોંધ :** ફરી અહીં અર્થ એ છે કે, સમાન સદિશના યામ સમાન છે.)

$x = x_1 + \lambda(x_2 - x_1)$; $y = y_1 + \lambda(y_2 - y_1)$; $z = z_1 + \lambda(z_2 - z_1)$ મળે.

λ નો લોપ કરતાં,

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \text{ મળે.}$$

આ સમીકરણ રેખાનું કાર્તેઝિય સ્વરૂપમાં સમીકરણ છે.

ઉદાહરણ 7 : (–1, 0, 2) અને (3, 4, 6) માંથી પસાર થતી રેખાનું સદિશ સમીકરણ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે A (–1, 0, 2) અને B (3, 4, 6) ના સ્થાનસદિશ અનુક્રમે $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ છે.

$$\vec{a} = -\hat{i} + 2\hat{k}$$

અને $\vec{b} = 3\hat{i} + 4\hat{j} + 6\hat{k}$

તેથી $\vec{b} - \vec{a} = 4\hat{i} + 4\hat{j} + 4\hat{k}$

રેખા પરના કોઈ પણ બિંદુનો સ્થાનસદિશ $\vec{r}$ લઈએ, તો રેખાનું સદિશ સમીકરણ

$$\vec{r} = -\hat{i} + 2\hat{k} + \lambda(4\hat{i} + 4\hat{j} + 4\hat{k}), \lambda \in R$$

ઉદાહરણ 8 : રેખાનું કાર્તેઝિય સમીકરણ

$$\frac{x+3}{2} = \frac{y-5}{4} = \frac{z+6}{2} \text{ હોય, તો}$$

આ રેખાનું સદિશ સમીકરણ શોધો.

ઉકેલ : આપેલ સમીકરણને પ્રમાણિત સ્વરૂપ

$$\frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c} \text{ સાથે સરખાવતાં,}$$

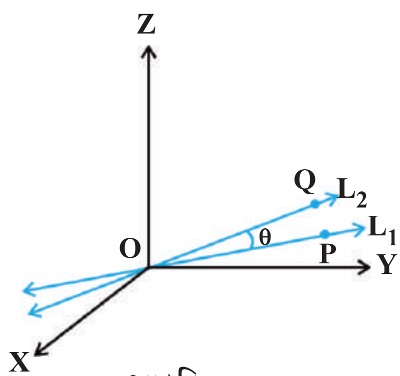
આપણે નિરીક્ષણ કરીએ કે $x_1 = -3,\ y_1 = 5,\ z_1 = -6\ ;\ a = 2,\ b = 4,\ c = 2$

આમ, માંગેલી રેખા બિંદુ $(-3, 5, -6)$ માંથી પસાર થાય છે અને સદિશ $2\hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k}$ ને સમાંતર છે. રેખા પરના કોઈ પણ બિંદુનો સ્થાનસદિશ $\vec{r}$ લઈએ, તો આપેલી રેખાનું સદિશ સમીકરણ

$\vec{r} = (-3\hat{i} + 5\hat{j} - 6\hat{k}) + \lambda(2\hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k})$ થશે.

11.4 બે રેખા વચ્ચેનો ખૂણો

ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થતી અને જેના દિક્ગુણોત્તર અનુક્રમે a_1, b_1, c_1 તથા a_2, b_2, c_2 હોય તેવી બે રેખાઓ છે. ધારો કે L_1 પર બિંદુ P અને L_2 પર બિંદુ Q છે. આકૃતિ 11.6 માં આપેલી દિશાયુક્ત રેખાઓ OP અને OQ લઈએ. ધારો કે સદિશો OP અને OQ વચ્ચેનો લઘુકોણ θ છે. હવે યાદ કરીએ કે દિશાયુક્ત રેખાખંડો OP અને OQ એ અનુક્રમે a_1, b_1, c_1 અને a_2, b_2, c_2 ઘટકો સાથેના સદિશ છે. આથી તેમના વચ્ચેનો ખૂણો θ એ



આકૃતિ 11.6

$$\cos\theta = \left|\frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\ \sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}\right| \text{ થી મળે છે.} \quad \ldots (1)$$

રેખાઓ વચ્ચેનો ખૂણો $\sin\theta$ ના સ્વરૂપમાં,

$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta}$$

$$= \sqrt{1-\frac{(a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2)^2}{(a_1^2+b_1^2+c_1^2)(a_2^2+b_2^2+c_2^2)}}$$

$$= \frac{\sqrt{(a_1^2+b_1^2+c_1^2)(a_2^2+b_2^2+c_2^2)-(a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2)^2}}{\sqrt{(a_1^2+b_1^2+c_1^2)}\ \sqrt{(a_2^2+b_2^2+c_2^2)}}$$

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{(a_1b_2-a_2b_1)^2+(b_1c_2-b_2c_1)^2+(c_1a_2-c_2a_1)^2}}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\ \sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}} \quad \ldots (2)$$

☞ **નોંધ** જો કોઈ વિકલ્પમાં રેખાઓ L_1 અથવા L_2 (અથવા બંને) ઊગમબિંદુમાંથી પસાર ન થાય, તો આપણે L_1 અને L_2 ને સમાંતર અને ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થતી રેખાઓ અનુક્રમે L'_1 અને L'_2 લઈ શકીએ.

જો રેખાઓ L_1 અને L_2 માટે દિક્‌ગુણોત્તરને બદલે, L_1 ની દિક્‌કોસાઇન l_1, m_1, n_1 અને L_2 ની દિક્‌કોસાઇન l_2, m_2, n_2 આપી હોય, તો (1) અને (2) ને નીચેના સ્વરૂપમાં લઈશું.

$$\cos\theta = |l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2| \quad (\text{કારણ કે } l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1 = l_2^2 + m_2^2 + n_2^2) \qquad \dots (3)$$

અને $$\sin\theta = \sqrt{(l_1m_2 - l_2m_1)^2 + (m_1n_2 - m_2n_1)^2 + (n_1l_2 - n_2l_1)^2} \qquad \dots (4)$$

દિક્‌ગુણોત્તરો a_1, b_1, c_1 અને a_2, b_2, c_2 સાથેની બે રેખાઓ

(i) પરસ્પર લંબ હોય અર્થાત્ જો $\theta = 90°$, તો (1) પરથી

$$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$$

(ii) સમાંતર હોય અર્થાત્ જો $\theta = 0$, તો (2) પરથી

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

હવે, બે રેખાનાં સમીકરણ આપ્યાં હોય ત્યારે આપણે તેમની વચ્ચેનો ખૂણો શોધીશું. જો રેખાઓ વચ્ચેનો ખૂણો θ લઘુકોણ હોય અને

$$\vec{r} = \vec{a_1} + \lambda\vec{b_1} \text{ અને } \vec{r} = \vec{a_2} + \mu\vec{b_2}$$

તો $$\cos\theta = \left|\frac{\vec{b_1}\cdot\vec{b_2}}{|\vec{b_1}||\vec{b_2}|}\right|$$

કાર્તેઝિય સ્વરૂપમાં, જો રેખાઓ

$$\frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{b_1} = \frac{z-z_1}{c_1} \qquad \dots (1)$$

અને $$\frac{x-x_2}{a_2} = \frac{y-y_2}{b_2} = \frac{z-z_2}{c_2} \text{ ના} \qquad \dots (2)$$

દિક્‌ગુણોત્તરો અનુક્રમે a_1, b_1, c_1 અને a_2, b_2, c_2 હોય તથા રેખાઓ (1) અને (2) વચ્ચેનો ખૂણો θ હોય, તો

$$\cos\theta = \left|\frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}\right| \text{ થાય.}$$

ઉદાહરણ 9 : રેખાઓ $\vec{r} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} + \lambda(\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k})$

અને $\vec{r} = 5\hat{i} - 2\hat{j} + \mu(3\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k})$ વચ્ચેનો ખૂણો શોધો.

ઉકેલ : અહીં $\vec{b_1} = \hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$ અને $\vec{b_2} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k}$

બે રેખાઓ વચ્ચેનો ખૂણો θ હોય, તો

$$\cos\theta = \left|\frac{\vec{b_1}\cdot\vec{b_2}}{|\vec{b_1}||\vec{b_2}|}\right| = \left|\frac{(\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k})\cdot(3\hat{i}+2\hat{j}+6\hat{k})}{\sqrt{1+4+4}\cdot\sqrt{9+4+36}}\right|$$

$$= \left|\frac{3+4+12}{3\times 7}\right| = \frac{19}{21}$$

આથી $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{19}{21}\right)$

ઉદાહરણ 10 : રેખાઓ $\frac{x+3}{3} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+3}{4}$

અને $\frac{x+1}{1} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-5}{2}$ વચ્ચેનો ખૂણો શોધો.

ઉકેલ : પ્રથમ રેખાના દિક્ગુણોત્તર 3, 5, 4 અને બીજી રેખાના દિક્ગુણોત્તર 1, 1, 2 છે. જો તેમની વચ્ચેનો ખૂણો θ હોય, તો

$$\cos\theta = \left|\frac{3\cdot1+5\cdot1+4\cdot2}{\sqrt{3^2+5^2+4^2}\sqrt{1^2+1^2+2^2}}\right|$$

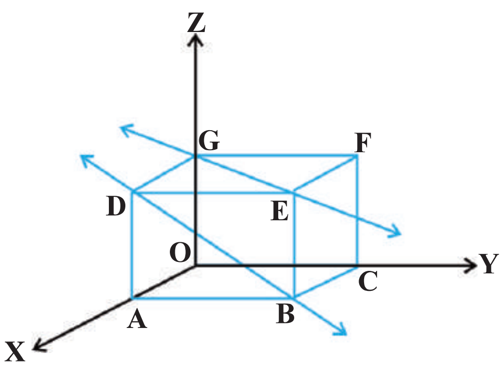
$$= \frac{16}{\sqrt{50}\sqrt{6}} = \frac{16}{5\sqrt{2}\sqrt{6}} = \frac{8\sqrt{3}}{15}$$

આથી, માગેલો ખૂણો $\cos^{-1}\left(\frac{8\sqrt{3}}{15}\right)$ છે.

11.5 બે રેખા વચ્ચેનું લઘુતમ અંતર

જો અવકાશની બે રેખાઓ એક બિંદુમાં છેદે, તો તેમની વચ્ચેનું લઘુતમ અંતર શૂન્ય છે. વળી, જો અવકાશની બે રેખાઓ સમાંતર હોય, તો તેમની વચ્ચેનું લઘુતમ અંતર એ તેમના વચ્ચેનું લંબઅંતર થશે, અર્થાત્ એક રેખા પરના કોઈ બિંદુથી બીજી રેખા પર દોરેલા લંબની લંબાઈ જેટલું.

વિશેષમાં, જે રેખાઓ છેદતી ન હોય અને સમાંતર પણ ન હોય એવી રેખાઓ અવકાશમાં હોય છે. ખરેખર તો, આવી રેખાઓની જોડ અસમતલીય રેખાઓની જોડ છે. તેમને ***વિષમતલીય (non coplanar or skew) રેખાઓ*** કહે છે. ઉદાહરણ તરીકે, ચાલો આપણે આકૃતિ 11.7 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે x-અક્ષ, y-અક્ષ અને z-અક્ષ પર અનુક્રમે 1, 3, 2 એકમ માપવાળો એક ઓરડો લઈએ.



આકૃતિ 11.7

રેખા GE છતની એક બાજુથી બીજી બાજુ તરફ વિકર્ણ સ્વરૂપે ત્રાંસી જાય છે અને રેખા DB એ A થી સીધા ઉપર છતના એક ખૂણાએથી દીવાલના નીચેના ભાગે વિકર્ણ સ્વરૂપે ત્રાંસી જાય છે. આ રેખાઓ સમાંતર નથી અને તેઓ ક્યારેય એકબીજાને મળશે નહિ, કારણ કે તેઓ વિષમતલીય છે.

બે રેખાઓ વચ્ચેના લઘુતમ અંતરનો આપણે અર્થ કરીશું કે જેની લંબાઈ ઓછામાં ઓછી હોય, તેવા એક રેખા પરના એક બિંદુ અને બીજી રેખા પરના એક બિંદુને જોડતો રેખાખંડ હોય.

વિષમતલીય રેખાઓ માટે, લઘુતમ અંતરવાળી રેખા એ બંને રેખાઓને લંબ છે.

11.5.1 બે વિષમતલીય રેખા વચ્ચેનું અંતર

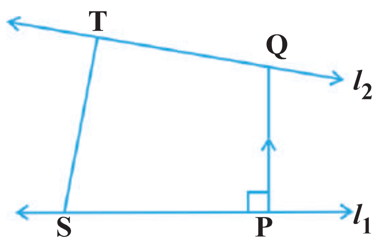
હવે આપણે બે વિષમતલીય રેખા વચ્ચેનું લઘુતમ અંતર નીચે પ્રમાણે મેળવીશું :

ધારો કે $\vec{r} = \vec{a_1} + \lambda \vec{b_1}$ ... (1)

અને $\vec{r} = \vec{a_2} + \mu \vec{b_2}$ ... (2)

સમીકરણવાળી બે વિષમતલીય રેખાઓ l_1 અને l_2 આપેલી છે. (આકૃતિ 11.8).

l_1 પર $\vec{a_1}$ સ્થાન સદિશવાળું કોઈક બિંદુ S અને l_2 પર $\vec{a_2}$ સ્થાન સદિશવાળું કોઈક બિંદુ T લો. લઘુતમ અંતરવાળા સદિશનું માન એટલે કે STનો લઘુતમ અંતરવાળી રેખાની દિશામાં પ્રક્ષેપ (જુઓ 10.6.2).



આકૃતિ 11.8

જો l_1 અને l_2 વચ્ચેનું લઘુતમ અંતર દર્શાવતો સદિશ $\vec{PQ}$ હોય, તો તે $\vec{b_1}$ અને $\vec{b_2}$ બંનેને લંબ છે. આથી $\vec{PQ}$ ની દિશામાં એકમ સદિશ $\hat{n}$ એ

$$\hat{n} = \frac{\vec{b_1} \times \vec{b_2}}{|\vec{b_1} \times \vec{b_2}|} \text{ થશે.} \qquad \text{... (3)}$$

તેથી, જો d એ લઘુતમ અંતર સદિશનું માન હોય, તો $\vec{PQ} = d\hat{n}$

$\vec{ST}$ અને $\vec{PQ}$ વચ્ચેનો ખૂણો θ હોય, તો

$$PQ = ST\,|\cos\theta|$$

પરંતુ $$|\cos\theta| = \left|\frac{\vec{PQ}\cdot\vec{ST}}{|\vec{PQ}||\vec{ST}|}\right|$$

$$= \left|\frac{d\,\hat{n}\cdot(\vec{a_2} - \vec{a_1})}{d\,ST}\right| \qquad (\vec{ST} = \vec{a_2} - \vec{a_1} \text{ હોવાથી})$$

$$= \left|\frac{(\vec{b_1} \times \vec{b_2})\cdot(\vec{a_2} - \vec{a_1})}{ST\,|\vec{b_1} \times \vec{b_2}|}\right| \qquad [(3) \text{ પરથી}]$$

આથી, માગેલું લઘુતમ અંતર

$$d = PQ = ST\,|\cos\theta|$$

અથવા $$\boldsymbol{d = \left|\frac{(\vec{b_1} \times \vec{b_2})\cdot(\vec{a_2} - \vec{a_1})}{|\vec{b_1} \times \vec{b_2}|}\right|}$$

કાર્તેઝિય સ્વરૂપ

બે રેખાઓ

$$l_1 : \frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{b_1} = \frac{z-z_1}{c_1}$$

અને $l_2 : \frac{x-x_2}{a_2} = \frac{y-y_2}{b_2} = \frac{z-z_2}{c_2}$ વચ્ચેનું લઘુતમ અંતર

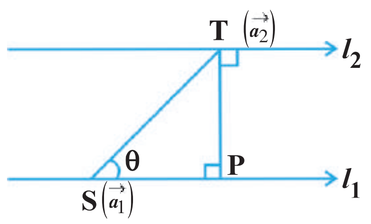
$$\left| \frac{\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{(b_1c_2-b_2c_1)^2+(c_1a_2-c_2a_1)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2}} \right|$$ છે.

11.5.2 સમાંતર રેખાઓ વચ્ચેનું અંતર

જો બે રેખાઓ l_1 અને l_2 સમાંતર હોય, તો તેઓ સમતલીય છે. ધારો કે રેખાઓ

$$\vec{r} = \vec{a_1} + \lambda \vec{b} \quad \text{... (1)}$$

અને $\vec{r} = \vec{a_2} + \mu \vec{b}$ છે. ... (2)



આકૃતિ 11.9

l_1 પરના બિંદુ S નો સ્થાનસદિશ $\vec{a_1}$ અને l_2 પરના બિંદુ T નો સ્થાનસદિશ $\vec{a_2}$ છે. (આકૃતિ 11.9) l_1, l_2 સમતલીય હોવાથી, જો T માંથી રેખા l_1 પરનો લંબપાદ P હોય, તો રેખાઓ l_1 અને l_2 વચ્ચેનું અંતર = TP

ધારો કે $\overrightarrow{ST}$ અને $\vec{b}$ વચ્ચેનો ખૂણો θ છે.

તેથી, $\vec{b} \times \overrightarrow{ST} = \left(|\vec{b}||\overrightarrow{ST}|\sin\theta\right)\hat{n}$ ... (3)

અહીં, $\hat{n}$ એ રેખાઓ l_1 અને l_2 ના સમતલ પર લંબ એકમ સદિશ છે.

પરંતુ $\overrightarrow{ST} = \vec{a_2} - \vec{a_1}$

તેથી (3) પરથી

$\vec{b} \times (\vec{a_2} - \vec{a_1}) = |\vec{b}|\ \mathrm{PT}\ \hat{n}$ **(PT = ST *sin* θ હોવાથી)**

અર્થાત્ $\left|\vec{b} \times (\vec{a_2} - \vec{a_1})\right| = |\vec{b}|\ \mathrm{PT} \cdot 1$ **($|\hat{n}| = 1$ હોવાથી)**

આથી, આપેલી સમાંતર રેખાઓ વચ્ચેનું અંતર

$$d = |\overrightarrow{PT}| = \left| \frac{\vec{b} \times (\vec{a_2} - \vec{a_1})}{|\vec{b}|} \right|$$

ઉદાહરણ 11 : રેખા l_1 અને l_2 ના સદિશ સમીકરણ

$$\vec{r} = \hat{i}+\hat{j}+\lambda\,(2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}) \qquad \text{... (1)}$$

અને $\vec{r} = 2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}+\mu\,(3\hat{i}-5\hat{j}+2\hat{k})$ છે. ... (2)

આ બે રેખાઓ વચ્ચેનું લઘુતમ અંતર શોધો.

ઉકેલ : (1) અને (2) ને અનુક્રમે $\vec{r} = \vec{a_1}+\lambda\vec{b_1}$ અને $\vec{r} = \vec{a_2}+\mu\vec{b_2}$ સાથે સરખાવતાં, આપણને

$\vec{a_1} = \hat{i}+\hat{j}$, $\qquad \vec{b_1} = 2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$

$\vec{a_2} = 2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$ અને $\vec{b_2} = 3\hat{i}-5\hat{j}+2\hat{k}$ મળે.

માટે $\vec{a_2}-\vec{a_1} = \hat{i}-\hat{k}$

અને
$$\vec{b_1}\times\vec{b_2} = (2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k})\times(3\hat{i}-5\hat{j}+2\hat{k})$$
$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= 3\hat{i}-\hat{j}-7\hat{k}$$

તેથી $\left|\vec{b_1}\times\vec{b_2}\right| = \sqrt{9+1+49} = \sqrt{59}$

આથી, આપેલી રેખાઓ વચ્ચેનું લઘુતમ અંતર

$$d = \left|\frac{(\vec{b_1}\times\vec{b_2})\cdot(\vec{a_2}-\vec{a_1})}{\left|\vec{b_1}\times\vec{b_2}\right|}\right| = \left|\frac{3-0+7}{\sqrt{59}}\right| = \frac{10}{\sqrt{59}}$$

ઉદાહરણ 12 : રેખા l_1 અને l_2

$$\vec{r} = \hat{i}+2\hat{j}-4\hat{k}+\lambda\,(2\hat{i}+3\hat{j}+6\hat{k})$$

અને $\vec{r} = 3\hat{i}+3\hat{j}-5\hat{k}+\mu\,(2\hat{i}+3\hat{j}+6\hat{k})$ વચ્ચેનું અંતર શોધો.

ઉકેલ : બે રેખાઓ સમાંતર છે. (શા માટે ?)

આપણી પાસે $\vec{a_1} = \hat{i}+2\hat{j}-4\hat{k}$, $\vec{a_2} = 3\hat{i}+3\hat{j}-5\hat{k}$ અને $\vec{b} = 2\hat{i}+3\hat{j}+6\hat{k}$ છે.

આથી, રેખાઓ વચ્ચેનું અંતર

$$d = \left|\frac{\vec{b}\times(\vec{a_2}-\vec{a_1})}{|\vec{b}|}\right| = \left|\frac{\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\sqrt{4+9+36}}\right|$$

$$= \frac{\left|-9\hat{i} + 14\hat{j} - 4\hat{k}\right|}{\sqrt{49}} = \frac{\sqrt{293}}{\sqrt{49}} = \frac{\sqrt{293}}{7}$$

સ્વાધ્યાય 11.2

1. સાબિત કરો કે $\frac{12}{13}, \frac{-3}{13}, \frac{-4}{13}; \frac{4}{13}, \frac{12}{13}, \frac{3}{13}; \frac{3}{13}, \frac{-4}{13}, \frac{12}{13}$ દિક્કોસાઇનવાળી ત્રણ રેખાઓ પરસ્પર લંબ છે.

2. સાબિત કરો કે (1, –1, 2), (3, 4, –2) બિંદુઓમાંથી પસાર થતી રેખા, (0, 3, 2) અને (3, 5, 6) બિંદુઓમાંથી પસાર થતી રેખાને લંબ છે.

3. સાબિત કરો કે (4, 7, 8), (2, 3, 4) બિંદુઓમાંથી પસાર થતી રેખા, (–1, –2, 1), (1, 2, 5) બિંદુઓમાંથી પસાર થતી રેખાને સમાંતર છે.

4. બિંદુ (1, 2, 3) માંથી પસાર થતી અને સદિશ $3\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$ ને સમાંતર રેખાનું સમીકરણ શોધો.

5. જેનો સ્થાનસદિશ $2\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$ હોય તેવા બિંદુમાંથી પસાર થતી અને $\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ દિશાવાળી રેખાનું સમીકરણ સદિશ અને કાર્તેઝિય સ્વરૂપમાં મેળવો.

6. બિંદુ (–2, 4, –5) માંથી પસાર થતી અને રેખા $\frac{x+3}{3} = \frac{y-4}{5} = \frac{z+8}{6}$ ને સમાંતર રેખાનું કાર્તેઝિય સમીકરણ શોધો.

7. રેખાનું કાર્તેઝિય સમીકરણ $\frac{x-5}{3} = \frac{y+4}{7} = \frac{z-6}{2}$ છે. તેનું સદિશ સ્વરૂપ લખો.

8. ઊગમબિંદુ અને (5, –2, 3) માંથી પસાર થતી રેખાનું સદિશ અને કાર્તેઝિય સમીકરણ શોધો.

9. બિંદુઓ (3, –2, –5), (3, –2, 6) માંથી પસાર થતી રેખાનું સદિશ અને કાર્તેઝિય સમીકરણ શોધો.

10. નીચે આપેલી રેખાઓની જોડ વચ્ચેનો ખૂણો શોધો :

(i) $\vec{r} = 2\hat{i} - 5\hat{j} + \hat{k} + \lambda(3\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k})$ અને

$\vec{r} = 7\hat{i} - 6\hat{k} + \mu(\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k})$

(ii) $\vec{r} = 3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k} + \lambda(\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k})$ અને

$\vec{r} = 2\hat{i} - \hat{j} - 56\hat{k} + \mu(3\hat{i} - 5\hat{j} - 4\hat{k})$

11. નીચેની રેખાઓની જોડ વચ્ચેનો ખૂણો શોધો :

(i) $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+3}{-3}$ અને $\frac{x+2}{-1} = \frac{y-4}{8} = \frac{z-5}{4}$

(ii) $\frac{x}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$ અને $\frac{x-5}{4} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{8}$

12. રેખાઓ $\frac{1-x}{3} = \frac{7y-14}{2p} = \frac{z-3}{2}$ અને $\frac{7-7x}{3p} = \frac{y-5}{1} = \frac{6-z}{5}$ પરસ્પર લંબ હોય, તો p નું મૂલ્ય શોધો.

13. દર્શાવો કે રેખાઓ $\frac{x-5}{7} = \frac{y+2}{-5} = \frac{z}{1}$ અને $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ પરસ્પર લંબ છે.

14. રેખાઓ $\vec{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}) + \lambda(\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$ અને

$\vec{r} = 2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k} + \mu(2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k})$ વચ્ચેનું લઘુતમ અંતર શોધો.

15. રેખાઓ $\frac{x+1}{7} = \frac{y+1}{-6} = \frac{z+1}{1}$ અને $\frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z-7}{1}$ વચ્ચેનું લઘુતમ અંતર શોધો.

16. જે રેખાઓનાં સદિશ સમીકરણ

$$\vec{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) + \lambda(\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k})$$

અને $\vec{r} = 4\hat{i} + 5\hat{j} + 6\hat{k} + \mu(2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k})$ હોય, તે રેખાઓ વચ્ચેનું લઘુતમ અંતર શોધો.

17. જે બે રેખાનાં સદિશ સમીકરણ

$\vec{r} = (1-t)\hat{i} + (t-2)\hat{j} + (3-2t)\hat{k}$ અને

$\vec{r} = (s+1)\hat{i} + (2s-1)\hat{j} - (2s+1)\hat{k}$ હોય, તે રેખાઓ વચ્ચેનું લઘુતમ અંતર શોધો.

11.6 સમતલ

જો નીચેનામાંથી કોઈ પણ એક જ્ઞાત હોય, તો અનન્ય સમતલનું નિર્માણ થાય :

(i) સમતલ પરનો અભિલંબ અને તેનું ઊગમબિંદુથી અંતર આપેલું હોય, અર્થાત્, સમતલનું અભિલંબ સ્વરૂપમાં સમીકરણ.

(ii) તે એક બિંદુમાંથી પસાર થાય અને આપેલ દિશાને લંબ હોય.

(iii) તે આપેલાં ત્રણ અસમરેખ બિંદુઓમાંથી પસાર થતું હોય.

હવે આપણે સમતલનાં સદિશ અને કાર્તેઝિય સમીકરણ શોધીશું.

11.6.1 અભિલંબ સ્વરૂપમાં સમતલનું સમીકરણ

જેનું ઊગમબિંદુથી લંબઅંતર d $(d \neq 0)$ હોય તેવું એક સમતલ લઈએ. (આકૃતિ 11.10)

જો ઊગમબિંદુથી સમતલ પરનો અભિલંબ $\overrightarrow{ON}$ હોય અને $\hat{n}$ એ એકમ અભિલંબ સદિશ હોય, તો $\overrightarrow{ON} = d\hat{n}$ થાય. ધારો કે P સમતલ પરનું કોઈ પણ બિંદુ છે. આથી,

$\overrightarrow{NP}$ એ $\overrightarrow{ON}$ પરનો લંબ થશે.

માટે, $\overrightarrow{NP} \cdot \overrightarrow{ON} = 0$ ... (1)

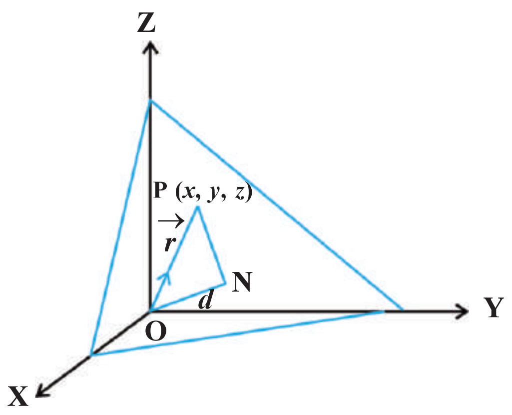
બિંદુ P નો સ્થાન સદિશ $\vec{r}$ લેતાં,

$\overrightarrow{NP} = \vec{r} - d\hat{n}$ $(\overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{OP}$ હોવાથી$)$

માટે, (1) પરથી

$(\vec{r} - d\hat{n}) \cdot d\hat{n} = 0$ મળે.

અથવા $(\vec{r} - d\hat{n}) \cdot \hat{n} = 0$ $(d \neq 0)$



આકૃતિ 11.10

અથવા $\vec{r} \cdot \hat{n} - d\hat{n} \cdot \hat{n} = 0$

અર્થાત્, $\vec{r} \cdot \hat{n} = d$ $(\hat{n} \cdot \hat{n} = 1$ હોવાથી$)$ ... (2)

આ અભિલંબ સ્વરૂપમાં સદિશ સ્વરૂપે સમતલનું સમીકરણ છે.

કાર્તેઝિય સ્વરૂપ

જો $\hat{n}$ એ સમતલને લંબ એકમ સદિશ હોય, તો સમીકરણ (2) એ સમતલનું સદિશ સમીકરણ છે. જો P (x, y, z) એ સમતલનું કોઈ પણ બિંદુ હોય, તો

$\overrightarrow{OP} = \vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ થશે.

$\hat{n}$ ની દિક્‌કોસાઈન l, m, n લેતાં,

$\hat{n} = l\hat{i} + m\hat{j} + n\hat{k}$ થશે.

તેથી, (2) પરથી

$$(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) \cdot (l\hat{i} + m\hat{j} + n\hat{k}) = d$$

અર્થાત્, $lx + my + nz = d$ ... (3)

આ અભિલંબ સ્વરૂપમાં સમતલનું કાર્તેઝિય સમીકરણ છે.

☞ નોંધ જો $\vec{r} \cdot (a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}) = d$ સમતલનું સદિશ સમીકરણ હોય, તો $ax + by + cz = d$ સમતલનું કાર્તેઝિય સમીકરણ થશે, જ્યાં a, b અને c એ સમતલના અભિલંબના દિક્‌ગુણોત્તર છે.

ઉદાહરણ 13 : જેનું ઊગમબિંદુથી અંતર $\frac{6}{\sqrt{29}}$ હોય અને જેની પર ઊગમબિંદુમાંથી સમતલ પરનો અભિલંબ $2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$ હોય તેવા સમતલનું સદિશ સમીકરણ શોધો.

ઉકેલ : અહીં $\vec{n} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$ છે.

તેથી $\hat{n} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}}{\sqrt{4+9+16}} = \frac{2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}}{\sqrt{29}}$

આથી, સમતલનું માગેલું સમીકરણ,

$$\vec{r} \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{29}}\hat{i} + \frac{-3}{\sqrt{29}}\hat{j} + \frac{4}{\sqrt{29}}\hat{k}\right) = \frac{6}{\sqrt{29}}$$

ઉદાહરણ 14 : ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થતા અને $\vec{r}\cdot(6\hat{i} - 3\hat{j} - 2\hat{k}) + 1 = 0$ સમતલને લંબ એકમ સદિશની દિક્કોસાઈન શોધો.

ઉકેલ : આપેલ સમીકરણને

$\vec{r}\cdot(-6\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}) = 1$ સ્વરૂપમાં લખી શકાય. ... (1)

હવે, $|-6\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}| = \sqrt{36+9+4} = 7$

તેથી, (1) ની બંને તરફ 7 વડે ભાગતાં, આપણને

$$\vec{r}\cdot\left(\frac{-6}{7}\hat{i} + \frac{3}{7}\hat{j} + \frac{2}{7}\hat{k}\right) = \frac{1}{7}$$

આ સમીકરણ $\vec{r}\cdot\hat{n} = d$ સ્વરૂપમાં સમતલનું સમીકરણ છે.

આ દર્શાવે છે કે $\hat{n} = \frac{-6}{7}\hat{i} + \frac{3}{7}\hat{j} + \frac{2}{7}\hat{k}$ ઊગમબિંદુમાંથી સમતલ પરનો લંબ એકમ સદિશ છે. આથી, તેની દિક્કોસાઈન $\frac{-6}{7}, \frac{3}{7}, \frac{2}{7}$ થશે.

ઉદાહરણ 15 : ઊગમબિંદુથી સમતલ $2x - 3y + 4z - 6 = 0$ નું અંતર શોધો.

ઉકેલ : સમતલના અભિલંબના દિક્ગુણોત્તર 2, –3, 4 હોવાથી, તેની દિક્કોસાઈન

$$\frac{2}{\sqrt{(2)^2+(-3)^2+(4)^2}}, \frac{-3}{\sqrt{(2)^2+(-3)^2+(4)^2}}, \frac{4}{\sqrt{(2)^2+(-3)^2+(4)^2}} \text{ અર્થાત્ } \frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{-3}{\sqrt{29}}, \frac{4}{\sqrt{29}}$$

આથી, સમીકરણ $2x - 3y + 4z - 6 = 0$ અર્થાત્, $2x - 3y + 4z = 6$ ને $\sqrt{29}$ વડે ભાગતાં, આપણને

$\frac{2}{\sqrt{29}}x + \frac{-3}{\sqrt{29}}y + \frac{4}{\sqrt{29}}z = \frac{6}{\sqrt{29}}$ મળે.

ઊગમબિંદુથી સમતલનું અંતર d હોય ત્યારે, આ સમીકરણ $lx + my + nz = d$ સ્વરૂપમાં છે. તેથી, ઊગમબિંદુથી સમતલનું અંતર $\frac{6}{\sqrt{29}}$ છે.

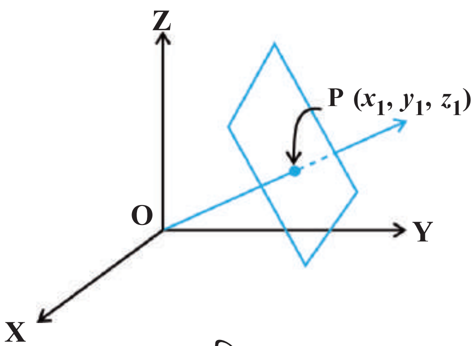
ઉદાહરણ 16 : ઊગમબિંદુથી સમતલ $2x - 3y + 4z - 6 = 0$ પર દોરેલા લંબના લંબપાદના યામ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે ઊગમબિંદુથી સમતલ પરના લંબના લંબપાદ P ના યામ (x_1, y_1, z_1) છે. (જુઓ આકૃતિ 11.11.)

આથી રેખા OP ના દિક્ગુણોત્તર x_1, y_1, z_1 છે.

અભિલંબ સ્વરૂપમાં સમતલનું સમીકરણ લખતાં, આપણને

$\frac{2}{\sqrt{29}}x - \frac{3}{\sqrt{29}}y + \frac{4}{\sqrt{29}}z = \frac{6}{\sqrt{29}}$ મળે.



આકૃતિ 11.11

અહીં $\frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{-3}{\sqrt{29}}, \frac{4}{\sqrt{29}}$ એ OP ની દિક્‌કોસાઈન છે.

રેખાની દિક્‌કોસાઈન અને દિક્‌ગુણોત્તર સમપ્રમાણમાં હોવાથી, આપણને

$$\frac{x_1}{\frac{2}{\sqrt{29}}} = \frac{y_1}{\frac{-3}{\sqrt{29}}} = \frac{z_1}{\frac{4}{\sqrt{29}}} = k$$

અર્થાત્, $x_1 = \frac{2k}{\sqrt{29}}, y_1 = \frac{-3k}{\sqrt{29}}, z_1 = \frac{4k}{\sqrt{29}}$ મળે.

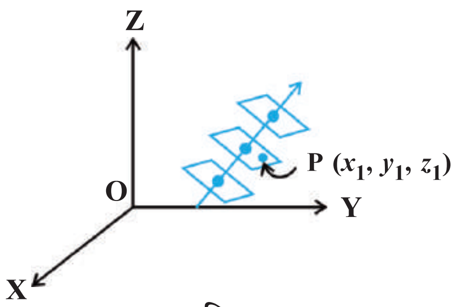
સમતલના સમીકરણમાં આ મૂકતાં, આપણને $k = \frac{6}{\sqrt{29}}$ મળે.

આથી, લંબપાદ $\left(\frac{12}{29}, \frac{-18}{29}, \frac{24}{29}\right)$ થાય.

☞ **નોંધ** જો અભિલંબનું ઊગમબિંદુથી અંતર d અને ઊગમબિંદુમાંથી સમતલ પર દોરેલા અભિલંબની દિક્‌કોસાઈન l, m, n હોય, તો સમતલનો લંબપાદ (ld, md, nd) થાય.

11.6.2 આપેલા સદિશને લંબ અને આપેલા બિંદુમાંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ

અવકાશમાં આપેલા સદિશને લંબ હોય તેવા અનેક સમતલ હોય છે, પરંતુ આ શરત અનુસાર આપેલા બિંદુ P (x_1, y_1, z_1) માંથી પસાર થાય તેવું માત્ર એક સમતલ અસ્તિત્વ ધરાવે છે. (જુઓ આકૃતિ 11.12)



આકૃતિ 11.12

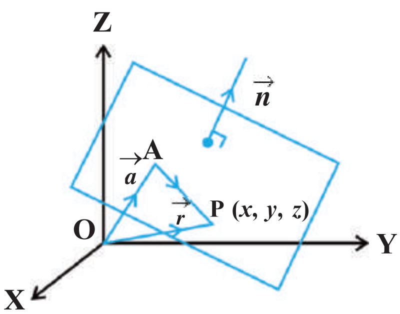
ધારો કે એક સમતલ $\vec{a}$ સ્થાન સદિશવાળા બિંદુ A માંથી પસાર થાય છે અને $\vec{n}$ ને લંબ છે.

ધારો કે સમતલના કોઈ પણ બિંદુ P (x, y, z) નો સ્થાનસદિશ $\vec{r}$ છે. (આકૃતિ 11.13)

$\overrightarrow{AP}$ એ $\vec{n}$ ને લંબ હોય તો અને તો જ બિંદુ P સમતલ પર આપેલું છે. અર્થાત્, $\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} = 0$ એ P સમતલમાં હોવા માટેની આવશ્યક અને પર્યાપ્ત શરત છે.

પરંતુ $\overrightarrow{AP} = \vec{r} - \vec{a}$ હોવાથી $(\vec{r} - \vec{a}) \cdot \vec{n} = 0$ ... (1)

સમતલનું સદિશ સમીકરણ છે.



આકૃતિ 11.13

કાર્તેઝિય સ્વરૂપ

ધારો કે આપેલું બિંદુ A એ (x_1, y_1, z_1) છે અને P એ (x, y, z) છે તથા $\vec{n}$ ની દિક્‌કોસાઈન a, b અને c છે.

તેથી, $\vec{a} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}$, $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ અને $\vec{n} = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$

હવે $(\vec{r} - \vec{a}) \cdot \vec{n} = 0$

આથી $\left[(x-x_1)\hat{i} + (y-y_1)\hat{j} + (z-z_1)\hat{k}\right] \cdot \left(a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}\right) = 0$

અર્થાત્, $a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$ માંગેલ સમીકરણ છે.

ઉદાહરણ 17 : બિંદુ (5, 2, –4) માંથી પસાર થતા અને 2, 3, –1 દિક્ગુણોત્તરવાળી રેખાને લંબ સમતલનું સદિશ અને કાર્તેઝિય સમીકરણ શોધો.

ઉકેલ : બિંદુ (5, 2, –4)નો સ્થાન સદિશ $\vec{a} = 5\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}$ અને સમતલને લંબ અભિલંબ સદિશ $\vec{n} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ છે.

તેથી, સમતલનું સદિશ સમીકરણ $(\vec{r} - \vec{a}) \cdot \vec{n} = 0$

અથવા $\left[\vec{r} - (5\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k})\right] \cdot (2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}) = 0$ થાય. ...(1)

(1) ને કાર્તેઝિય સ્વરૂપમાં ફેરવતાં, આપણને

$$\left[(x-5)\hat{i} + (y-2)\hat{j} + (z+4)\hat{k}\right] \cdot (2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}) = 0$$

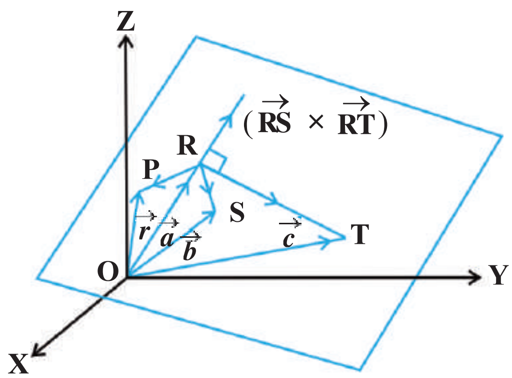
અથવા $2(x - 5) + 3(y - 2) - 1(z + 4) = 0$

અર્થાત્ $2x + 3y - z = 20$ ...(2)

આ માંગેલ સમતલનું કાર્તેઝિય સમીકરણ છે.

11.6.3 ત્રણ અસમરેખ બિંદુઓમાંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ

સમતલના ત્રણ અસમરેખ બિંદુઓ R, S અને T ના સ્થાન સદિશ અનુક્રમે $\vec{a}$, $\vec{b}$ અને $\vec{c}$ છે (આકૃતિ 11.14).



આકૃતિ 11.14

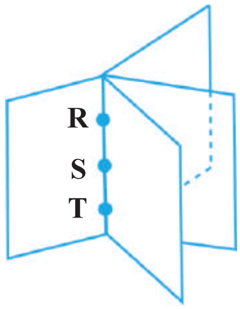
સદિશો $\overrightarrow{RS}$ અને $\overrightarrow{RT}$ આપેલા સમતલમાં છે. આથી, $\overrightarrow{RS} \times \overrightarrow{RT}$ એ બિંદુઓ R, S અને T ને સમાવતા સમતલને લંબ સદિશ છે. ધારો કે સમતલના કોઈ પણ બિંદુ P નો સ્થાન સદિશ $\vec{r}$ છે. તેથી, R માંથી પસાર થતા અને સદિશ $\overrightarrow{RS} \times \overrightarrow{RT}$ ને લંબ સમતલનું સમીકરણ

$$(\vec{r}-\vec{a}) \cdot (\overrightarrow{RS} \times \overrightarrow{RT}) = 0$$

અથવા $$(\vec{r}-\vec{a}) \cdot \left[\left(\vec{b}-\vec{a}\right)\times\left(\vec{c}-\vec{a}\right)\right] = 0 \quad \text{... (1)}$$

આ સમીકરણ ત્રણ અસમરેખ બિંદુઓમાંથી પસાર થતા સમતલનું સદિશ સ્વરૂપમાં સમીકરણ છે.

☞ નોંધ ત્રણ બિંદુઓ અસમરેખ છે તેમ શા માટે કહેવું જરૂરી છે ?
જો ત્રણ બિંદુઓ એક જ રેખા પર હોય, તો આ બિંદુઓને સમાવતાં અનેક સમતલ મળશે. (આકૃતિ 11.15).



આકૃતિ 11.15

જ્યાં રેખામાં સમાવિષ્ટ બિંદુઓ R, S અને T પુસ્તકના બંધનના સભ્યો હોય, તે રીતે આ સમતલો પુસ્તકના પૃષ્ઠને સમકક્ષ હોય છે.

કાર્તેઝિય સ્વરૂપ

ધારો કે બિંદુઓ R, S અને T ના યામ અનુક્રમે (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) અને (x_3, y_3, z_3) છે. $\vec{r}$ સ્થાન સદિશવાળા સમતલ પરના કોઈ પણ બિંદુ P ના યામ (x, y, z) છે.

તેથી $$\overrightarrow{RP} = (x-x_1)\hat{i}+(y-y_1)\hat{j}+(z-z_1)\hat{k}$$

$$\overrightarrow{RS} = (x_2-x_1)\hat{i}+(y_2-y_1)\hat{j}+(z_2-z_1)\hat{k}$$

$$\overrightarrow{RT} = (x_3-x_1)\hat{i}+(y_3-y_1)\hat{j}+(z_3-z_1)\hat{k}$$

આ કિંમતો સદિશ સ્વરૂપવાળા સમીકરણ (1) માં મૂકતાં અને નિશ્ચાયક સ્વરૂપમાં તેમનું નિરૂપણ કરતાં, આપણને

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0 \text{ મળે.}$$

આ સમીકરણ ત્રણ અસમરેખ બિંદુઓ (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) અને (x_3, y_3, z_3) માંથી પસાર થતા સમતલનું કાર્તેઝિય સ્વરૂપમાં સમીકરણ છે.

ઉદાહરણ 18 : બિંદુઓ R (2, 5, –3), S (–2, –3, 5) અને T (5, 3, –3) માંથી પસાર થતા સમતલનું સદિશ સમીકરણ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે $\vec{a} = 2\hat{i} + 5\hat{j} - 3\hat{k}$, $\vec{b} = -2\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$, $\vec{c} = 5\hat{i} + 3\hat{j} - 3\hat{k}$ છે.

તો $\vec{a}$, $\vec{b}$ અને $\vec{c}$ માંથી પસાર થતા સમતલનું સદિશ સમીકરણ

$(\vec{r}-\vec{a})\cdot(\overrightarrow{RS}\times\overrightarrow{RT})=0$ (શા માટે ?)

અથવા $(\vec{r}-\vec{a})\cdot\left[(\vec{b}-\vec{a})\times(\vec{c}-\vec{a})\right]=0$

અર્થાત્ $\left[\vec{r}-(2\hat{i}+5\hat{j}-3\hat{k})\right]\cdot\left[(-4\hat{i}-8\hat{j}+8\hat{k})\times(3\hat{i}-2\hat{j})\right]=0$

11.6.4 સમતલના સમીકરણનું અંતઃખંડ સ્વરૂપ

આ વિભાગમાં, આપણે સમતલ દ્વારા યામાક્ષો પર બનેલા અંતઃખંડના સ્વરૂપમાં સમતલના સમીકરણને તારવીશું. ધારો કે સમતલનું સમીકરણ

$Ax + By + Cz + D = 0$ છે. $(D \neq 0)$ ...(1)

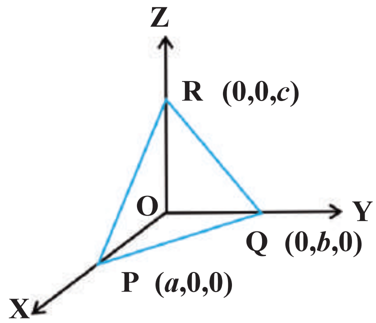
ધારો કે સમતલ x-અક્ષ, y-અક્ષ અને z-અક્ષ પર અનુક્રમે અંતઃખંડ a, b, c બનાવે છે. $a, b, c \neq 0$ (આકૃતિ 11.16)

આથી, સમતલ x-અક્ષ, y-અક્ષ અને z-અક્ષને અનુક્રમે $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, $(0, 0, c)$ માં છેદે છે.

તેથી $Aa + D = 0$ અથવા $A = \frac{-D}{a}$

$Bb + D = 0$ અથવા $B = \frac{-D}{b}$

$Cc + D = 0$ અથવા $C = \frac{-D}{c}$



આકૃતિ 11.16

આ કિંમતો સમતલના સમીકરણ (1) માં મૂકી અને સાદું રૂપ આપતાં, આપણને

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ મળે. ... (2)

આ સમીકરણ સમતલનું અંતઃખંડ સ્વરૂપમાં માંગેલું સમીકરણ છે.

ઉદાહરણ 19 : જે સમતલના x-અક્ષ, y-અક્ષ, z-અક્ષ પરના અંતઃખંડ અનુક્રમે 2, 3 અને 4 હોય, તે સમતલનું સમીકરણ મેળવો.

ઉકેલ : સમતલનું સમીકરણ

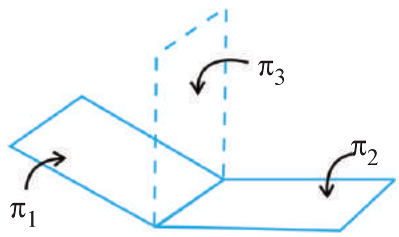
$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ છે. ... (1)

અહીં $a = 2, b = 3, c = 4$

a, b, c નાં મૂલ્ય (1)માં મૂકતાં, આપણને સમતલનું માંગેલ સમીકરણ

$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$ અથવા $6x + 4y + 3z = 12$ મળે.

11.6.5 આપેલા બે સમતલના છેદમાંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ



આકૃતિ 11.17

π_1 અને π_2 અનુક્રમે $\vec{r}\cdot\hat{n}_1 = d_1$ અને $\vec{r}\cdot\hat{n}_2 = d_2$ સમીકરણવાળા બે સમતલો છે. સમતલોની છેદરેખા પરના કોઈ પણ બિંદુનો સ્થાનસદિશ બંને સમીકરણોનું સમાધાન કરશે. (આકૃતિ 11.17)

જો રેખા પરના બિંદુનો સ્થાનસદિશ $\vec{t}$ હોય, તો $\vec{t}\cdot\hat{n_1} = d_1$ અને $\vec{t}\cdot\hat{n_2} = d_2$

તેથી, λ ના પ્રત્યેક વાસ્તવિક મૂલ્ય માટે, આપણને $\vec{t}\cdot\left(\hat{n_1}+\lambda\hat{n_2}\right) = d_1 + \lambda\, d_2$ મળે.

λ સ્વૈર હોવાથી, રેખા પરનું પ્રત્યેક બિંદુ તેનું સમાધાન કરે છે.

આથી, સમીકરણ $\vec{r}\cdot\left(\vec{n}_1+\lambda\vec{n}_2\right) = d_1 + \lambda d_2$ એ એક સમતલ π_3 દર્શાવે છે. π_1 અને π_2 બંનેના સમીકરણનું સમાધાન કરે તો કોઈ પણ સદિશ $\vec{r}$ એ π_3ના સમીકરણનું પણ સમાધાન કરે છે, અર્થાત્, સમતલો $\vec{r}\cdot\vec{n_1} = d_1$ અને $\vec{r}\cdot\vec{n_2} = d_2$ ના છેદમાંથી પસાર થતા કોઈ પણ સમતલનું સમીકરણ

$$\vec{r}\cdot\left(\vec{n}_1+\lambda\vec{n}_2\right) = d_1+\lambda\, d_2 \text{ છે.} \qquad \text{... (1)}$$

નોંધ : ખરેખર તો જો $\vec{n_1} \neq -\lambda\vec{n_2}$ તો $\vec{r}\cdot\vec{n_1} = d_1$ અને $\vec{r}\cdot\vec{n_2} = d_2$ ના છેદમાંથી પસાર થતા કોઈક સમતલનું આ સમીકરણ છે. આ સમીકરણ આવો કોઈ પણ કે પ્રત્યેક સમતલ દર્શાવે છે તે સાબિત કરવું બાકી રહે છે.

કાર્તેઝિય સ્વરૂપ

કાર્તેઝિય પદ્ધતિમાં, ધારો કે

$$\vec{n_1} = a_1\hat{i} + b_1\hat{j} + c_1\hat{k}$$
$$\vec{n_2} = a_2\hat{i} + b_2\hat{j} + c_2\hat{k}$$
$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \text{ છે.}$$

અને તેથી (1)

$$(a_1 + \lambda a_2)x + (b_1 + \lambda b_2)y + (c_1 + \lambda c_2)z = d_1 + \lambda d_2$$

અથવા $\boldsymbol{(a_1x + b_1y + c_1z - d_1) + \lambda(a_2x + b_2y + c_2z - d_2) = 0}$ બનશે. ... (2)

આ સમીકરણ λ ની પ્રત્યેક કિંમત માટે આપેલા સમતલોના છેદમાંથી પસાર થતા માંગેલા સમતલના સમીકરણનું કાર્તેઝિય સ્વરૂપ છે.

ઉદાહરણ 20 : સમતલો $\vec{r}\cdot(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}) = 6$ અને $\vec{r}\cdot(2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}) = -5$ ના છેદમાંથી તથા બિંદુ (1, 1, 1) માંથી પસાર થતા સમતલનું સદિશ સમીકરણ શોધો.

ઉકેલ : અહીં $\vec{n_1} = \hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ અને $\vec{n_2} = 2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}$

તથા $d_1 = 6$ અને $d_2 = -5$ છે.

આથી, કોઈક વાસ્તવિક સંખ્યા λ માટે $\vec{r}\cdot\left(\vec{n}_1+\lambda\vec{n}_2\right) = d_1 + \lambda d_2$ નો ઉપયોગ કરતાં, આપણને

$$\vec{r}\cdot[\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}+\lambda(2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k})] = 6 - 5\lambda,\ \lambda \in \mathrm{R} \qquad \text{... (1)}$$

$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ લેતાં,

$$\left(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}\right) \cdot [(1+2\lambda)\hat{i} + (1+3\lambda)\hat{j} + (1+4\lambda)\hat{k}] = 6 - 5\lambda$$

અથવા $[(1+2\lambda)x + (1+3\lambda)y + (1+4\lambda)z] = 6 - 5\lambda$

અથવા $(x+y+z-6) + \lambda(2x+3y+4z+5) = 0$ ... (2)

સમતલ, બિંદુ (1, 1, 1) માંથી પસાર થાય છે તેમ આપ્યું છે. આથી (1, 1, 1) એ (2)નું સમાધાન કરશે.

અર્થાત્ $(1 + 1 + 1 - 6) + \lambda\,(2 + 3 + 4 + 5) = 0$

આપણને $\lambda = \frac{3}{14}$ મળશે.

λ નું મૂલ્ય (1)માં મૂકતાં,

$$\vec{r} \cdot \left[\left(1+\frac{3}{7}\right)\hat{i} + \left(1+\frac{9}{14}\right)\hat{j} + \left(1+\frac{6}{7}\right)\hat{k}\right] = 6 - \frac{15}{14}$$

અથવા $$\vec{r} \cdot \left(\frac{10}{7}\hat{i} + \frac{23}{14}\hat{j} + \frac{13}{7}\hat{k}\right) = \frac{69}{14}$$

અથવા $\vec{r} \cdot \left(20\hat{i} + 23\hat{j} + 26\hat{k}\right) = 69$ મળે.

આ સમીકરણ માંગેલ સમતલનું સદિશ સમીકરણ છે.

11.7 બે રેખા સમતલીય બને તેની શરત

ધારો કે $\vec{r} = \vec{a_1} + \lambda\,\vec{b_1}$ ... (1)

અને $\vec{r} = \vec{a_2} + \mu\,\vec{b_2}$ આપેલ રેખાઓ છે. ... (2)

રેખા (1) $\vec{a_1}$ સ્થાનસદિશવાળા બિંદુ A માંથી પસાર થાય છે અને $\vec{b_1}$ ને સમાંતર છે.

રેખા (2) $\vec{a_2}$ સ્થાનસદિશવાળા બિંદુ B માંથી પસાર થાય છે અને $\vec{b_2}$ ને સમાંતર છે.

હવે, $\overrightarrow{AB} = \vec{a_2} - \vec{a_1}$

જો $\overrightarrow{AB}$ એ $(\vec{b_1} \times \vec{b_2})$ ને લંબ હોય, તો અને તો જ આપેલ રેખાઓ સમતલીય છે.

અર્થાત્ $\overrightarrow{AB} \cdot (\vec{b_1} \times \vec{b_2}) = 0$ અથવા $(\vec{a_2} - \vec{a_1}) \cdot (\vec{b_1} \times \vec{b_2}) = 0$ ... (3)

રેખાઓ સમતલીય હોવાની શરત છે.

કાર્તેઝિય સ્વરૂપ

ધારો કે બિંદુઓ A અને B ના યામ અનુક્રમે (x_1, y_1, z_1) અને (x_2, y_2, z_2) છે.

$\vec{b_1}$ અને $\vec{b_2}$ ના દિક્ગુણોત્તર અનુક્રમે a_1, b_1, c_1 અને a_2, b_2, c_2 છે.

આથી, $\vec{AB} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$

$\vec{b_1} = a_1\hat{i} + b_1\hat{j} + c_1\hat{k}$ અને $\vec{b_2} = a_2\hat{i} + b_2\hat{j} + c_2\hat{k}$

જો $\vec{AB} \cdot \left(\vec{b_1} \times \vec{b_2}\right) = 0$ તો અને તો જ આપેલ રેખાઓ સમતલીય છે.

તેને કાર્તેઝિય સ્વરૂપમાં

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0 \text{ સ્વરૂપે દર્શાવી શકાય.} \quad \ldots (4)$$

ઉદાહરણ 21 : સાબિત કરો કે રેખાઓ $\frac{x+3}{-3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-5}{5}$ અને $\frac{x+1}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-5}{5}$ સમતલીય છે.

ઉકેલ : અહીં $x_1 = -3,\ y_1 = 1,\ z_1 = 5,\ a_1 = -3,\ b_1 = 1,\ c_1 = 5$

$x_2 = -1,\ y_2 = 2,\ z_2 = 5,\ a_2 = -1,\ b_2 = 2,\ c_2 = 5$

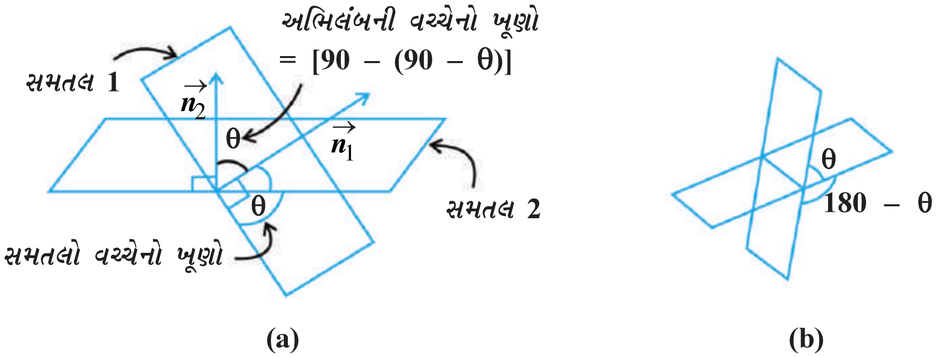
હવે,

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

તેથી રેખાઓ સમતલીય છે.

11.8 બે સમતલ વચ્ચેનો ખૂણો

***વ્યાખ્યા 2 :** બે સમતલ વચ્ચેનો ખૂણો એ તેમના અભિલંબ વચ્ચેનો ખૂણો છે તે રીતે તેને વ્યાખ્યાયિત કરીશું (આકૃતિ 11.18 (a)). નિરીક્ષણ કરો કે જો બે સમતલ વચ્ચેનો ખૂણો θ હોય, તો $180 - \theta$ પણ તેમની વચ્ચેનો ખૂણો થાય (આકૃતિ 11.18 (b)). આપણે તે બે પૈકી લઘુકોણને બે સમતલ વચ્ચેના ખૂણા તરીકે લઈશું.*



આકૃતિ 11.18

જો બે સમતલો $\vec{r} \cdot \vec{n_1} = d_1$ અને $\vec{r} \cdot \vec{n_2} = d_2$ ના અભિલંબ $\vec{n_1}$ અને $\vec{n_2}$ હોય તથા તેમના વચ્ચેનો ખૂણો θ હોય, તો

કોઈ સામાન્ય બિંદુમાંથી (છેદબિંદુમાંથી) સમતલ પર દોરેલા અભિલંબ વચ્ચેનો ખૂણો θ થશે.

આપણને $\cos\theta = \left|\dfrac{\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|}\right|$ મળે.

> ☞ **નોંધ** જો $\vec{n_1}\cdot\vec{n_2} = 0$ હોય, તો સમતલો પરસ્પર લંબ છે અને જો $\vec{n_1}$ અને $\vec{n_2}$ પરસ્પર સમાંતર હોય, તો સમતલો એકબીજાને સમાંતર છે.

કાર્તેઝિય સ્વરૂપ

ધારો કે સમતલો

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \text{ અને } A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

વચ્ચેનો ખૂણો θ છે. આપેલા સમતલના અભિલંબના દિક્‌ગુણોત્તર અનુક્રમે A_1, B_1, C_1 અને A_2, B_2, C_2 છે.

આથી, $\cos\theta = \left|\dfrac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}\right|$

> ☞ **નોંધ**
>
> 1. જો સમતલો પરસ્પર લંબ હોય, તો $\theta = 90^\circ$ અને તેથી $\cos\theta = 0$.
>   આથી, $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$
> 2. જો સમતલો એકબીજાને સમાંતર હોય, તો $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$.

ઉદાહરણ 22 : બે સમતલો $2x + y - 2z = 5$ અને $3x - 6y - 2z = 7$ વચ્ચેનો ખૂણો સદિશની રીતનો ઉપયોગ કરી શોધો.

ઉકેલ : બે સમતલ વચ્ચેનો ખૂણો એટલે કે તેમના અભિલંબ વચ્ચેનો ખૂણો. સમતલના સમીકરણ પરથી તેમના અભિલંબ સદિશ

$$\vec{n_1} = 2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k} \text{ અને } \vec{n_2} = 3\hat{i} - 6\hat{j} - 2\hat{k}$$

આથી, $\cos\theta = \left|\dfrac{\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|}\right| = \dfrac{\left|(2\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k})\cdot(3\hat{i}-6\hat{j}-2\hat{k})\right|}{\sqrt{4+1+4}\sqrt{9+36+4}} = \dfrac{4}{21}$

તેથી, $\theta = \cos^{-1}\dfrac{4}{21}$

ઉદાહરણ 23 : બે સમતલો $3x - 6y + 2z = 7$ અને $2x + 2y - 2z = 5$ વચ્ચેનો ખૂણો શોધો.

ઉકેલ : આપેલ સમતલનાં સમીકરણોને

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \text{ અને } A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \text{ સાથે સરખાવતાં,}$$

આપણને $A_1 = 3,\ B_1 = -6,\ C_1 = 2$

$A_2 = 2,\ B_2 = 2,\ C_2 = -2$ મળે.

$$\cos\theta = \left|\frac{3\times 2+(-6)(2)+(2)(-2)}{\sqrt{(3^2+(-6)^2+(2)^2)}\sqrt{(2^2+2^2+(-2)^2)}}\right|$$

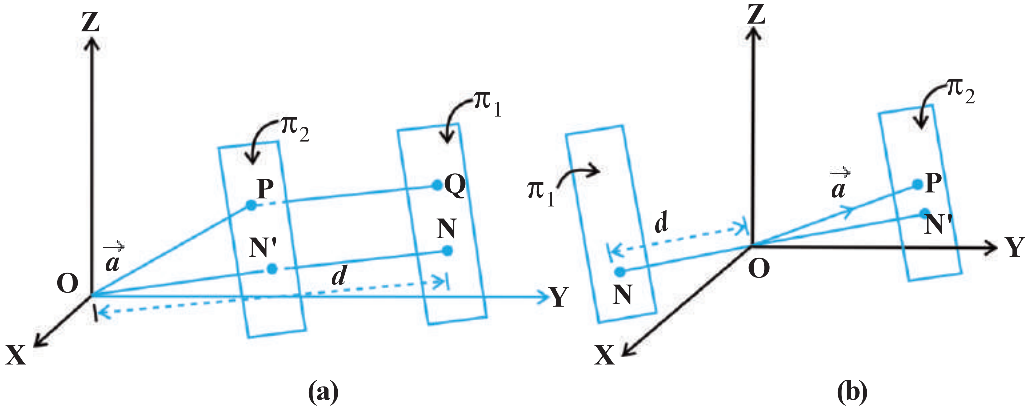
$$= \left|\frac{-10}{7\times 2\sqrt{3}}\right| = \frac{5}{7\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{21}.$$

$$\therefore\ \theta = \cos^{-1}\left(\frac{5\sqrt{3}}{21}\right)$$

11.9 સમતલથી બિંદુનું અંતર

સદિશ સ્વરૂપ :

ધારો કે બિંદુ P નો સ્થાન સદિશ $\vec{a}$ છે અને સમતલ π_1 નું સમીકરણ $\vec{r}\cdot\hat{n} = d$ છે. (આકૃતિ 11.19)



આકૃતિ 11.19

P માંથી π_1ને સમાંતર સમતલ π_2 લો. π_2 નો એકમ અભિલંબ સદિશ $\hat{n}$ છે. આથી, તેનું

સમીકરણ $(\vec{r}-\vec{a})\cdot\hat{n} = 0$ થશે.

એટલે કે, $\vec{r}\cdot\hat{n} = \vec{a}\cdot\hat{n}$

આમ, ઊગમબિંદુથી આ સમતલનું અંતર ON′ એ $|\vec{a}\cdot\hat{n}|$ થશે.

આથી, P નું સમતલ π_1 થી અંતર PQ (આકૃતિ 11.19 (a)) એ

ON – ON′ = $|d - \vec{a}\cdot\hat{n}|$

આ લંબાઈ એ બિંદુથી આપેલા સમતલના લંબની લંબાઈ છે.

આપણે આ જ પ્રમાણેનું પરિણામ (આકૃતિ 11.19 (b)) માટે પણ પ્રસ્થાપિત કરી શકીએ.

☞ **નોંધ**

1. $\vec{n}$ અભિલંબવાળા સમતલ π નું સમીકરણ $\vec{r}\cdot\vec{n} = d$ સ્વરૂપમાં હોય, તો લંબઅંતર $\dfrac{|\vec{a}\cdot\vec{n} - d|}{|\vec{n}|}$ થાય.

2. ઊગમબિંદુ O થી સમતલ $\vec{r}\cdot\vec{n} = d$ નું લંબઅંતર $\dfrac{|d|}{|\vec{n}|}$ છે. ($\vec{a} = \vec{0}$ હોવાથી)

કાર્તેઝિય સ્વરૂપ

આપેલ બિંદુ $P(x_1, y_1, z_1)$ નો સ્થાનસદિશ $\vec{a}$ છે અને આપેલ સમતલનું કાર્તેઝિય સમીકરણ $Ax + By + Cz = D$ છે. આથી,

$$\vec{a} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}$$

$$\vec{n} = A\hat{i} + B\hat{j} + C\hat{k} \text{ થશે.}$$

આથી, નોંધ (1) પરથી, P થી સમતલનું લંબઅંતર

$$= \left|\frac{(x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k})\cdot(A\hat{i} + B\hat{j} + C\hat{k}) - D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\right|$$

$$= \left|\frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 - D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\right|$$

ઉદાહરણ 24 : સમતલ $\vec{r}\cdot(6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}) = 4$ થી બિંદુ (2, 5, –3) નું અંતર શોધો.

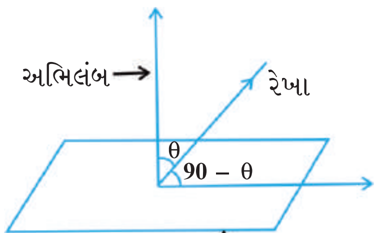
ઉકેલ : અહીં $\vec{a} = 2\hat{i} + 5\hat{j} - 3\hat{k}$, $\vec{n} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ અને $d = 4$

તેથી, આપેલ સમતલથી બિંદુ (2, 5, –3)નું અંતર

$$\frac{|(2\hat{i}+5\hat{j}-3\hat{k})\cdot(6\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k})-4|}{|6\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k}|} = \frac{|12-15-6-4|}{\sqrt{36+9+4}} = \frac{13}{7}$$

11.10 રેખા અને સમતલ વચ્ચેનો ખૂણો

વ્યાખ્યા 3 : રેખા અને સમતલ વચ્ચેનો ખૂણો એ રેખા અને સમતલના અભિલંબ વચ્ચેના ખૂણાનો કોટિકોણ છે. (આકૃતિ 11.20)



આકૃતિ 11.20

સદિશ સ્વરૂપ : રેખાનું સમીકરણ $\vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{b}$ અને સમતલનું સમીકરણ $\vec{r}\cdot\vec{n} = d$ છે, તો રેખા અને સમતલના અભિલંબ વચ્ચેનો ખૂણો θ લેતાં,

$$\cos\theta = \left|\frac{\vec{b}\cdot\vec{n}}{|\vec{b}||\vec{n}|}\right|$$

અને તેથી રેખા અને સમતલ વચ્ચેનો ખૂણો ϕ એ $90 - \theta$ થાય. અર્થાત્, $\sin(90 - \theta) = \cos\theta$

અર્થાત્ $\sin\phi = \left|\frac{\vec{b}\cdot\vec{n}}{|\vec{b}||\vec{n}|}\right|$ **અથવા** $\phi = \sin^{-1}\left|\frac{\vec{b}\cdot\vec{n}}{|\vec{b}||\vec{n}|}\right|$

ઉદાહરણ 25 : રેખા $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-3}{6}$ અને સમતલ $10x + 2y - 11z = 3$ વચ્ચેનો ખૂણો શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે રેખા અને સમતલ વચ્ચેનો ખૂણો ϕ છે.

આપેલ સમીકરણને સદિશ સ્વરૂપમાં ફેરવતાં, આપણને

$$\vec{r} = (-\hat{i} + 3\hat{k}) + \lambda(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$$

અને $\vec{r}\cdot(10\hat{i} + 2\hat{j} - 11\hat{k}) = 3$ મળે.

અહીં $\vec{b} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}$ અને $\vec{n} = 10\hat{i} + 2\hat{j} - 11\hat{k}$

$$\sin\phi = \left|\frac{(2\hat{i}+3\hat{j}+6\hat{k})\cdot(10\hat{i}+2\hat{j}-11\hat{k})}{\sqrt{2^2+3^2+6^2}\sqrt{10^2+2^2+11^2}}\right|$$

$$= \left|\frac{-40}{7\times15}\right| = \left|\frac{-8}{21}\right| = \frac{8}{21} \text{ અથવા } \phi = \sin^{-1}\left(\frac{8}{21}\right)$$

સ્વાધ્યાય 11.3

1. નીચેના પૈકી દરેક પ્રશ્નમાં સમતલના અભિલંબની દિક્કોસાઈન અને સમતલનું ઊગમબિંદુથી અંતર મેળવો.
   (a) $z = 2$ (b) $x + y + z = 1$
   (c) $2x + 3y - z = 5$ (d) $5y + 8 = 0$
2. ઊગમબિંદુથી 7 એકમ અંતરે આવેલા અને જેનો અભિલંબ સદિશ $3\hat{i} + 5\hat{j} - 6\hat{k}$ હોય તેવા સમતલનું સદિશ સમીકરણ શોધો.
3. નીચેના પૈકી પ્રત્યેક સમતલનું કાર્તેઝિય સમીકરણ શોધો :
   (a) $\vec{r}\cdot(\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}) = 2$ (b) $\vec{r}\cdot(2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}) = 1$
   (c) $\vec{r}\cdot((s-2t)\hat{i} + (3-t)\hat{j} + (2s+t)\hat{k}) = 15$
4. નીચેના પૈકી પ્રત્યેક પ્રશ્નમાં ઊગમબિંદુથી સમતલ પર દોરેલા લંબના લંબપાદના યામ શોધો :
   (a) $2x + 3y + 4z - 12 = 0$ (b) $3y + 4z - 6 = 0$
   (c) $x + y + z = 1$ (b) $5y + 8 = 0$

5. નીચેના પૈકી પ્રત્યેક સમતલનાં સદિશ અને કાર્તેઝિય સમીકરણ શોધો :

(a) જે (1, 0, –2) માંથી પસાર થાય અને જેનો અભિલંબ સદિશ $\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ હોય.

(b) જે (1, 4, 6) માંથી પસાર થાય અને જેનો અભિલંબ સદિશ $\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ હોય.

6. નીચેના પૈકી આપેલ પ્રત્યેક પ્રશ્નમાં આપેલાં ત્રણ બિંદુઓમાંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ મેળવો :

(a) (1, 1, –1), (6, 4, –5), (–4, –2, 3)

(b) (1, 1, 0), (1, 2, 1), (–2, 2, –1)

7. સમતલ $2x + y - z = 5$ દ્વારા અક્ષો પર કપાતા અંતઃખંડ શોધો.

8. y-અક્ષ પર 3 અંતઃખંડવાળા અને ZOX સમતલને સમાંતર સમતલનું સમીકરણ શોધો.

9. સમતલો $3x - y + 2z - 4 = 0$ અને $x + y + z - 2 = 0$ ના છેદમાંથી તથા બિંદુ (2, 2, 1) માંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ શોધો.

10. સમતલો $\vec{r} \cdot (2\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}) = 7$ અને $\vec{r} \cdot (2\hat{i} + 5\hat{j} + 3\hat{k}) = 9$ ના છેદમાંથી તથા બિંદુ (2, 1, 3) માંથી પસાર થતા સમતલનું સદિશ સમીકરણ શોધો.

11. સમતલો $x + y + z = 1$ અને $2x + 3y + 4z = 5$ ની છેદરેખામાંથી પસાર થતા તથા સમતલ $x - y + z = 0$ ને લંબ હોય તેવા સમતલનું સમીકરણ શોધો.

12. સમતલના સદિશ સમીકરણ $\vec{r} \cdot (2\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}) = 5$ અને $\vec{r} \cdot (3\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}) = 3$ છે. તેમની વચ્ચેનો ખૂણો શોધો.

13. નીચેના પૈકી પ્રત્યેક પ્રશ્નમાં આપેલા સમતલ સમાંતર છે કે પરસ્પર લંબ છે તે નક્કી કરો અને જો આ પૈકી એક પણ ન હોય, તો તેમની વચ્ચેનો ખૂણો શોધો :

(a) $7x + 5y + 6z + 30 = 0$ અને $3x - y - 10z + 4 = 0$

(b) $2x + y + 3z - 2 = 0$ અને $x - 2y + 5 = 0$

(c) $2x - 2y + 4z + 5 = 0$ અને $3x - 3y + 6z - 1 = 0$

(d) $2x - y + 3z - 1 = 0$ અને $2x - y + 3z + 3 = 0$

(e) $4x + 8y + z - 8 = 0$ અને $y + z - 4 = 0$

14. નીચેના પૈકી પ્રત્યેક પ્રશ્નમાં આપેલા બિંદુનું તેમને અનુરૂપ આપેલા સમતલથી અંતર શોધો :

	બિંદુ	સમતલ
(a)	(0, 0, 0)	$3x - 4y + 12z = 3$
(b)	(3, –2, 1)	$2x - y + 2z + 3 = 0$
(c)	(2, 3, –5)	$x + 2y - 2z = 9$
(d)	(–6, 0, 0)	$2x - 3y + 6z - 2 = 0$

પ્રકીર્ણ ઉદાહરણો

ઉદાહરણ 26 : એક રેખા સમઘનના વિકર્ણો સાથે α, β, γ અને δ ખૂણા બનાવે છે. સાબિત કરો કે

$$cos^2 \alpha + cos^2 \beta + cos^2 \gamma + cos^2 \delta = \frac{4}{3}$$

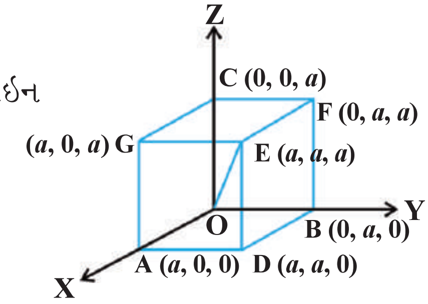
ઉકેલ : સમઘન એ સમાન લંબાઈ, પહોળાઈ અને ઊંચાઈવાળો લંબ સમાંતર ફલક છે. ધારો કે OADB–FEGC એ પ્રત્યેક બાજુની લંબાઈ a એકમ હોય તેવો સમઘન છે. (આકૃતિ 11.21)

OE, AF, BG અને CD તેના ચાર વિકર્ણો છે.

બે બિંદુઓ O અને E ને જોડતી રેખા વિકર્ણ OE છે. તેની દિક્કોસાઇન

$$\frac{a-0}{\sqrt{a^2+a^2+a^2}}, \frac{a-0}{\sqrt{a^2+a^2+a^2}}, \frac{a-0}{\sqrt{a^2+a^2+a^2}}$$

અર્થાત્, $\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$ છે.



આકૃતિ 11.21

આ જ પ્રમાણે AF, BG અને CD ની દિક્કોસાઇન અનુક્રમે $\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$; $\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$ અને $\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}$ છે.

ધારો કે, l, m, n દિક્કોસાઇનવાળી રેખા OE, AF, BG, CD સાથે અનુક્રમે $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ખૂણા બનાવે છે.

$$cos\ \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}\ (l + m + n)\ ;\ cos\ \beta = \frac{1}{\sqrt{3}}\ (-l + m + n)$$

$$cos\ \gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}\ (l - m + n)\ ;\ cos\ \delta = \frac{1}{\sqrt{3}}\ (l + m - n)$$ (શા માટે ?)

વર્ગ કરી સરવાળો કરતાં, આપણને

$cos^2 \alpha + cos^2 \beta + cos^2 \gamma + cos^2 \delta$

$$= \frac{1}{3}[(l + m + n)^2 + (-l + m + n)^2 + (l - m + n)^2 (l + m - n)^2]$$

$$= \frac{1}{3}[4(l^2 + m^2 + n^2)] = \frac{4}{3}$$ મળે. **($l^2 + m^2 + n^2 = 1$ હોવાથી)**

ઉદાહરણ 27 : જે સમતલ $2x + 3y - 2z = 5$ અને $x + 2y - 3z = 8$ પૈકી પ્રત્યેકને લંબ હોય અને જે બિંદુ (1, –1, 2) માંથી પસાર થતો હોય તેવા સમતલનું સમીકરણ શોધો.

ઉકેલ : આપેલા બિંદુમાંથી પસાર થતો સમતલ

$A (x - 1) + B (y + 1) + C (z - 2) = 0$ છે. ... (1)

સમતલો $2x + 3y - 2z = 5$ અને $x + 2y - 3z = 8$ સાથે (1)માં આપેલા સમતલ પર લંબત્વની શરત પ્રયોજતાં,

આપણને 2A + 3B – 2C = 0 અને A +2B – 3C = 0 મળે.

આ સમીકરણોને ઉકેલતાં, આપણને A = – 5C અને B = 4C મળે.

આથી, જરૂરી સમીકરણ

$$-5C\,(x-1) + 4C\,(y+1) + C\,(z-2) = 0$$

અર્થાત્ $5x - 4y - z = 7$ થશે.

ઉદાહરણ 28 : A (3, –1, 2), B (5, 2, 4) અને C (–1, –1, 6) થી બનતા સમતલ અને બિંદુ P (6, 5, 9) વચ્ચેનું અંતર શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે A, B, C સમતલનાં ત્રણ બિંદુ છે. બિંદુ P માંથી સમતલ પર દોરેલો લંબપાદ D છે. PD માંગેલું અંતર થશે. $\overrightarrow{PD}$ એ $\overrightarrow{AP}$ નો $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ પરનો પ્રક્ષેપ છે.

આથી, PD = $\overrightarrow{AP}$ નું $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ ની દિશામાં એકમ સદિશ સાથેનું અંતઃગુણન.

હવે, $\overrightarrow{AP} = 3\hat{i} + 6\hat{j} + 7\hat{k}$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & 2 \\ -4 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 12\hat{i} - 16\hat{j} + 12\hat{k}$$

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ ની દિશામાં એકમ સદિશ $= \dfrac{3\hat{i} - 4\hat{j} + 3\hat{k}}{\sqrt{34}}$

આથી,
$$PD = \left| (3\hat{i} + 6\hat{j} + 7\hat{k}) \cdot \frac{3\hat{i} - 4\hat{j} + 3\hat{k}}{\sqrt{34}} \right|$$
$$= \frac{3\sqrt{34}}{17}$$

વૈકલ્પિક રીત A, B અને C માંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ શોધો અને પછી બિંદુ P થી સમતલના અંતરની ગણતરી કરો.

ઉદાહરણ 29 : સાબિત કરો કે રેખાઓ

$$\frac{x-a+d}{\alpha-\delta} = \frac{y-a}{\alpha} = \frac{z-a-d}{\alpha+\delta}$$

અને
$$\frac{x-b+c}{\beta-\gamma} = \frac{y-b}{\beta} = \frac{z-b-c}{\beta+\gamma}$$ સમતલીય છે.

ઉકેલ :

અહીં,

$x_1 = a - d$ $\qquad x_2 = b - c$

$y_1 = a$ $\qquad y_2 = b$

$z_1 = a + d$ $\qquad z_2 = b + c$

$a_1 = \alpha - \delta$ $\qquad a_2 = \beta - \gamma$

$b_1 = \alpha$ $\qquad b_2 = \beta$

$c_1 = \alpha + \delta$ $\qquad c_2 = \beta + \gamma$

હવે નિશ્ચાયક

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-c-a+d & b-a & b+c-a-d \\ \alpha-\delta & \alpha & \alpha+\delta \\ \beta-\gamma & \beta & \beta+\gamma \end{vmatrix}$$ લેતાં,

ત્રીજો સ્તંભ પ્રથમ સ્તંભમાં ઉમેરતાં

$$2\begin{vmatrix} b-a & b-a & b+c-a-d \\ \alpha & \alpha & \alpha+\delta \\ \beta & \beta & \beta+\gamma \end{vmatrix} = 0$$ (પ્રથમ અને બીજો સ્તંભ સમાન હોવાથી)

∴ આપેલી બંને રેખાઓ સમતલીય છે.

ઉદાહરણ 30 : બિંદુઓ A (3, 4, 1) અને B (5, 1, 6) માંથી પસાર થતી રેખા XY સમતલને જે બિંદુએ છેદે તે બિંદુના યામ શોધો.

ઉકેલ : બિંદુઓ A અને B માંથી પસાર થતી રેખાનું સદિશ સમીકરણ

$$\vec{r} = 3\hat{i} + 4\hat{j} + \hat{k} + \lambda\,[(5-3)\hat{i} + (1-4)\hat{j} + (6-1)\hat{k}]$$

અર્થાત્ $$\vec{r} = 3\hat{i} + 4\hat{j} + \hat{k} + \lambda\,(2\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}) \quad \dots (1)$$

ધારો કે રેખા AB એ XY સમતલને P બિંદુએ છેદે છે. તેથી બિંદુ P નો સ્થાનસદિશ $x\hat{i} + y\hat{j}$ સ્વરૂપમાં મળે. આ બિંદુ સમીકરણ (1)નું સમાધાન કરશે જ. (શા માટે ?)

અર્થાત્ $$x\hat{i} + y\hat{j} = (3 + 2\lambda)\hat{i} + (4 - 3\lambda)\hat{j} + (1 + 5\lambda)\hat{k}$$

$\hat{i}$, $\hat{j}$ અને $\hat{k}$ ના સહગુણકો સરખાવતાં, (અર્થાત્ સમાન સદિશના અનુરૂપ યામ સમાન હોય.)

$$x = 3 + 2\lambda$$

$$y = 4 - 3\lambda$$

$$0 = 1 + 5\lambda$$

ઉપરનાં સમીકરણો ઉકેલતાં,

$$x = \frac{13}{5} \text{ અને } y = \frac{23}{5}$$

આથી માંગેલા બિંદુના યામ $\left(\frac{13}{5}, \frac{23}{5}, 0\right)$

પ્રકીર્ણ સ્વાધ્યાય 11

1. સાબિત કરો કે ઊગમબિંદુને (2, 1, 1) બિંદુ સાથે જોડતી રેખા એ બિંદુઓ (3, 5, –1), (4, 3, –1) થી બનતી રેખાને લંબ છે.

2. જો પરસ્પર લંબ હોય તેવી બે રેખાઓની દિક્કોસાઈન l_1, m_1, n_1 અને l_2, m_2, n_2 હોય, તો તે બંનેને લંબરેખાની દિક્કોસાઈન $m_1n_2 - m_2n_1$, $n_1l_2 - n_2l_1$, $l_1m_2 - l_2m_1$ છે.

3. જે રેખાઓના દિક્ગુણોત્તર a, b, c અને $b - c, c - a, a - b$ હોય તે રેખાઓ વચ્ચેનો ખૂણો શોધો.

4. x-અક્ષને સમાંતર અને ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થતી રેખાનું સમીકરણ શોધો.

5. જો બિંદુઓ A, B, C, D ના યામ અનુક્રમે (1, 2, 3), (4, 5, 7), (–4, 3, –6) અને (2, 9, 2) હોય, તો રેખાઓ AB અને CD વચ્ચેનો ખૂણો શોધો.

6. જો રેખાઓ $\frac{x-1}{-3} = \frac{y-2}{2k} = \frac{z-3}{2}$ અને $\frac{x-1}{3k} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-6}{-5}$ પરસ્પર લંબ હોય, તો k શોધો.

7. (1, 2, 3) માંથી પસાર થતી અને સમતલ $\vec{r} \cdot (\hat{i} + 2\hat{j} - 5\hat{k}) + 9 = 0$ ને લંબ રેખાનું સદિશ સમીકરણ શોધો.

8. (a, b, c) માંથી પસાર થતા અને સમતલ $\vec{r} \cdot (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = 2$ ને સમાંતર સમતલનું સમીકરણ શોધો.

9. રેખાઓ $\vec{r} = 6\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k} + \lambda(\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k})$ અને $\vec{r} = -4\hat{i} - \hat{k} + \mu(3\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k})$ વચ્ચેનું લઘુતમ અંતર શોધો.

10. (5, 1, 6) અને (3, 4, 1) માંથી પસાર થતી રેખા YZ સમતલના જે બિંદુમાંથી પસાર થાય તેના યામ શોધો.

11. (5, 1, 6) અને (3, 4, 1) માંથી પસાર થતી રેખા ZX સમતલના જે બિંદુમાંથી પસાર થાય તે બિંદુના યામ શોધો.

12. (3, –4, –5) અને (2, –3, 1) માંથી પસાર થતી રેખા $2x + y + z = 7$ સમતલના જે બિંદુમાંથી પસાર થાય તે બિંદુના યામ શોધો.

13. (–1, 3, 2) બિંદુમાંથી પસાર થતા તથા પ્રત્યેક સમતલ $x + 2y + 3z = 5$ અને $3x + 3y + z = 0$ ને લંબ હોય તેવા સમતલનું સમીકરણ શોધો.

14. જો બિંદુઓ $(1, 1, p)$ અને (–3, 0, 1) સમતલ $\vec{r} \cdot (3\hat{i} + 4\hat{j} - 12\hat{k}) + 13 = 0$ થી સમાન અંતરે આવેલાં હોય, તો p નું મૂલ્ય શોધો.

15. સમતલો $\vec{r} \cdot (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = 1$ અને $\vec{r} \cdot (2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}) + 4 = 0$ ની છેદરેખામાંથી પસાર થતા તથા x-અક્ષને સમાંતર સમતલનું સમીકરણ શોધો.

16. જો O ઊગમબિંદુ હોય અને P ના યામ (1, 2, –3) હોય, તો P માંથી પસાર થતા અને OP ને લંબ સમતલનું સમીકરણ શોધો.

17. સમતલો $\vec{r} \cdot (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) - 4 = 0$, $\vec{r} \cdot (2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}) + 5 = 0$ ની છેદરેખાને સમાવતા તથા સમતલ $\vec{r} \cdot (5\hat{i} + 3\hat{j} - 6\hat{k}) + 8 = 0$ ને લંબ સમતલનું સમીકરણ શોધો.

18. રેખા $\vec{r} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k} + \lambda(3\hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k})$ અને સમતલ $\vec{r} \cdot (\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) = 5$ ના છેદબિંદુથી બિંદુ $(-1, -5, -10)$ નું અંતર શોધો.

19. $(1, 2, 3)$ માંથી પસાર થતી અને સમતલો $\vec{r} \cdot (\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}) = 5$ તથા $\vec{r} \cdot (3\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = 6$ ને સમાંતર રેખાનું સદિશ સમીકરણ શોધો.

20. બિંદુ $(1, 2, -4)$ માંથી પસાર થતી અને બે રેખાઓ $\frac{x-8}{3} = \frac{y+19}{-16} = \frac{z-10}{7}$ તથા

$\frac{x-15}{3} = \frac{y-29}{8} = \frac{z-5}{-5}$ ને લંબ હોય તેવી રેખાનું સદિશ સમીકરણ શોધો.

21. જો સમતલના અંતઃખંડો a, b, c હોય અને તે ઊગમબિંદુથી p એકમ અંતરે આવેલું હોય, તો સાબિત કરો કે $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{p^2}$.

પ્રશ્નો 22 તથા 23 માં વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલ વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

22. બે સમતલો : $2x + 3y + 4z = 4$ અને $4x + 6y + 8z = 12$ વચ્ચેનું અંતર

(A) 2 એકમ (B) 4 એકમ (C) 8 એકમ (D) $\frac{2}{\sqrt{29}}$ એકમ

23. સમતલો : $2x - y + 4z = 5$ અને $5x - 2.5y + 10z = 6$

(A) પરસ્પર લંબ છે. (B) સમાંતર છે. (C) y-અક્ષને છેદે છે. (D) $\left(0, 0, \frac{5}{4}\right)$ માંથી પસાર થાય છે.

સારાંશ

- રેખાએ અક્ષોની ધન દિશા સાથે બનાવેલા ખૂણાઓના કોસાઈનને **રેખાની દિક્કોસાઈન** કહે છે.
- જો રેખાની દિક્કોસાઈન l, m, n હોય, તો $l^2 + m^2 + n^2 = 1$
- બે બિંદુઓ $P(x_1, y_1, z_1)$ અને $Q(x_2, y_2, z_2)$ ને જોડતી રેખાની દિક્કોસાઈન $\frac{x_2 - x_1}{PQ}, \frac{y_2 - y_1}{PQ}, \frac{z_2 - z_1}{PQ}$

  છે. $PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$
- રેખાની દિક્કોસાઈનની સમપ્રમાણ સંખ્યાઓને તે **રેખાના દિક્ગુણોત્તર** કહે છે.
- જો રેખાની દિક્કોસાઈન l, m, n અને દિક્ગુણોત્તર a, b, c હોય, તો

  $$l = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}};\ m = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}};\ n = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$
- અવકાશની જે રેખાઓ સમાંતર નથી તથા છેદતી નથી તેમને **વિષમતલીય રેખાઓ** કહે છે. તેઓ ભિન્ન સમતલમાં આવેલી હોય છે. (તેમને સમાવતું કોઈ સમતલ હોઈ જ ના શકે.)

- કોઈ પણ બિંદુ (પ્રાથમિક ધોરણે ઊગમબિંદુ)માંથી પ્રત્યેક વિષમતલીય રેખાને સમાંતર દોરેલી એકબીજાને છેદતી બે રેખાઓ વચ્ચેના ખૂણાને **વિષમતલીય રેખાઓ વચ્ચેનો ખૂણો** કહે છે.
- જો l_1, m_1, n_1 અને l_2, m_2, n_2 એ રેખાઓની દિક્કોસાઇન હોય અને તેમની વચ્ચેનો લઘુકોણ θ હોય, તો $\cos\theta = |l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2|$ થાય.
- જો a_1, b_1, c_1 અને a_2, b_2, c_2 એ બે રેખાઓના દિક્ગુણોત્તર હોય અને આ બે રેખાઓ વચ્ચેનો લઘુકોણ θ હોય, તો

$$\cos\theta = \left|\frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}\right|$$

- સ્થાન સદિશ $\vec{a}$ વાળા આપેલા બિંદુમાંથી પસાર થતી અને આપેલ સદિશ $\vec{b}$ ને સમાંતર રેખાનું સદિશ સમીકરણ $\vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{b}$ છે.
- બિંદુ (x_1, y_1, z_1) માંથી પસાર થતી અને l, m, n દિક્કોસાઇનવાળી રેખાનું કાર્તેઝિય સમીકરણ

$$\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}$$ થશે.

- $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ સ્થાન સદિશવાળાં બે બિંદુઓમાંથી પસાર થતી રેખાનું સદિશ સમીકરણ

$\vec{r} = \vec{a} + \lambda(\vec{b} - \vec{a})$ છે.

- બે બિંદુ (x_1, y_1, z_1) અને (x_2, y_2, z_2) માંથી પસાર થતી રેખાનું કાર્તેઝિય સમીકરણ

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$ છે.

- જો $\vec{r} = \vec{a_1} + \lambda\vec{b_1}$ અને $\vec{r} = \vec{a_2} + \lambda\vec{b_2}$ વચ્ચેનો લઘુકોણ θ હોય, તો

$$\cos\theta = \left|\frac{\vec{b_1}\cdot\vec{b_2}}{|\vec{b_1}||\vec{b_2}|}\right|$$ છે.

- જો બે રેખાનાં સમીકરણ $\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}$ અને $\frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$ હોય તથા તેમની વચ્ચેનો લઘુકોણ θ હોય, તો $\cos\theta = |l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2|$.
- બે વિષમતલીય રેખાઓ વચ્ચેનું લઘુતમ અંતર એટલે કે બંને રેખાઓને લંબ રેખાખંડની લંબાઈ.
- $\vec{r} = \vec{a_1} + \lambda\vec{b_1}$ અને $\vec{r} = \vec{a_2} + \lambda\vec{b_2}$ વચ્ચેનું લઘુતમ અંતર

$$\frac{\left|(\vec{b_1}\times\vec{b_2})\cdot(\vec{a_2}-\vec{a_1})\right|}{|\vec{b_1}\times\vec{b_2}|}$$ છે.

- રેખાઓ $\frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{b_1} = \frac{z-z_1}{c_1}$ અને $\frac{x-x_2}{a_2} = \frac{y-y_2}{b_2} = \frac{z-z_2}{c_2}$ વચ્ચેનું લઘુતમ અંતર

$$\left| \frac{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{(b_1c_2 - b_2c_1)^2 + (c_1a_2 - c_2a_1)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2}} \right| \text{ છે.}$$

- સમાંતર રેખાઓ $\vec{r} = \vec{a_1} + \lambda \vec{b}$ અને $\vec{r} = \vec{a_2} + \mu \vec{b}$ વચ્ચેનું અંતર

$$\left| \frac{\vec{b} \times (\vec{a_2} - \vec{a_1})}{|\vec{b}|} \right| \text{ છે.}$$

- ઊગમબિંદુથી d અંતરે આવેલા અને ઊગમબિંદુમાંથી સમતલ પરના અભિલંબ એકમ સદિશ $\hat{n}$ વાળા સમતલનું સદિશ સ્વરૂપમાં સમીકરણ $\vec{r} \cdot \hat{n} = d$ છે.
- ઊગમબિંદુથી d અંતરે આવેલા અને જેના સમતલ પરના અભિલંબ સદિશની દિક્કોસાઈન l, m, n હોય તેવા સમતલનું સમીકરણ $lx + my + nz = d$ છે.
- $\vec{a}$ સ્થાન સદિશવાળા બિંદુમાંથી પસાર થતા અને સદિશ $\vec{n}$ ને લંબ હોય તેવા સમતલનું સમીકરણ $(\vec{r} - \vec{a}) \cdot \vec{n} = 0$
- A, B, C દિક્ગુણોત્તરવાળી આપેલી રેખાને લંબ અને આપેલ બિંદુ (x_1, y_1, z_1) માંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ $A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$
- ત્રણ અસમરેખ બિંદુઓ (x_1, y_1, z_1) (x_2, y_2, z_2) અને (x_3, y_3, z_3) માંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \text{ છે.}$$

- $\vec{a}$, $\vec{b}$ અને $\vec{c}$ સ્થાન સદિશવાળાં ત્રણ અસમરેખ બિંદુઓમાંથી પસાર થતા સમતલનું સદિશ સમીકરણ $(\vec{r} - \vec{a}) \cdot \left[(\vec{b} - \vec{a}) \times (\vec{c} - \vec{a})\right] = 0$ છે.
- યામાક્ષોને $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$ અને $(0, 0, c)$ માં છેદતા સમતલનું સમીકરણ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ છે.
- સમતલો $\vec{r} \cdot \vec{n_1} = d_1$ અને $\vec{r} \cdot \vec{n_2} = d_2$ ના છેદમાંથી પસાર થતા સમતલનું સદિશ સમીકરણ $\vec{r} \cdot (\vec{n}_1 + \lambda \vec{n}_2) = d_1 + \lambda d_2$ છે, જ્યાં λ એ કોઈ પણ શૂન્યેતર અચળ છે.
- આપેલા બે સમતલો $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ અને $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ ના છેદમાંથી પસાર થતા સમતલનું કાર્તેઝિય સમીકરણ
$(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \lambda (A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$.

- જો $(\vec{a_2} - \vec{a_1}) \cdot (\vec{b_1} \times \vec{b_2}) = 0$, તો બે રેખાઓ $\vec{r} = \vec{a_1} + \lambda \vec{b_1}$ અને $\vec{r} = \vec{a_2} + \mu \vec{b_2}$ સમતલીય છે.
- જો $\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$ હોય, તો કાર્તેઝિય સ્વરૂપમાંની બે રેખાઓ

  $\frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{b_1} = \frac{z - z_1}{c_1}$ અને $\frac{x - x_2}{a_2} = \frac{y - y_2}{b_2} = \frac{z - z_2}{c_2}$ સમતલીય થાય.
- જો સદિશ સ્વરૂપે આપેલા બે સમતલો $\vec{r} \cdot \vec{n_1} = d_1$ અને $\vec{r} \cdot \vec{n_2} = d_2$ વચ્ચેનો ખૂણો θ હોય, તો

  $\theta = cos^{-1} \left| \frac{\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|} \right|$
- રેખા $\vec{r} = \vec{a} + \lambda \vec{b}$ અને સમતલ $\vec{r} \cdot \hat{n} = d$ વચ્ચેનો ખૂણો ϕ હોય, તો $sin\ \phi = \left| \frac{\vec{b} \cdot \vec{n}}{|\vec{b}||\vec{n}|} \right|$
- સમતલો $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ અને $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ વચ્ચેનો ખૂણો

  $cos\ \theta = \left| \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\ \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \right|$ દ્વારા મળે.
- જે બિંદુનો સ્થાન સદિશ $\vec{a}$ હોય તેનું $\vec{r} \cdot \hat{n} = d$ થી લંબઅંતર $|d - \vec{a} \cdot \hat{n}|$ છે.
- (x_1, y_1, z_1) નું સમતલ $Ax + By + Cz + D = 0$ થી અંતર $\left| \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|$ છે.

— ❖ —

પ્રકરણ **12**

સુરેખ આયોજન

❖ ***The mathematical experience of the student is incomplete if he never had the opportunity to solve a problem invented by himself. – G. POLYA*** ❖

12.1 પ્રાસ્તાવિક

L. Kantorovich

આપણે અગાઉના વર્ગોમાં સુરેખ સમીકરણ સંહતિ અને તેના રોજિંદી સમસ્યાઓમાં ઉપયોગોની ચર્ચા કરી હતી. ધોરણ XI માં આપણે સુરેખ અસમતાઓ અને દ્વિચલ સુરેખ અસમતા સંહતિના આલેખની રીતે મળતા ઉકેલનો અભ્યાસ કર્યો. ગણિતમાં અસમતા સંહતિ/સમીકરણ સંહતિ ઘણી ઉપયોગી છે. આ પ્રકરણમાં આપણે નીચેના જેવી કેટલીક વાસ્તવિક જીવનની સમસ્યાઓના ઉકેલ માટે અસમતા સંહતિ/ સમીકરણ સંહતિનો ઉપયોગ કરીશું :

ફર્નિચરનો એક વેપારી ફક્ત બે જ વસ્તુઓ ટેબલ અને ખુરશીનું વેચાણ કરે છે. તેની પાસે રોકાણ કરવા માટે ₹ 50,000 છે અને વધુમાં વધુ 60 નંગનો સંગ્રહ કરી શકાય તેટલી જગ્યા છે. એક ટેબલની કિંમત ₹ 2500 છે અને એક ખુરશીની કિંમત ₹ 500 છે. તેનો અંદાજ એવો છે કે, એક ટેબલના વેચાણથી ₹ 250 અને એક ખુરશીના વેચાણથી ₹ 75 નફો મેળવી શકાય છે. તેને એ જાણવું છે કે મહત્તમ નફો મેળવવા માટે તેની પાસેની મૂડીથી તેણે કેટલાં ટેબલ અને ખુરશી ખરીદવાં જોઈએ ? આપણે સ્વીકારી લઈએ છીએ કે તે ખરીદ કરેલી બધી જ વસ્તુઓ વેચી શકે છે.

આવા પ્રકારની સમસ્યાઓ કે જેમાં મહત્તમ નફો (અથવા ન્યૂનતમ ખર્ચ) શોધવાનો હોય તેવા સામાન્ય વર્ગના પ્રશ્નોને ઈષ્ટતમ મૂલ્ય શોધવાના પ્રશ્નો કહેવામાં આવે છે. આમ, ઈષ્ટતમ મૂલ્ય શોધવાના પ્રશ્નોમાં મહત્તમ નફો મેળવવો, ન્યૂનતમ ખર્ચ અથવા સ્રોતોનો લઘુતમ ઉપયોગ કરવાનો સમાવેશ થાય છે. ઈષ્ટતમ મૂલ્ય શોધવાના પ્રશ્નો એ સુરેખ આયોજનના પ્રશ્નોનો એક વિશિષ્ટ પરંતુ અગત્યનો વિભાગ છે. ઉપર દર્શાવ્યા પ્રમાણેનો ઈષ્ટતમ મૂલ્ય શોધવાનો પ્રશ્ન એ સુરેખ આયોજનના પ્રશ્નનું એક ઉદાહરણ છે. સુરેખ આયોજનના પ્રશ્નો ખૂબ જ રસપ્રદ છે, કારણ કે તેમનો ઉપયોગ ઉદ્યોગ, વાણિજ્ય, સંચાલન, વિજ્ઞાન વગેરે ક્ષેત્રોમાં બહોળા પ્રમાણમાં થાય છે.

આ પ્રકરણમાં આપણે કેટલાક સુરેખ આયોજનના પ્રશ્નોનો અભ્યાસ કરીશું અને તેમનો ઉકેલ ફક્ત આલેખની રીતે મેળવીશું. આવા પ્રકારના પ્રશ્નોના ઉકેલ માટેની અન્ય રીતો પણ છે.

12.2 સુરેખ આયોજનનો પ્રશ્ન અને તેનું ગાણિતિક સ્વરૂપ

આપણે ચર્ચાની શરૂઆત આગળ આપેલા ફર્નિચરના વેપારીના ઉદાહરણ દ્વારા કરીશું. તે સમસ્યાને દ્વિચલ સમસ્યાના ગાણિતિક સ્વરૂપ તરફ આગળ દોરી જશે. આ પ્રશ્નમાં આપણે નીચે પ્રમાણે અવલોકન કરી શકીએ છીએ :

(i) દુકાનદાર તેની મૂડીનું રોકાણ સંપૂર્ણપણે ટેબલ ખરીદવામાં, સંપૂર્ણપણે ખુરશી ખરીદવામાં કે કેટલાંક ટેબલ અને કેટલીક ખુરશી ખરીદવામાં કરી શકે છે. વળી, તે રોકાણની જુદી જુદી પદ્ધતિમાં જુદો જુદો નફો મેળવી શકે છે.

(ii) અહીં દુકાનદાર પાસે ₹ 50,000 ની મૂડી છે અને તેની પાસે 60 નંગ સંગ્રહી શકાય તેટલી જગ્યા છે, તેવી કેટલીક મર્યાદાઓ છે.

ધારો કે દુકાનદાર ફક્ત ટેબલ જ ખરીદે અને ખુરશી ન ખરીદે તો તે ₹ 50,000 ÷ 2500 = 20 ટેબલ ખરીદી શકે. આ વિકલ્પમાં તેનો નફો ₹ (250 × 20) = ₹ 5000 થાય.

જો તે ફક્ત ખુરશી ખરીદે અને ટેબલ ન ખરીદે તો તેની ₹ 50,000 ની મૂડીમાંથી 50,000 ÷ 500 = 100 ખુરશી ખરીદી શકે. પરંતુ તે ફક્ત 60 વસ્તુઓ જ સંગ્રહી શકે છે. તેથી તે ફક્ત 60 ખુરશી જ ખરીદી શકે. આથી તે ₹ (60 × 75) = ₹ 4500 નો નફો મેળવી શકે.

આ સિવાય તે 10 ટેબલ અને 50 ખુરશી ખરીદી શકે તેવા બીજા વિકલ્પો પણ છે (દુકાનદાર 60 વસ્તુઓ સંગ્રહી શકે છે). આ વિકલ્પમાં તેનો નફો ₹ (10 × 250 + 50 × 75) = ₹ 6250 થાય વગેરે.

આમ, આપણે સમજી શકીએ છીએ કે, દુકાનદાર જુદી-જુદી રોકાણની પદ્ધતિઓ દ્વારા જુદો-જુદો નફો મેળવી શકે છે.

હવે પ્રશ્ન એ છે કે, દુકાનદારે તેની મૂડીનું રોકાણ કેવી રીતે કરવું જોઈએ કે જેથી તે મહત્તમ નફો મેળવી શકે ? આ પ્રશ્નનો ઉકેલ આપવા માટે આપણે તેનું ગાણિતિક સ્વરૂપ આપવાનો પ્રયત્ન કરીએ.

12.2.1 પ્રશ્નનું ગાણિતિક સ્વરૂપ

ધારો કે દુકાનદાર x નંગ ટેબલ અને y નંગ ખુરશી ખરીદે છે. સ્પષ્ટ છે કે x અને y અનૃણ છે.

એટલે કે, $\left.\begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$ *(અનૃણ મર્યાદા)* ...(1) ...(2)

દુકાનદાર મહત્તમ રકમનું રોકાણ કરી શકે (અહીં તે ₹ 50,000 છે) અને મહત્તમ વસ્તુઓનો સંગ્રહ કરી શકે (અહીં તે 60 છે) એ તેની મર્યાદા છે.

ગાણિતિક રીતે, $2500x + 500y \leq 50,000$ *(રોકાણની મર્યાદા)*

$\therefore \quad 5x + y \leq 100$ ...(3)

અને $x + y \leq 60$ *(સંગ્રહમર્યાદા)* ...(4)

દુકાનદાર એવી રીતે રોકાણ કરવા માગે છે કે તે મહત્તમ નફો Z મેળવી શકે. તે x અને y ના વિધેય તરીકે નીચે પ્રમાણે આપેલ છે :

$Z = 250x + 75y$ (તેને *હેતુલક્ષી વિધેય* કહે છે.) ...(5)

ગાણિતિક રીતે આપેલ પ્રશ્નને નીચે પ્રમાણે લખી શકાય :

$5x + y \leq 100$

$x + y \leq 60$

$x \geq 0, y \geq 0$ શરતોને અધીન :

$Z = 250x + 75y$ ની મહત્તમ કિંમત મેળવો.

આમ, આપણે સુરેખ વિધેય Z ને અમુક શરતોને અધીન મહત્તમ બનાવવાનું છે. આ શરતો સુરેખ અસમતાઓના સ્વરૂપમાં હોય છે. ચલરાશિઓ અનૃણ હોય છે. અમુક એવા પ્રકારના પણ પ્રશ્નો હોય છે કે, જેમાં સુરેખ વિધેયને અમુક શરતોને અધીન ન્યૂનતમ બનાવવાનું હોય છે. અહીં પણ શરતો સુરેખ અસમતાઓના સ્વરૂપમાં હોય છે અને ચલરાશિઓ અનૃણ હોય છે. આવા પ્રકારની સમસ્યાઓને સુરેખ આયોજનના પ્રશ્નો કહે છે.

આમ, સુરેખ આયોજનનો પ્રશ્ન એ એક કરતાં વધુ ચલરાશિ ધરાવતા (x કે y) સુરેખ વિધેય (હેતુલક્ષી વિધેય)નું અમુક શરતોને અધીન ઈષ્ટતમ મૂલ્ય (મહત્તમ કે ન્યૂનતમ મૂલ્ય) શોધવા સંબંધિત છે. અહીં શરતો સુરેખ અસમતાઓના સ્વરૂપમાં (સુરેખ મર્યાદા) અને ચલરાશિઓ અનૃણ (અનૃણ મર્યાદા) હોય છે. પ્રશ્નોમાં આવતા ચલ વચ્ચે ગાણિતિક સંબંધો સુરેખ સંબંધ હોવાથી 'સુરેખ' શબ્દનું પ્રયોજન થાય છે. 'આયોજન' શબ્દનો અર્થ એ સંદર્ભે થાય છે કે, કોઈ ચોક્કસ કાર્યક્રમ અથવા ક્રિયા કરવાની યોજના નક્કી કરવાની પદ્ધતિ.

આપણે આગળ વધતાં પહેલાં હવે ઔપચારિક રીતે જેનો ઉપયોગ સુરેખ આયોજનના પ્રશ્નોના ઉકેલમાં કરીશું એવા અમુક પારિભાષિક શબ્દોને (જેનો અગાઉ ઉપયોગ કર્યો) વ્યાખ્યાયિત કરીએ.

હેતુલક્ષી વિધેય (Objective Function) : *જેનું મહત્તમ કે ન્યૂનતમ મૂલ્ય શોધવાનું હોય છે એવા અચળ a અને b વાળા સુરેખ વિધેય $Z = ax + by$ ને સુરેખ હેતુલક્ષી વિધેય કહે છે.*

ઉપરના ઉદાહરણમાં $Z = 250x + 75y$ એ સુરેખ હેતુલક્ષી વિધેય છે. *ચલરાશિઓ x અને y એ નિર્ણાયક ચલરાશિઓ (Decision variables) છે.*

***મર્યાદાઓ (પ્રતિબંધો) (Constraints)** : સુરેખ અસમતાઓ અથવા સમીકરણો અથવા ચલરાશિઓ પરના પ્રતિબંધોને સુરેખ આયોજનના પ્રશ્નની મર્યાદાઓ કહે છે. શરતો $x \geq 0$, $y \geq 0$ ને અનૃણ મર્યાદાઓ કહે છે.* ઉપરના ઉદાહરણમાં અસમતાઓ (1) થી (4) મર્યાદાઓ છે.

***ઈષ્ટતમપણાનો પ્રશ્ન (Optimisation Problem)** : જેમાં અસમતાઓના સ્વરૂપમાં રહેલ અમુક ચોક્કસ શરતોને અધીન સુરેખ વિધેયને (બે ચલરાશિઓ x અને y ધરાવતા) મહત્તમ કે ન્યૂનતમ બનાવવાનું હોય તેવી સમસ્યાઓને ઈષ્ટતમ મૂલ્ય શોધવાના પ્રશ્નો કહે છે. સુરેખ આયોજનના પ્રશ્નો એ વિશિષ્ટ પ્રકારના ઈષ્ટતમ મૂલ્ય શોધવાના પ્રશ્નો છે.*

આગળના ઉદાહરણમાં દુકાનદારે ખુરશી અને ટેબલ ખરીદવા માટે આપેલ મૂડીનું રોકાણ કરવું એ ઈષ્ટતમ મૂલ્ય શોધવાનો તેમ જ સુરેખ આયોજનનો પ્રશ્ન છે.

હવે, આપણે સુરેખ આયોજનના પ્રશ્નનો ઉકેલ કેવી રીતે મેળવી શકાય તેની ચર્ચા કરીશું. આપણે ઉકેલ માટે ફક્ત આલેખની રીતનો ઉપયોગ કરીશું.

12.2.2 સુરેખ આયોજનના પ્રશ્નના ઉકેલ માટે આલેખની રીત

ધોરણ XI માં આપણે બે ચલરાશિઓ x અને y ધરાવતી દ્વિચલ સુરેખ અસમતા સંહતિ અને તેના ઉકેલનો અભ્યાસ આલેખના ઉપયોગથી કર્યો. ચાલો આપણે વિભાગ 12.2 માં ચર્ચા કરેલ ટેબલ અને ખુરશીમાં મૂડીરોકાણના પ્રશ્નનો સંદર્ભ લઈએ. હવે આપણે આ પ્રશ્નને આલેખની રીતે ઉકેલીશું. ચાલો આપણે સુરેખ અસમતાઓના સ્વરૂપમાં આવેલી મર્યાદાઓના આલેખ દોરીએ :

$5x + y \leq 100$ ...(1)

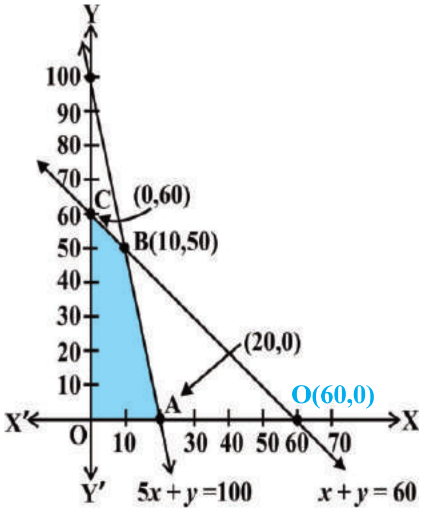
$x + y \leq 60$ ...(2)

$x \geq 0$ ...(3)

$y \geq 0$ ...(4)

આકૃતિ 12.1માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે આ સંહતિનો આલેખ (રંગીન પ્રદેશ) એ અસમતાઓ (1)થી (4) દ્વારા રચાતા અર્ધતલનાં તમામ બિંદુઓનો ગણ થશે.

આ પ્રદેશના દરેક બિંદુએ વેપારી ટેબલ અને ખુરશીમાં મૂડીરોકાણ કરી શકે તેવી ***શક્ય પસંદગી (feasible choice)*** છે. આથી આ પ્રદેશને પ્રશ્નનો ***શક્ય ઉકેલનો પ્રદેશ (feasible region)*** કહે છે. આ પ્રદેશના દરેક બિંદુને પ્રશ્નનો ***શક્ય ઉકેલ (feasible solution)*** કહેવામાં આવે છે. આમ, અહીં સુરેખ આયોજનના પ્રશ્નની તમામ મર્યાદાઓ (અનૃણ મર્યાદાઓ $x, y \geq 0$ સહિત) વડે રચાતા સામાન્ય પ્રદેશને પ્રશ્નનો ***શક્ય ઉકેલનો પ્રદેશ (અથવા ઉકેલ પ્રદેશ)*** કહે છે. આકૃતિ 12.1માં પ્રદેશ OABC (રંગીન) એ પ્રશ્નના શક્ય ઉકેલનો પ્રદેશ છે. શક્ય ઉકેલના પ્રદેશ સિવાયના પ્રદેશને ***ઉકેલનો અશક્ય પ્રદેશ (infeasible region)*** કહે છે.



આકૃતિ 12.1

શક્ય ઉકેલ (Feasible solution) : શક્ય ઉકેલના પ્રદેશની અંદર અને તેની સીમા પર આવેલાં બિંદુઓ મર્યાદાઓ માટે શક્ય ઉકેલ દર્શાવે છે.

આકૃતિ 12.1માં શક્ય ઉકેલના પ્રદેશ OABCની અંદર અને તેની સીમા પર આવેલ પ્રત્યેક બિંદુ પ્રશ્નનો શક્ય ઉકેલ દર્શાવે છે. ઉદાહરણ તરીકે બિંદુ (10, 50) એ પ્રશ્નનો એક શક્ય ઉકેલ છે અને અન્ય બિંદુઓ (0, 60), (20, 0) વગેરે પણ શક્ય ઉકેલ દર્શાવે છે. ***શક્ય ઉકેલના પ્રદેશની બહાર આવેલા કોઈ પણ બિંદુને અશક્ય ઉકેલ કહે છે.*** ઉદાહરણ તરીકે, બિંદુ (25, 40) એ પ્રશ્નનો અશક્ય ઉકેલ છે.

ઈષ્ટતમ શક્ય ઉકેલ (Optimal feasible solution) : શક્ય ઉકેલના પ્રદેશનું જે બિંદુ હેતુલક્ષી વિધેયને ઈષ્ટતમ (મહત્તમ અથવા ન્યૂનતમ) બનાવે તે ઉકેલને ઈષ્ટતમ ઉકેલ કહે છે.

હવે, આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે શક્ય ઉકેલના પ્રદેશ OABC ના પ્રત્યેક બિંદુ મર્યાદાઓ (1) થી (4) નું સમાધાન કરે છે. શક્ય ઉકેલના પ્રદેશમાં અનંત બિંદુઓ આવેલાં છે તથા આપણે એક એવું બિંદુ કેવી રીતે શોધી શકીએ જે હેતુલક્ષી વિધેય $Z = 250x + 75y$ ને મહત્તમ બનાવે તે સ્પષ્ટ નથી. આ પ્રકારની સ્થિતિમાંથી રસ્તો કાઢવા માટે આપણે નીચે પ્રમાણેના સુરેખ આયોજનના પ્રશ્નોના ઉકેલ માટેના મૂળભૂત પ્રમેયોનો ઉપયોગ કરીશું. આ પ્રમેયોની સાબિતી આ પુસ્તકના અવકાશની બહાર છે.

પ્રમેય 1 : ધારો કે R એ સુરેખ આયોજનના પ્રશ્ન માટેના હેતુલક્ષી વિધેય $Z = ax + by$ માટેના શક્ય ઉકેલનો પ્રદેશ છે (તે બહિર્મુખ બહુકોણ હોય). જ્યારે Z ને ઈષ્ટતમ મૂલ્ય (મહત્તમ અથવા ન્યૂનતમ) મળે ત્યારે તે મર્યાદાઓના કારણે ચલરાશિઓ x અને y થી બનતી સુરેખ અસમતાઓથી બનતા શક્ય ઉકેલના પ્રદેશ દ્વારા રચાતા બહિર્મુખ બહુકોણના કોઈક શિરોબિંદુ* આગળ જ પ્રાપ્ત થાય છે.

પ્રમેય 2 : ધારો કે R એ સુરેખ આયોજનના પ્રશ્ન માટેના હેતુલક્ષી વિધેય $Z = ax + by$ માટેના શક્ય ઉકેલનો પ્રદેશ છે. જો આ પ્રદેશ R સીમિત** (bounded) હોય, તો હેતુલક્ષી વિધેય Z ને મહત્તમ તથા ન્યૂનતમ મૂલ્ય પ્રદેશ R ના કોઈક શિરોબિંદુ આગળ પ્રાપ્ત થાય.

નોંધ : જો R એ અસીમિત પ્રદેશ હોય, તો હેતુલક્ષી વિધેયને મહત્તમ કે ન્યૂનતમ કિંમત ન પણ મળે. તેમ છતાં જો મળે તો તે R ના કોઈક શિરોબિંદુ આગળ જ મળે. (પ્રમેય 1 પરથી)

ઉપરના ઉદાહરણના સીમિત (શક્ય ઉકેલના) પ્રદેશનાં શિરોબિંદુઓ O, A, B અને C ના યામ અનુક્રમે (0, 0), (20, 0), (10, 50) અને (0, 60) છે તે સહેલાઈથી જોઈ શકાય છે. આ બિંદુઓ આગળ આપણે Z નું મૂલ્ય શોધીએ.

---

* શક્ય ઉકેલના પ્રદેશનું શિરોબિંદુ એ પ્રદેશની બે સીમા રેખાઓનું છેદબિંદુ છે.

** જો સુરેખ અસમતાઓથી રચાતો શક્ય ઉકેલનો પ્રદેશ એ કોઈ વર્તુળમાં ઘેરાયેલો હોય તો તેને સીમિત પ્રદેશ કહે છે. અન્યથા તેને અસીમિત પ્રદેશ કહે છે. અસીમિત એટલે કે શક્ય ઉકેલનો પ્રદેશ કોઈ દિશામાં અનંત સુધી વિસ્તરેલ છે.

શક્ય ઉકેલના પ્રદેશનાં શિરોબિંદુઓ	$Z = 250x + 75y$ નું સંગત મૂલ્ય (₹)
O(0, 0)	0
C(0, 60)	4500
B(10, 50)	**6250 → મહત્તમ**
A(20, 0)	5000

આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે, જો દુકાનદાર (10, 50) ની રોકાણ વ્યૂહરચના અપનાવે એટલે કે 10 ટેબલ અને 50 ખુરશીની ખરીદી કરે તો તેને મહત્તમ નફો મળે.

આ પ્રકારે ***સુરેખ આયોજનના પ્રશ્નો ઉકેલવાની પદ્ધતિને શિરોબિંદુની રીત (Corner point method) કહે છે.*** આ પદ્ધતિ નીચે જણાવેલ મુદ્દાઓ ધરાવે છે :

(1) આપેલ સુરેખ આયોજનના પ્રશ્નના શક્ય ઉકેલનો પ્રદેશ શોધો. આ પ્રદેશનાં શિરોબિંદુઓ શોધો. તે નિરીક્ષણ દ્વારા અથવા બે રેખાઓનાં સમીકરણો ઉકેલીને તેમનાં છેદબિંદુ દ્વારા મેળવી શકાય.

(2) દરેક શિરોબિંદુ આગળ હેતુલક્ષી વિધેય $Z = ax + by$ ની કિંમત મેળવો. ધારો કે આ બિંદુઓ આગળનાં મૂલ્યો પૈકી તેની મહત્તમ કિંમત તથા ન્યૂનતમ કિંમત અનુક્રમે M તથા m છે.

(3) (i) જો શક્ય ઉકેલનો પ્રદેશ સીમિત હોય, તો Z ની મહત્તમ તથા ન્યૂનતમ કિંમત અનુક્રમે M તથા m થાય.

(ii) જો શક્ય ઉકેલનો પ્રદેશ અસીમિત હોય, તો નીચે પ્રમાણે આગળ વધો :

(4) (a) જો $ax + by > M$ થી રચાતા ખુલ્લા અર્ધતલનું કોઈ પણ બિંદુ શક્ય ઉકેલના પ્રદેશ સાથે સામાન્ય ન હોય તો Z ની મહત્તમ કિંમત M થાય. નહિ તો Z ને મહત્તમ કિંમત ન મળે.

(b) તે જ રીતે, જો $ax + by < m$ થી રચાતા ખુલ્લા અર્ધતલનું કોઈ પણ બિંદુ શક્ય ઉકેલના પ્રદેશ સાથે સામાન્ય ન હોય, તો Z ની ન્યૂનતમ કિંમત m થાય. નહિ તો Z ને ન્યૂનતમ કિંમત ન મળે.

હવે, આપણે શિરોબિંદુની રીતનો ઉપયોગ કરી કેટલાંક ઉદાહરણો જોઈએ.

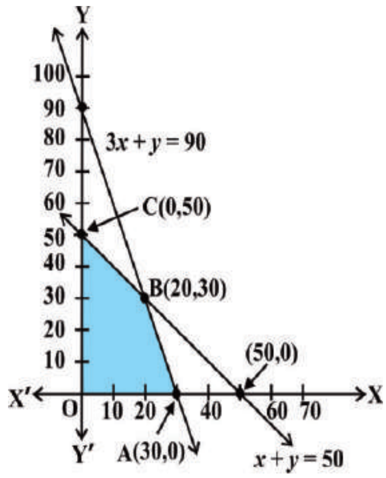
ઉદાહરણ 1 : નીચે આપેલ સુરેખ આયોજનનો પ્રશ્ન આલેખની રીતે ઉકેલો :

$Z = 4x + y$ નું નીચે આપેલ શરતોને અધીન મહત્તમ મૂલ્ય શોધો. ...(1)

$x + y \leq 50$ ...(2)

$3x + y \leq 90$ ...(3)

$x \geq 0,\ y \geq 0$ ...(4)



આકૃતિ 12.2

ઉકેલ : મર્યાદા સંહતિ (2) થી (4) દ્વારા રચાતો શક્ય ઉકેલનો પ્રદેશ આકૃતિ 12.2 માં રંગીન કરેલ છે. આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે, શક્ય ઉકેલનો પ્રદેશ OABC સીમિત છે. આથી આપણે શિરોબિંદુની રીતથી Z નું મહત્તમ મૂલ્ય શોધીશું.

શિરોબિંદુઓ O, A, B અને C ના યામ અનુક્રમે (0, 0), (30, 0), (20, 30) અને (0, 50) છે. હવે, આપણે આ દરેક બિંદુ આગળ Z ની કિંમત મેળવીએ.

શક્ય ઉકેલના પ્રદેશનાં શિરોબિંદુઓ	**$Z = 4x + y$ નું સંગત મૂલ્ય**
(0, 0)	0
(30, 0)	**120 → મહત્તમ**
(20, 30)	110
(0, 50)	50

આમ, બિંદુ (30, 0) આગળ Z નું મહત્તમ મૂલ્ય 120 મળે છે.

ઉદાહરણ 2 : નીચે આપેલ સુરેખ આયોજનનો પ્રશ્ન આલેખની રીતે ઉકેલો :

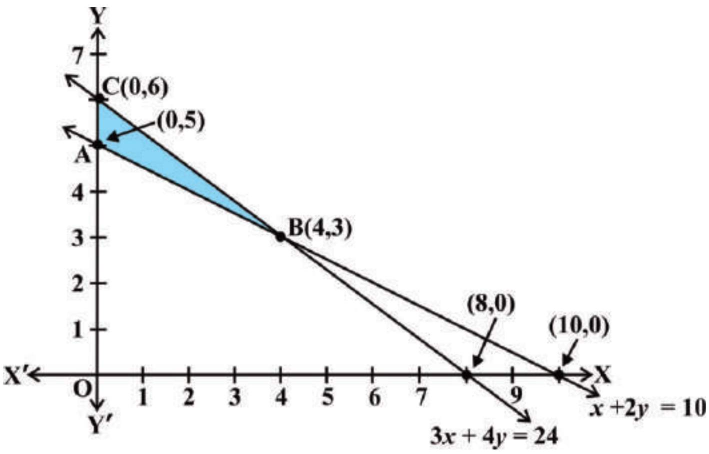
$Z = 200x + 500y$ નું નીચેની શરતોને અધીન ન્યૂનતમ મૂલ્ય શોધો. ...(1)

$x + 2y \geq 10$ ...(2)

$3x + 4y \leq 24$ ...(3)

$x \geq 0,\ y \geq 0$ ...(4)

ઉકેલ : મર્યાદા સંહતિ (2) થી (4) દ્વારા રચાતો શક્ય ઉકેલનો પ્રદેશ ABC આકૃતિ 12.3 માં રંગીન પ્રદેશ તરીકે દર્શાવેલ છે. તે સીમિત છે. શિરોબિંદુઓ A, B અને C ના યામ અનુક્રમે (0, 5), (4, 3) અને (0, 6) છે. હવે આપણે આ દરેક બિંદુ આગળ Z ની કિંમત મેળવીએ.



આકૃતિ 12.3

શક્ય ઉકેલના પ્રદેશનાં શિરોબિંદુઓ	**$Z = 200x + 500y$ નું સંગત મૂલ્ય**
(0, 5)	2500
(4, 3)	**2300 → ન્યૂનતમ**
(0, 6)	3000

આમ, બિંદુ (4, 3) આગળ Z નું ન્યૂનતમ મૂલ્ય 2300 મળે છે.

ઉદાહરણ 3 : નીચે આપેલ સુરેખ આયોજનનો પ્રશ્ન આલેખની રીતે ઉકેલો :

$Z = 3x + 9y$ નું નીચેની શરતોને અધીન ન્યૂનતમ તેમજ મહત્તમ મૂલ્ય શોધો. ...(1)

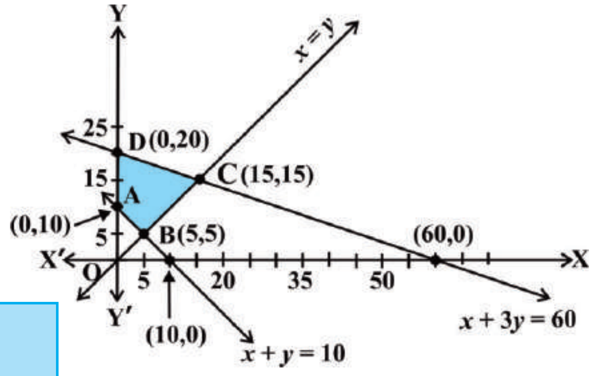
$x + 3y \leq 60$ ...(2)

$x + y \geq 10$ ...(3)

$x \leq y$ ...(4)

$x \geq 0, y \geq 0$ ...(5)

ઉકેલ : પ્રથમ આપણે અસમતા સંહતિ (2) થી (5) દ્વારા રચાતા શક્ય ઉકેલના પ્રદેશનો આલેખ દોરીએ. આકૃતિ 12.4 માં શક્ય ઉકેલનો પ્રદેશ ABCD દર્શાવવામાં આવેલ છે. આપણે નોંધીશું કે પ્રદેશ સીમિત છે. શિરોબિંદુઓ A, B, C અને D ના યામ અનુક્રમે (0, 10), (5, 5), (15, 15) અને (0, 20) છે.



આકૃતિ 12.4

શક્ય ઉકેલના પ્રદેશનાં શિરોબિંદુઓ	$Z = 3x + 9y$ નું સંગત મૂલ્ય
A(0, 10)	90
B(5, 5)	60 → **ન્યૂનતમ**
C(15, 15)	**180** } → **મહત્તમ**
D(0, 20)	180 } (એક કરતાં વધુ ઈષ્ટતમ મૂલ્ય)

હવે આપણે Z ના ન્યૂનતમ અને મહત્તમ મૂલ્ય શોધીએ. કોષ્ટક પરથી જોઈ શકાય છે કે, શક્ય ઉકેલના પ્રદેશના બિંદુ B(5, 5) આગળ Z નું ન્યૂનતમ મૂલ્ય 60 છે.

Z નું મહત્તમ મૂલ્ય 180 શક્ય ઉકેલના પ્રદેશનાં બે શિરોબિંદુ C(15, 15) અને D(0, 20) આગળ મળે છે.

નોંધ : ઉપરના ઉદાહરણમાં આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે, પ્રશ્નને એક કરતાં વધુ શિરોબિંદુઓ C અને D આગળ ઈષ્ટતમ મૂલ્ય મળે છે. એટલે કે બંને બિંદુઓએ મહત્તમ મૂલ્ય 180 મળે છે. આવી પરિસ્થિતિમાં તમે જોઈ શકો કે C અને D ને જોડતાં રેખાખંડ CD પર આવેલ દરેક બિંદુ આગળ સમાન મહત્તમ મૂલ્ય મળે. તે જ રીતે બે બિંદુઓ આગળ સમાન ન્યૂનતમ મૂલ્ય મળે તેવી પરિસ્થિતિમાં પણ આ સત્ય છે.

ઉદાહરણ 4 : હેતુલક્ષી વિધેય $Z = -50x + 20y$ નું નીચે આપેલ શરતોને અધીન ન્યૂનતમ મૂલ્ય આલેખની રીતે શોધો. ...(1)

$2x - y \geq -5$ ...(2)

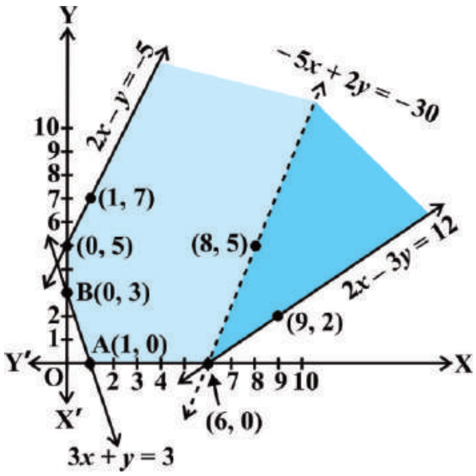
$3x + y \geq 3$ ...(3)

$2x - 3y \leq 12$ ...(4)

$x \geq 0, y \geq 0$ ...(5)

ઉકેલ : પ્રથમ આપણે અસમતા સંહતિ (2) થી (5) દ્વારા રચાતા શક્ય ઉકેલના પ્રદેશનો આલેખ દોરીએ. આકૃતિ 12.5 માં શક્ય ઉકેલનો પ્રદેશ (રંગીન) દર્શાવવામાં આવેલ છે. આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે, શક્ય ઉકેલનો પ્રદેશ અસીમિત છે.

હવે, આપણે શિરોબિંદુઓ આગળ Z ના મૂલ્ય શોધીએ.



આકૃતિ 12.5

શક્ય ઉકેલના પ્રદેશનાં શિરોબિંદુઓ	$Z = -50x + 20y$ નું સંગત મૂલ્ય
(0, 5)	100
(0, 3)	60
(1, 0)	–50
(6, 0)	**–300 → ન્યૂનતમ**

આ કોષ્ટક પરથી માલૂમ પડે છે કે બિંદુ (6, 0) આગળ Z નું ન્યૂનતમ મૂલ્ય –300 મળી શકે છે. આપણે Z નું ન્યૂનતમ મૂલ્ય –300 છે એમ કહી શકીએ ? આપણે નોંધીશું કે જો પ્રદેશ સીમિત હોત તો Z ની આ નાનામાં નાની કિંમત Z નું ન્યૂનતમ મૂલ્ય થઈ હોત (પ્રમેય 2). પરંતુ અહીં આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે શક્ય ઉકેલનો પ્રદેશ અસીમિત છે. માટે Z ની ન્યૂનતમ કિંમત –300 હોય પણ ખરી અને ન પણ હોય. આ નક્કી કરવા માટે આપણે અસમતા $-50x + 20y < -300$ એટલે કે $-5x + 2y < -30$ (શિરોબિંદુની રીતનો મુદ્દા ક્રમાંક 3(ii) જુઓ)ને આલેખીએ અને ચકાસીશું કે અસમતાથી રચાતા ખુલ્લા અર્ધતલનાં બિંદુઓ શક્ય ઉકેલના પ્રદેશનાં બિંદુઓ સાથે સામાન્ય છે કે નહિ. જો સામાન્ય બિંદુઓ હોય, તો –300 એ Z નું ન્યૂનતમ મૂલ્ય ન હોય. અન્યથા –300 એ Z નું ન્યૂનતમ મૂલ્ય હોય.

આકૃતિ 12.5 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે તેને સામાન્ય બિંદુઓ છે. આથી $Z = -50x + 20y$ ને આપેલ શરતો અનુસાર ન્યૂનતમ મૂલ્ય ન મળે.

ઉપરના ઉદાહરણમાં, આપણે એવું કહી શકીએ કે (0, 5) આગળ $Z = -50x + 20y$ ની મહત્તમ કિંમત 100 થાય ? આ માટે $-50x + 20y > 100$ નો આલેખ શક્ય ઉકેલના પ્રદેશનાં બિંદુઓ સાથે સામાન્ય બિંદુઓ ધરાવે છે કે નહિ તે ચકાસો (શા માટે ?).

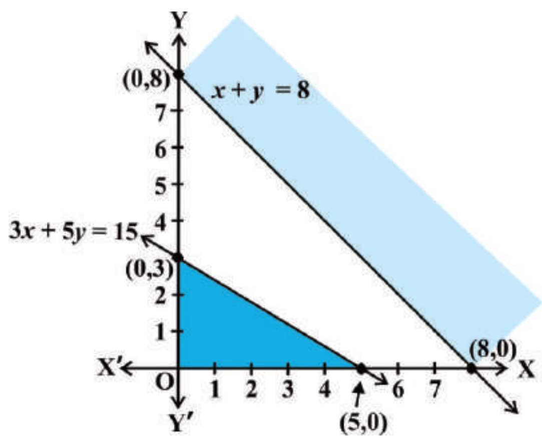
ઉદાહરણ 5 : $x + y \geq 8$ ...(1)

$3x + 5y \leq 15$ ...(2)

$x \geq 0, y \geq 0$ ...(3)

શરતોને અધીન $Z = 3x + 2y$ નું ન્યૂનતમ મૂલ્ય શોધો.

ઉકેલ : અસમતાઓ (1) થી (3) ને આપણે આલેખીએ. (આકૃતિ 12.6) શક્ય ઉકેલનો પ્રદેશ મળે છે ? શા માટે આવું થાય છે ? આકૃતિ 12.6 માં તમે જોઈ શકો છો કે બધી મર્યાદાઓનું એક સાથે સમાધાન કરે તેવું કોઈ પણ બિંદુ મળતું નથી. આમ, પ્રશ્નને શક્ય ઉકેલનો પ્રદેશ મળતો નથી અને તેથી શક્ય ઉકેલ મળતો નથી.



આકૃતિ 12.6

નોંધ : સુરેખ આયોજનના પ્રશ્નોની આપણે અગાઉનાં ઉદાહરણોની ચર્ચા કર્યા પછી નીચે પ્રમાણેનાં અવલોકનોની નોંધ કરીએ :

(1) શક્ય ઉકેલનો પ્રદેશ હંમેશાં બહિર્મુખ પ્રદેશ હોય છે.

(2) હેતુલક્ષી વિધેયની મહત્તમ (અથવા ન્યૂનતમ) કિંમત શક્ય ઉકેલના પ્રદેશના કોઈક શિરોબિંદુ આગળ મળી શકે છે. જો હેતુલક્ષી વિધેયની મહત્તમ (અથવા ન્યૂનતમ) કિંમત બે શિરોબિંદુ આગળ મળે તો આ બે બિંદુઓને જોડતા રેખાખંડ પરના પ્રત્યેક બિંદુ આગળ હેતુલક્ષી વિધેયની સમાન મહત્તમ (અથવા ન્યૂનતમ) કિંમત મળે.

સ્વાધ્યાય 12.1

નીચે આપેલ સુરેખ આયોજનના પ્રશ્નો આલેખની રીતે ઉકેલો :

1. $x + y \le 4$, $x \ge 0$, $y \ge 0$ શરતોને અધીન $Z = 3x + 4y$ નું મહત્તમ મૂલ્ય શોધો.
2. $x + 2y \le 8$, $3x + 2y \le 12$, $x \ge 0$, $y \ge 0$ શરતોને અધીન $Z = -3x + 4y$ નું ન્યૂનતમ મૂલ્ય શોધો.
3. $3x + 5y \le 15$, $5x + 2y \le 10$, $x \ge 0$, $y \ge 0$ શરતોને અધીન $Z = 5x + 3y$ નું મહત્તમ મૂલ્ય શોધો.
4. $x + 3y \ge 3$, $x + y \ge 2$, $x, y \ge 0$ શરતોને અધીન $Z = 3x + 5y$ નું ન્યૂનતમ મૂલ્ય શોધો.
5. $x + 2y \le 10$, $3x + y \le 15$, $x, y \ge 0$ શરતોને અધીન $Z = 3x + 2y$ નું મહત્તમ મૂલ્ય શોધો.
6. $2x + y \ge 3$, $x + 2y \ge 6$, $x, y \ge 0$ શરતોને અધીન $Z = x + 2y$ નું ન્યૂનતમ મૂલ્ય શોધો. Z નું ન્યૂનતમ મૂલ્ય બે કરતાં વધુ બિંદુઓએ મળે છે તેમ બતાવો.
7. $x + 2y \le 120$, $x + y \ge 60$, $x - 2y \ge 0$, $x, y \ge 0$ શરતોને અધીન $Z = 5x + 10y$ નું મહત્તમ તેમજ ન્યૂનતમ મૂલ્ય શોધો.
8. $x + 2y \ge 100$, $2x - y \le 0$, $2x + y \le 200$, $x, y \ge 0$ શરતોને અધીન $Z = x + 2y$ નું મહત્તમ તેમજ ન્યૂનતમ મૂલ્ય શોધો.
9. $x \ge 3$, $x + y \ge 5$, $x + 2y \ge 6$, $y \ge 0$ શરતોને અધીન $Z = -x + 2y$ નું મહત્તમ મૂલ્ય શોધો.
10. $x - y \le -1$, $-x + y \le 0$, $x, y \ge 0$ શરતોને અધીન $Z = x + y$ નું મહત્તમ મૂલ્ય શોધો.

12.3 સુરેખ આયોજનની વિવિધ પ્રકારની સમસ્યાઓ

સુરેખ આયોજનના કેટલાક મહત્ત્વના પ્રશ્નો નીચે સૂચિબદ્ધ કરેલા છે :

(1) ઉત્પાદનને લગતી સમસ્યાઓ (Manufacturing Problems) : આ પ્રકારના પ્રશ્નમાં મહત્તમ નફો મેળવવા માટે આપણે કંપની દ્વારા વિવિધ પ્રકારની વસ્તુઓની સંખ્યાનું ઉત્પાદન અને વેચાણ અમુક નિયંત્રણોને અધીન કરવાનું હોય છે. આ નિયંત્રણો આવાં હોઈ શકે : દરેક વસ્તુનું ઉત્પાદન કરવા ચોક્કસ માનવ-કલાકોની જરૂર, મશીન (યંત્ર)ના કલાકો, શ્રમના કલાકો, શ્રમ કરવાની જગા વગેરે.

(2) આહારસંબંધી સમસ્યાઓ (Diet Problems) : આ પ્રકારના પ્રશ્નમાં આપણે જેનો ખર્ચ લઘુતમ થાય એવી રીતે જુદા-જુદા પ્રકારના ઘટકો ધરાવતો આહાર બનાવવાનો હોય છે અને તેમાં જરૂરી દરેક પ્રકારનાં પોષક તત્ત્વોનો સમાવેશ કરવાનો હોય છે.

(3) પરિવહનને લગતી સમસ્યાઓ (Transportation Problems) : આ પ્રકારના પ્રશ્નમાં આપણે ઉત્પાદિત માલસામાનને જુદાં-જુદાં સ્થળે આવેલ ઉત્પાદન સ્થળે (કારખાના)થી જુદાં-જુદાં સ્થળે આવેલ બજારમાં પહોંચાડવા માટેનો રસ્તો, પરિવહન-ખર્ચ ન્યૂનતમ થાય એવી રીતે પસંદ કરવો જોઈએ.

ચાલો આપણે સુરેખ આયોજનની આ પ્રકારની કેટલીક સમસ્યાઓ ઉકેલીએ :

ઉદાહરણ 6 : (આહાર સંબંધી સમસ્યા) : એક આહારવિજ્ઞાની આહારના એક મિશ્રણમાં વિટામિન A ના ઓછામાં ઓછા 8 એકમ હોય અને વિટામિન C ના ઓછામાં ઓછા 10 એકમ હોય એવી રીતે બે પ્રકારના ખોરાકનું મિશ્રણ કરવા ઇચ્છે છે. આહાર 'I', 2 એકમ/કિગ્રા વિટામિન A અને 1 એકમ/કિગ્રા વિટામિન C ધરાવે છે. આહાર 'II', 1 એકમ/કિગ્રા વિટામિન A અને 2 એકમ/કિગ્રા વિટામિન C ધરાવે છે. આહાર 'I' નો ખરીદ ભાવ પ્રતિ કિગ્રા ₹ 50 અને આહાર 'II' નો ખરીદ ભાવ પ્રતિ કિગ્રા ₹ 70 છે. આ પ્રશ્નને સુરેખ આયોજનના પ્રશ્ન તરીકે મિશ્રિત આહારનો ખર્ચ ન્યૂનતમ કરવા માટે ગાણિતિક સ્વરૂપમાં દર્શાવો.

ઉકેલ : ધારો કે મિશ્રણમાં x કિલોગ્રામ 'I' પ્રકારનો આહાર અને y કિલોગ્રામ 'II' પ્રકારનો આહાર લેવામાં આવે છે. સ્પષ્ટ છે કે, $x \geq 0$, $y \geq 0$. આપેલ માહિતી પરથી આપણે નીચે પ્રમાણે કોષ્ટક બનાવીએ :

સ્રોત	આહાર		ઓછામાં ઓછી આવશ્યકતા
	I (x)	II (y)	
વિટામિન A (એકમ/કિગ્રા)	2	1	8
વિટામિન C (એકમ/કિગ્રા)	1	2	10
ખર્ચ (₹ / કિગ્રા)	**50**	**70**	-

અહીં આ મિશ્રણમાં વિટામિન A નું પ્રમાણ ઓછામાં ઓછું 8 એકમ અને વિટામિન C નું પ્રમાણ ઓછામાં ઓછું 10 એકમ હોવાથી, આ પ્રમાણે મર્યાદાઓ મળે :

$$2x + y \geq 8$$
$$x + 2y \geq 10$$

'I' પ્રકારના x કિલોગ્રામ આહાર અને 'II' પ્રકારના y કિલોગ્રામ આહારનો કુલ ખર્ચ

$Z = 50x + 70y$ થાય.

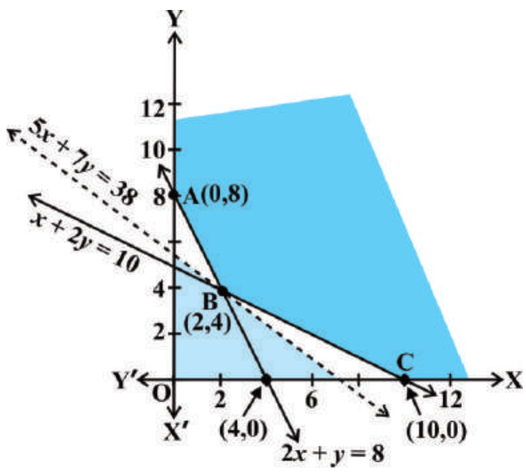
આમ, આપેલ સમસ્યાનું ગાણિતિક સ્વરૂપ આ પ્રમાણે થશે :

નીચેની શરતોને અધીન $Z = 50x + 70y$ નું ન્યૂનતમ મૂલ્ય શોધો. ...(1)

$$2x + y \geq 8 \quad ...(2)$$
$$x + 2y \geq 10 \quad ...(3)$$
$$x \geq 0, y \geq 0 \quad ...(4)$$

ચાલો, આપણે અસમતાઓ (2) થી (4) ને આલેખીએ. આકૃતિ 12.7 માં આ અસમતાઓ દ્વારા રચાતો શક્ય ઉકેલનો પ્રદેશ દર્શાવ્યો છે. અહીં ફરીથી આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે, શક્ય ઉકેલનો પ્રદેશ અસીમિત છે.

શિરોબિંદુઓ A(0, 8), B(2, 4) અને C(10, 0) આગળ Z ની કિંમત શોધીએ.



આકૃતિ 12.7

શક્ય ઉકેલના પ્રદેશનાં શિરોબિંદુઓ	$Z = 50x + 70y$ નું સંગત મૂલ્ય
(0, 8)	560
(2, 4)	**380** → **ન્યૂનતમ**
(10, 0)	500

કોષ્ટકમાં આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે (2, 4) આગળ Z નું શક્ય ન્યૂનતમ મૂલ્ય 380 મળે છે. Z નું ન્યૂનતમ મૂલ્ય 380 છે તેવું આપણે કહી શકીએ ? યાદ રહે કે શક્ય ઉકેલનો પ્રદેશ અસીમિત છે. માટે આપણે અસમતા $50x + 70y < 380$ એટલે $5x + 7y < 38$ ને આલેખવી પડે અને ચકાસવું જોઈએ કે તેનાથી રચાતા ખુલ્લા અર્ધતલને શક્ય ઉકેલના પ્રદેશ સાથે કોઈ સામાન્ય બિંદુ મળે છે કે નહિ.

આકૃતિ 12.7 પરથી આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે, આવું સામાન્ય બિંદુ મળશે નહિ. આથી, બિંદુ (2, 4) આગળ Z નું ન્યૂનતમ મૂલ્ય 380 પ્રાપ્ત થાય છે. તેથી આહારશાસ્ત્રી 2 કિલોગ્રામ આહાર 'I' અને 4 કિલોગ્રામ આહાર 'II' મિશ્ર કરીને ઈષ્ટતમ ખર્ચવાળું મિશ્રણ તૈયાર કરી શકે અને આ રીતથી મિશ્રણની ન્યૂનતમ કિંમત ₹ 380 થાય.

ઉદાહરણ 7 : (ફાળવણી સમસ્યા) : ખેડૂતોની એક સહકારી મંડળી પાસે X અને Y એમ બે પ્રકારના પાક ઉગાડવા માટે 50 હેક્ટર જમીન છે. પાક X અને Y થી હેક્ટર દીઠ આશરે અનુક્રમે ₹ 10,500 અને ₹ 9000 નફો મળે છે. નીંદણને નિયંત્રણમાં રાખવા માટે પાક X માટે હેક્ટર દીઠ 20 લિટર અને પાક Y માટે હેક્ટર દીઠ 10 લિટર પ્રવાહી વનસ્પતિ વાપરવું પડે છે. આ જમીનની ગટર-વ્યવસ્થાનો નિકાલ એક તળાવમાં કરવામાં આવે છે. માછલી અને જંગલી જીવોના રક્ષણ માટે આ વનસ્પતિ 800 લિટરથી વધુ વાપરી શકાય નહિ. મંડળીનો કુલ નફો મહત્તમ થાય તે માટે દરેક પાક માટે કેટલી જમીન ફાળવી શકાય ?

ઉકેલ : ધારો કે x હેક્ટર જમીન પાક X માટે અને y હેક્ટર જમીન પાક Y માટે ફાળવવામાં આવે છે. સ્પષ્ટ છે કે, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

પાક X માટે હેક્ટર દીઠ નફો = ₹ 10,500

પાક Y માટે હેક્ટર દીઠ નફો = ₹ 9000

∴ કુલ નફો = ₹ $(10{,}500\,x + 9000\,y)$

આપેલ પ્રશ્નનું ગાણિતિક સ્વરૂપ નીચે પ્રમાણે થશે :

$x + y \leq 50$ *(જમીનસંબંધી મર્યાદા)* ...(1)

$20x + 10y \leq 800$ *(કીટનાશકના ઉપયોગની મર્યાદા)*

એટલે કે, $2x + y \leq 80$ ...(2)

$x \geq 0, y \geq 0$ *(અનૃણ મર્યાદા)* ...(3)

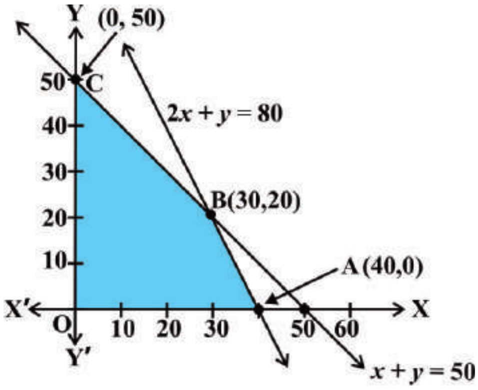
શરતોને અધીન $Z = 10{,}500\,x + 9000\,y$ નું મહત્તમ મૂલ્ય શોધો.

ચાલો આપણે અસમતા સંહતિ (1) થી (3) આલેખીએ. શક્ય ઉકેલનો પ્રદેશ OABC આકૃતિ 12.8 માં (રંગીન) દર્શાવવામાં આવેલ છે. આપણે નોંધીશું કે શક્ય ઉકેલનો પ્રદેશ સીમિત છે.

શિરોબિંદુઓ O, A, B અને C અનુક્રમે (0, 0), (40, 0), (30, 20) અને (0, 50) છે.

મહત્તમ નફો મેળવવા માટે ચાલો આપણે આ બિંદુઓ આગળ હેતુલક્ષી વિધેય $Z = 10{,}500x + 9000y$ નાં મૂલ્ય શોધીએ.

શક્ય ઉકેલના પ્રદેશનાં શિરોબિંદુઓ	Z = 10,500 x + 9000 y નું સંગત મૂલ્ય
O(0, 0)	0
A(40, 0)	4,20,000
B(30, 20)	**4,95,000 → મહત્તમ**
C(0, 50)	4,50,000



આકૃતિ 12.8

આમ, 30 હેક્ટર જમીન પાક X માટે અને 20 હેક્ટર જમીન પાક Y માટે ફાળવવામાં આવે તો મંડળીને મહત્તમ નફો ₹ 4,95,000 થાય.

ઉદાહરણ 8 (ઉત્પાદનને લગતી સમસ્યા) : એક ઉત્પાદક એક વસ્તુના બે મૉડલ A અને B બનાવે છે. એક નંગ મૉડલ A બનાવવા લોખંડના કામની મજૂરી માટે 9 માનવ-કલાકોની અને મઠારવાની ક્રિયા માટે 1 માનવ-કલાકની જરૂર પડે છે. એક નંગ મૉડલ B બનાવવા લોખંડના કામની મજૂરી માટે 12 માનવ-કલાકોની અને મઠારવાની ક્રિયા માટે 3 માનવ-કલાકોની જરૂર પડે છે. લોખંડના કામની મજૂરી અને મઠારવાની ક્રિયા માટે અનુક્રમે મહત્તમ 180 અને 30 માનવ-કલાકો ઉપલબ્ધ છે. ઉત્પાદકને મૉડલ A ના એક નંગ પર ₹ 8000 અને મૉડલ B ના એક નંગ પર ₹ 12,000 નફો થાય છે. મહત્તમ નફો મેળવવા માટે સપ્તાહ દીઠ A પ્રકારના કેટલા નંગ અને B પ્રકારના કેટલા નંગ મૉડલનું ઉત્પાદન કરવું જોઈએ ? સપ્તાહ દીઠ મહત્તમ નફો કેટલો થશે ?

ઉકેલ : ધારો કે સપ્તાહ દીઠ ઉત્પાદિત મૉડલ A ના નંગની સંખ્યા x અને મોડેલ B ના નંગની સંખ્યા y છે.

આથી, કુલ નફો ₹ $(8000\,x + 12{,}000\,y)$

ધારો કે, $Z = 8000\,x + 12{,}000\,y$

હવે, આપેલા પ્રશ્નનું ગાણિતિક સ્વરૂપ નીચે પ્રમાણે થશે :

$Z = 8000\,x + 12{,}000\,y$ ...(1)

નું નીચે આપેલ શરતોને અધીન મહત્તમ મૂલ્ય શોધો :

$9x + 12y \le 180$ *(લોખંડના કામની મર્યાદા)*

$\therefore\ 3x + 4y \le 60$ ...(2)

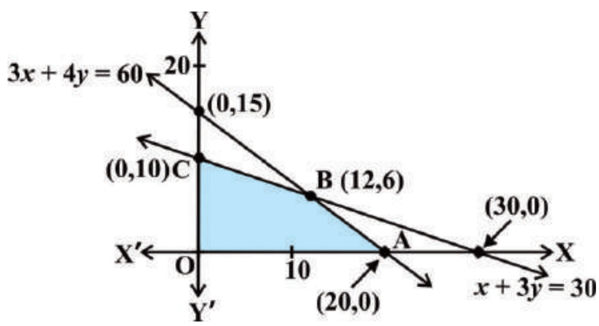
$x + 3y \le 30$ *(મઠારવાના કામની મર્યાદા)* ...(3)

$x \ge 0,\ y \ge 0$ *(અનૃણ મર્યાદા)* ...(4)

અસમતાઓ (2) થી (4) દ્વારા રચાતો શક્ય ઉકેલનો પ્રદેશ (રંગીન) OABC વડે આકૃતિ 12.9 માં દર્શાવેલ છે. આપણે નોંધીશું કે શક્ય ઉકેલનો પ્રદેશ સીમિત છે.

શિરોબિંદુઓ આગળ હેતુલક્ષી વિધેય Z નાં મૂલ્ય નીચે પ્રમાણે મેળવીએ :

શક્ય ઉકેલના પ્રદેશનાં શિરોબિંદુઓ	Z = 8000 x + 12,000 y નું સંગત મૂલ્ય
O(0, 0)	0
A(20, 0)	1,60,000
B(12, 6)	1,68,000 → **મહત્તમ**
C(0, 10)	1,20,000



આકૃતિ 12.9