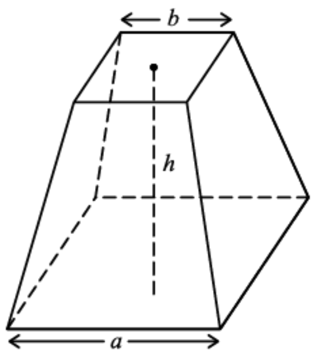
ಅಧ್ಯಾಯ – 5

ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನ ರೇಖಾಗಣಿತದ ಪ್ರಸ್ತಾವನೆ

5.1 ಪೀಠಿಕೆ

ಗ್ರೀಕ್ ಶಬ್ದಗಳಾದ 'ಜಿಯೋ' – ಅಂದರೆ 'ಭೂಮಿ' ಮತ್ತು 'ಮೆಟ್ರಿನ್' – ಅಂದರೆ 'ಅಳತೆ ಮಾಡು' – ಇವುಗಳಿಂದ 'ಜಾಮೆಟ್ರಿ' ಎಂಬ ಶಬ್ದವು ಬಂದಿದೆ. ಭೂಪ್ರದೇಶವನ್ನು ಅಳತೆ ಮಾಡುವ ಅವಶ್ಯಕತೆಯಿಂದ ಜಾಮೆಟ್ರಿ ಅಥವಾ ರೇಖಾಗಣಿತದ ಉಗಮವಾಯಿತು ಎಂದು ತೋರುತ್ತದೆ. ಈಜಿಪ್ಟ್, ಬಬಿಲೋನಿಯಾ, ಚೈನಾ, ಭಾರತ, ಗ್ರೀಕ್, ಇಂಕಾ ಮುಂತಾದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪ್ರಾಚೀನ ನಾಗರಿಕತೆಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಗಣಿತದ ಶಾಖೆಯಾದ ರೇಖಾಗಣಿತದ ಅಧ್ಯಯನವು ವಿವಿಧ ಆಯಾಮಗಳಲ್ಲಿ ನಡೆದಿದೆ. ಈ ನಾಗರಿಕ ಜನಾಂಗಗಳು ಎದುರಿಸಿದ ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ಸಮಸ್ಯೆಗಳಿಂದಾಗಿ ರೇಖಾಗಣಿತದ ವೈವಿಧ್ಯಮಯ ಬೆಳವಣಿಗೆಯ ಅವಶ್ಯಕತೆ ಉಂಟಾಯಿತು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ನೈಲ್ ನದಿಯಲ್ಲಿ ಪ್ರವಾಹ ಬಂದಾಗಲೆಲ್ಲಾ, ಅಕ್ಕ–ಪಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಹೊಲಗಳಿರುವ ಅನೇಕ ರೈತರ ಜಮೀನುಗಳ ಸೀಮಾರೇಖೆ ಕೊಚ್ಚಿ ಹೋಗುತ್ತಿತ್ತು. ಇಂತಹ ಪ್ರವಾಹದ ನಂತರ ಈ ಗಡಿಗಳನ್ನು ಪುನಃ ಗುರುತಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತಿತ್ತು. ಈಜಿಪ್ಟಿನ ಜನರು ಈ ಉದ್ದೇಶದಿಂದ, ಸರಳವಾಗಿ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಲು ಮತ್ತು ಸರಳವಾದ ರಚನೆಗಳನ್ನು ಮಾಡಲು ಅನೇಕ ತಂತ್ರಗಳು ಹಾಗೂ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಅಭಿವೃದ್ಧಿ ಪಡಿಸಿದರು. ಕಣಜಗಳ ಗಾತ್ರಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಲು ಹಾಗೂ ಕಾಲುವೆ ಮತ್ತು ಪಿರಮಿಡ್‌ಗಳನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಲು ಅವರು ರೇಖಾಗಣಿತದ ಜ್ಞಾನವನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡರು. ಒಂದು ಭಿನ್ನಗ್ರ ಪಿರಮಿಡ್(ಚಿತ್ರ 5.1ನ್ನು ಗಮನಿಸಿ)ನ ಗಾತ್ರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಸರಿಯಾದ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಸಹ ಅವರು ತಿಳಿದಿದ್ದರು. (ಚಿತ್ರ 5.1ನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.) ಘ ನಾಕೃತಿಯ ಪಾದವು ತ್ರಿಭುಜ ಅಥವಾ ಚೌಕ ಅಥವಾ ಇತರ ಯಾವುದೇ ಬಹುಭುಜಾಕಾರದಲ್ಲಿದ್ದು, ಪಾರ್ಶ್ವಮುಖಗಳು ತ್ರಿಭುಜಾಕಾರದಲ್ಲಿ, ಏಕಶೃಂಗದಲ್ಲಿ ಸೇರಿದ್ದರೆ, ಅದನ್ನು ಪಿರಮಿಡ್ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದ್ದೀರಿ. ಇದರ ಅಗ್ರಭಾಗವನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿದರೆ, ಅದು ಭಿನ್ನಗ್ರ ಪಿರಮಿಡ್.



ಚಿತ್ರ 5.1 : ಭಿನ್ನಗ್ರ ಪಿರಮಿಡ್

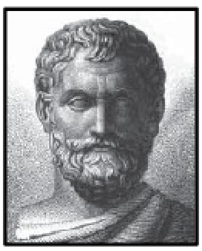
ಉಪಖಂಡ ಭಾರತದ ಹರಪ್ಪಾ, ಮೊಹೆಂಜೊದಾರೋ ಮುಂತಾದೆಡೆಗಳಲ್ಲಿ ನಡೆದ ಉತ್ಖನನಗಳಿಂದ ಸಿಂಧೂನದಿ ಕಣಿವೆಯ ನಾಗರಿಕತೆಯಲ್ಲಿ (ಸುಮಾರು ಕ್ರಿ.ಪೂ. 3000) ರೇಖಾಗಣಿತವು ವಿಪುಲವಾಗಿ ಬಳಕೆಯಾಗಿದ್ದುದು ಕಂಡು ಬರುತ್ತದೆ. ಅದೊಂದು ಸುವ್ಯವಸ್ಥಿತ ಸಮಾಜವಾಗಿತ್ತು. ನಗರಗಳು ಅತ್ಯಂತ ಯೋಜನಾಬದ್ಧವಾಗಿದ್ದವು ಮತ್ತು ಅತ್ಯುನ್ನತವಾಗಿ ಅಭಿವೃದ್ಧಿ ಹೊಂದಿದ್ದವು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ರಸ್ತೆಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸಮಾಂತರವಾಗಿದ್ದವು ಹಾಗೂ ಅಲ್ಲಿ ಒಳಚರಂಡಿಯ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯೂ ಇತ್ತು. ಮನೆಗಳಲ್ಲಿ ವಿವಿಧ ರೀತಿಯ ಅನೇಕ ಕೊಠಡಿಗಳಿದ್ದವು. ನಗರದ ನಿವಾಸಿಗಳು ಕ್ಷೇತ್ರಗಣಿತ ಹಾಗೂ ವ್ಯಾವಹಾರಿಕ ಅಂಕಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಕುಶಲರಾಗಿದ್ದರೆಂದು ಇದು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. ಕಟ್ಟಡಗಳ ನಿರ್ಮಾಣದಲ್ಲಿ ಬಳಸಲಾಗುತ್ತಿದ್ದ ಇಟ್ಟಿಗೆಗಳು ಸುಟ್ಟ ಇಟ್ಟಿಗೆಗಳಾಗಿದ್ದು ಇವುಗಳ ಉದ್ದ : ಅಗಲ : ದಪ್ಪಗಳ ಅನುಪಾತವು 4 : 2 : 1 ಆಗಿರುವುದು ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ.

ಪ್ರಾಚೀನ ಭಾರತದಲ್ಲಿ ಶುಲ್ಬ ಸೂತ್ರಗಳು (ಕ್ರಿ.ಪೂ. 800 ರಿಂದ ಕ್ರಿ.ಪೂ. 500) ರೇಖಾಗಣಿತದ ರಚನೆಗಳ ಕೈಪಿಡಿಗಳಾಗಿದ್ದುವು.

ವೈದಿಕ ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ನಡೆಸುವುದಕ್ಕಾಗಿ ಹೋಮಕುಂಡಗಳು ಮತ್ತು ಯಜ್ಞವೇದಿಗಳ ನಿರ್ಮಾಣಕ್ಕಾಗಿ ವೇದಕಾಲದಲ್ಲಿ ರೇಖಾಗಣಿತವು ಹುಟ್ಟಿಕೊಂಡಿತು. ಪವಿತ್ರವಾದ ಅಗ್ನಿಯಿಂದ ಅತ್ಯುತ್ತಮ ಪರಿಣಾಮ ಉಂಟಾಗಬೇಕಾದರೆ, ಅದರ ಸ್ಥಾನ, ಆಕಾರ ಮತ್ತು ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ನಿರ್ದಿಷ್ಟಪಡಿಸಿದ ನಿಯಮಗಳಿಗೆ ಬದ್ಧವಾಗಿರಬೇಕಾಗಿತ್ತು. ಗೃಹಸಂಬಂಧಿ ವಿಧಿಗಳಿಗೆ ಚೌಕ ಅಥವಾ ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಯಜ್ಞವೇದಿಗಳು ಬಳಸಲ್ಪಡುತ್ತಿದ್ದವು. ಸಾರ್ವಜನಿಕ ಪೂಜೆಗಾಗಿ ಆಯತ, ತ್ರಿಭುಜ, ತ್ರಾಪಿಜ್ಯಗಳ ಸಂಯೋಗದ ಆಕಾರದಲ್ಲಿರುವ ಯಜ್ಞವೇದಿಗಳು ಅವಶ್ಯವಾಗಿದ್ದವು. ಶ್ರೀಯಂತ್ರ ಅಥವಾ ಶ್ರೀ ಚಕ್ರವು (ಅಥರ್ವ ವೇದದಲ್ಲಿ ನೀಡಲಾಗಿದೆ) ಅನ್ಯೋನ್ಯವಾಗಿ ಹೆಣೆದುಕೊಂಡ. 9 ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನೊಳಗೊಂಡಿದೆ. ಈ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಇನ್ನೂ 43 ಪೂರಕ ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನುಂಟು ಮಾಡುವಂತೆ ವ್ಯವಸ್ಥೆಗೊಂಡಿವೆ. ಯಜ್ಞವೇದಿಗಳ ರಚನೆಗೆ ನಿಖರವಾದ ರೇಖಾ ಗಣಿತದ ವಿಧಾನಗಳು ಬಳಕೆಯಾಗುತ್ತಿದ್ದರೂ, ಅದರ ಹಿಂದಿನ ತತ್ವಗಳ ಕುರಿತು ಚರ್ಚೆಯಾಗುತ್ತಿರಲಿಲ್ಲ.

ರೇಖಾಗಣಿತವು ಜಗತ್ತಿನಾದ್ಯಂತ ಅಭಿವೃದ್ಧಿಗೊಳ್ಳುತ್ತಿತ್ತು ಮತ್ತು ಅನ್ವಯವಾಗುತ್ತಿತ್ತು ಎಂಬುದನ್ನು ಈ ಉದಾಹರಣೆಗಳು ತೋರಿಸುತ್ತವೆ. ಆದರೆ ಇದೊಂದು ವ್ಯವಸ್ಥಿತ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ ನಡೆಯುತ್ತಿರಲಿಲ್ಲ. ಪ್ರಾಚೀನ ಜಗತ್ತಿನಲ್ಲಿ ರೇಖಾಗಣಿತದ ಬೆಳವಣಿಗೆಯ ಕುರಿತಾದ ಆಸಕ್ತಿದಾಯಕ ವಿಷಯವೆಂದರೆ ಮೌಖಿಕವಾಗಿ ಅಥವಾ ತಾಳೆಗರಿಯ ಸಂದೇಶದ ಮೂಲಕ ಅಥವಾ ಇನ್ನಿತರ ವಿಧಾನಗಳಿಂದ, ರೇಖಾಗಣಿತವು ಒಂದು ತಲೆಮಾರಿನಿಂದ ಮುಂದಿನದಕ್ಕೆ ಸಾಗುತ್ತಿತ್ತು. ಭಾರತ, ರೋಮ್ ಮತ್ತು ಬೆಬಿಲೋನಿಯಾದಂತಹ ಕೆಲವು ನಾಗರಿಕತೆಗಳಲ್ಲಿ ರೇಖಾಗಣಿತವು ಒಂದು ಪ್ರಯೋಗ ನಿರ್ದೇಶಿತ ಶಾಸ್ತ್ರವಾಗಿಯೇ ಉಳಿಯಿತು. ಈಜಿಪ್ಟಿಯನ್ನರಿಂದ ಅಭಿವೃದ್ಧಿಗೊಂಡ ರೇಖಾಗಣಿತವು ಮುಖ್ಯವಾಗಿ ಫಲಿತಾಂಶಗಳ ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನೊಳಗೊಂಡಿತ್ತು. ಅಲ್ಲಿ ವಿಧಾನಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಸಾಮಾನ್ಯ ನಿಯಮಗಳಿರಲಿಲ್ಲ. ವಾಸ್ತವದಲ್ಲಿ, ಬೆಬಿಲೋನಿಯನ್ನರು ಮತ್ತು ಈಜಿಪ್ಟಿಯನ್ನರು ರೇಖಾಗಣಿತವನ್ನು ಹೆಚ್ಚಾಗಿ ವ್ಯಾವಹಾರಿಕ ಉದ್ದೇಶಕ್ಕಾಗಿ ಬಳಸಿಕೊಂಡರೇ ಹೊರತು, ಅದನ್ನೊಂದು ವ್ಯವಸ್ಥಿತ ವಿಜ್ಞಾನವಾಗಿ ಬೆಳೆಸಲು ನೀಡಿದ ಕೊಡುಗೆ ಅತ್ಯಲ್ಪ. ಆದರೆ ಗ್ರೀಕ್‌ನಂತಹ ನಾಗರಿಕತೆಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಲವೊಂದು ರಚನೆಗಳು ಹೇಗೆ ಕೆಲಸ ಮಾಡುತ್ತವೆ ಎಂಬುದಕ್ಕೆ ಕಾರಣ ನೀಡುವುದಕ್ಕೆ ಹೆಚ್ಚು ಆದ್ಯತೆಯನ್ನು ನೀಡಲಾಗಿತ್ತು. ನಿಗಮನ ಚಿಂತನೆಯ ಮೂಲಕ ತಾವು ಕಂಡುಹಿಡಿದಂತಹ ಹೇಳಿಕೆಗಳ ಸತ್ಯವನ್ನು ಪ್ರತಿಪಾದಿಸುವುದರಲ್ಲಿ ಗ್ರೀಕರು ಆಸಕ್ತರಾಗಿದ್ದರು. (ಅನುಬಂಧ 1 ನ್ನು ನೋಡಿ.)

ನಮಗೆ ತಿಳಿದಂತೆ, ಪ್ರಥಮವಾಗಿ ಗಣಿತೋಕ್ತಿಗೆ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ನೀಡಿದವನೆಂಬ ಹೆಗ್ಗಳಿಕೆ ಗ್ರೀಕ್ ಗಣಿತಜ್ಞನಾದ ಥೇಲ್ಸ್‌ನಿಗೆ ಸಲ್ಲುತ್ತದೆ. ಈ ಸಾಧನೆಯು, ಒಂದು ವೃತ್ತವು ಅದರ ವ್ಯಾಸದಿಂದ ಅರ್ಧಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ (ಅಂದರೆ ಎರಡು ಸಮಭಾಗಗಳಾಗಿ ಕತ್ತರಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ) ಎಂಬ ಹೇಳಿಕೆಯಾಗಿತ್ತು. ಥೇಲ್ಸನ ಅತ್ಯಂತ ಪ್ರಸಿದ್ಧರಾದ ಶಿಷ್ಯರಲ್ಲಿ ಒಬ್ಬನೆಂದರೆ, ನಮಗೆ ಈಗಾಗಲೇ ಪರಿಚಿತನಾಗಿರುವ ಪೈಥಾಗೊರಸ್ (ಕ್ರಿ.ಪೂ. 572). ಪೈಥಾಗೊರಸ್ ಮತ್ತು ಅವನ ತಂಡದವರು ಅನೇಕ ರೇಖಾಗಣಿತೀಯ ಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು ರೇಖಾಗಣಿತದ ಸಿದ್ಧಾಂತಗಳನ್ನು ಅತ್ಯಂತ ವ್ಯಾಪಕವಾಗಿ ಅಭಿವೃದ್ಧಿ ಪಡಿಸಿದರು. ಇದು 300ಃಅಇ ವರೆಗೂ ಮುಂದುವರೆಯಿತು ಅದೇ ಸಮಯದಲ್ಲಿ, ಈಜಿಪ್ಟ್‌ನ ಅಲೆಕ್ಸಾಂಡ್ರಿಯಾದಲ್ಲಿ ಗಣಿತ ಶಿಕ್ಷಕನಾಗಿದ್ದ ಯೂಕ್ಲಿಡನು ಈ ಕ್ಷೇತ್ರದಲ್ಲಿ ನಡೆದ ಕಾರ್ಯಗಳಲ್ಲಿ ತಿಳಿದವುಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಸಂಗ್ರಹಿಸಿ, ತನ್ನ ಪ್ರಸಿದ್ಧ 'ಎಲಿಮೆಂಟ್ಸ್' ಎಂಬ ಸಂಕಲನದಲ್ಲಿ ವ್ಯವಸ್ಥೆಗೊಳಿಸಿದನು. 'ಎಲಿಮೆಂಟ್ಸ್'ನ್ನು ಅವನು 13 ಅಧ್ಯಾಯಗಳಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸಿ, ಪ್ರತಿಯೊಂದನ್ನೂ ಒಂದು ಪುಸ್ತಕವೆಂದು ಕರೆದನು. ಈ ಪುಸ್ತಕಗಳ ಪ್ರಭಾವದಿಂದ, ಇಡೀ ಜಗತ್ತಿನ ರೇಖಾಗಣಿತದ ತಿಳುವಳಿಕೆಯು ಮುಂದಿನ ತಲೆಮಾರುಗಳಿಗೆ ಸಿಗುವಂತಾಯಿತು.



ಥೇಲ್ಸ್ (Thales)
(640 BCE – 546 BCE)
ಚಿತ್ರ 5.2

ಯೂಕ್ಲಿಡ್ (Euclid)
ಕ್ರಿಪೂ 352 – ಕ್ರಿಪೂ 265
ಚಿತ್ರ 5.3

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ನಾವು ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ ರೇಖಾಗಣಿತವನ್ನು ಚರ್ಚಿಸಿ, ಪ್ರಸ್ತುತ ರೇಖಾಗಣಿತದೊಂದಿಗೆ ಅದನ್ನು ಬೆಸೆಯಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸೋಣ.

5.2 ಯೂಕ್ಲಿಡನ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಗಳು, ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧಗಳು ಮತ್ತು ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳು

ಯೂಕ್ಲಿಡನ ಸಮಕಾಲೀನರಾಗಿದ್ದ ಗ್ರೀಕ್ ಗಣಿತಜ್ಞರು, ರೇಖಾಗಣಿತವೆಂದರೆ ನಾವು ವಾಸಿಸುವ ಈ ಜಗತ್ತಿನ ಅಮೂರ್ತ ರೂಪ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದ್ದರು. ಬಿಂದು, ರೇಖೆ, ಸಮತಲ (ಮೇಲ್ಮೈ) ಇತ್ಯಾದಿಗಳ ಕಲ್ಪನೆಗಳು ತಮ್ಮ ಸುತ್ತ ಮುತ್ತಲಿನ ವೀಕ್ಷಣೆಯಿಂದಲೇ ವ್ಯುತ್ಪತ್ತಿಯಾಗಿದ್ದವು (ಉಂಟಾಗಿದ್ದವು). ಅವರ ಸುತ್ತಮುತ್ತಲಿನಲ್ಲಿರುವ ಅವಕಾಶ ಮತ್ತು ಘನಗಳ ಅಧ್ಯಯನದಿಂದ ಒಂದು ಘನ ವಸ್ತುವಿನ ಅಮೂರ್ತ ರೇಖಾಗಣಿತೀಯ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ಅಭಿವೃದ್ಧಿ ಪಡಿಸಿದ್ದರು. ಒಂದು ಘನಾಕೃತಿಗೆ ಆಕಾರ, ಗಾತ್ರ, ಸ್ಥಾನಗಳಿದ್ದು, ಅವುಗಳನ್ನು ಒಂದು ಸ್ಥಳದಿಂದ ಇನ್ನೊಂದು ಸ್ಥಳಕ್ಕೆ ಚಲಿಸುವಂತೆ ಮಾಡಬಹುದಾಗಿದೆ. ಅದರ ಸೀಮಾವಲಯಗಳನ್ನು ಮೇಲ್ಮೈಗಳು ಎನ್ನತ್ತೇವೆ. ಇವುಗಳು ಅವಕಾಶದ ಒಂದು ಭಾಗವನ್ನು ಇನ್ನೊಂದರಿಂದ ಪ್ರತ್ಯೇಕಿಸುತ್ತವೆ ಮತ್ತು ಇವುಗಳಿಗೆ ಯಾವುದೇ ದಪ್ಪವಿಲ್ಲವೆಂದು ಹೇಳಲಾಗಿದೆ. ಮೇಲ್ಮೈಗಳ ಸೀಮಾರೇಖೆಯು ಸರಳರೇಖೆಯಾಗಿರಬಹುದು ಅಥವಾ ವಕ್ರರೇಖೆಯಾಗಿರಬಹುದು. ಈ ರೇಖೆಗಳು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಕೊನೆಗೊಳ್ಳುತ್ತವೆ.

ಘನಗಳಿಂದ ಬಿಂದುಗಳ ತನಕದ 3 ಹಂತಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ (ಘನಗಳು – ಮೇಲ್ಮೈಗಳು – ರೇಖೆಗಳು – ಬಿಂದುಗಳು). ಪ್ರತಿ ಹಂತದಲ್ಲಿ 'ಆಯಾಮ' ಎಂದು ಕರೆಯಲ್ಪಡುವ ಒಂದು ಹರವು ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತಾ ಹೋಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಒಂದು ಘನಕ್ಕೆ ಮೂರು, ಮೇಲ್ಮೈಗೆ ಎರಡು, ರೇಖೆಗೆ ಒಂದು ಆಯಾಮಗಳಿರುತ್ತವೆ. ಬಿಂದುವಿಗೆ ಯಾವುದೇ ಆಯಾಮವಿರುವುದಿಲ್ಲ. ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನು ಈ ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನು 'ವ್ಯಾಖ್ಯೆಗಳು' ಎಂದು ಸಾರಾಂಶೀಕರಿಸಿದನು. 23 ವ್ಯಾಖ್ಯೆಗಳನ್ನು 'ಎಲಿಮೆಂಟ್ಸ್' ನ ಪುಸ್ತಕ I ರಲ್ಲಿ ಪಟ್ಟಿ ಮಾಡುವ ಮೂಲಕ ಅವನು ತನ್ನ ಪ್ರತಿಪಾದನೆಯನ್ನು ಆರಂಭಿಸಿದನು. ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಲವನ್ನು ಕೆಳಗೆ ನೀಡಲಾಗಿದೆ:

1. ಒಂದು ಬಿಂದುವಿಗೆ ಯಾವುದೇ ಭಾಗವಿಲ್ಲ.

2. ಒಂದು ರೇಖೆ ಎಂದರೆ ಅಗಲರಹಿತ ಉದ್ದ.

3. ಒಂದು ರೇಖೆಯ ಅಂತ್ಯಗಳು ಬಿಂದುಗಳು.

4. ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯು ಒಂದು ರೇಖೆಯಾಗಿದ್ದು, ತನ್ನ ಮೇಲಿರುವ ಬಿಂದುಗಳ ಮೇಲೆ ಸಮನಾಗಿ ಹರಡಿಕೊಂಡಿದೆ.

5. ಒಂದು ಮೇಲ್ಮೈ ಎಂದರೆ ಅದಕ್ಕೆ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಅಗಲಗಳು ಮಾತ್ರ ಇರುತ್ತವೆ.

6. ಒಂದು ಮೇಲ್ಮೈಯ ಬದಿಗಳು ರೇಖೆಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ.

7. ಒಂದು ಸಮತಲ ಮೇಲ್ಮೈಯು ಒಂದು ಮೇಲ್ಮೈಯಾಗಿದ್ದು, ತನ್ನ ಮೇಲಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಮೇಲೆ ಸಮನಾಗಿ ಹರಡಿಕೊಂಡಿದೆ.

ಈ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ನೀವು ಎಚ್ಚರದಿಂದ ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡಿದರೆ, ಭಾಗ, ಅಗಲ, ಉದ್ದ, ಸಮನಾಗಿ ಇತ್ಯಾದಿ ಕೆಲವು ಪದಗಳನ್ನು ಇನ್ನು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ವಿವರಿಸಬೇಕಿತ್ತು ಎಂದು ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಬಿಂದುವನ್ನು ಕುರಿತಂತೆ ಅವನ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಈ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ 'ಒಂದು ಭಾಗ'ವನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸುವ ಅಗತ್ಯವಿದೆ. ಒಂದು ವೇಳೆ 'ಭಾಗ'ವನ್ನು ನೀವು 'ಕ್ಷೇತ್ರವನ್ನು ಆವರಿಸಿರುವುದು' ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿದರೆ, ಪುನಃ 'ಒಂದು ಕ್ಷೇತ್ರ'ವನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸುವ ಅವಶ್ಯಕತೆ ಇದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಒಂದು ಅಂಶ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಗೆ ಇತರ ಅನೇಕ ಅಂಶಗಳ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಗಳು ಅವಶ್ಯವೆನಿಸಿ, ವ್ಯಾಖ್ಯೆಗಳ ಕೊನೆ ಇಲ್ಲದ ಒಂದು ಸರಪಳಿಯೇ ಉಂಟಾಗಬಹುದು. ಇಂತಹ ಕಾರಣಗಳಿಗಾಗಿ ಕೆಲವೊಂದು ರೇಖಾಗಣಿತದ ಪದಗಳನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸದೆ ಬಿಡಲು ಗಣಿತವು ಒಪ್ಪಿಕೊಂಡಿದೆ. ಹಾಗಿದ್ದರೂ ರೇಖಾಗಣಿತೀಯ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯಾದ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಬಗ್ಗೆ ಮೇಲೆ ನೀಡಿದ 'ವ್ಯಾಖ್ಯೆ'ಗೆ ಹೊರತಾಗಿ ನಮಗೆ ನಮ್ಮದೇ ಆದ ಒಳನೋಟವಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಬಿಂದುವಿಗೆ ಕೆಲವೊಂದು ಆಯಾಮಗಳಿದ್ದರೂ, ನಾವದನ್ನು ಒಂದು ಚುಕ್ಕೆಯ ಮೂಲಕ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಮೇಲಿನ 2ನೆಯ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯಲ್ಲೂ ಇಂತಹದೇ ಸಮಸ್ಯೆ ಉದ್ಭವವಾಗುತ್ತದೆ. ಏಕೆಂದರೆ, ಇಲ್ಲಿ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಅಗಲಗಳ ಉಲ್ಲೇಖವಿದೆ. ಆದರೆ ಯಾವೊಂದನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿಲ್ಲ. ಈ ಕಾರಣದಿಂದ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಅಧ್ಯಯನ ವಿಭಾಗದ ಬೆಳವಣಿಗೆಯಲ್ಲಿ ಕೆಲವೊಂದು ಪದಗಳನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸದೆ ಬಿಡಲಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ರೇಖಾಗಣಿತದಲ್ಲಿ, ಒಂದು ಬಿಂದು, ಒಂದು ರೇಖೆ ಮತ್ತು ಒಂದು ಸಮತಲ (ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನ ಪದಗಳಲ್ಲಿ 'ಒಂದು ಸಮತಲ ಮೇಲ್ಮೈ') – ಇವುಗಳನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾ

ನಿಸದ ಪದಗಳೆಂದು ನಾವು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ. ಒಂದೇ ಒಂದು ಸಂಗತಿ ಎಂದರೆ, ಒಳನೋಟದ ಭಾವನೆಯಿಂದ ನಾವದನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಬಹುದು ಅಥವಾ 'ಭೌತಿಕ ಮಾದರಿ'ಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ ಅವುಗಳನ್ನು ವಿವರಿಸಬಹುದು.

ಅವನ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ಆರಂಭಗೊಂಡು, ಸಾಧಿಸುವ ಅಗತ್ಯವಿಲ್ಲದ ಕೆಲವೊಂದು ಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಯೂಕ್ಲಿಡ್ ಊಹಿಸಿದನು. ಖಂಡಿತವಾಗಿ, ಈ ಊಹೆಗಳು 'ಸುಸ್ಪಷ್ಟ ವಿಶ್ವಮಾನ್ಯ ಸತ್ಯಸಂಗತಿಗಳು'. ಅವನು ಅವುಗಳನ್ನು 'ಸ್ವಯಂ ಸಿದ್ಧಗಳು' ಮತ್ತು 'ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆ'ಗಳು ಎಂಬ ಎರಡು ವಿಧಗಳಾಗಿ ವರ್ಗೀಕರಿಸಿದನು. ರೇಖಾಗಣಿತಕ್ಕೆಂದೇ ನಿರ್ದಿಷ್ಟಪಡಿಸಿದ ಊಹೆಗಳಿಗೆ ಅವನು 'ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆ'ಗಳು ಎಂಬ ಪದವನ್ನು ಬಳಸಿದನು. ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿ ರೇಖಾಗಣಿತಕ್ಕೆ ಮಾತ್ರ ಸಂಬಂಧಿಸದೆ, ಗಣಿತದಲ್ಲೆಲ್ಲಾ ಉಪಯೋಗವಾಗುವ ಊಹೆಗಳನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯ ಸತ್ಯಸಂಗತಿಗಳು ಎಂದಿದ್ದಾನೆ. ಇವುಗಳನ್ನೇ ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧಗಳು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧ ಮತ್ತು ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳ ಕುರಿತು ಹೆಚ್ಚಿನ ಮಾಹಿತಿಗೆ ಅನುಬಂಧ 1ನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಅವನದೇ ಅನುಕ್ರಮಣಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಅಲ್ಲದಿದ್ದರೂ, ಯೂಕ್ಲಿಡನ ಕೆಲವು ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧಗಳನ್ನು ಕೆಳಗೆ ನೀಡಲಾಗಿದೆ.

1. ಒಂದೇ ಅಂಶಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾಗಿರುವ ಅಂಶಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸಮ.

2. ಸಮವಾಗಿರುವ ಅಂಶಗಳಿಗೆ ಸಮವಾಗಿರುವ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದಾಗ ಮೊತ್ತ (ಪೂರ್ಣ)ಗಳು ಸಮವಾಗುತ್ತವೆ.

3. ಸಮಾನ ಅಂಶಗಳಿಂದ, ಸಮಾನ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಕಳೆದಾಗ ಉಳಿದ ಭಾಗಗಳು ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

4. ಒಂದರಲ್ಲೊಂದು ಐಕ್ಯವಾಗುವ ಅಂಶಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸಮ.

5. ಪೂರ್ಣವು ಅದರ ಭಾಗಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದು.

6. ಒಂದೇ ಅಂಶಗಳ ದುಪ್ಪಟ್ಟು ಅಂಶಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸಮ.

7. ಒಂದೇ ಅಂಶಗಳ ಅರ್ಧದಷ್ಟಿರುವ ಅಂಶಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸಮ.

ಈ 'ಸಾಮಾನ್ಯ ಸತ್ಯಸಂಗತಿಗಳು' ಒಂದು ರೀತಿಯ ಪರಿಮಾಣಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆ. ಮೊದಲನೆಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸತ್ಯಸಂಗತಿಯನ್ನು ಸಮತಲಾಕೃತಿಗಳಿಗೆ ಅನ್ವಯಿಸಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಒಂದು ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಕ್ಕೆ ಸಮವಾದರೆ ಮತ್ತು ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಒಂದು ಚೌಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಕ್ಕೆ ಸಮವಾದರೆ, ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಚೌಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಒಂದೇ ರೀತಿಯ ಪರಿಮಾಣಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸಬಹುದು ಮತ್ತು ಕೂಡಿಸಬಹುದು. ಆದರೆ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ರೀತಿಯ ಪರಿಮಾಣಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಒಂದು ರೇಖೆಯನ್ನು ಒಂದು ಆಯತಕ್ಕೆ ಸೇರಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಅದೇ ರೀತಿ ಒಂದು ಕೋನವನ್ನು ಪಂಚಭುಜಾಕೃತಿಯೊಂದಿಗೆ ಹೋಲಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.

ಮೇಲೆ ನೀಡಿದ 4ನೇ ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧವು, ಏಕರೂಪವಾಗಿರುವ (ಅಂದರೆ ಒಂದೇ ರೀತಿ ಇರುವ) ಎರಡು ವಸ್ತುಗಳು ಸಮಾನ ಎಂದು ಹೇಳುವಂತೆ ಕಾಣುತ್ತದೆ. ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವಸ್ತುವೂ ತನಗೆ ತಾನು ಸಮವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಇದು ಉನ್ನತ ಸ್ಥಾನ (super position) ತತ್ವದ ಸಮರ್ಥನೆಯಾಗಿದೆ. 'ಅದಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದು' ಎಂಬುದರ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯನ್ನು 5ನೇ ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧ ನಮಗೆ ನೀಡುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಪರಿಮಾಣ A ಯ ಒಂದು ಭಾಗವು ಪರಿಮಾಣ B ಆಗಿದ್ದರೆ, ಪರಿಮಾಣ A ಯನ್ನು ಪರಿಮಾಣ B ಮತ್ತು ಇನ್ನೊಂದು 3ನೆಯ ಪರಿಮಾಣ C ಯ ಮೊತ್ತವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು. ಸಾಂಕೇತಿಕವಾಗಿ, $A > B$ ಎಂದರೆ,
$A = B + C$ ಆಗುವಂತೆ ಅಲ್ಲೊಂದು C ಇರುತ್ತದೆ.

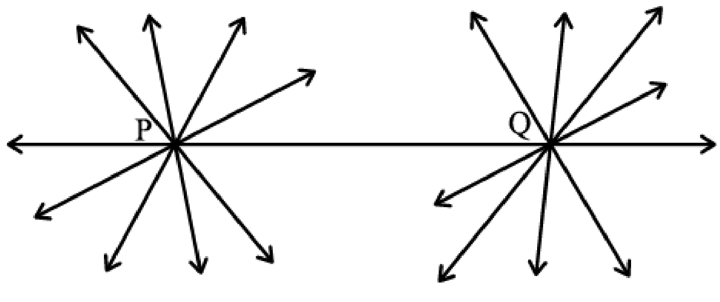
ಈಗ ನಾವು ಯೂಕ್ಲಿಡನ 5 ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳನ್ನು ಕುರಿತು ಚರ್ಚಿಸೋಣ. ಅವುಗಳೆಂದರೆ,

ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆ 1 : ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಇನ್ನೊಂದು ಬಿಂದುವಿಗೆ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಬಹುದು.

2 ವಿಭಿನ್ನ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಕನಿಷ್ಠ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯಾದರೂ ಹಾದುಹೋಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ಈ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆ ಹೇಳುತ್ತದೆ. ಇಂತಹ ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ರೇಖೆಗಳು ಇರಬಾರದು ಎಂದು ಹೇಳುವುದಿಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಎರಡು ವಿಭಿನ್ನ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಒಂದೇ ಒಂದು ರೇಖೆ ಇರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಯೂಕ್ಲಿಡ್ ಹೇಳದಿದ್ದರೂ, ತನ್ನ ಕಾರ್ಯದಲ್ಲಿ ಆಗಾಗ್ಗೆ ಊಹಿಸಿದ್ದಾನೆ. ಈ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಒಂದು ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧದ ರೂಪದಲ್ಲಿ, ನಾವು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಹೇಳುತ್ತೇವೆ.

ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧ 5.1 : ಎರಡು ವಿಭಿನ್ನ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ, ಅವುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವಂತೆ ಒಂದೇ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆ ಇರುತ್ತದೆ.

P ಯ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವ ಎಷ್ಟು ರೇಖೆಗಳು Q ನ ಮೂಲಕವೂ ಹಾದುಹೋಗುತ್ತವೆ? (ಚಿತ್ರ 5.4 ನ್ನು ಗಮನಿಸಿ). ಒಂದೇ ಒಂದು. ಅಂದರೆ ಆ ರೇಖೆ PQ. ಅಂತೆಯೇ Q ನ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವ ಎಷ್ಟು ರೇಖೆಗಳು Pಯ ಮೂಲಕವೂ ಹಾದುಹೋಗುತ್ತವೆ? ಒಂದೇ ಒಂದು. ಅಂದರೆ, ಆ ರೇಖೆ PQ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಹೇಳಿಕೆಯು ಸ್ವಸಾಕ್ಷ್ಯ ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 5.4

ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆ 2 : ಒಂದು ಅಂತ್ಯಗೊಂಡಿರುವ ರೇಖೆಯನ್ನು ಅನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿ ವಿಸ್ತರಿಸಬಹುದು.

ನಾವಿಂದು ರೇಖಾಖಂಡವೆಂದು ಯಾವುದನ್ನು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆಯೋ, ಅದನ್ನು ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನು ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುವ ರೇಖೆ ಎಂದಿದ್ದಾನೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಆದುದರಿಂದ, ಪ್ರಸ್ತುತ ಬಳಕೆಯ ಪದಗಳಿಗೆ ಅನುಸಾರವಾಗಿ 2ನೆಯ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಯು ಹೇಳುವುದೇನೆಂದರೆ – ಒಂದು ರೇಖಾಖಂಡವು ರೇಖೆಯಾಗುವಂತೆ, ಅದರ ಎರಡೂ ಬದಿಗಳಲ್ಲೂ ವೃದ್ಧಿಸಬಹುದು. (ಚಿತ್ರ 5.5ನ್ನು ಗಮನಿಸಿ)

ಚಿತ್ರ 5.5

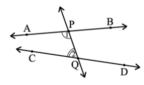
ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆ 3 : ಯಾವುದೇ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಮತ್ತು ಯಾವುದೇ ತ್ರಿಜ್ಯದಿಂದ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಬಹುದು.

ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆ 4 : ಎಲ್ಲಾ ಲಂಬಕೋನಗಳೂ ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆ 5 : ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಮೇಲೆ ಇನ್ನೊಂದು ಸರಳರೇಖೆ ಬಿದ್ದಾಗ, ಅದರ ಒಂದೇ ಬದಿಯಲ್ಲಿರುವ ಅಂತಃಕೋನಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟಿಗೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ ಎರಡು ಲಂಬಕೋನಗಳಿಗಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಬಂದರೆ, ಆ ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ಅನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿ ವೃದ್ಧಿಸಿದಾಗ ಮೊತ್ತವು ಎರಡು ಲಂಬಕೋನಗಳಿಗಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಬರುವ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲೇ ಆ ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಒಂದನ್ನೊಂದು ಸಂಧಿಸುತ್ತವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಚಿತ್ರ 5.6 ರಲ್ಲಿ AB ಮತ್ತು CD ರೇಖೆಗಳ ಮೇಲೆ PQ ರೇಖೆ ಬೀಳುತ್ತದೆ. ಆಗ PQ ನ	

ಎಡಬದಿಯಲ್ಲಿರುವ ಒಳಕೋನಗಳಾದ 1 ಮತ್ತು 2ರ ಮೊತ್ತವು 180° ಗಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಇರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ AB ಮತ್ತು CD ರೇಖೆಗಳು PQ ನ ಎಡಬದಿಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಕಡೆ ಸಂಧಿಸಬಹುದು.



ಚಿತ್ರ 5.6

ಈ ಐದು ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳ ಮೇಲೆ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾಗಿ ಕಣ್ಣು ಹಾಯಿಸಿದಾಗ, 5ನೆಯ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಯು ಉಳಿದೆಲ್ಲಾ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳಿಗಿಂತ ಸಂಕೀರ್ಣವಾಗಿರುವುದು ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ. ಇನ್ನೊಂದೆಡೆ, 1 ರಿಂದ
4 ರ ತನಕದ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳು ಎಷ್ಟು ಸರಳವಾಗಿವೆ ಎಂದರೆ ಅವುಗಳನ್ನು ಸ್ವ–ಸಾಕ್ಷಿಯುತ ಸತ್ಯಗಳೆಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಹಾಗೆಂದು ಅವುಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನು ಯಾವುದೇ ಸಾಧ ನೆಗಳಿಲ್ಲದೆ ಒಪ್ಪಿಕೊಳ್ಳಲಾಗಿದೆ. (ಅನುಬಂಧ 1 ನ್ನು ನೋಡಿರಿ.) ಐದನೆಯ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಯ ಸಂಕೀರ್ಣತೆಯಿಂದಾಗಿ, ಮುಂದಿನ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ ಅದರತ್ತ ಹೆಚ್ಚು ಗಮನ ಹರಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಇತ್ತೀಚಿನ ದಿನಗಳಲ್ಲಿ 'ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧ' ಮತ್ತು 'ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆ' ಗಳೆಂಬ ಪದಗಳನ್ನು ಸಮಾನಾರ್ಥಕವಾಗಿ ಮತ್ತು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಪರ್ಯಾಯವಾಗಿ ಬಳಸಲಾಗುತ್ತಿದೆ. 'ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆ' ಎಂಬುದು ನೈಜತೆಯಲ್ಲಿ ಕ್ರಿಯಾ ಪದವಾಗಿದೆ. 'ನಾವು ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆ ಮಾಡೋಣ' ಎಂದು ಹೇಳಿದರೆ ಅದರ ಅರ್ಥ, 'ವಿಶ್ವದಲ್ಲಿ ನಾವು ಅವಲೋಕಿಸಿದ ವಿದ್ಯಮಾನಗಳ ಆಧಾರದಿಂದ ಕೆಲವು ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನು ಮಾಡೋಣ' ಎಂದು. ಅದರ ಸತ್ಯಾಸತ್ಯತೆ/ಸಿಂಧುತ್ವವನ್ನು ಆ ಬಳಿಕ ಪರೀಕ್ಷಿಸಬಹುದು. ಅದು ಸತ್ಯವೆಂದಾದರೆ, ಅದೊಂದು 'ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆ' ಎಂದು ಸ್ವೀಕಾರಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ.

ಈಗಾಗಲೇ ಸ್ವೀಕೃತವಾಗಿರುವ ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧವನ್ನು ಅಥವಾ ಸಾಧಿತವಾಗಿರುವ ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿರೋಧಿಸುವಂತಹ ಯಾವುದೇ ಹೇಳಿಕೆಯನ್ನು ನಿರೂಪಿಸುವುದಕ್ಕೆ ಸಾಧ್ಯವಾಗದಿದ್ದಲ್ಲಿ ಅಂತಹ ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧಗಳ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು ಸುಸ್ಥಿರ (consistent) ಎನ್ನತ್ತೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಯಾವುದೇ ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧಗಳ ಪ್ರಕ್ರಮ (ಪದ್ಧತಿ)ಯನ್ನು ಕೊಡುವಾಗ, ಅದು ಸುಸ್ಥಿರವೇ ಎಂಬುದನ್ನು ಖಚಿತ ಪಡಿಸಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು.

ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧ ಮತ್ತು ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿಪಾದಿಸಿದ ಬಳಿಕ, ಯೂಕ್ಲಿಡ್ ಇತರ ಫಲಿತಾಂಶಗಳ ಸಾಧನೆಗಾಗಿ ಇವುಗಳನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡನು. ಆ ಬಳಿಕ ಈ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ, ನಿಗಮನ ತರ್ಕದ ಮೂಲಕ ಇನ್ನೂ ಅನೇಕ ಫಲಿತಾಂ ಶಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿದನು. ಹೀಗೆ ಸಾಧಿಸಿದ ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನು ತಾರ್ಕಿಕ ಹೇಳಿಕೆಗಳು ಅಥವಾ ಪ್ರಮೇಯಗಳು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಒಂದು ತಾರ್ಕಿತ ಸರಣಿಯಲ್ಲಿ ಯೂಕ್ಲಿಡ್ 465 ತಾರ್ಕಿಕ ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಿದನು. ಇದಕ್ಕಾಗಿ ಅವನು ಇದೇ ಸರಣಿಯಲ್ಲಿ ಈ ಮೊದಲು ಸಾಧಿಸಿದ ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧಗಳು, ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳು, ವ್ಯಾಖೆಗಳು ಮತ್ತು ಪ್ರಮೇಯಗಳನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡನು. ರೇಖಾಗಣಿತದ ಮುಂದಿನ ಕೆಲವು ಅಧ್ಯಾಯಗಳಲ್ಲಿ, ಕೆಲವು ಪ್ರಮೇಯಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು ನೀವು ಈ ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧಗಳನ್ನು ಉ ಪಯೋಗಿಸಿಕೊಳ್ಳಲಿರುವಿರಿ.

ಕೆಲವು ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು, ಯೂಕ್ಲಿಡ್ ತನ್ನ ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧಗಳು ಮತ್ತು ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಬಳಸಿಕೊಂಡ ನು ಎಂಬುದನ್ನು ಮುಂದಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ನಾವು ನೋಡೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 1 : A, B ಮತ್ತು C ಗಳು ಒಂದು ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳಾದರೆ ಮತ್ತು
B ಯು A ಮತ್ತು C ಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವುದಾದರೆ (ಚಿತ್ರ 5.7ನ್ನು ಗಮನಿಸಿ), AB + BC = AC ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಚಿತ್ರ 5.7

ಪರಿಹಾರ : ಮೇಲಿನ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, AB + BC ಯಲ್ಲಿ AC ಯು ಐಕ್ಯಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ.

ಅಲ್ಲದೆ, ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನ 4ನೆಯ ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧದ ಪ್ರಕಾರ, ಒಂದರಲ್ಲೊಂದು ಐಕ್ಯವಾಗುವ ಅಂಶಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು

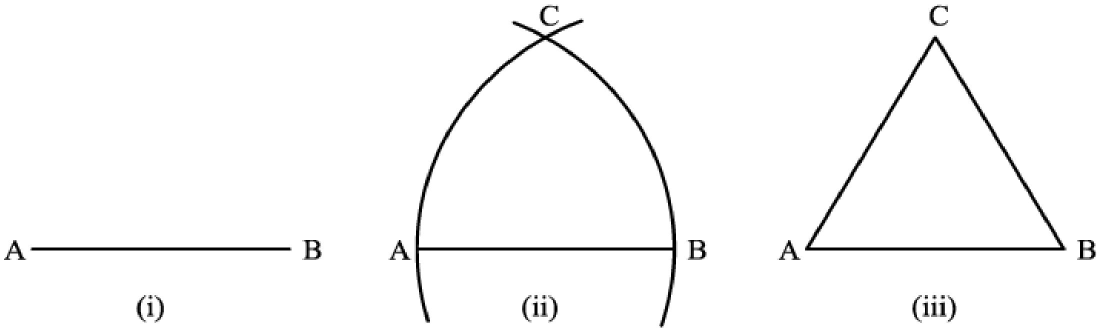
ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಆದುದರಿಂದ ಹೀಗೆಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸಬಹುದು.

AB + BC = AC

ಈ ಪರಿಹಾರದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಒಂದೇ ಒಂದು ರೇಖೆ ಹಾದು ಹೋಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ಊಹಿಸಿರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಉದಾಹರಣೆ 2 : ಯಾವುದೇ ಒಂದು ದತ್ತ ರೇಖಾಖಂಡದಿಂದ ಒಂದು ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ : ಮೇಲಿನ ಹೇಳಿಕೆಯಲ್ಲಿ AB ಯು ಯಾವುದೇ ಉದ್ದವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಒಂದು ರೇಖಾಖಂಡ ಆಗಿರಲಿ [ಚಿತ್ರ 5.8(i)ನ್ನು ಗಮನಿಸಿ].



ಚಿತ್ರ 5.8

ಇಲ್ಲಿ ನೀವು ಕೆಲವು ರಚನೆಗಳನ್ನು ಮಾಡಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನ 3ನೆಯ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು, A ಯನ್ನು ಕೇಂದ್ರವೆಂದೂ, AB ಯನ್ನು ತ್ರಿಜ್ಯವೆಂದೂ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ನೀವು ಬಿಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು [ಚಿತ್ರ 5.8 (ii)ನ್ನು ಗಮನಿಸಿ]. ಅದೇ ರೀತಿ B ಯನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿಸಿ, BA ಯನ್ನು ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿಸಿ, ಇನ್ನೊಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳು ಸಂಧಿಸುವ ಬಿಂದುವು C ಆಗಿರಲಿ. ಈಗ ΔABC ಉಂಟಾಗುವಂತೆ AC ಮತ್ತು BC ರೇಖಾಖಂಡಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ [ಚಿತ್ರ 5.8 (iii)ನ್ನು ಗಮನಿಸಿ].

ನೀವೀಗ, ಇದೊಂದು ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜವೆಂದು ಸಾಧಿಸಬೇಕು. ಅಂದರೆ, AB = AC = BC.

ಈಗ, AB = AC ಯಾಕೆಂದರೆ ಅವುಗಳ ಒಂದೇ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು .... (i)

ಅದೇ ರೀತಿ, AB = BC (ಒಂದೇ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು) .... (ii)

ಈ ಎರಡು ನೈಜಾಂಶಗಳಿಂದ ಮತ್ತು ಒಂದೇ ಅಂಶಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾಗಿರುವ ಅಂಶಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸಮಾನ ಎಂಬ ಯೂಕ್ಲಿಡನ ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧದಿಂದ, AB = BC = AC ಎಂದು ನೀವು ತೀರ್ಮಾನಿಸಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ΔABC ಯು ಒಂದು ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜವಾಗಿದೆ.

ಹಾಗೆಂದು ಎಲ್ಲಿಯೂ ಹೇಳದಿದ್ದರೂ, A ಮತ್ತು B ಕೇಂದ್ರಗಳಿಂದ ಎಳೆದ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳು ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಒಂದನ್ನೊಂದು ಸಂಧಿಸುತ್ತವೆ ಎಂದು ಯೂಕ್ಲಿಡ್ ಊಹಿಸಿರುವುದನ್ನು ನೀವಿಲ್ಲಿ ಗಮನಿಸಿ.

ನಾವೀಗ, ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಫಲಿತಾಂಶಗಳಲ್ಲಿ ಆಗಾಗ ಉಪಯೋಗಿಸಲ್ಪಡುವ ಒಂದು ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಸಾಧಿಸೋಣ.

ಪ್ರಮೇಯ 5.1 : ಎರಡು ವಿಭಿನ್ನ ರೇಖೆಗಳು ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಿಂದುವನ್ನು ಹೊಂದಿರಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.

ಸಾಧನೆ : ನಮಗಿಲ್ಲಿ l ಮತ್ತು m ಎಂಬ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳನ್ನು ನೀಡಲಾಗಿದೆ. ಅವೆರಡರಲ್ಲೂ ಒಂದೇ ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಿಂದು ಇದೆ ಎಂದು ನಾವು ಸಾಧಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ.

ಪ್ರಸ್ತುತ, ಎರಡು ರೇಖೆಗಳು p ಮತ್ತು q ಎಂಬ ಎರಡು ವಿಭಿನ್ನ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ ಎಂದು ನಾವು ಊಹಿಸೋಣ. ಹಾಗಾದರೆ, p ಮತ್ತು Q ಎಂಬ ಎರಡು ವಿಭಿನ್ನ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳಿವೆ. ಈ ಕಲ್ಪನೆಯು, ಎರಡು ವಿಭಿನ್ನ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಒಂದೇ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆ ಹಾದು ಹೋಗುತ್ತದೆ ಎಂಬ ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧಕ್ಕೆ ವಿರುದ್ಧವಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಎರಡು ವಿಭಿನ್ನ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳು ಹಾದುಹೋಗಬಹುದು ಎಂದು ನಾವು ಆರಂಭದಲ್ಲಿ ಊಹಿಸಿರುವುದು ತಪ್ಪಾಗಿದೆ.

ಇದರಿಂದ ನಾವು ಏನನ್ನು ತೀರ್ಮಾನಿಸಬಹುದು? ಎರಡು ಪ್ರತ್ಯೇಕ ರೇಖೆಗಳು ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಿಂದುವನ್ನು ಹೊಂದಿರಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ ಎಂದು ನಾವು ತೀರ್ಮಾನಿಸಲೇ ಬೇಕಾಗಿದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 5.1

1. ಕೆಳಗಿನ ಹೇಳಿಕೆಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದು ಸತ್ಯ ಮತ್ತು ಯಾವುದು ಸುಳ್ಳು? ಎಂಬುದನ್ನು ಕಾರಣಸಹಿತ ತಿಳಿಸಿ.

(i) ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಒಂದೇ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆ ಹಾದು ಹೋಗಬಹುದು.

(ii) ಎರಡು ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಅಪರಿಮಿತ ರೇಖೆಗಳು ಹಾದುಹೋಗುತ್ತವೆ.

(iii) ಒಂದು ಅಂತ್ಯಗೊಂಡಿರುವ ರೇಖೆಯನ್ನು ಎರಡೂ ಬದಿಗಳಲ್ಲಿ ಅನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿ ವೃದ್ಧಿಸಬಹುದು.

(iv) ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳು ಸಮ ಎಂದಾದರೆ, ಅವುಗಳ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳೂ ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

(v) ಚಿತ್ರ 5.9ರಲ್ಲಿ, AB = PQ ಮತ್ತು PQ = XY ಎಂದಾದರೆ, AB = XY ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಚಿತ್ರ 5.9

2. ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪದಕ್ಕೂ ಒಂದೊಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯನ್ನು ನೀಡಿರಿ. ಇವುಗಳನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸುವ ಮೊದಲು ಬೇರೆ ಯಾವುದಾದರೂ ಪದಗಳನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸುವ ಅಗತ್ಯವಿದೆಯೆ? ಇದ್ದರೆ ಅವುಗಳು ಯಾವುವು? ನೀವು ಅವುಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸುವಿರಿ?

(i) ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳು (ii) ಲಂಬರೇಖೆಗಳು

(iii) ರೇಖಾಖಂಡ (iv) ಒಂದು ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ

(v) ಚೌಕ

3. ಕೆಳಗೆ ನೀಡಿದ ಎರಡು 'ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳನ್ನು' ಗಮನಿಸಿ.

(i) A ಮತ್ತು B ಎಂಬ ಎರಡು ವಿಭಿನ್ನ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ನೀಡಿದಾಗ, ಅವುಗಳ ನಡುವೆ C ಎಂಬ 3ನೆಯ ಬಿಂದು ಇರುತ್ತದೆ.

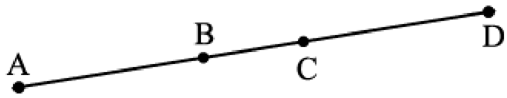
(ii) ಏಕರೇಖಾಗತವಲ್ಲದಿರುವ ಕನಿಷ್ಠ ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳಾದರೂ ಇರುತ್ತವೆ.

ಈ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳಲ್ಲಿ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸದಿರುವ ಯಾವುದಾದರೂ ಪದಗಳಿವೆಯೆ? ಈ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳು ಸುಸ್ಥಿರವೆ? ಅವುಗಳು ಯೂಕ್ಲಿಡನ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳಿಗೆ ಸರಿಹೊಂದುತ್ತವೆಯೆ? ವಿವರಿಸಿ.

4. AC = BC ಆಗುವಂತೆ A ಮತ್ತು B ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವೆ C ಎಂಬ ಬಿಂದು ಇರುವುದಾದರೆ, $AC = \frac{1}{2} AB$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ. ಚಿತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸುವ ಮೂಲಕ ವಿವರಿಸಿ.

5. 4ನೆಯ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ C ಬಿಂದುವನ್ನು ರೇಖಾಖಂಡ AB ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ರೇಖಾಖಂಡಕ್ಕೂ ಒಂದು ಮತ್ತು ಒಂದೇ ಒಂದು ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಇರುತ್ತದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

6. ಚಿತ್ರ 5.10 ರಲ್ಲಿ, AC = BD ಆದರೆ AB = CD ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 5.10

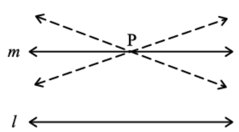
7. ಯೂಕ್ಲಿಡನ ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧಗಳ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ, 5ನೆಯ ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧವನ್ನು 'ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ಸತ್ಯ' ಎಂದು ಏಕೆ ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗಿದೆ? (ಪ್ರಶ್ನೆಯು 5ನೆಯ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಯ ಬಗ್ಗೆ ಅಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.)

5.3. ಯೂಕ್ಲಿಡನ 5ನೆಯ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಯ ಸಮಾನ ರೂಪಾಂತರಗಳು

ಗಣಿತದ ಇತಿಹಾಸದಲ್ಲಿ ಯೂಕ್ಲಿಡನ 5ನೆಯ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಯು ಅತ್ಯಂತ ಮಹತ್ತರವಾದುದು. 5.2ನೆಯ ವಿಭಾಗದಿಂದ ಇನ್ನೊಮ್ಮೆ ಅದನ್ನು ಸ್ಮರಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ. ಅದನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸುವುದರಿಂದ 'ಪತನ ರೇಖೆಯ ಒಂದೇ ಬದಿಯಲ್ಲಿ ಬರುವ ಅಂತಃಕೋನಗಳ ಅಳತೆಯ ಮೊತ್ತವು ಸರಿಯಾಗಿ 180° ಆದರೆ, ರೇಖೆಗಳ ಛೇದನವು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ' ಎಂದು ತಿಳಿದು ಬರುತ್ತದೆ. ಈ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗೆ ಇದೇ ರೀತಿಯ ಇನ್ನೂ ಅನೇಕ ಆಯಾಮಗಳಿವೆ. ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು, ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಹೇಳಿಕೆ ಇರುವ, 'ಪ್ಲೇಫೇರ್‌ನ ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧ'. (ಸ್ಕಾಟ್ಲೆಂಡ್‌ನ ಗಣಿತಜ್ಞನಾದ ಜಾನ್ ಪ್ಲೇಫೇರ್‌ನು 1729 ರಲ್ಲಿ ಇದನ್ನು ನೀಡಿದ್ದಾನೆ.)

'ಪ್ರತಿಯೊಂದು ರೇಖೆ l ಗೆ ಮತ್ತು l ನ ಮೇಲಿರದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಂದು P ಗೆ, l ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವಂತೆ, P ಯ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ m ಎಂಬ ಒಂದೇ ಒಂದು ರೇಖೆ ಇರುತ್ತದೆ.'

ಚಿತ್ರ 5.11 ರಿಂದ, P ಯ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಎಲ್ಲಾ ರೇಖೆಗಳಲ್ಲಿ, m ಮಾತ್ರ l ಗೆ ಸಮಾಂತರ ಎಂದು ನೀವು ನೋಡಬಹುದು.



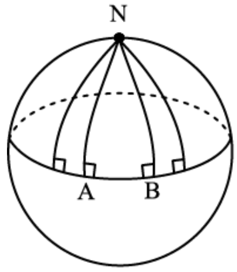
ಚಿತ್ರ 5.11

ಈ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನ ರೀತಿಯಲ್ಲೂ ಹೇಳಬಹುದು.

ಎರಡು ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾದ ಮತ್ತು ಛೇದಿಸುವ ರೇಖೆಗಳು ಒಂದೇ ರೇಖೆಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.

ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ಗೆ ತನ್ನ ಮೊದಲ 28 ಪ್ರಮೇಯಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು ಅವನ ಐದನೇ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಯ ಅವಶ್ಯಕತೆ ಉಂಟಾಗಲಿಲ್ಲ. 5ನೆಯ ಆಧಾರಪ್ರತಿಜ್ಞೆಯು ಇತರ 4 ಆಧಾರಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳು ಮತ್ತು ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧಗಳ ಮೂಲಕ ಸಾಧಿಸಬಹುದಾದ ಒಂದು

ಪ್ರಮೇಯ ಎಂದು, ಅವನನ್ನೂ ಸೇರಿಸಿ, ಅನೇಕ ಗಣಿತಜ್ಞರು ತಿಳಿದಿದ್ದರು. ಹೀಗಿದ್ದರೂ, 5ನೆಯ ಆಧಾರಪ್ರತಿಜ್ಞೆಯನ್ನು ಒಂದು ಪ್ರಮೇಯವೆಂದು ಸಾಧಿಸಲು ನಡೆದ ಪ್ರಯತ್ನಗಳೆಲ್ಲಾ ವಿಫಲವಾದವು. ಆದರೆ ಈ ಪ್ರಯತ್ನಗಳಿಂದ ಉಂಟಾದ ಅತಿದೊಡ್ಡ ಸಾಧನೆ ಎಂದರೆ ಇತರ ಅನೇಕ ರೇಖಾಗಣಿತಗಳ ಸೃಜನೆ. ಈ ರೇಖಾಗಣಿತಗಳು ಯೂಕ್ಲಿಡನ ರೇಖಾಗಣಿತಕ್ಕಿಂತ ತುಂಬಾ ಭಿನ್ನವಾಗಿದ್ದವು. ಅವುಗಳನ್ನು 'ಯೂಕ್ಲಿಡೇತರ ರೇಖಾಗಣಿತಗಳು' (ಟಿಠಟಿ–ಇಣಛಿಟುಜಜಚಿಟ ರಜಠಟಜಣಡಿಥ) ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಇವುಗಳ ಸೃಜನೆಯು ಜ್ಞಾನದ ಇತಿಹಾಸದಲ್ಲೇ ಒಂದು ಮೈಲಿಗಲ್ಲು. ಏಕೆಂದರೆ ಅಲ್ಲಿಯ ತನಕ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬರೂ, ರೇಖಾಗಣಿತವೆಂದರೆ ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನದು ಮಾತ್ರ, ಈ ಜಗತ್ತೇ ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ಮಯ ಎಂದು ನಂಬಿದ್ದರು. ಈಗ, ನಾವು ವಾಸಿಸುತ್ತಿರುವ ವಿಶ್ವದ ರೇಖಾಗಣಿತವು ಯೂಕ್ಲಿಡೇತರವಾದುದು ಎಂದು ಕಂಡುಬಂದಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 5.12

ವಾಸ್ತವದಲ್ಲಿ, ಇದನ್ನು "ಗೋಲಾಕಾರದ ರೇಖಾಗಣಿತ" ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಗೋಲಾಕಾರದ ರೇಖಾಗಣಿತದಲ್ಲಿ ರೇಖೆಗಳು ನೇರವಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ. ಅವು ಮಹತ್ತರ ವೃತ್ತಗಳ (ಅಂದರೆ ಗೋಲ ಮತ್ತು ಗೋಲದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಸಮತಲಗಳ ಛೇದನದಿಂದ ಉಂಟಾಗುವ ವೃತ್ತಗಳ) ಭಾಗಗಳು.

ಚಿತ್ರ 5.12 ರಲ್ಲಿ ಂಓ ಮತ್ತು ಃಓ ರೇಖೆಗಳು (ಇವುಗಳು ಗೋಲದ ಮಹತ್ತರ ವೃತ್ತದ ಭಾಗಗಳು) ಂಃ ಎಂಬ ಒಂದೇ ರೇಖೆಗೆ ಲಂಬವಾಗಿವೆ. ಂಃ ಯ ಒಂದೇ ಬದಿಯಲ್ಲಿರುವ ಎರಡು ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು 2 ಲಂಬಕೋನಗಳಿಗಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಇಲ್ಲದಿದ್ದರೂ, ಂಓ ಮತ್ತು ಃಓ ರೇಖೆಗಳು ಒಂದನ್ನೊಂದು ಸಂಧಿಸುತ್ತವೆ. (ವಾಸ್ತವಾಗಿ ಅದು 90ಲಿ + 90ಲಿ = 180ಲಿ.) ಇದೇ ಅಲ್ಲದೆ, ತ್ರಿಭುಜ ಓಂಃ ಯ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು 180ಲಿ ಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಯಾಕೆಂದರೆ ∠ಂ + ∠ಃ = 180ಲಿ. ಹೀಗೆ ಸಮತಲದಲ್ಲಿರುವ ಆಕೃತಿಗಳಿಗೆ ಮಾತ್ರ ಯೂಕ್ಲಿಡನ ರೇಖಾಗಣಿತ ಸರಿಹೊಂದುತ್ತದೆ. ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈಯಲ್ಲಿ ಅದು ವಿಫಲವಾಗುತ್ತದೆ.

ಈಗ ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿ,

ಉದಾಹರಣೆ 3 : ಈ ಮುಂದಿನ ಹೇಳಿಕೆಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿ: ಎಲ್ಲಾ ಕಡೆಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸಮಾನ ಅಂತರದಲ್ಲಿರುವಂತೆ, ಎರಡು ಸಮಾಂತರ ಸರಳರೇಖೆಗಳಿವೆ. ಈ ಹೇಳಿಕೆಯು ಯೂಕ್ಲಿಡನ 5ನೆಯ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಯ ಪರಿಣಾಮವೇ? ವಿವರಿಸಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : ಯಾವುದಾದರೊಂದು ರೇಖೆ l ಮತ್ತು ಆ l ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಇರದ ಒಂದು ಬಿಂದು p ಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. ಆಗ, 5ನೆಯ ಆಧಾರಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗೆ ಸಮಾನವಾಗಿರುವ, ಪ್ಲೇಫೇರ್‌ನ ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧದ ಪ್ರಕಾರ, l ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವಂತೆ, p ಯ ಮೂಲಕ ಒಂದೇ ಒಂದು ರೇಖೆ m ಇರುತ್ತದೆ.

ಈಗ, ಒಂದು ರೇಖೆಯಿಂದ ಬಿಂದುವಿಗಿರುವ ದೂರ ಎಂದರೆ, ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ರೇಖೆಗೆ ಎಳೆದ ಲಂಬದ ಉದ್ದ. l ನಿಂದ m ನ ಮೇಲಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ಬಿಂದುಗಳಿಗೆ ಮತ್ತು m ನಿಂದ l ನ ಮೇಲಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ಬಿಂದುಗಳಿಗೆ ಈ ದೂರವು ಸಮಾನವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ ಈ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳು ಎಲ್ಲಾ ಕಡೆಗಳಲ್ಲೂ ಸಮಾನ ಅಂತರದಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ.

ಗಮನಿಸಿ : ಮುಂದಿನ ಕೆಲವು ಅಧ್ಯಾಯಗಳಲ್ಲಿ ನೀವು ಕಲಿಯುವ ರೇಖಾಗಣಿತವು ಯೂಕ್ಲಿಡನ ರೇಖಾಗಣಿತ. ಆದರೆ ನಾವು ಉಪಯೋಗಿಸುವ ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧ ಮತ್ತು ಪ್ರಮೇಯಗಳು ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನ ರೇಖಾಗಣಿತಕ್ಕಿಂತ ಭಿನ್ನವಾಗಿರಲೂಬಹುದು.

ಅಭ್ಯಾಸ 5.2

1. ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಲು ಸುಲಭವಾಗುವಂತೆ, ಯೂಕ್ಲಿಡನ 5ನೆಯ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಯನ್ನು ನೀವು ಹೇಗೆ ಬದಲಾಯಿಸಿ ಬರೆಯುವಿರಿ?

2. ಯೂಕ್ಲಿಡನ 5ನೆಯ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಯು ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳಿರುವುದನ್ನು ಪ್ರತಿಪಾದಿಸುತ್ತದೆಯೆ? ವಿವರಿಸಿ.

5.4 ಸಾರಾಂಶ

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ನೀವು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಕಲಿತಿರುವಿರಿ:

1. ಯೂಕ್ಲಿಡನು ಒಂದು ಬಿಂದು, ಒಂದು ರೇಖೆ ಮತ್ತು ಒಂದು ಸಮತಲಗಳನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿದರೂ ಕೂಡಾ ಗಣಿತಜ್ಞರು ಈ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸ್ವೀಕರಿಸಲಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಪದಗಳನ್ನು ಈಗ 'ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲಾಗದ್ದು' ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗಿದೆ.

2. ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧ ಅಥವಾ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳೆಂಬ ಊಹೆಗಳು, ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ಸತ್ಯಗಳು. ಆದರೆ ಅವುಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸ ಲಿಲ್ಲ.

3. ವ್ಯಾಖ್ಯೆಗಳು, ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧಗಳು, ಹಿಂದೆ ಸಾಧಿಸಿದ ಹೇಳಿಕೆಗಳು ಮತ್ತು ನಿಗಮನ ತರ್ಕ ಇವುಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ ಸಾಧಿಸಿದಂತಹ ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನು ಪ್ರಮೇಯಗಳು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

4. ಯೂಕ್ಲಿಡನ ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಹೀಗಿವೆ:

(i) ಒಂದೇ ಅಂಶಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾಗಿರುವ ಅಂಶಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸಮ.

(ii) ಸಮವಾಗಿರುವ ಅಂಶಗಳಿಗೆ ಸಮವಾಗಿರುವ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದಾಗ, ಮೊತ್ತ (ಪೂರ್ಣ)ಗಳು ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

(iii) ಸಮಾನ ಅಂಶಗಳಿಂದ ಸಮಾನ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಕಳೆದಾಗ, ಉಳಿದ ಭಾಗಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

(iv) ಒಂದರಲ್ಲೊಂದು ಐಕ್ಯವಾಗುವ ಅಂಶಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸಮ.

(v) ಪೂರ್ಣವು ಅದರ ಭಾಗಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದು.

(vi) ಒಂದೇ ಅಂಶಗಳ ದುಪ್ಪಟ್ಟು ಅಂಶಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸಮ.

(vii) ಒಂದೇ ಅಂಶಗಳ ಅರ್ಧದಷ್ಟಿರುವ ಅಂಶಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸಮ.

5. ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳೆಂದರೆ:

ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆ 1 : ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಇನ್ನೊಂದು ಬಿಂದುವಿಗೆ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಬಹುದು.

ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆ 2 : ಒಂದು ಅಂತ್ಯಗೊಂಡ ರೇಖೆಯನ್ನು ಅನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿ ವೃದ್ಧಿಸಬಹುದು.

ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆ 3 : ಯಾವುದೇ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಮತ್ತು ಯಾವುದೇ ತ್ರಿಜ್ಯದಿಂದ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಬಹುದು.

ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆ 4 : ಎಲ್ಲಾ ಲಂಬಕೋನಗಳೂ ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆ 5 : ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಮೇಲೆ ಇನ್ನೊಂದು ಸರಳರೇಖೆ ಬಿದ್ದಾಗ, ಅದರ ಒಂದೇ ಬದಿಯಲ್ಲಿರುವ ಒಳಕೋನಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟಿಗೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ ಎರಡು ಲಂಬಕೋನಗಳಿಗಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಉಂಟಾದರೆ, ಆ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಅನಿರ್ಧಿಷ್ಟವಾಗಿ ವೃದ್ಧಿಸಿದಾಗ ಎರಡು ಲಂಬಕೋನಗಳಿಗಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಮೊತ್ತವು ಬರುವ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲೇ ಆ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳು ಒಂದನ್ನೊಂದು ಸಂಧಿಸುತ್ತವೆ.

6. ಯೂಕ್ಲಿಡನ 5ನೆಯ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಯ ಎರಡು ಸಮಾನ ರೂಪಗಳು

(೧) ಪ್ರತಿಯೊಂದು ರೇಖೆ l ಗೆ ಮತ್ತು l ನ ಮೇಲಿರದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಂದು p ಗೆ, l ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವಂತೆ, p ಯ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ m ಎಂಬ ಒಂದೇ ಒಂದು ರೇಖೆ ಇರುತ್ತದೆ.

(೨) ಎರಡು ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾದ ಮತ್ತು ಛೇದಿಸುವ ರೇಖೆಗಳು ಒಂದೇ ರೇಖೆಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.

7. ಮೊದಲ 4 ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ, ಯೂಕ್ಲಿಡನ 5ನೆಯ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಯನ್ನು ಸಾಧಿಸುವ ಎಲ್ಲಾ ಪ್ರಯತ್ನಗಳೂ ವಿಫಲವಾದವು. ಆದರೆ ಇದು ಯೂಕ್ಲಿಡೇತರ ರೇಖಾಗಣಿತಗಳೆಂಬ ಇತರ ಅನೇಕ ರೇಖಾಗಣಿತಗಳ ಅನ್ವೇಷಣೆಗಳಿಗೆ ದಾರಿಯಾಯಿತು.

10^{2}

10_{5}