પ્રકરણ બે

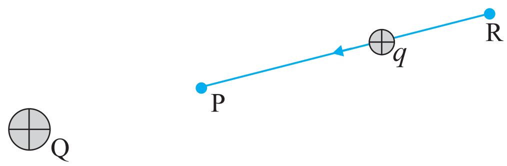
સ્થિતવિદ્યુત સ્થિતિમાન અને કેપેસીટન્સ (ELECTROSTATIC POTENTIAL AND CAPACITANCE)

2.1 પ્રસ્તાવના (INTRODUCTION)

ધોરણ XIમાં પ્રકરણ-6 અને 8માં સ્થિતિઊર્જાનો ખ્યાલ દાખલ કરેલ હતો. સ્પ્રિંગબળ અથવા ગુરુત્વબળ જેવા બળની વિરુદ્ધમાં જ્યારે કોઈ બાહ્યબળ પદાર્થને એક બિંદુથી બીજા બિંદુએ લઈ જવા માટે કાર્ય કરે છે, ત્યારે તે કાર્ય, તે પદાર્થની સ્થિતિઊર્જા રૂપે સંગ્રહ પામે છે. જ્યારે બાહ્યબળ દૂર કરવામાં આવે છે ત્યારે પદાર્થ ગતિમાં આવીને ગતિઊર્જા પ્રાપ્ત કરે છે અને એટલા જ (સમાન) મૂલ્યની સ્થિતિઊર્જા ગુમાવે છે. આમ, ગતિઊર્જા અને સ્થિતિઊર્જાનો સરવાળો અચળ (સંરક્ષિત) રહે છે. આ પ્રકારના બળોને સંરક્ષી (Conservative) બળો કહે છે. સ્પ્રિંગબળ અને ગુરુત્વબળ સંરક્ષી બળોનાં ઉદાહરણ છે.

ગુરુત્વબળની જેમ બે (સ્થિર) વિદ્યુતભારો વચ્ચેનું કુલંબ બળ પણ સંરક્ષી બળ છે. આમાં કંઈ નવાઈ નથી. કારણ કે, બંને અંતરના વર્ગના વ્યસ્ત પ્રમાણ પર આધારિત છે અને મુખ્યત્વે સપ્રમાણતાના અચળાંકની બાબતમાં જુદા પડે છે. વળી, ગુરુત્વાકર્ષણના નિયમમાં દળના સ્થાને કુલંબના નિયમમાં વિદ્યુતભાર આવે છે. આમ, ગુરુત્વક્ષેત્રમાં દળની સ્થિતિઊર્જાની જેમ આપણે સ્થિતવિદ્યુત ક્ષેત્રમાં વિદ્યુતભારની સ્થિતવિદ્યુત સ્થિતિઊર્જાને વ્યાખ્યાયિત કરી શકીએ.

કોઈ વિદ્યુતભાર સંરચનાને લીધે મળતા વિદ્યુતક્ષેત્ર **E**નો વિચાર કરો. પ્રારંભમાં સરળતા માટે, ઉગમબિંદુએ મૂકેલા Q વિદ્યુતભારને લીધે વિદ્યુતક્ષેત્ર **E**નો વિચાર કરો. હવે એક પરિક્ષણ વિદ્યુતભાર qને આપણે R બિંદુથી P બિંદુ સુધી તેની પર Qને લીધે લાગતા અપાકર્ષણ બળની વિરુદ્ધમાં લાવીએ તેવી કલ્પના કરો. આકૃતિ 2.1ના સંદર્ભમાં આવું ત્યારે બનશે કે જ્યારે Q અને q બંને ધન અથવા બંને ઋણ હશે. નિશ્ચિતતા માટે આપણે Q, $q > 0$ લઈએ. અત્રે બે નોંધ કરી શકાય. એક તો એ કે, આપણે એમ



આકૃતિ 2.1 ઉગમબિંદુએ મૂકેલ વિદ્યુતભાર Q(> 0)ને લીધે લાગતા અપાકર્ષણબળની વિરૂદ્ધમાં પરિક્ષણ વિદ્યુતભાર q(> 0)ને R બિંદુથી P બિંદુએ લાવવામાં આવે છે.

ધારી લઈએ કે પરીક્ષણ વિદ્યુતભાર q એટલો બધો નાનો છે કે તે મૂળ સંરચનાને એટલે કે ઉગમબિંદુએ રહેલા વિદ્યુતભાર Qને ખલેલ પહોંચાડતો નથી. (અથવા બીજી રીતે આપણે Qને ઉગમબિંદુએ કોઈક ન જણાવેલ બળ દ્વારા જકડી રાખેલ છે.) બીજું કે વિદ્યુતભાર qને R થી P સુધી લાવવામાં આપણે લગાડેલું બાહ્યબળ $\mathbf{F}_{ext}$ અપાકર્ષણ બળ $\mathbf{F}_E$નો બરાબર સામનો કરે (Counter) તેટલું જ છે (એટલે કે $\mathbf{F}_{ext} = -\mathbf{F}_E$). આનો અર્થ એ કે જ્યારે વિદ્યુતભાર qને Rથી P પર લાવવામાં આવે છે ત્યારે તેના પર કોઈ ચોખ્ખું (Net) બળ નથી અને તેને પ્રવેગ નથી, એટલે કે તેને ખૂબ નાની પરંતુ અચળ ઝડપથી લાવવામાં આવે છે. આ પરિસ્થિતિમાં, બાહ્યબળ વડે થયેલું કાર્ય વિદ્યુતબળ વડે થતા કાર્યના ઋણ જેટલું છે અને તે વિદ્યુતભાર qની સ્થિતિઊર્જાના રૂપમાં પૂરેપૂરું સંગ્રહ પામે છે. જો P પર પહોંચીને બાહ્યબળ દૂર કરવામાં આવે તો વિદ્યુતબળ તે વિદ્યુતભારને Qથી દૂર લઈ જાય છે. P આગળ સંગ્રહ પામેલી ઊર્જા (સ્થિતિ ઊર્જા) વિદ્યુતભાર qને ગતિઊર્જા આપવામાં એવી રીતે વપરાય છે કે ગતિઊર્જા અને સ્થિતિઊર્જાનો સરવાળો અચળ (સંરક્ષિત) રહે છે.

આમ, વિદ્યુતભાર qને Rથી P સુધી લઈ જવામાં બાહ્યબળ વડે થયેલું કાર્ય,

$$W_{RP} = \int_R^P \mathbf{F}_{ext} \cdot d\mathbf{r}$$

$$= -\int_R^P \mathbf{F}_E \cdot d\mathbf{r} \tag{2.1}$$

આ કાર્ય સ્થિતવિદ્યુત અપાકર્ષણ બળની વિરુદ્ધમાં થયેલ છે અને તે સ્થિતિઊર્જા રૂપે સંગ્રહ પામે છે.

વિદ્યુતક્ષેત્રમાં દરેક બિંદુએ q વિદ્યુતભાર ધરાવતો કણ અમુક સ્થિતવિદ્યુત સ્થિતિઊર્જા ધરાવે છે, તેના પર કરેલું કાર્ય તેની સ્થિતિઊર્જામાં, R અને P બિંદુઓ વચ્ચેની સ્થિતિઊર્જાના તફાવત જેટલો વધારો કરે છે.

આમ, સ્થિતિઊર્જાનો તફાવત (2.2)

$$\Delta U = U_P - U_R = W_{RP}$$

(નોંધો કે, આ સ્થાનાંતર વિદ્યુતબળની વિરૂદ્ધ દિશામાં છે તેથી વિદ્યુતબળ વડે થયેલું કાર્ય ઋણ એટલે કે $-W_{RP}$ છે.)

આથી, આપણે કોઈ પણ યાદચ્છિક વિદ્યુતભાર સંરચનાના વિદ્યુતક્ષેત્ર માટે, બે બિંદુઓ વચ્ચેના વિદ્યુતસ્થિતિ ઊર્જાના તફાવતને, આપેલ વિદ્યુતભાર qને એક બિંદુથી બીજા બિંદુ પર (પ્રવેગરહિત ગતિથી) લઈ જવા માટે બાહ્યબળ વડે કરવા પડતા કાર્ય તરીકે વ્યાખ્યાયિત કરી શકીએ છીએ.

આ તબક્કે બે અગત્યના મુદ્દાઓનો ઉલ્લેખ કરીએ :

(i) સમીકરણ (2.2)ની જમણી બાજુ વિદ્યુતભારના માત્ર પ્રારંભિક અને અંતિમ સ્થાનો પર જ આધારિત છે. આનો અર્થ એ છે કે એક વિદ્યુતભારને એકથી બીજા બિંદુએ લઈ જવા માટે વિદ્યુતક્ષેત્ર વડે થયેલું કાર્ય માત્ર પ્રારંભિક અને અંતિમ સ્થાનો પર જ આધાર રાખે છે અને એકથી બીજા બિંદુએ જવા માટે લીધેલા માર્ગ પર આધારિત નથી. સંરક્ષીબળની આ મૂળભૂત લાક્ષણિકતા છે. જો આવું કાર્ય માર્ગ પર આધાર રાખતું હોત તો સ્થિતિઊર્જાનો ખ્યાલ અર્થપૂર્ણ હોત જ નહિ. વિદ્યુતક્ષેત્ર વડે થતું કાર્ય માર્ગ-આધારિત નથી એમ કુલંબના નિયમની મદદથી સાબિત થઈ શકે છે. આપણે અહીં એ સાબિતી છોડી દઈએ છીએ.

(ii) સમીકરણ (2.2) સ્થિતિઊર્જાના તફાવતને ભૌતિક દૃષ્ટિએ અર્થપૂર્ણ રાશિ કાર્યના પદમાં વ્યાખ્યાયિત કરે છે. એ તો સ્પષ્ટ છે કે આ રીતે વ્યાખ્યાયિત થયેલી સ્થિતિઊર્જા સરવાળામાં આવતા અચળાંક પુરતી અનિશ્ચિત છે. આનો અર્થ એ છે કે સ્થિતિઊર્જાના ખરેખરા મૂલ્યનો ભૌતિક રીતે કોઈ અર્થ નથી, માત્ર સ્થિતિઊર્જાના તફાવતને જ કંઈક અર્થ છે. દરેક બિંદુ આગળની સ્થિતિઊર્જામાં આપણે હંમેશાં કોઈ યાદચ્છિક અચળાંક α ઉમેરી શકીએ, કારણ કે આમ કરવાથી સ્થિતિઊર્જાના તફાવતમાં કોઈ ફેર પડતો નથી.

$$(U_P+\alpha)-(U_R+\alpha)=U_P-U_R$$

આને જુદી રીતે કહીએ તો, જ્યાં સ્થિતિઊર્જા શૂન્ય છે તેવા બિંદુની પસંદગીમાં આપણને સ્વતંત્રતા છે. એક સગવડભરી પસંદગી એ છે કે અનંત અંતરે સ્થિતવિદ્યુત સ્થિતિઊર્જા શૂન્ય લઈએ. આ પસંદગી સાથે જો આપણે બિંદુ Rને અનંત અંતરે લઈએ તો સમીકરણ (2.2) પરથી,

$$W_{\infty P}= U_P-U_{\infty}=U_P \qquad (2.3)$$

બિંદુ P યાદચ્છિક હોવાથી સમીકરણ (2.3) પરથી આપણને કોઈ પણ બિંદુએ વિદ્યુતભાર qની સ્થિતિઊર્જાની વ્યાખ્યા મળે છે. કોઈ પણ બિંદુએ વિદ્યુતભાર qની સ્થિતિઊર્જા (કોઈ પણ વિદ્યુતભાર ગોઠવણીને લીધે ઉદ્ભવતા ક્ષેત્રની હાજરીમાં) એ તે વિદ્યુતભારને અનંત અંતરેથી તે બિંદુએ લાવવા માટે બાહ્યબળ (વિદ્યુતબળ જેટલા જ અને વિરૂદ્ધ દિશામાંના) વડે થતું કાર્ય જ છે.

2.2 સ્થિતવિદ્યુત સ્થિતિમાન (Electrostatic Potential)

કોઈ એક વ્યાપક સ્થાયી વિદ્યુતભાર ગોઠવણ (સંરચના) વિચારો. પરીક્ષણ વિદ્યુતભાર qની સ્થિતિઊર્જાને આપણે તે વિદ્યુતભાર q પર કરેલા કાર્યના પદમાં વ્યાખ્યાયિત કરેલ છે. સ્વાભાવિક રીતે જ આ કાર્ય qના સમપ્રમાણમાં છે, કારણ કે કોઈ પણ બિંદુએ બળ $q\mathbf{E}$ છે, જ્યાં, $\mathbf{E}$ આપેલ વિદ્યુતભાર ગોઠવણને લીધે તે બિંદુએ વિદ્યુતક્ષેત્ર છે. આથી કાર્યને વિદ્યુતભાર q વડે ભાગવાનું સુગમભર્યું છે, જેથી પરિણમતી રાશિ q પર આધારિત નહિ હોય. બીજા શબ્દોમાં એકમ પરીક્ષણ વિદ્યુતભાર દીઠ કરેલું કાર્ય, તે વિદ્યુતભાર ગોઠવણથી ઉદ્ભવતા વિદ્યુતક્ષેત્રની લાક્ષણિકતા છે. આ બાબત આપેલા વિદ્યુતભાર ગોઠવણને લીધે ઉદ્ભવતા સ્થિતવિદ્યુત સ્થિતિમાનના ખ્યાલ તરફ દોરી જાય છે. સમીકરણ (2.1) પરથી આપણને :

એકમ ધન વિદ્યુતભારને R થી P બિંદુએ લઈ જવા માટે બાહ્યબળ વડે કરાતું કાર્ય

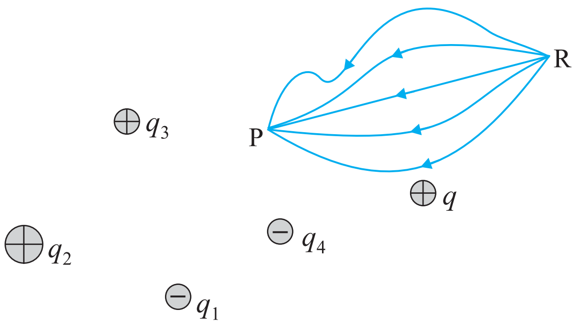
$$= V_P - V_R = \left(\frac{U_P - U_R}{q}\right) \qquad (2.4)$$

જેટલું મળે છે. જ્યાં, V_P અને V_R અનુક્રમે P અને R બિંદુએ સ્થિતવિદ્યુત સ્થિતિમાન છે. અગાઉની જેમ એ નોંધો કે સ્થિતિમાનના ખરેખરા મૂલ્યનો ભૌતિક દૃષ્ટિએ કોઈ અર્થ નથી પણ માત્ર સ્થિતિમાનનો તફાવત જ ભૌતિક રીતે અર્થપૂર્ણ છે. જો અગાઉની જેમ જ આપણે અનંત અંતરે સ્થિતિમાનને શૂન્ય તરીકે પસંદ કરીએ તો, સમીકરણ (2.4) દર્શાવે છે કે :

એકમ ધન વિદ્યુતભારને અનંત અંતરેથી આપેલા બિંદુએ (પ્રવેગ રહિત) લાવવા માટે બાહ્યબળ વડે કરવું પડતું કાર્ય = તે બિંદુએ સ્થિતવિદ્યુત સ્થિતિમાન (V)

કાઉન્ટ એલેઝાન્ડ્રો વોલ્ટા (1745-1827) : તે ઇટાલિયન ભૌતિકવિજ્ઞાની અને પેવીઆ ખાતે પ્રોફેસર હતો. વોલ્ટાએ એમ સ્થાપિત કર્યું કે લુઈગી ગેલ્વેની (1737-1798)ને દેડકાની સ્નાયુ પેશીને બે જુદી-જુદી ધાતુઓની પ્લેટોના સંપર્કમાં રાખવાથી જોવા મળેલી **પ્રાણીજ વિદ્યુત**, પ્રાણીના સ્નાયુના કોઈ વિશિષ્ટ ગુણધર્મને લીધે નથી પરંતુ બે જુદી જુદી ધાતુઓની વચ્ચે કોઈ ભીના દ્રવ્યને રાખવાથી પણ હંમેશાં ઉત્પન્ન થાય છે. આ પરથી તેણે સર્વપ્રથમ **વોલ્ટેક પાઈલ** અથવા બૅટરી બનાવી જે ધાતુની તકતીઓ (ઇલેક્ટ્રૉડ્સ) વચ્ચે સેન્ડવિચ કરેલી કાર્ડબોર્ડની ભીની તકતીઓ (ઇલેક્ટ્રૉલાઇટ)ની મોટી થપ્પીની બનેલી હતી.

કાઉન્ટ એલેઝાન્ડ્રો વોલ્ટા (1745-1827)



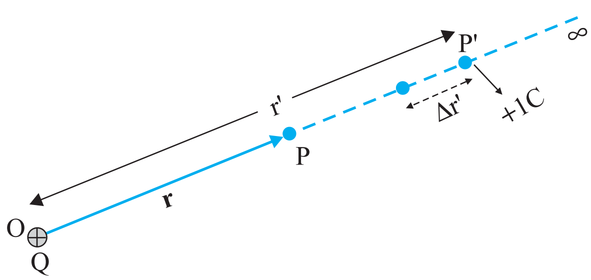
આકૃતિ 2.2 કોઈ આપેલ વિદ્યુતભાર ગોઠવણને લીધે ઉદ્ભવતા વિદ્યુતક્ષેત્ર વડે પરિક્ષણ વિદ્યુતભાર q પર થતું કાર્ય માર્ગથી સ્વતંત્ર છે અને માત્ર પ્રારંભિક અને અંતિમ સ્થાનો પર જ આધારિત છે.

બીજા શબ્દોમાં, સ્થિત વિદ્યુતક્ષેત્રના વિસ્તારમાં કોઈ પણ બિંદુએ વિદ્યુત સ્થિતિમાન (V), એકમ ધન વિદ્યુતભારને અનંત અંતરેથી તે બિંદુએ (પ્રવેગરહિત) લાવવા માટે બાહ્યબળે કરેલું કાર્ય છે.

અગાઉ જણાવેલી શરતો આ સ્થિતિમાનની વ્યાખ્યાને પણ લાગુ પડે છે. એકમ ધન પરીક્ષણ વિદ્યુતભાર પર થતું કાર્ય મેળવવા માટે આપણે સૂક્ષ્મ વિદ્યુતભાર δq લેવો જોઈએ, તેને અનંત અંતરેથી તે બિંદુએ લાવવા માટેનું કાર્ય δW મેળવવું જોઈએ અને તે પરથી ગુણોત્તર $\delta W/\delta q$ શોધવું જોઈએ. વળી સમગ્ર માર્ગ પર દરેક બિંદુએ બાહ્યબળ, તે બિંદુએ પરીક્ષણ વિદ્યુતભાર પર લાગતા વિદ્યુતબળ જેટલું અને વિરૂદ્ધ દિશામાં હોવું જોઈએ.

2.3 બિંદુવત્ વિદ્યુતભારને લીધે સ્થિતિમાન (POTENTIAL DUE TO A POINT CHARGE)

ઉગમબિંદુએ રહેલા એક વિદ્યુતભાર Qનો વિચાર કરો (આકૃતિ 2.3). ચોક્કસતા માટે Qને ધન ગણીએ. ઉગમબિંદુથી સ્થાનસદિશ **r** ધરાવતા કોઈ પણ P બિંદુએ આપણે સ્થિતિમાન શોધવા માગીએ છીએ. તે માટે આપણે એકમ ધન પરીક્ષણ વિદ્યુતભારને અનંત અંતરેથી P' બિંદુએ લાવવા માટે બાહ્યબળે પરીક્ષણ વિદ્યુતભાર પર કરેલું કાર્ય ગણવું પડે. $Q > 0$ માટે અપાકર્ષણ બળની વિરૂદ્ધમાં બાહ્યબળે કરેલું કાર્ય ધન છે. આ કાર્ય માર્ગ પર આધારિત ન હોવાથી આપણે એક સગવડભર્યો માર્ગ અનંત અંતરેથી P સુધી ત્રિજ્યાવર્તી દિશામાં પસંદ કરીએ.



આકૃતિ 2.3 એકમ ધન પરિક્ષણ વિદ્યુતભારને $Q(Q > 0)$ વિદ્યુતભારના અપાકર્ષણ વિરૂદ્ધ, અનંત અંતરેથી P બિંદુએ લાવવા કરેલું કાર્ય, એ Qને લીધે P બિંદુએ સ્થિતિમાન છે.

માર્ગ પરના વચ્ચેના કોઈ બિંદુ P' આગળ એકમ ધન વિદ્યુતભાર પર લાગતું બળ,

$$\frac{Q \times 1}{4\pi\varepsilon_0 r'^2}\hat{\mathbf{r}}' \tag{2.5}$$

છે. જ્યાં, $\hat{\mathbf{r}}'$, OP' દિશામાંનો એકમ સદિશ છે. $\mathbf{r}'$થી $\mathbf{r}' + \Delta\mathbf{r}'$ સુધીમાં આ બળની વિરૂદ્ધ થતું કાર્ય

$$\Delta W = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r'^2}\Delta r' \tag{2.6}$$

છે. અહીં, ઋણ નિશાની એટલા માટે આવે છે કે $\Delta r' < 0$, ΔW ધન છે. બાહ્યબળે કરેલું કુલ કાર્ય (W) સમીકરણ (2.6)નું $r' = \infty$ થી $r' = r$ સુધી સંકલન કરવાથી મળે છે.

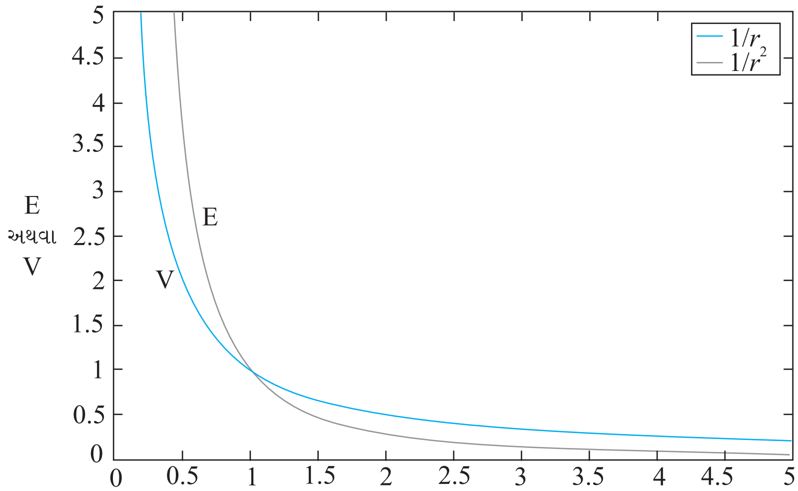
$$W = -\int_{\infty}^{r}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r'^2}dr' = \left.\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r'}\right|_{\infty}^{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \tag{2.7}$$

વ્યાખ્યા મુજબ, આ વિદ્યુતભાર Qને લીધે P આગળનું સ્થિતિમાન છે.

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \tag{2.8}$$

સ્થિતવિદ્યુત સ્થિતિમાન અને કેપેસીટન્સ

જો કે આપણે સમીકરણ (2.8)ને સાધિત કરવામાં $Q > 0$ ગણેલું છે પણ તે Qના કોઈ પણ ચિહ્ન માટે સાચું છે. $Q < 0$ માટે $V < 0$, એટલે કે એકમ ધન પરીક્ષણ વિદ્યુતભાર દીઠ (બાહ્યબળ વડે) તેને અનંત અંતરેથી આપેલા બિંદુએ લાવવા માટે કરેલું કાર્ય ઋણ છે. આને સમતુલ્ય રીતે એમ પણ કહી શકાય કે સ્થિત વિદ્યુતબળ વડે એકમ ધન વિદ્યુતભારને અનંત અંતરેથી P બિંદુએ લાવવા માટે કરેલું કાર્ય ધન છે. (આ આમ હોવું જ જોઈએ કારણ કે $Q < 0$ માટે એકમ ધન પરીક્ષણ વિદ્યુતભાર પર લાગતું બળ આકર્ષી છે અને તેથી બળ અને સ્થાનાંતર (અનંત અંતરેથી P સુધી) એક જ દિશામાં છે. અંતમાં, આપણે એ નોંધીએ કે સમીકરણ (2.8), અનંત અંતરે સ્થિતિમાન શૂન્ય લેવાની આપણી પસંદગી સાથે સુસંગત છે.



આકૃતિ 2.4 બિંદુવત્ વિદ્યુતભાર Q માટે અંતર r સાથે સ્થિતિમાનનો ફેરફાર $(Q/4\pi\varepsilon_0)m^{-1}$ના એકમો (ભૂરો વક્ર) અને અંતર r સાથે ક્ષેત્રનો ફેરફાર $(Q/4\pi\varepsilon_0)m^{-2}$ના એકમોમાં (કાળો વક્ર)

આકૃતિ (2.4), સ્થિતવિદ્યુત સ્થિતિમાન ($\propto 1/r$) અને સ્થિત વિદ્યુતક્ષેત્ર ($\propto 1/r^2$) અંતર r સાથે કેવી રીતે બદલાય છે તે દર્શાવે છે.

ઉદાહરણ 2.1

(a) 4×10^{-7}C વિદ્યુતભારથી 9 cm દૂર આવેલા P બિંદુએ સ્થિતિમાનની ગણતરી કરો.

(b) તે પરથી 2×10^{-9}C વિદ્યુતભારને અનંત અંતરેથી P બિંદુએ લાવવા માટે કરેલા કાર્યની ગણતરી કરો. શું જવાબ વિદ્યુતભારને જે માર્ગે લાવવામાં આવે છે તેના પર આધારિત છે ?

ઉકેલ

$$(a)\ V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r} = 9 \times 10^9\ \mathrm{Nm^2\ C^{-2}} \times \frac{4\times10^{-7}\,\mathrm{C}}{0.09\,\mathrm{m}}$$
$$= 4 \times 10^4\ \mathrm{V}$$

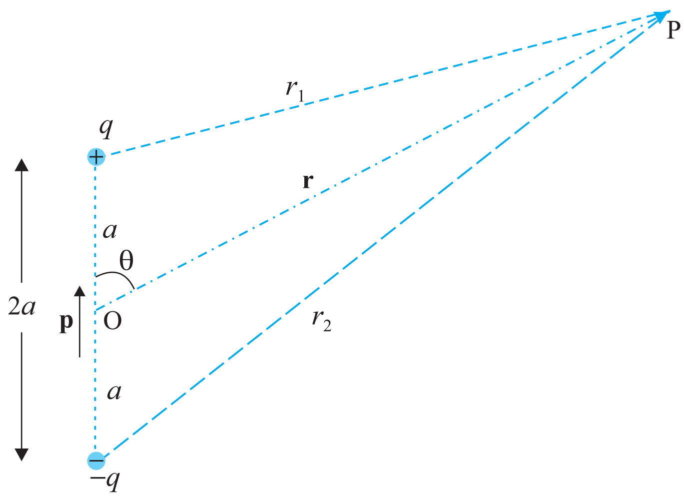
$$(b)\ W = qV = 2 \times 10^{-9}\ \mathrm{C} \times 4 \times 10^4\mathrm{V}$$
$$= 8 \times 10^{-5}\ \mathrm{J}$$

ના, અત્રે કરવામાં આવેલું કાર્ય માર્ગથી સ્વતંત્ર છે. કોઈ પણ યાદચ્છિક સૂક્ષ્મ માર્ગને બે પરસ્પર લંબ એવા સ્થાનાંતરોમાં વિભાજિત કરી શકાય : એક rને સમાંતર અને બીજું rને લંબ. આમાંથી rને લંબ સ્થાનાંતરને અનુરૂપ કરેલું કાર્ય શૂન્ય બનશે.

ઉદાહરણ 2.1

2.4 વિદ્યુત ડાયપોલ (દ્વિ-ધ્રુવી)ને લીધે સ્થિતિમાન (Potential due to an Electric Dipole)

ગયા પ્રકરણમાં આપણે જોયું કે વિદ્યુત ડાયપોલ (દ્વિ-ધ્રુવી) એકબીજાથી (નાના) $2a$ અંતરે રહેલા બે વિદ્યુતભારો q અને $-q$ની બનેલી છે. તેનો કુલ વિદ્યુતભાર શૂન્ય છે. તેની લાક્ષણિકતા ડાયપોલ ચાકમાત્રા સદિશ **p** દ્વારા દર્શાવાય છે, જેનું માન $q \times 2a$ છે અને તે $-q$થી qની દિશામાં છે (આકૃતિ 2.5). આપણે એ પણ જોયું કે સ્થાનસદિશ **r** ધરાવતા બિંદુએ ડાયપોલનું વિદ્યુતક્ષેત્ર તેના માન r પર જ આધાર રાખતું નથી, પરંતુ **r** અને **p** વચ્ચેના ખૂણા પર પણ આધાર રાખે છે. ઉપરાંત, મોટા અંતરે ક્ષેત્ર $1/r^2$



આકૃતિ 2.5 ડાયપોલથી ઉદ્ભવતા સ્થિતિમાનની ગણતરીમાં સંકળાયેલી રાશિઓ

(જે એકલ વિદ્યુતભારના ક્ષેત્રની લાક્ષણિકતા છે) મુજબ ઘટતું નથી પરંતુ $1/r^3$ મુજબ ઘટે છે. હવે આપણે ડાયપોલને લીધે ઉદ્ભવતું સ્થિતિમાન શોધીએ અને એકલ વિદ્યુતભારથી ઉદ્ભવતા સ્થિતિમાન કરતાં કેવી રીતે જુદું પડે છે તે જોઈએ.

અગાઉની જેમ આપણે ઉગમબિંદુ ડાયપોલના કેન્દ્ર પર લઈએ છીએ. આપણે જાણીએ છીએ કે વિદ્યુતક્ષેત્ર સંપાતપણાના સિદ્ધાંતને અનુસરે છે. સ્થિતિમાન ક્ષેત્ર વડે થતા કાર્ય સાથે સંબંધ ધરાવતું હોવાથી સ્થિતવિદ્યુત સ્થિતિમાન પણ સંપાતપણાના સિદ્ધાંતને અનુસરે છે. આમ, ડાયપોલને લીધે સ્થિતિમાન q અને $-q$ને લીધે મળતા સ્થિતિમાનોના સરવાળા જેટલું છે.

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2}\right) \tag{2.9}$$

જ્યાં, r_1 અને r_2 અનુક્રમે q અને $-q$થી P બિંદુનાં અંતરો છે.

હવે, ભૂમિતિ પરથી,

$$r_1^2 = r^2 + a^2 - 2ar\cos\theta$$

$$r_2^2 = r^2 + a^2 + 2ar\cos\theta \tag{2.10}$$

આપણે rને a કરતાં ઘણું મોટું ($r >> a$) લઈએ અને a/rના પ્રથમ ઘાત સુધીના પદોને જ રાખીએ (બીજા અવગણીએ) તો,

$$r_1^2 = r^2\left(1 - \frac{2a\cos\theta}{r} + \frac{a^2}{r^2}\right)$$

$$\cong r^2\left(1 - \frac{2a\cos\theta}{r}\right) \tag{2.11}$$

તે જ રીતે,

$$r_2^2 \cong r^2\left(1 + \frac{2a\cos\theta}{r}\right) \tag{2.12}$$

દ્વિપદી પ્રમેય વાપરતાં અને a/rમાં પ્રથમ ઘાતના પદોને જ રાખતાં,

$$\frac{1}{r_1} \cong \frac{1}{r}\left(1 - \frac{2a\cos\theta}{r}\right)^{-1/2} \cong \frac{1}{r}\left(1 + \frac{a\cos\theta}{r}\right) \quad [2.13(a)]$$

$$\frac{1}{r_2} \cong \frac{1}{r}\left(1 + \frac{2a\cos\theta}{r}\right)^{-1/2} \cong \frac{1}{r}\left(1 - \frac{a}{r}\cos\theta\right) \quad [2.13(b)]$$

સમીકરણો (2.9) અને (2.13) અને $p = 2qa$ પરથી

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2a\cos\theta}{r^2} = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \tag{2.14}$$

વળી, $p\cos\theta = \mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{r}}$

જ્યાં $\hat{\mathbf{r}}$ સ્થાનસદિશ OPની દિશામાંનો એકમ સદિશ છે.

આ પરથી ડાયપોલનું સ્થિતિમાન

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \; ; (r >> a) \tag{2.15}$$

મળે છે.

અગાઉ જણાવ્યું તેમ સમીકરણ (2.15) ડાયપોલના માપ (પરિમાણ)ની સરખામણીએ મોટાં અંતરો માટે જ સંન્નિકટ રીતે સાચું છે કે જેને માટે a/rમાં ઊંચી ઘાતનાં પદો અવગણ્ય છે. જો કે ઉગમબિંદુ આગળના બિંદુ ડાયપોલ માટે સમીકરણ (2.15) પૂરેપૂરું સત્ય છે.

સમીકરણ (2.15) પરથી, ડાયપોલની અક્ષ ($\theta = 0, \pi$) પર સ્થિતિમાન

$$V = \pm \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{p}{r^2} \tag{2.16}$$

(θ = 0 માટે ધન ચિહ્ન, $\theta = \pi$ માટે ઋણ ચિહ્ન). વિષુવરેખીય સમતલ ($\theta = \pi/2$)માં સ્થિતિમાન શૂન્ય છે.)

ડાયપોલનું વિદ્યુતસ્થિતિમાન અને એકલ (એકાકી) વિદ્યુતભારના વિદ્યુતસ્થિતિમાન વચ્ચેના તફાવતના મહત્વના મુદ્દાઓ સમીકરણો (2.8) અને (2.15) પરથી સ્પષ્ટ છે :

(i) ડાયપોલને લીધે સ્થિતિમાન માત્ર r પર જ આધાર રાખતું નથી પણ સ્થાન સદિશ $\mathbf{r}$ અને ડાયપોલ ચાકમાત્રા સદિશ $\mathbf{p}$ વચ્ચેના કોણ વચ્ચે પણ આધાર રાખે છે. (જો કે તે $\mathbf{p}$ની આસપાસ અક્ષીય રીતે સંમિત છે. એટલે કે, જો તમે સ્થાન સદિશ $\mathbf{r}$ને $\mathbf{p}$ની આસપાસ θ અચળ રાખીને ઘુમાવો (ભ્રમણ આપો) તો આ રીતે ઉદ્‌ભવતા શંકુ પર Pને અનુરૂપ બિંદુઓએ સ્થિતિમાન, P આગળ હતું તેટલું જ હશે.

(ii) વિદ્યુત ડાયપોલનું સ્થિતિમાન મોટા અંતરે $1/r^2$ મુજબ ઘટે છે, એકલ વિદ્યુતભાર માટે લાક્ષણિક રીતે સ્થિતિમાન $1/r$ મુજબ ઘટતું હોય, તે રીતે નહિ. (તમે આકૃતિ 2.4માં બીજા સંદર્ભમાં દોરાયેલા $1/r^2$ વિરૂદ્ધ r અને $1/r$ વિરૂદ્ધ rના આલેખોનો સંદર્ભ લઈ શકો છો.)

2.5 વિદ્યુતભારોના તંત્રને લીધે સ્થિતિમાન (POTENTIAL DUE TO A SYSTEM OF CHARGES)

કોઈ ઉગમબિંદુની સાપેક્ષે $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, ... \mathbf{r}_n$ સ્થાન સદિશો ધરાવતા વિદ્યુતભારો અનુક્રમે $q_1, q_2, ... q_n$ના તંત્રનો વિચાર કરો (આકૃતિ 2.6). P આગળ વિદ્યુતભાર q_1ને લીધે સ્થિતિમાન V_1

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1}{r_{1P}}$$

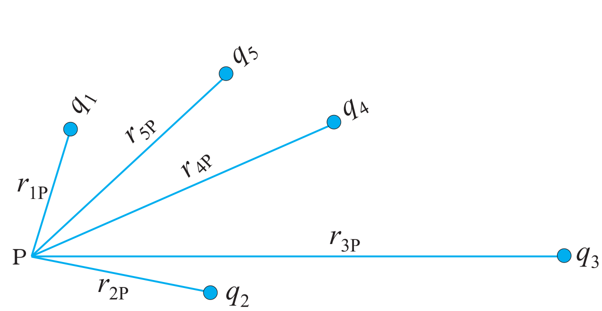
છે, જ્યાં r_{1P} એ q_1 અને P વચ્ચેનું અંતર છે.

તેવી જ રીતે, P આગળ q_2ને લીધે સ્થિતિમાન V_2 અને q_3ને લીધે સ્થિતિમાન V_3 પણ

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_2}{r_{2P}}, \; V_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_3}{r_{3P}}$$

પરથી મળે છે. જ્યાં r_{2P} અને r_{3P} એ P બિંદુનાં અનુક્રમે q_2 અને q_3 વિદ્યુતભારોથી અંતરો છે. આ જ રીતે બીજા વિદ્યુતભારોથી સ્થિતિમાન મળે. સંપાતપણાના સિદ્ધાંત મુજબ સમગ્ર વિદ્યુતભાર ગોઠવણી (સંરચના)ને લીધે P આગળનું સ્થિતિમાન, વ્યક્તિગત વિદ્યુતભારોથી મળતા સ્થિતિમાનોનો બૈજિક સરવાળો છે.

$$V = V_1 + V_2 + ... + V_n \tag{2.17}$$



આકૃતિ 2.6 વિદ્યુતભારોના તંત્રને લીધે કોઈ બિંદુએ સ્થિતિમાન, વ્યક્તિગત વિદ્યુતભારોને લીધે મળતા સ્થિતિમાનોનો સરવાળો છે

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_{1P}} + \frac{q_2}{r_{2P}} + ... + \frac{q_n}{r_{nP}}\right) \qquad (2.18)$$

જો આપણી પાસે કોઈ સતત વિદ્યુતભાર વિતરણ એવું હોય કે જેમાં વિદ્યુતભાર ઘનતા $\rho(\mathbf{r})$ હોય, તો અગાઉની જેમ, આપણે તેને દરેક $\Delta \upsilon$ માપના નાના કદ ખંડોમાં વિભાજિત કરીએ. તે દરેકમાં $\rho\Delta\upsilon$ વિદ્યુતભાર રહેલો હશે. પછી આપણે દરેક કદ ખંડ વડે સ્થિતિમાન શોધી આવા બધા પદોનો સરવાળો (વધુ ચોક્કસપણે સંકલન) કરીએ અને આમ સમગ્ર વિતરણને લીધે સ્થિતિમાન મેળવીએ.

પ્રકરણ-1માં આપણે જોયું છે કે સમાન રીતે વિદ્યુતભારિત ગોળાકાર કવચ માટે કવચની બહાર વિદ્યુતક્ષેત્ર જાણે કે બધો વિદ્યુતભાર કેન્દ્ર પર કેન્દ્રિત થયેલો હોય તે પરથી જે ક્ષેત્ર મળે તેટલું જ હોય છે. આમ, કવચની બહાર સ્થિતિમાન

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} \qquad (r \geq R) \qquad [2.19(a)]$$

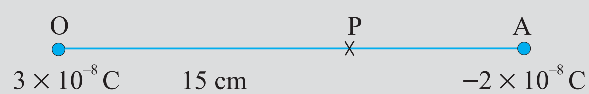
જ્યાં q કવચ પરનો કુલ વિદ્યુતભાર અને R કવચની ત્રિજ્યા છે. કવચની અંદર વિદ્યુતક્ષેત્ર શૂન્ય છે. આનો અર્થ એ (પરિચ્છેદ 2.6) કે કવચની અંદર સ્થિતિમાન અચળ છે (કારણ કે વિદ્યુતભારને કવચની અંદર ગતિ કરાવવા માટે કોઈ કાર્ય કરવું પડતું નથી) અને તેથી, સપાટી પરના મૂલ્ય બરાબર જ છે, જે

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R} \qquad [2.19(b)]$$

છે.

ઉદાહરણ 2.2 બે વિદ્યુતભારો 3×10^{-8} C અને -2×10^{-8} C એકબીજાથી 15 cm અંતરે રહેલા છે. બે વિદ્યુતભારોને જોડતી રેખા પરના કયા બિંદુએ વિદ્યુતસ્થિતિમાન શૂન્ય હશે ? અનંત અંતરે સ્થિતિમાન શૂન્ય લો.

ઉકેલ આપણે ધન વિદ્યુતભારના સ્થાન પર ઉગમબિંદુ O લઈએ. બે વિદ્યુતભારોને જોડતી રેખા x-અક્ષ તરીકે લીધેલ છે. ઋણ વિદ્યુતભારને ઉગમબિંદુની જમણી બાજુ લીધેલ છે (આકૃતિ 2.7)



આકૃતિ 2.7

ધારો કે P એ x અક્ષ પર માંગેલ બિંદુ છે, જ્યાં, સ્થિતિમાન શૂન્ય છે. જો x એ Pનો x-યામ હોય તો સ્વાભાવિક છે કે x ધન હોવું જોઈએ. ($x < 0$ માટે બે વિદ્યુતભારોને લીધે સ્થિતિમાનોનો સરવાળો શૂન્ય થાય તેવી કોઈ શક્યતા નથી). જો x, O અને Aની વચ્ચે હોય તો,

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{3\times10^{-8}}{x\times10^{-2}} - \frac{2\times10^{-8}}{(15-x)\times10^{-2}}\right] = 0$$

જ્યાં, x cmમાં છે. એટલે કે,

$$\frac{3}{x} - \frac{2}{15-x} = 0$$

આ પરથી $x = 9$ cm

જો x, લંબાવેલી OA રેખા પર હોય તો, જરૂરી શરત

$\frac{3}{x} - \frac{2}{x-15} = 0$ બને.

ઉદાહરણ 2.2

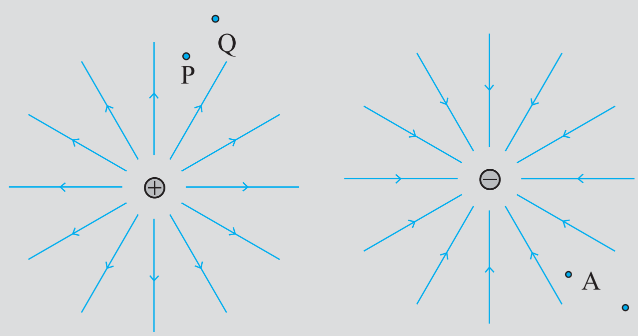
તે પરથી

$x = 45$ cm

આમ, શૂન્ય વિદ્યુત સ્થિતિમાન, ધન વિદ્યુતભારથી 9 cm અને 45 cm અંતરોએ ઋણ વિદ્યુતભાર તરફ મળે. એ નોંધો કે ગણતરીમાં વાપરેલ સૂત્ર માટે અનંત અંતરે શૂન્ય સ્થિતિમાન પસંદ કરવાની જરૂર છે.

ઉદાહરણ 2.2

ઉદાહરણ 2.3 આકૃતિઓ 2.8(a) અને (b) અનુક્રમે ધન અને ઋણ વિદ્યુતભારોની ક્ષેત્રરેખાઓ દર્શાવે છે.



આકૃતિ 2.8

(a) સ્થિતિમાન તફાવત $V_P - V_Q$, $V_B - V_A$નાં ચિહ્ન જણાવો.
(b) એક નાના ઋણ વિદ્યુતભારની Q અને P તથા A અને B બિંદુઓ વચ્ચેની સ્થિતિ-ઊર્જાના તફાવતનાં ચિહ્ન જણાવો.
(c) એક નાના ધન વિદ્યુતભારને Q થી P લઈ જવામાં ક્ષેત્ર વડે થતા કાર્યનું ચિહ્ન જણાવો.
(d) એક નાના ઋણ વિદ્યુતભારને Bથી A લઈ જવામાં બાહ્યબળ વડે થતા કાર્યનું ચિહ્ન જણાવો.
(e) Bથી A જવામાં નાના ઋણ વિદ્યુતભારની ગતિઊર્જા વધે કે ઘટે ?

ઉકેલ (a) $V \propto \frac{1}{r}$ હોવાથી $V_P > V_Q$. આમ, $V_P - V_Q$ ધન છે. વળી, V_B, V_A કરતાંઓછું ઋણ છે.

આમ, $V_B > V_A$ અથવા $V_B - V_A$ ધન છે.

(b) નાનો ઋણ વિદ્યુતભાર ધન વિદ્યુતભાર તરફ આકર્ષાય છે. ઋણ વિદ્યુતભાર ઊંચી સ્થિતિઊર્જાથી નીચી સ્થિતિઊર્જા તરફ ગતિ કરે છે. તેથી Q અને P વચ્ચે સ્થિતિઊર્જાતફાવતની નિશાની ધન છે. આવી જ રીતે, $(\text{સ્થિ.ઊ.})_A > (\text{સ્થિ.ઊ.})_B$. આથી, સ્થિતિઊર્જાના તફાવતની નિશાની ધન છે.

(c) એક નાના ધન વિદ્યુતભારને Qથી P પર લઈ જવામાં બાહ્ય પરિબળને વિદ્યુતક્ષેત્રની વિરૂદ્ધમાં કાર્ય કરવું પડે છે. તેથી ક્ષેત્રએ કરેલું કાર્ય ઋણ છે.

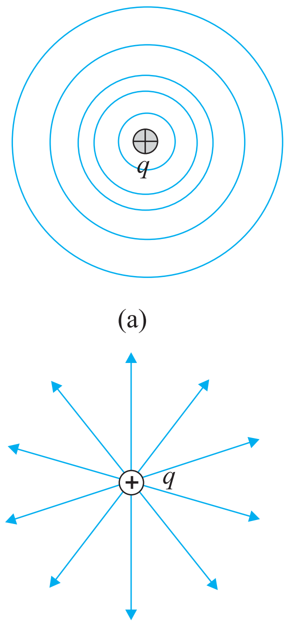
(d) નાના ઋણ વિદ્યુતભારને Bથી A પર લઈ જવામાં બાહ્ય પરિબળને કાર્ય કરવું પડે છે. તે ધન છે.

(e) ઋણ વિદ્યુતભાર પરના અપાકર્ષણ બળને લીધે વેગ ઘટે છે અને તેથી Bથી A પર જવામાં ગતિઊર્જા ઘટે છે.

ઉદાહરણ 2.3

PHYSICS

Electric potential, equipotential surfaces:
http://video.mit.edu/watch/4-electrostatic-potential-elctric-energy-ev-conservative-field-equipotential-sufaces-12584/



આકૃતિ 2.9 એકલ વિદ્યુતભાર q માટે (a) સમસ્થિતિમાન પૃષ્ઠો વિદ્યુતભાર પર કેન્દ્ર ધરાવતી ગોળાકાર સપાટીઓ છે (b) જો $q > 0$ હોય તો વિદ્યુતક્ષેત્ર રેખાઓ qમાંથી શરૂ થતી અને ત્રિજ્યાવર્તી છે.

2.6 સમસ્થિતિમાન પૃષ્ઠો (EQUIPOTENTIAL SURFACES)

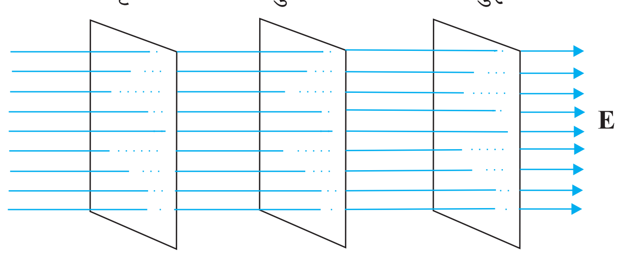
સમસ્થિતિમાન પૃષ્ઠ એ એવું પૃષ્ઠ (સપાટી) છે કે જે પૃષ્ઠ પરનાં બધાં બિંદુઓએ સ્થિતિમાન સમાન છે. એકલ વિદ્યુતભાર q માટે સ્થિતિમાન, સમીકરણ (2.8) પરથી,

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$$

મળે છે. આ દર્શાવે છે કે, જો r અચળ હોય તો V અચળ છે. આમ, એકલ વિદ્યુતભારનાં સમસ્થિતિમાન પૃષ્ઠો, વિદ્યુતભાર પર કેન્દ્ર ધરાવતી ગોળાકાર સપાટીઓ છે.

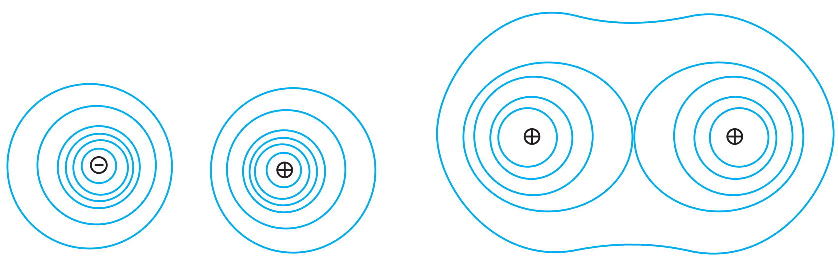
હવે, એકલ વિદ્યુતભારની વિદ્યુતક્ષેત્ર રેખાઓ, વિદ્યુતભારથી શરૂ થતી અથવા વિદ્યુતભારમાં અંત પામતી ત્રિજ્યાવર્તી રેખાઓ છે, જે વિદ્યુતભાર ધન છે કે ઋણ છે તેના પર આધાર રાખે છે. એ સ્પષ્ટ છે કે ક્ષેત્રરેખા દરેક બિંદુએ તે બિંદુમાંથી પસાર થતા સમસ્થિતિમાન પૃષ્ઠને લંબ છે. આ વ્યાપક રીતે સાચું છે : કોઈ પણ વિદ્યુતભાર સંરચના (ગોઠવણી) માટે, કોઈ બિંદુમાંથી પસાર થતું સમસ્થિતિમાન પૃષ્ઠ, તે બિંદુએ વિદ્યુતક્ષેત્રને લંબ છે. આ વિધાનની સાબિતી સરળ છે.

જો ક્ષેત્ર સમસ્થિતિમાન પૃષ્ઠને લંબ ન હોત તો તેને પૃષ્ઠને સમાંતર અશૂન્ય ઘટક હોત. એકમ પરીક્ષણ વિદ્યુતભારને, ક્ષેત્રના ઘટકની વિરૂદ્ધમાં ગતિ કરાવવા કાર્ય કરવું પડ્યું હોત. પરંતુ આ તો સમસ્થિતિમાન પૃષ્ઠની વ્યાખ્યા કરતાં વિરૂદ્ધ છે : આ સપાટી પર કોઈ બે બિંદુઓ વચ્ચે કોઈ સ્થિતિમાન તફાવત નથી અને પરીક્ષણ વિદ્યુતભારને સપાટી પર ગતિ કરાવવા કોઈ કાર્ય કરવું પડતું નથી. આથી, વિદ્યુતક્ષેત્ર સમસ્થિતિમાન પૃષ્ઠને દરેક બિંદુએ લંબ હોવું જ જોઈએ. વિદ્યુતભાર વિતરણ (સંરચના)ની આસપાસ વિદ્યુતક્ષેત્ર રેખાઓના ચિત્ર ઉપરાંત આ સમસ્થિતિમાન પૃષ્ઠો એક વધારાનું વૈકલ્પિક દૃશ્ય ચિત્ર પુરું પાડે છે.



આકૃતિ 2.10 સમાન વિદ્યુતક્ષેત્ર માટે સમસ્થિતિમાન પૃષ્ઠો

સમાન વિદ્યુતક્ષેત્ર **E** ધારો કે x-અક્ષની દિશામાં છે, તેને માટે સમસ્થિતિમાન પૃષ્ઠો x-અક્ષને લંબ છે એટલે કે y-z સમતલને સમાંતર સમતલો છે. (આકૃતિ 2.10). (a) ડાયપોલ માટેનાં અને (b) બે સમાન ધન વિદ્યુતભારો માટેનાં સમસ્થિતિમાન પૃષ્ઠો આકૃતિ 2.11માં દર્શાવ્યાં છે.

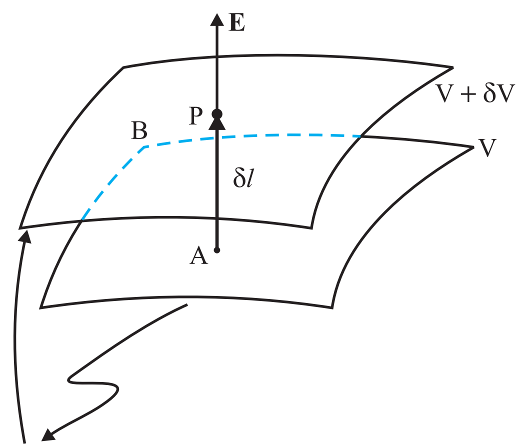


(a) (b)

આકૃતિ 2.11 (a) ડાયપોલ
(b) બે સમાન ધન વિદ્યુતભારો માટેનાં કેટલાંક સમસ્થિતિમાન પૃષ્ઠો

2.6.1 ક્ષેત્ર અને સ્થિતિમાન વચ્ચેનો સંબંધ (Relation between Field and Potential)

એકબીજાની ખૂબ નજીકની બે સમસ્થિતિમાન સપાટીઓ A અને B (આકૃતિ 2.12). જેમના પર સ્થિતિમાનનાં મૂલ્યો અનુક્રમે V અને V + δV છે, તેમનો વિચાર કરો. અહીં δV એ વિદ્યુતક્ષેત્ર **E**ની દિશામાંનો Vનો ફેરફાર છે. B સપાટી પર એક બિંદુ P છે. સપાટી Aનું Pથી લંબ અંતર δl છે. એકમ ધન વિદ્યુતભારને સપાટી B પરથી સપાટી A સુધી આ લંબરેખા પર, વિદ્યુતક્ષેત્રની વિરૂદ્ધમાં ગતિ કરાવવાનો વિચાર કરો. આ પ્રક્રિયામાં કરેલું કાર્ય $|\mathbf{E}|\,\delta l$ છે.



આકૃતિ 2.12 સ્થિતિમાન પરથી ક્ષેત્ર

આ કાર્ય સ્થિતિમાન તફાવત $V_A - V_B$ને બરાબર છે.

આમ,

$$|\mathbf{E}|\,\delta l = V - (V + \delta V) = -\delta V$$

એટલે કે, $$|\mathbf{E}| = -\frac{\delta V}{\delta l} \qquad (2.20)$$

δV ઋણ હોવાથી, $\delta V = -|\delta V|$ સમીકરણ (2.20)ને આપણે

$$|\mathbf{E}| = -\frac{\delta V}{\delta l} = +\frac{|\delta V|}{\delta l} \qquad (2.21)$$

તરીકે લખી શકીએ. આમ, આપણે વિદ્યુતક્ષેત્ર અને સ્થિતિમાન વચ્ચેના સંબંધ અંગે બે મહત્વના નિષ્કર્ષો પર પહોંચીએ છીએ :

(i) જે દિશામાં (અંતર સાથે) સ્થિતિમાનનો ઘટાડો સૌથી વધારે ઝડપી થતો હોય તે દિશામાં વિદ્યુતક્ષેત્ર હોય છે.

(ii) કોઈ બિંદુએ આ વિદ્યુતક્ષેત્રનું માન સમસ્થિતિમાન પૃષ્ઠને લંબ દિશામાં એકમ સ્થાનાંતર દીઠ સ્થિતિમાનના ફેરફારના માન જેટલું હોય છે.

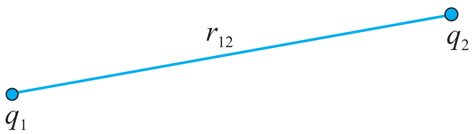
2.7 વિદ્યુતભારોના તંત્રની સ્થિતિઊર્જા (Potential Energy of a System of Charges)

પ્રારંભમાં, કોઈ ઉગમબિંદુની સાપેક્ષે સ્થાનસદિશો $\mathbf{r}_1$ અને $\mathbf{r}_2$ ધરાવતા બે વિદ્યુતભારો અનુક્રમે q_1 અને q_2ના બનેલા તંત્રનો વિચાર કરો. આપણે આ ગોઠવણી રચવા માટે (બહારથી) કરવા પડતા કાર્યની ગણતરી કરીશું. આનો અર્થ એ છે કે આપણે q_1 અને q_2 વિદ્યુતભારોને પ્રારંભમાં અનંત અંતરે ધારીને બાહ્ય પરિબળ દ્વારા તેમને આપેલાં સ્થાનોએ લાવવા માટે કરેલું કાર્ય શોધીશું. ધારોકે સૌપ્રથમ વિદ્યુતભાર q_1ને અનંત અંતરેથી $\mathbf{r}_1$ બિંદુએ લાવવામાં આવે છે. જેની વિરૂદ્ધમાં કાર્ય કરવું પડે તેવું કોઈ બાહ્યક્ષેત્ર હાજર નથી તેથી q_1ને અનંત અંતરેથી $\mathbf{r}_1$ પર લાવવા માટે કરેલું કાર્ય શૂન્ય છે, આ વિદ્યુતભાર અવકાશમાં સ્થિતિમાન

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_{1P}}$$

ઉત્પન્ન કરે છે. જ્યાં, r_{1P} એ અવકાશમાંના કોઈ બિંદુ Pનું q_1ના સ્થાનથી અંતર છે. સ્થિતિમાનની વ્યાખ્યા પરથી વિદ્યુતભાર q_2ને અનંત અંતરેથી $\mathbf{r}_2$ બિંદુએ લાવવા માટે બાહ્યબળે કરેલું કાર્ય, q_2 ગુણ્યા $\mathbf{r}_2$ પર q_1ને લીધે સ્થિતિમાન જેટલું છે :

$$q_2 \text{પર કરેલું કાર્ય} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}}$$



આકૃતિ 2.13 q_1 અને q_2 વિદ્યુતભારોના તંત્રની સ્થિતિઊર્જા તેમના ગુણાકારના સમપ્રમાણમાં અને તેમની વચ્ચેના અંતરના વ્યસ્ત પ્રમાણમાં છે.

જ્યાં r_{12}, 1 અને 2 બિંદુઓ વચ્ચેનું અંતર છે.

સ્થિતવિદ્યુતબળ એ સંરક્ષી (Conservative) બળ હોવાથી આ કાર્ય તંત્રની સ્થિતિઊર્જા રૂપે સંગ્રહ પામે છે. આમ, બે વિદ્યુતભારો q_1 અને q_2ના તંત્રની સ્થિતિઊર્જા

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}} \qquad (2.22)$$

છે. એ સ્વાભાવિક છે કે, પહેલા q_2ને તેના હાલના સ્થાને લાવ્યા હોત અને q_1ને પછીથી લાવ્યા હોત તો પણ સ્થિતિઊર્જા U સમાન જ હોત. વધુ વ્યાપક સ્વરૂપે, તે બે વિદ્યુતભારોને ગમે તે રીતે તેમનાં નિશ્ચિત સ્થાનો પર લાવવામાં આવે તો પણ સ્થિતિઊર્જાનું સૂત્ર (2.22) બદલાતું નથી, આનું કારણ એ છે કે સ્થિતવિદ્યુતબળ માટે કાર્ય માર્ગ પર આધારિત નથી.

સમીકરણ (2.22) q_1 અને q_2ના કોઈપણ ચિહ્ન માટે સાચું છે. જો $q_1q_2 > 0$ હોય તો સ્થિતિઊર્જા ધન છે. આ અપેક્ષા મુજબનું જ છે, કારણ કે સજાતિય વિદ્યુતભારો માટે ($q_1q_2 > 0$), વિદ્યુતબળ અપાકર્ષી છે અને વિદ્યુતભારોને અનંત અંતરેથી સીમિત અંતરે લાવવા માટે તે બળની વિરૂદ્ધમાં ધન કાર્ય જરૂરી છે. વિજાતિય વિદ્યુતભારો માટે ($q_1q_2 < 0$), વિદ્યુતબળ આકર્ષી છે. તે કિસ્સામાં, વિદ્યુતભારોને આપેલા સ્થાનોથી અનંત અંતરે લઈ જવા માટે આ બળની વિરૂદ્ધમાં ધન કાર્ય કરવું પડે છે. બીજા શબ્દોમાં, ઉલટા માર્ગ (અનંત અંતરેથી હાલના સ્થાનો સુધી) માટે ઋણ કાર્ય જરૂરી બને છે, તેથી સ્થિતિઊર્જા ઋણ છે.

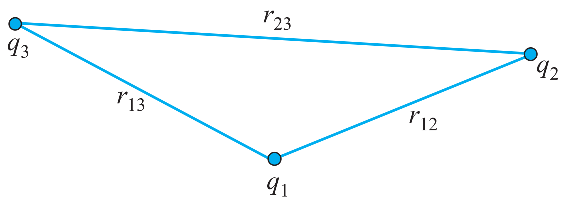
સમીકરણ (2.22)ને ગમે તેટલી સંખ્યાના બિંદુ વિદ્યુતભારોના તંત્ર માટે, સહેલાઈથી વ્યાપકરૂપે લાગુ પાડી શકાય છે. હવે આપણે $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$ પર રહેલા વિદ્યુતભારો અનુક્રમે q_1, q_2, q_3ના તંત્રની સ્થિતિઊર્જા ગણીએ. q_1ને અનંત અંતરેથી $\mathbf{r}_1$ પર લાવવા માટે કોઈ કાર્ય જરૂરી નથી. પછી આપણે q_2ને અનંત અંતરેથી $\mathbf{r}_2$ પર લાવીએ. અગાઉ જોયું તેમ આ પગલામાં કરેલું કાર્ય છે.

$$q_2 V_1(\mathbf{r}_2) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}} \qquad (2.23)$$

q_1 અને q_2 વિદ્યુતભારો સ્થિતિમાન ઉત્પન્ન કરે છે. જે કોઈપણ P બિંદુએ

$$V_{1,2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_{1P}} + \frac{q_2}{r_{2P}}\right) \qquad (2.24)$$

પરથી મળે છે. હવે પછી, q_3ને અનંત અંતરેથી $\mathbf{r}_3$ બિંદુએ લાવવા માટે કરેલું કાર્ય q_3 ગુણ્યા $\mathbf{r}_3$ બિંદુએ $V_{1,2}$ જેટલું છે.



આકૃતિ 2.14 ત્રણ વિદ્યુતભારોના તંત્રની સ્થિતિઊર્જા આકૃતિમાં દર્શાવેલ સંજ્ઞાઓ સાથે સમીકરણ (2.26) દ્વારા અપાય છે.

$$q_3 V_{1,2}(\mathbf{r}_3) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}}\right) \qquad (2.25)$$

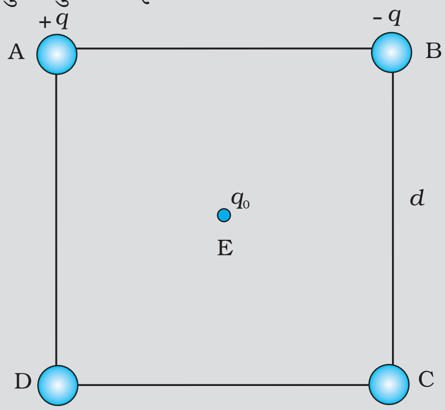
વિદ્યુતભારોને આપેલા સ્થાનોએ એકઠા કરવા માટે કરવું પડતું કુલ કાર્ય, વિવિધ પગલાંમાં કરેલા કાર્ય [સમીકરણ (2.23) અને સમીકરણ (2.25)]ના સરવાળાથી મળે છે.

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}}\right) \qquad (2.26)$$

ફરીથી, વિદ્યુતબળ સંરક્ષી બળ હોવાને કારણે (અથવા સમતુલ્ય રીતે કહીએ તો કાર્ય માર્ગથી સ્વતંત્ર હોવાને લીધે), U માટેનું અંતિમ સૂત્ર, સમીકરણ (2.26), વિદ્યુતભારોને એકઠા કરવાની પદ્ધતિ પર

આધારિત નથી. સ્થિતિઊર્જા, ગોઠવણીની હાલની સ્થિતિ માટે લાક્ષણિક છે અને આ સ્થિતિ કેવી રીતે પ્રાપ્ત કરી તે પદ્ધતિ પર આધારિત નથી.

ઉદાહરણ 2.4 આકૃતિ 2.15માં દર્શાવ્યા મુજબ d બાજુવાળા ચોરસ ABCDના શિરોબિંદુઓ પર ચાર વિદ્યુતભારો ગોઠવેલ છે. (a) આ ગોઠવણી પ્રાપ્ત કરવા માટે જરૂરી કાર્ય શોધો. (b) ચાર વિદ્યુતભારોને તે શિરોબિંદુઓ પર જકડી રાખીને વિદ્યુતભાર q_0ને ચોરસના કેન્દ્ર પર લાવવામાં આવે છે. આ માટે વધારાનું કેટલું કાર્ય જરૂરી છે ?



આકૃતિ 2.15

ઉકેલ

(a) અત્રે કરવામાં આવતું કાર્ય માત્ર વિદ્યુતભારોની અંતિમ ગોઠવણી પર જ આધાર રાખે છે નહિ કે કેવી રીતે તેમને લાવ્યા છીએ તેના પર. આથી, આપણે A, B, C અને D પર વિદ્યુતભારો લાવવાની એક રીતે થયેલું કાર્ય ગણીશું. ધારો કે સૌપ્રથમ વિદ્યુતભાર $+q$ને A પર લાવવામાં આવે છે અને પછી B, C, D પર $-q$, $+q$ અને $-q$ વિદ્યુતભારોને અનુક્રમે લાવવામાં આવે છે. આ માટે જરૂરી કાર્ય આ મુજબ ગણી શકાય :

(i) બીજે ક્યાંય કોઈ વિદ્યુતભાર હાજર ન હોય ત્યારે $+q$ વિદ્યુતભારને A પર લાવવા માટે જરૂરી કાર્ય : આ શૂન્ય છે.

(ii) A પર $+q$ હાજર હોય ત્યારે B પર $-q$ને લાવવા માટે જરૂરી કાર્ય : આ કાર્ય = (B પરનો વિદ્યુતભાર) × (A પરના $+q$ વિદ્યુતભારને લીધે B આગળ વિદ્યુતસ્થિતિમાન)

$$= -q \times \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 d}\right) = -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 d}$$

(iii) A પર $+q$ હોય અને B પર $-q$ હોય ત્યારે $+q$ને C પર લાવવા માટે જરૂરી કાર્ય : આ કાર્ય = (C પરનો વિદ્યુતભાર) × (A અને B પરના વિદ્યુતભારોને લીધે C આગળ વિદ્યુતસ્થિતિમાન)

$$= +q\left(\frac{+q}{4\pi\varepsilon_0 d\sqrt{2}} + \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 d}\right)$$

$$= \frac{-q^2}{4\pi\varepsilon_0 d}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

(iv) A પર $+q$, B પર $-q$ અને C પર $+q$ હાજર હોય ત્યારે $-q$ને D પર લાવવા માટે જરૂરી કાર્ય :

આ કાર્ય = (D પરનો વિદ્યુતભાર) × (A, B અને C પરના વિદ્યુતભારોને લીધે D આગળ સ્થિતિમાન)

$$= -q\left(\frac{+q}{4\pi\varepsilon_0 d} + \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 d\sqrt{2}} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 d}\right)$$

$$= \frac{-q^2}{4\pi\varepsilon_0 d}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

ઉદાહરણ 2.4

(i) (ii), (iii) અને (iv) પદોમાં કરેલા કાર્યનો સરવાળો કરો. જરૂરી કુલ કાર્ય

$$= \frac{-q^2}{4\pi\varepsilon_0 d}\left\{(0) + (1) + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$$

$$= \frac{-q^2}{4\pi\varepsilon_0 d}\left(4 - \sqrt{2}\right)$$

કરેલું આ કાર્ય માત્ર વિદ્યુતભારોની ગોઠવણી પર આધારિત છે, તેમને કેવી રીતે એકઠા કર્યા તેના પર નહિ. વ્યાખ્યા મુજબ, આ સૂત્ર વિદ્યુતભારોના તંત્રની કુલ સ્થિતિઊર્જા દર્શાવે છે.

(વિદ્યાર્થીઓ તેમને ગમે તેવા બીજા કોઈ ક્રમમાં વિદ્યુતભારોને લાવીને જરૂરી કાર્યની ગણતરી કરીને પોતે ખાતરી કરી શકે છે કે ઊર્જા એકસમાન જ છે.)

(b) જ્યારે A, B, C અને D પર વિદ્યુતભારો $+q$, $-q$, $+q$ અને $-q$ હાજર હોય ત્યારે q_0 વિદ્યુતભારને E બિંદુએ લાવવા માટે જરૂરી કાર્ય, $q_0 \times$ (E આગળ A, B, C અને D પરના વિદ્યુતભારોથી ઉદ્ભવતું સ્થિતિમાન) છે. એ સ્પષ્ટ છે કે E આગળનું વિદ્યુત સ્થિતિમાન શૂન્ય છે. કારણ કે, A અને Cને લીધે ઉદ્ભવતું સ્થિતિમાન B અને Dને લીધે મળતા સ્થિતિમાન વડે નાબૂદ થાય છે. આથી, કોઈ પણ વિદ્યુતભારને E પર લાવવા માટે કોઈ કાર્ય જરૂરી નથી.

ઉદાહરણ 2.4

2.8 બાહ્ય ક્ષેત્રમાં સ્થિતિઊર્જા (Potential Energy in an External Field)

2.8.1 એકલ (એકાકી, Single) વિદ્યુતભારની સ્થિતિઊર્જા (Potential Energy of a Single Charge)

પરિચ્છેદ 2.7માં વિદ્યુતક્ષેત્રનું ઉદ્ગમ (સ્રોત) - વિદ્યુતભારો અને તેમનાં સ્થાનો - જાણીતું હતું અને તે વિદ્યુતભારોના તંત્રની સ્થિતિઊર્જા શોધી હતી. આ પરિચ્છેદમાં આપણે એક જુદો જ પણ તેને સંબંધિત પ્રશ્ન પૂછીએ છીએ. આપેલા કોઈ ક્ષેત્રમાં વિદ્યુતભાર qની સ્થિતિઊર્જા કેટલી હશે ? ખરેખર તો આ પ્રશ્ન સ્થિતિવિદ્યુત સ્થિતિમાનના ખ્યાલ તરફ દોરી જતું આરંભ બિંદુ હતું (પરિચ્છેદ 2.1 અને 2.2). પરંતુ અહીં આપણે આ પ્રશ્નને ફરીથી હલ કરીશું અને એ સ્પષ્ટ કરીશું કે પરિચ્છેદ 2.7માંની ચર્ચા કરતાં તે કઈ રીતે અલગ છે.

મુખ્ય તફાવત એ છે કે આપણને હવે વિદ્યુતભાર (કે વિદ્યુતભારો)ની બાહ્ય ક્ષેત્રમાં સ્થિતિઊર્જા સાથે સંબંધ છે. આ બાહ્યક્ષેત્ર **E**, આપણે જેમની સ્થિતિઊર્જા શોધવી છે તે આપેલા વિદ્યુતભારો વડે ઉત્પન્ન થયેલું નથી. પરંતુ **E**, આપેલા વિદ્યુતભારો સિવાય અન્ય સ્રોતથી ઉત્પન્ન થયેલું છે. અન્ય સ્રોત જાણીતા હોઈ શકે છે, પરંતુ ઘણીવાર તેઓ અજ્ઞાત કે અનિશ્ચિત હોય છે, નિશ્ચિત તો અન્ય સ્રોતથી ઉદ્ભવતા વિદ્યુતક્ષેત્ર **E** અથવા વિદ્યુત સ્થિતિમાન V હોય છે. આપણે એવું ધારી લઈએ છીએ કે વિદ્યુતભાર, બાહ્યક્ષેત્ર ઉત્પન્ન કરતા અન્ય સ્રોતને ખાસ કંઈ અસર કરતા નથી. જો q ખૂબ નાનો હોય અથવા સ્રોતને અન્ય અજ્ઞાત બળો દ્વારા જકડી રાખેલા હોય તો આ સાચું છે. જો ખૂબ દૂર અનંત અંતરે રહેલા બહુ પ્રબળ સ્રોતને કારણે, આપણને રસ છે તે વિસ્તારમાં, નિશ્ચિત વિદ્યુતક્ષેત્ર **E** ઉત્પન્ન થયેલ હોય તો q નિશ્ચિત હોવા છતાં તેની બાહ્યક્ષેત્ર પરની અસરને અવગણી શકાય છે. એ બરાબર નોંધો કે આપણને આપેલ વિદ્યુતભાર qની (અને પછી વિદ્યુતભારોના તંત્રની) બાહ્યક્ષેત્રમાં સ્થિતિઊર્જા શોધવામાં રસ છે, આપણને આ બાહ્યક્ષેત્ર ઉત્પન્ન કરનારા સ્રોતની સ્થિતિઊર્જા શોધવામાં રસ નથી.

બાહ્ય ક્ષેત્ર **E** અને તેને અનુરૂપ બાહ્ય સ્થિતિમાન V, બિંદુએ બિંદુએ બદલાઈ શકે છે. વ્યાખ્યા મુજબ, P બિંદુએ V, એ એકમ ધન વિદ્યુતભારને અનંત અંતરેથી P બિંદુએ લાવવામાં કરેલું કાર્ય છે (આપણે અનંત અંતરે સ્થિતિમાન શૂન્ય લીધું છે). આમ, વિદ્યુતભાર qને અનંત અંતરેથી બાહ્ય ક્ષેત્રમાંના P બિંદુએ લાવવામાં થતું કાર્ય qV છે. આ કાર્ય qની સ્થિતિઊર્જા રૂપે સંગ્રહ પામે છે. જો બિંદુ Pનો સ્થાન સદિશ કોઈ ઉગમબિંદુની સાપેક્ષે **r** હોય તો આપણે,

બાહ્યક્ષેત્રમાં **r** આગળ qની સ્થિતિઊર્જા

$$= qV(\mathbf{r}) \tag{2.27}$$

લખી શકીએ છીએ, જ્યાં V(r) એ **r** બિંદુએ બાહ્ય સ્થિતિમાન છે.

આમ, જો વિદ્યુતભાર $q = e = 1.6 \times 10^{-19}$C ધરાવતા ઈલેક્ટ્રૉનને $\Delta V = 1$ voltના સ્થિતિમાન તફાવતમાંથી પ્રવેગિત કરવામાં આવે તો તે $q\Delta V = 1.6 \times 10^{-19}$ J ઊર્જા પ્રાપ્ત કરે છે. ઊર્જાના આ એકમને 1 **ઈલેક્ટ્રૉન વોલ્ટ** અથવા 1eV તરીકે વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે, એટલે કે 1eV = 1.6×10^{-19} J. eV આધારિત એકમો વધુ વ્યાપક પ્રમાણમાં પરમાણુ, ન્યુક્લિયર અને કણ ભૌતિકવિજ્ઞાનમાં વપરાય છે. (1 keV = 10^3 eV = 1.6×10^{-16} J, 1 MeV = 10^6 eV = 1.6×10^{-13} J, 1 GeV = 10^9 eV = 1.6×10^{-10} J, 1 TeV = 10^{12} eV = 1.6×10^{-7} J) (અગાઉ આ વ્યાખ્યા ધોરણ XI, ભૌતિકવિજ્ઞાન ભાગ-I, પાન 117, કોષ્ટક 6.1માં આપેલ છે.)

2.8.2 બાહ્ય ક્ષેત્રમાં બે વિદ્યુતભારોના તંત્રની સ્થિતિઊર્જા (Potential Energy of a System of Two Charges in an External Field)

હવે પછીનો આપણો પ્રશ્ન આ છે : બાહ્ય ક્ષેત્રમાં $\mathbf{r}_1$ અને $\mathbf{r}_2$ સ્થાનોએ રહેલા બે વિદ્યુતભારોના તંત્રની, સ્થિતિઊર્જા કેટલી હશે ? પ્રથમ, આપણે વિદ્યુતભાર q_1ને અનંત અંતરેથી $\mathbf{r}_1$ પર લાવવા માટેનું કાર્ય ગણીએ. સમીકરણ (2.27) પરથી આ ક્રિયામાં કરેલું કાર્ય $q_1V(\mathbf{r}_1)$ છે. પછી આપણે q_2ને $\mathbf{r}_2$ પર લાવવા માટેનું કાર્ય શોધીએ. આ માટે માત્ર બાહ્યક્ષેત્ર **E** ની વિરૂદ્ધમાં નહિ પણ q_1ના ક્ષેત્રની વિરૂદ્ધમાં પણ કાર્ય કરવું પડે છે.

બાહ્ય ક્ષેત્રની વિરૂદ્ધમાં q_2 પર કરેલું કાર્ય

$$= q_2V(\mathbf{r}_2)$$

q_1ના ક્ષેત્રની વિરૂદ્ધમાં q_2 પર કરેલું કાર્ય

$$= \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}}$$

જ્યાં r_{12}, q_1 અને q_2 વચ્ચેનું અંતર છે. આપણે સમીકરણો (2.27) અને (2.22)નો ઉપયોગ કર્યો છે. ક્ષેત્રો માટેના સંપાતપણાના સિદ્ધાંત મુજબ આપણે બે ક્ષેત્રો (**E** અને q_1નું ક્ષેત્ર) વિરૂદ્ધનાં q_2 પર કરેલા કાર્યનો સરવાળો કરીએ :

q_2ને $\mathbf{r}_2$ એ લાવવા માટે કરેલું કાર્ય

$$= q_2V(\mathbf{r}_2) + \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}} \tag{2.28}$$

આમ,
આ તંત્રની સ્થિતિઊર્જા
= આ ગોઠવણ કરવા માટે કરેલું કુલ કાર્ય

$$= q_1V(\mathbf{r}_1) + q_2V(\mathbf{r}_2) + \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}} \tag{2.29}$$

ઉદાહરણ 2.5

(a) (–9 cm, 0, 0) અને (9 cm, 0, 0) સ્થાનોએ રહેલા બે વિદ્યુતભારો અનુક્રમે 7 μC અને –2 μCના તંત્રની (બાહ્યક્ષેત્ર વિના) સ્થિત વિદ્યુત સ્થિતિઊર્જા શોધો.

(b) આ બે વિદ્યુતભારોને એકબીજાથી અનંત અંતર સુધી જુદા પાડવા માટે કેટલું કાર્ય જરૂરી છે ?

(c) ધારો કે આ વિદ્યુતભારોના તંત્રને બાહ્ય વિદ્યુતક્ષેત્ર $E = A(1/r^2)$માં મૂકવામાં આવે છે. જ્યાં, $A = 9 \times 10^5\ N C^{-1} m^2$ છે, તો આ તંત્રની વિદ્યુત સ્થિતિઊર્જા કેટલી હશે ?

ઉકેલ

(a) $U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r} = 9 \times 10^9 \times \frac{7 \times (-2) \times 10^{-12}}{0.18} = -0.7\ J$

(b) $W = U_2 - U_1 = 0 - U = 0 - (-0.7) = 0.7\ J$

(c) બે વિદ્યુતભારોની પરસ્પર આંતરક્રિયાની ઊર્જા બદલાતી નથી. ઉપરાંત, બે વિદ્યુતભારોની બાહ્ય વિદ્યુતક્ષેત્ર સાથેની આંતરક્રિયાની ઊર્જા પણ છે. આમ આપણને

$$q_1 V(\mathbf{r}_1) + q_2 V(\mathbf{r}_2) = A\frac{7\,\mu C}{0.09 m} + A\frac{-2\,\mu C}{0.09 m}$$

મળે અને કુલ વિદ્યુતસ્થિતિ ઊર્જા

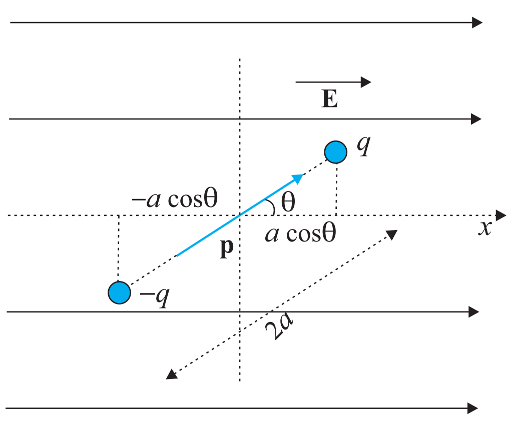
$$q_1 V(\mathbf{r}_1) + q_2 V(\mathbf{r}_2) + \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}} = A\frac{7\,\mu C}{0.09 m} + A\frac{-2\,\mu C}{0.09 m} - 0.7\ J$$

$$= 70 - 20 - 0.7 = 49.3\ J$$

ઉદાહરણ 2.5

2.8.3 બાહ્યક્ષેત્રમાં ડાયપોલની સ્થિતિઊર્જા (Potential Energy of a Dipole in an External Field)

આકૃતિ 2.16માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે $q_1 = +q$ અને $q_2 = -q$ ધરાવતી એક ડાયપોલને એકસમાન વિદ્યુતક્ષેત્ર **E**માં મૂકેલી વિચારો.



આકૃતિ 2.16 સમાન બાહ્યક્ષેત્રમાં ડાયપોલની સ્થિતિઊર્જા

છેલ્લા પ્રકરણમાં જોયું તેમ, સમાન વિદ્યુતક્ષેત્રમાં ડાયપોલ કોઈ પરિણામી (Net) બળ અનુભવતું નથી, પરંતુ તે ટોર્ક અનુભવે છે, જે

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{p} \times \mathbf{E} \qquad (2.30)$$

વડે અપાય છે. આ ટોર્ક તેને ભ્રમણ કરાવવાનો પ્રયત્ન કરે છે (સિવાય કે **p**, **E**ને સમાંતર કે પ્રતિસમાંતર હોય). ધારોકે તેના પર એક બાહ્ય ટોર્ક τ_{ext} એવી રીતે લગાડવામાં આવે છે કે તે આ ટોર્કને નાબૂદ કરે છે અને પુસ્તકના પૃષ્ઠના સમતલમાં, કોણીય પ્રવેગ સિવાય, અત્યંત સૂક્ષ્મ કોણીય ઝડપથી, કોણ θ_0થી θ_1 સુધી ભ્રમણ કરાવે છે. આ દરમિયાન બાહ્ય ટોર્ક વડે થયેલું કાર્ય,

$$W = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \tau_{ext}(\theta) d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta_1} pE \sin\theta d\theta$$

$$= pE(\cos\theta_0 - \cos\theta_1) \qquad (2.31)$$

આ કાર્ય તંત્રની સ્થિતિઊર્જા રૂપે સંગ્રહ પામે છે. આપણે ડાયપોલના નમન (θ) સાથે સ્થિતિઊર્જા U(θ)ને સાંકળી શકીએ. અન્ય સ્થિતિઊર્જાઓની જેમ સ્થિતિઊર્જાને શૂન્ય લેવા માટેના કોણની પસંદગીમાં આપણને સ્વતંત્રતા છે. એક સ્વાભાવિક પસંદગી $\theta_0 = \pi/2$ લેવાની છે. (આ માટેની સમજૂતી આ ચર્ચાના અંત ભાગમાં આપેલ છે.) આ પરથી આપણે

$$U(\theta) = pE(\cos\frac{\pi}{2} - \cos\theta) = -pE\cos\theta = -\boldsymbol{p}\cdot\mathbf{E} \qquad (2.32)$$

લખી શકીએ.

આ સમીકરણને વૈકલ્પિક રીતે સમીકરણ (2.29) પરથી પણ સમજી શકાય છે. આપણે સમીકરણ (2.29), $+q$ અને $-q$ના આ તંત્રને લાગુ પાડીએ, તો સ્થિતિઊર્જાનું સૂત્ર

$$U'(\theta) = q[V(\mathbf{r}_1) - V(\mathbf{r}_2)] - \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 \times 2a} \tag{2.33}$$

અત્રે, $\mathbf{r}_1$ અને $\mathbf{r}_2$, $+q$ અને $-q$ના સ્થાનસદિશો દર્શાવે છે. $\mathbf{r}_1$ અને $\mathbf{r}_2$ સ્થાનો વચ્ચેનો સ્થિતિમાનનો તફાવત, એકમ ધન વિદ્યુતભારને ક્ષેત્રની વિરૂદ્ધમાં $\mathbf{r}_2$ થી $\mathbf{r}_1$ પર લાવવા માટે કરવા પડતા કાર્ય બરાબર છે. બળને સમાંતર સ્થાનાંતર $2a\cos\theta$ છે. આમ, $[V(\mathbf{r}_1) - V(\mathbf{r}_2)] = -E \times 2a\cos\theta$. આમ,

$$U'(\theta) = -pE\cos\theta - \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 \times 2a} = -\mathbf{p.E} - \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 \times 2a} \tag{2.34}$$

આપણને મળે. આપણે નોંધીએ કે આપેલ ડાયપોલ માટે $U(\theta)$ કરતાં $U'(\theta)$ માત્ર એક અચળાંક જેટલું જ જુદું પડે છે. સ્થિતિઊર્જા માટે અચળાંક અર્થપૂર્ણ નથી. તેથી સમીકરણ (2.34)માંના બીજા પદને આપણે છોડી દઈ શકીએ છીએ અને આમ કરવાથી તે સમીકરણ (2.32) જ બની જાય છે.

હવે આપણે સમજી શકીએ કે આપણે $\theta_0 = \pi/2$ કેમ લીધું હતું. એ કિસ્સામાં, $+q$ અને $-q$ને બાહ્ય વિદ્યુતક્ષેત્રની વિરૂદ્ધમાં લાવવા માટેનાં કાર્ય સમાન અને વિરૂદ્ધ છે અને તેથી નાબુદ થાય છે, એટલે કે $q\,[V(\mathbf{r}_1) - V(\mathbf{r}_2)] = 0$.

ઉદાહરણ 2.6 એક દ્રવ્યના અણુને 10^{-29} C m જેટલી કાયમી વિદ્યુત ડાયપોલ ચાકમાત્રા છે. આ દ્રવ્યના એક મોલ જથ્થાને 10^6 V m^{-1} મૂલ્યનું પ્રબળ વિદ્યુતક્ષેત્ર લગાડીને (નીચા તાપમાને) ધ્રૂવીભૂત કરેલ છે. ક્ષેત્રની દિશા એકાએક 60^oના કોણ જેટલી બદલવામાં આવે છે. આ દ્રવ્યની ડાયપોલ ક્ષેત્રની નવી દિશામાં ગોઠવાતાં મુક્ત થતી ઉષ્માની ગણતરી કરો. સરળતા ખાતર નમૂનાનું 100% ધ્રૂવીભવન થયું છે એમ ધારો.

ઉકેલ અહીં, દરેક અણુની ડાયપોલ ચાકમાત્રા $= 10^{-29}$ C m

1 મોલ દ્રવ્યમાં 6×10^{23} અણુઓ હોય છે, તેથી બધાં અણુઓની કુલ

ડાયપોલ ચાકમાત્રા $p = 6 \times 10^{23} \times 10^{-29}$ C m $= 6 \times 10^{-6}$ C m

પ્રારંભિક સ્થિતિઊર્જા $U_i = -pE\cos\theta = -6 \times 10^{-6} \times 10^6 \cos 0^0 = -6$ J

અંતિમ સ્થિતિઊર્જા (જ્યારે $\theta = 60^o$), $U_f = -6 \times 10^{-6} \times 10^6 \cos 60^0 = -3$ J

સ્થિતિઊર્જાનો તફાવત $= -3\text{ J} - (-6\text{J}) = 3$ J

આમ, સ્થિતિઊર્જામાં ઘટાડો થાય છે. આ ડાયપોલની ગોઠવણીમાં દ્રવ્ય દ્વારા ઉષ્મા રૂપે મુક્ત થતી ઊર્જા છે.

ઉદાહરણ 2.6

2.9 સુવાહકોનું સ્થિત વિદ્યુતશાસ્ત્ર (ELECTROSTATICS OF CONDUCTORS)

સુવાહકો અને અવાહકો વિષે પ્રકરણ-1માં ટૂંકમાં જણાવવામાં આવ્યું હતું. સુવાહકો ગતિશીલ વિદ્યુતભાર વાહકો ધરાવે છે. ધાત્વિક સુવાહકોમાં આ વિદ્યુતભાર વાહકો તરીકે ઇલેક્ટ્રૉન છે. ધાતુમાં, બહારના (વેલન્સ) ઇલેક્ટ્રૉન તેમના પિતૃ-પરમાણુઓથી છૂટા પડી જાય છે અને ગતિ કરવા માટે મુક્ત હોય છે. આ ઇલેક્ટ્રૉન ધાતુની અંદર મુક્ત હોય છે પણ ધાતુને છોડવા માટે મુક્ત નથી. આ મુક્ત ઇલેક્ટ્રૉન એક 'વાયુ' જેવું રચે છે, તેઓ એકબીજા સાથે અને આયનો સાથે અથડાય છે અને જુદી જુદી દિશાઓમાં અવ્યવસ્થિત (Random) ગતિ કરે છે. બાહ્ય વિદ્યુતક્ષેત્રમાં તેઓ ક્ષેત્રની દિશાની વિરૂદ્ધમાં ઘસડાય (Drift) છે. ન્યુક્લિયસ અને બંધિત ઇલેક્ટ્રૉનના બનેલા ધન આયનો તેમનાં નિશ્ચિત સ્થાનો પર જ જકડાયેલાં રહે છે. વિદ્યુત દ્રાવણિય (Electrolytic) સુવાહકોમાં, વિદ્યુતભાર વાહકો તરીકે ધન

અને ઋણ આયનો બંને છે, પરંતુ આ કિસ્સામાં પરિસ્થિતિ એવી છે કે વિદ્યુતવાહકોની ગતિ પર, બાહ્ય વિદ્યુતક્ષેત્ર અને કહેવાતા રાસાયણિક બળો (જુઓ પ્રકરણ-3) બંનેની અસર થાય છે. આપણે આપણી ચર્ચા ધાત્વિક ધન સુવાહકો પુરતી મર્યાદિત રાખીશું. સુવાહકોના સ્થિતવિદ્યુતશાસ્ત્રને લગતાં અગત્યનાં પરિણામો નોંધીએ :

1. સુવાહકની અંદરના ભાગમાં સ્થિત વિદ્યુતક્ષેત્ર શૂન્ય હોય છે

એક તટસ્થ અથવા વિદ્યુતભારિત સુવાહકનો વિચાર કરો. બાહ્ય સ્થિતવિદ્યુત ક્ષેત્ર પણ તેના પર હોઈ શકે છે. સ્થાયી સ્થિતિમાં, જ્યારે સુવાહકની અંદરના ભાગમાં કે તેની સપાટી પર કોઈ વિદ્યુતપ્રવાહ ન હોય ત્યારે સુવાહકની અંદરના ભાગમાં બધે વિદ્યુતક્ષેત્ર શૂન્ય હોય છે. આ હકીકતને સુવાહકને વ્યાખ્યાયિત કરતા ગુણધર્મ તરીકે લઈ શકાય છે. સુવાહકને મુક્ત ઈલેક્ટ્રોન હોય છે. જ્યાં સુધી વિદ્યુતક્ષેત્ર શૂન્ય ન હોય, ત્યાં સુધી આ મુક્ત વિદ્યુતભાર વાહક કણો બળ અનુભવે છે અને ઘસડાય છે. સ્થાયી સ્થિતિમાં મુક્ત વિદ્યુતભારો સુવાહકમાં એવી રીતે વિતરિત થાય (વહેંચાય) છે કે સુવાહકની અંદર બધે વિદ્યુતક્ષેત્ર શૂન્ય હોય છે. સુવાહકની અંદર સ્થિત વિદ્યુતક્ષેત્ર શૂન્ય હોય છે.

2. વિદ્યુતભારિત સુવાહકની સપાટી પર સ્થિત વિદ્યુતક્ષેત્ર સપાટીને દરેક બિંદુએ લંબ હોય છે

જો **E** સપાટીને લંબ ન હોત તો તેનો કંઈક અ-શૂન્ય ઘટક સપાટીને સમાંતર હોત. આ સંજોગોમાં સપાટી પરના મુક્ત વિદ્યુતભારો બળ અનુભવત અને તેઓ ગતિ કરવા લાગત. આથી, સ્થાયી સ્થિતિમાં **E**નો કોઈ સ્પર્શીય ઘટક ન હોવો જોઈએ. આમ, વિદ્યુતભારિત સુવાહકની સપાટી પર સ્થિતવિદ્યુતક્ષેત્ર સપાટીને દરેક બિંદુએ લંબ હોવું જ જોઈએ. (કોઈ વિદ્યુતભારની પૃષ્ઠ ઘનતા ન હોય તેવા સુવાહક માટે સપાટી પર પણ ક્ષેત્ર શૂન્ય હોય છે.) જુઓ પરિણામ-5.

3. સ્થાયી સ્થિતિમાં સુવાહકના અંદરના ભાગમાં વધારાનો વિદ્યુતભાર હોઈ શકે નહિ

કોઈ તટસ્થ સુવાહકના દરેક નાના સપાટી ખંડ કે કદ ખંડમાં સમાન જથ્થાના ધન અને ઋણ વિદ્યુતભારો હોય છે. જ્યારે સુવાહકને વિદ્યુતભારિત કરવામાં આવે છે ત્યારે સ્થાયી સ્થિતિમાં વધારાનો વિદ્યુતભાર માત્ર સપાટી પર જ રહી શકે છે. ગૉસના નિયમ પરથી આ બાબત ફલિત થાય છે. સુવાહકની અંદરના ભાગમાં કોઈ યાદચ્છિક કદ ખંડ vનો વિચાર કરો. કદખંડ vને ઘેરતી બંધ સપાટી S પર સ્થિતવિદ્યુતક્ષેત્ર શૂન્ય છે. આમ, Sમાંથી પસાર થતું કુલ વિદ્યુતફ્લક્સ શૂન્ય છે. આથી, ગૉસના નિયમ મુજબ S વડે કોઈ ચોખ્ખો (net પરિણામી) વિદ્યુતભાર ઘેરાતો નથી. પણ આવી સપાટી S તમે ગમે તેટલી નાની બનાવી શકો છો એટલે કે કદ v અલોપ થઈ શકે તેટલું નાનું (Vanishingly Small) લઈ શકાય. આનો અર્થ એ કે સુવાહકની અંદરના ભાગમાં કોઈપણ બિંદુએ કોઈ ચોખ્ખો (Net) વિદ્યુતભાર હોતો નથી અને વધારાનો કોઈપણ વિદ્યુતભાર સપાટી પર જ રહેવો જોઈએ.

4. સુવાહકના સમગ્ર કદમાં સ્થિત વિદ્યુતસ્થિતિમાન અચળ હોય છે અને અંદરના ભાગમાં તેનું મૂલ્ય સપાટી પરના મૂલ્ય જેટલું જ હોય છે

આ બાબત ઉપરના પરિણામો 1 અને 2 પરથી સમજી શકાય છે. સુવાહકની અંદરના ભાગમાં $\mathbf{E} = 0$ હોવાથી અને સપાટી પર **E**નો કોઈ સ્પર્શીય ઘટક ન હોવાથી નાના પરીક્ષણ વિદ્યુતભારને સુવાહકની અંદરના ભાગમાં અને સપાટી પર ગતિ કરાવવા માટે કોઈ કાર્ય કરવું પડતું નથી એટલે કે સુવાહકની અંદરના કે સપાટી પરના કોઈપણ બે બિંદુઓ વચ્ચે સ્થિતિમાનનો તફાવત નથી તેથી આ પરિણામ મળે છે. જો સુવાહક વિદ્યુતભારિત હોય તો વિદ્યુતક્ષેત્ર સપાટીને લંબરૂપે હોય છે, એનો અર્થ એ કે સપાટી પરનું સ્થિતિમાન અને સપાટીની તરત બહારના બિંદુનું સ્થિતિમાન જુદાં છે.

યાદચ્છિક પરિમાણ, આકાર અને વિદ્યુતભાર-વિતરણ ધરાવતા સુવાહકોના તંત્રમાં દરેક સુવાહકને લાક્ષણિક અચળ મૂલ્યનું સ્થિતિમાન હોય છે, પરંતુ આ અચળાંક જુદા જુદા સુવાહક માટે જુદો હોઈ શકે છે.

5. વિદ્યુતભારિત સુવાહકની સપાટી પર વિદ્યુતક્ષેત્ર :

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{\mathbf{n}} \qquad (2.35)$$

છે, જ્યાં σ વિદ્યુતભારની પૃષ્ઠ ઘનતા છે અને $\hat{\mathbf{n}}$ સપાટીને લંબ બહારની તરફ એકમ સદિશ છે.

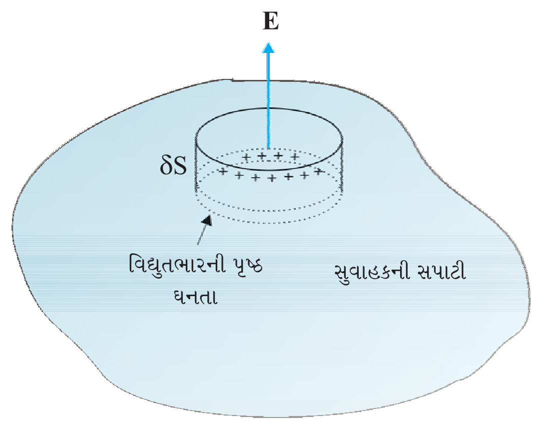
આ પરિણામ સાધિત કરવા માટે સપાટી પરના P બિંદુની આસપાસ એક પીલ-બૉક્સ (Pill-box, એક ટૂંકો નળાકાર) ગૉસિયન સપાટી તરીકે, આકૃતિ 2.17 મુજબ પસંદ કરો. પીલ-બૉક્સ સુવાહકની સપાટીની અંશતઃ અંદર અને અંશતઃ બહાર છે. તેને આડછેદનું અલ્પ ક્ષેત્રફળ δS અને અવગણ્ય ઉંચાઈ છે.

સપાટીની અંદરના તરતના ભાગમાં સ્થિતવિદ્યુતક્ષેત્ર શૂન્ય છે અને બહારના તરતના ભાગમાં ક્ષેત્ર સપાટીને લંબ અને E મૂલ્યનું છે. આમ, પીલ-બૉક્સમાંથી કુલ ફ્લક્સ માટેનો ફાળો પીલ-બૉક્સના બહારના (વર્તુળાકાર) આડછેદમાંથી જ આવે છે. આનું મૂલ્ય $\pm E\delta S$ ($\sigma > 0$ માટે ધન, $\sigma < 0$ માટે ઋણ) બરાબર છે, કારણ કે, અલ્પ ક્ષેત્રફળ δS પર $\mathbf{E}$ને અચળ ગણી શકીએ અને $\mathbf{E}$ અને δS સમાંતર કે પ્રતિસમાંતર છે. પીલ બૉક્સ વડે ઘેરાયેલો વિદ્યુતભાર $\sigma\delta S$ છે. ગૉસના નિયમ પરથી,

$$E\delta S = \frac{|\sigma|\delta S}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{|\sigma|}{\varepsilon_0} \qquad (2.36)$$

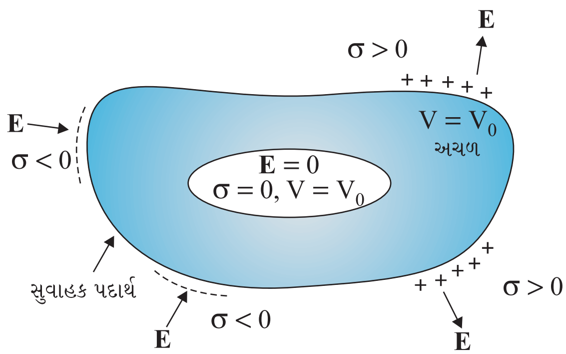
વિદ્યુતક્ષેત્ર સપાટીને લંબ છે તે હકીકતનો સમાવેશ કરતાં આપણને સમીકરણ (2.35) મુજબનો સદિશ સંબંધ મળે છે, વળી, તે σના બંને ચિહ્‌ન માટે સાચો છે. $\sigma > 0$ માટે વિદ્યુતક્ષેત્ર સપાટીને લંબ બહાર તરફ છે. $\sigma < 0$ માટે વિદ્યુતક્ષેત્ર સપાટીને લંબ અંદર તરફ છે.



આકૃતિ 2.17 વિદ્યુતભારિત સુવાહકની સપાટી પરના વિદ્યુતક્ષેત્ર માટે સમીકરણ (2.35) સાધિત કરવા માટે પસંદ કરેલ ગૉસિયન સપાટી (પીલ-બૉક્સ)

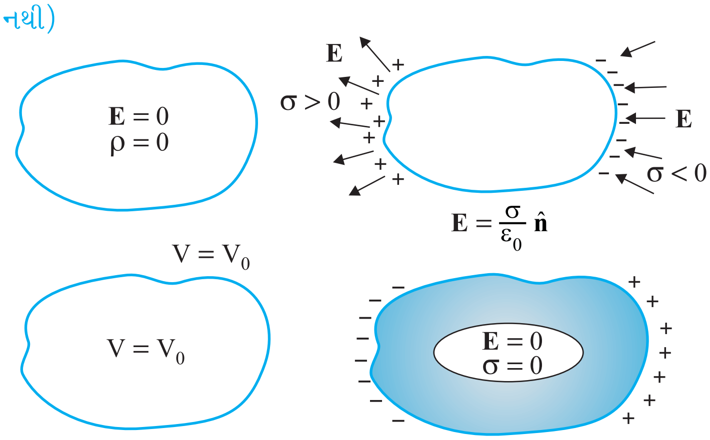
6. સ્થિતવિદ્યુત શીલ્ડીંગ

એક બખોલ (Cavity) ધરાવતા સુવાહકનો વિચાર કરો. બખોલની અંદર કોઈ વિદ્યુતભાર નથી. એક નોંધપાત્ર પરિણામ એ મળે છે કે બખોલનું પરિમાણ કે આકાર ગમે તે હોય, સુવાહક પર ગમે તે વિદ્યુતભાર હોય અને સુવાહકને ગમે તે બાહ્યક્ષેત્રમાં મૂકવામાં આવે તો પણ બખોલમાં વિદ્યુતક્ષેત્ર શૂન્ય હોય છે. આ પરિણામનો એક સાદો કિસ્સો આપણે સાબિત કરેલો જ છે : વિદ્યુતભારિત કવચની અંદરના ભાગમાં વિદ્યુતક્ષેત્ર શૂન્ય હોય છે (જુઓ પ્રકરણ-1). પરંતુ સુવાહકની અંદર (વિદ્યુતભાર-વિહિન) બખોલની અંદરના ભાગમાં વિદ્યુતક્ષેત્ર શૂન્ય હોવું એ, ઉપર જણાવ્યું તેમ બહુ વ્યાપક પરિણામ છે. આની સાથે સંબંધ ધરાવતું પરિણામ એ છે કે, સુવાહકને વિદ્યુતભારિત કરેલો હોય અથવા બાહ્ય ક્ષેત્ર વડે તટસ્થ સુવાહક પર વિદ્યુતભારોને પ્રેરિત કરવામાં આવે તો પણ બધા વિદ્યુતભારો, બખોલ ધરાવતા સુવાહકની બાહ્ય સપાટી પર જ રહેતા હોય છે.



આકૃતિ 2.18 કોઈ પણ સુવાહકની બખોલની અંદરના ભાગમાં વિદ્યુતક્ષેત્ર શૂન્ય છે. બખોલ ધરાવતા સુવાહકની બાહ્ય સપાટી પર જ બધા વિદ્યુતભાર રહે છે. (બખોલમાં કોઈ વિદ્યુતભારો મૂકેલા નથી)

આકૃતિ 2.18માં નોંધેલાં પરિણામોની સાબિતિઓ અહીં છોડી દઈએ છીએ, પરંતુ આપણે તેનો અગત્યનો સૂચિતાર્થ નોંધીએ. સુવાહકની બહાર ગમે તે વિદ્યુતભાર કે ક્ષેત્ર હોય, પણ સુવાહકની અંદરની બખોલ બહારની વિદ્યુત અસરોથી હંમેશાં શીલ્ડેડ (Shielded-સુરક્ષિત) રહે છે : બખોલની અંદર વિદ્યુતક્ષેત્ર હંમેશાં શૂન્ય હોય છે. આને સ્થિતવિદ્યુત શીલ્ડીંગ કહે છે. આ અસરનો ઉપયોગ સંવેદી ઉપકરણોને બહારની વિદ્યુત અસરોથી બચાવવા માટે કરી શકાય છે. આકૃતિ 2.19 સુવાહકના અગત્યના સ્થિતવિદ્યુત ગુણધર્મોનો સારાંશ આપે છે.



આકૃતિ 2.19 સુવાહકના કેટલાક અગત્યના સ્થિત વિદ્યુત ગુણધર્મો

ઉદાહરણ 2.7

(a) કોઈ માણસના સૂકા વાળમાંથી પસાર કરેલો કાંસકો કાગળના નાના ટુકડાઓને આકર્ષે છે. શા માટે ? જો વાળ ભીના હોય અથવા તે વરસાદી દિવસ હોય તો શું થાય ? (યાદ રાખો કે કાગળ વિદ્યુતનું વહન કરતો નથી.)

(b) સામાન્ય રબર અવાહક છે. પરંતુ વિમાનના વિશિષ્ટ રબરના ટાયરો સ્હેજ સુવાહક બનાવવામાં આવે છે. આવું શા માટે જરૂરી છે ?

(c) દહનશીલ દ્રવ્યોને લઈ જતા વાહનોમાં જમીનને અડકતા હોય તેવા ધાતુના દોરડા રાખેલા હોય છે. શા માટે ?

(d) ખુલ્લી હાઈપાવર લાઈન પર પક્ષી આરામથી બેસે છે તો પણ તેને કંઈ થતું નથી. જમીન પર ઉભેલો માણસ તે જ લાઈનને સ્પર્શે તો તેને પ્રાણઘાતક આંચકો લાગે છે. શા માટે ?

ઉકેલ

(a) આનું કારણ એ છે કે, કાંસકો ઘર્ષણથી વિદ્યુતભારિત થાય છે. આ વિદ્યુતભારિત કાંસકા વડે કાગળની અંદરના અણુઓ ધ્રુવીભૂત થાય છે, તેના પરિણામે ચોખ્ખું (Net) આકર્ષણ બળ ઉદ્‌ભવે છે. જો વાળ ભીના હોય અથવા તે વરસાદી દિવસ હોય તો વાળ અને કાંસકા વચ્ચે ઘર્ષણ ઘટી જાય છે. કાંસકો વિદ્યુતભારિત થતો નથી અને તેથી તે કાગળના નાના ટુકડાઓને આકર્ષતો નથી.

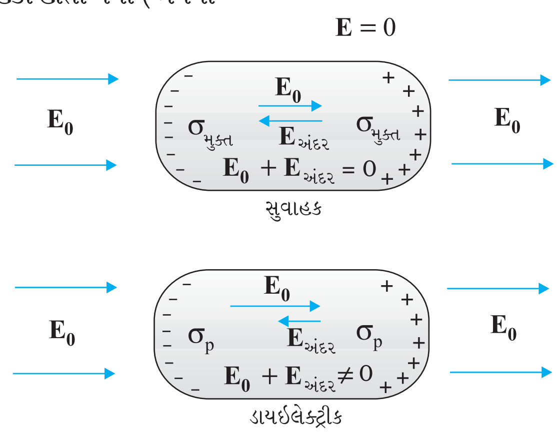
ઉદાહરણ 2.7

(b) (ઘર્ષણથી ઉદ્ભવતા) વિદ્યુતભારને જમીનમાં વહન કરાવી દેવા માટે આમ કરાય છે. જો ખૂબ સ્થિત વિદ્યુતભાર એકઠો થાય તો તણખા (Spark) થઈ શકે અને પરિણામે આગ લાગી શકે.
(c) કારણ (b)ના જેવું જ છે.
(d) જ્યારે વિદ્યુતસ્થિતિમાનનો તફાવત હોય ત્યારે જ પ્રવાહ પસાર થાય છે.

ઉદાહરણ 2.7

2.10 ડાયઈલેક્ટ્રીક અને ધ્રુવીભવન (DIELECTRIC AND POLARISATION)

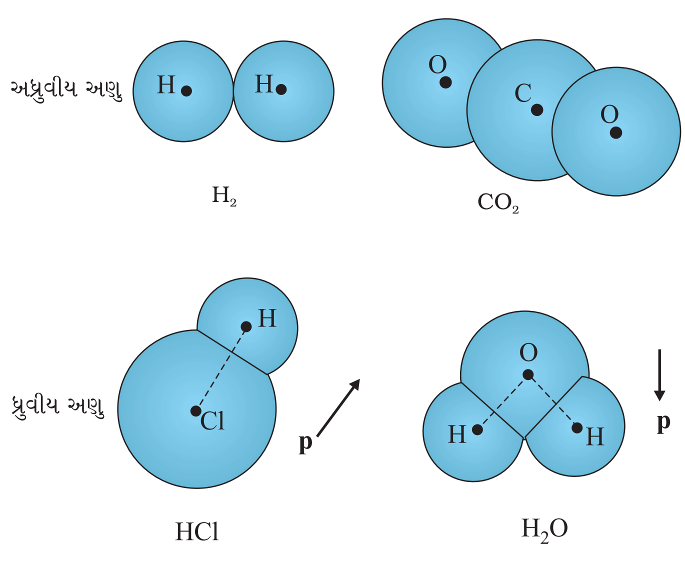
ડાયઈલેક્ટ્રીક અવાહક પદાર્થો છે. સુવાહકથી વિરૂદ્ધ તેમનામાં વિદ્યુતભાર વાહકો હોતા નથી (અથવા અવગણ્ય સંખ્યાના હોય છે). પરિચ્છેદ 2.9 પરથી, સુવાહકને બાહ્ય વિદ્યુતક્ષેત્રમાં મૂકતાં શું થાય છે તે યાદ કરો. મુક્ત વિદ્યુતવાહક કણો ગતિ કરે છે અને સુવાહકમાં વિદ્યુતભાર વિતરણ સ્વયં એવી રીતે ગોઠવાય છે કે પ્રેરિત વિદ્યુતભારોને લીધે ઉદ્ભવતું વિદ્યુતક્ષેત્ર, બાહ્ય વિદ્યુતક્ષેત્રનો સુવાહકની અંદર વિરોધ કરે છે. સ્થાયી સ્થિતિમાં બંને વિદ્યુતક્ષેત્રો એકબીજાને નાબૂદ કરે અને સુવાહકમાં ચોખ્ખું (Net) વિદ્યુતક્ષેત્ર શૂન્ય બને ત્યાં સુધી આવું થાય છે. ડાયઈલેક્ટ્રીકમાં વિદ્યુતભારોની મુક્ત ગતિ શક્ય નથી. બાહ્યક્ષેત્ર ડાયઈલેક્ટ્રીકના અણુઓને ખેંચીને કે પુનઃગોઠવણીથી ડાયપોલ ચાકમાત્રા પ્રેરિત કરે છે. બધી આણ્વિક ડાયપોલ ચાકમાત્રાની સામૂહિક અસર ડાયઈલેક્ટ્રીકની સપાટી પર ચોખ્ખા વિદ્યુતભાર રૂપે જણાય છે. આ વિદ્યુતભારો બાહ્ય ક્ષેત્રનો વિરોધ કરતું ક્ષેત્ર ઉત્પન્ન કરે છે. જો કે સુવાહકથી વિપરિત આ કિસ્સામાં આ રીતે પ્રેરિત થયેલું વિરોધક ક્ષેત્ર બાહ્ય વિદ્યુતક્ષેત્રને પૂરેપૂરું નાબૂદ કરતું નથી. તે માત્ર તેને ઘટાડે છે. આ અસરનું પ્રમાણ ડાયઈલેક્ટ્રીકના પ્રકાર પર આધારિત છે. આ અસરને સમજવા માટે આપણે આણ્વિક સ્તરે ડાયઈલેક્ટ્રીકનું વિદ્યુતભાર વિતરણ જોવું જોઈએ.



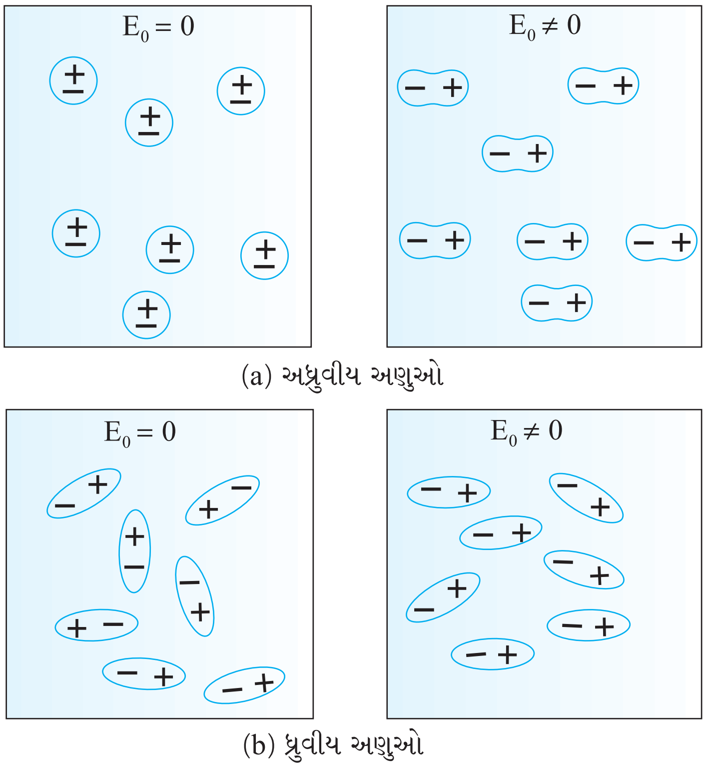
આકૃતિ 2.20 બાહ્ય વિદ્યુતક્ષેત્રમાં સુવાહક અને ડાયઈલેક્ટ્રીકની વર્તણૂંકમાં તફાવત

દ્રવ્યના અણુઓ ધ્રુવીય કે અધ્રુવીય હોઈ શકે. અધ્રુવીય અણુમાં, ધન વિદ્યુતભારનું કેન્દ્ર અને ઋણ વિદ્યુતભારનું કેન્દ્ર એકબીજા પર સંપાત થાય છે. આથી, અણુને કોઈ કાયમી (કે આંતરિક) ડાયપોલ ચાકમાત્રા હોતી નથી. અધ્રુવીય અણુઓનાં ઉદાહરણ ઑક્સિજન (O_2) અને હાઇડ્રોજન (H_2) અણુઓ છે, જેઓને તેમની સંમિતિને લીધે કોઈ ડાયપોલ ચાકમાત્રા હોતી નથી. બીજી બાજુ, ધ્રુવીય અણુ એવો હોય છે કે જેમાં ધન અને ઋણ વિદ્યુતભારોનાં કેન્દ્રો (બાહ્ય વિદ્યુતક્ષેત્ર ન હોય ત્યારે પણ) જુદાં જુદાં હોય છે. આવા અણુઓને કાયમી ડાયપોલ ચાકમાત્રા હોય છે. HCl જેવો આયોનિક અણુ અથવા પાણી (H_2O)નો અણુ એ ધ્રુવીય અણુઓનાં ઉદાહરણ છે.

બાહ્ય વિદ્યુતક્ષેત્રમાં, અધ્રુવીય અણુના ધન અને ઋણ વિદ્યુતભારો પરસ્પર વિરૂદ્ધ દિશાઓમાં સ્થાનાંતર પામે છે. જ્યારે અણુઓના ઘટક વિદ્યુતભારો પરનું બાહ્યબળ (અણુની અંદરના આંતરિક ક્ષેત્રને લીધે લાગતા) પુનઃસ્થાપક બળ વડે સમતુલિત થાય છે ત્યારે સ્થાનાંતર અટકી જાય છે. આમ, અધ્રુવીય અણુમાં પ્રેરિત ડાયપોલ ચાકમાત્રા ઉદ્ભવે છે. બાહ્યવિદ્યુતક્ષેત્ર વડે ડાયઈલેક્ટ્રીક ધ્રૂવીભૂત થયો એમ કહેવાય છે.



આકૃતિ 2.21 ધ્રુવીય અને અધ્રુવીય અણુઓના કેટલાંક ઉદાહરણો



આકૃતિ 2.22 બાહ્ય વિદ્યુતક્ષેત્રમાં મૂકેલ ડાયઇલેક્ટ્રીકમાં ચોખ્ખી ડાયપોલ ચાકમાત્રા ઉદ્ભવે છે. (a) અધ્રુવીય અણુઓ (b) ધ્રુવીય અણુઓ

આપણે માત્ર એવી સરળ પરિસ્થિતિનો વિચાર કરીએ છીએ કે જ્યારે પ્રેરિત ડાયપોલ ચાકમાત્રા ક્ષેત્રની દિશામાં છે અને તે ક્ષેત્રની તીવ્રતાના સમપ્રમાણમાં છે. (જે દ્રવ્યો માટે આ પૂર્વધારણા સાચી રહે તેમને **રેખીય સમદિગ્ધર્મી ડાયઇલેક્ટ્રીક** કહે છે.) બાહ્ય ક્ષેત્રની હાજરીમાં જુદા જુદા અણુઓની ડાયપોલ ચાકમાત્રાઓનો સરવાળો થઈને ડાયઇલેક્ટ્રીકની ચોખ્ખી (Net) ડાયપોલ ચાકમાત્રા મળે છે.

ધ્રુવીય અણુઓ ધરાવતા ડાયઇલેક્ટ્રીકમાં પણ વિદ્યુતક્ષેત્રમાં ડાયપોલ ચાકમાત્રા ઉત્પન્ન થાય છે, પણ તે બીજા કારણથી. બાહ્ય વિદ્યુતક્ષેત્રની ગેરહાજરીમાં કાયમી ડાયપોલ્સ ઉષ્મીય ગતિને લીધે અસ્તવ્યસ્ત ગોઠવાયેલી હોય છે, આથી કુલ ડાયપોલ ચાકમાત્રા શૂન્ય હોય છે. જ્યારે બાહ્ય વિદ્યુતક્ષેત્ર લગાડવામાં આવે છે ત્યારે વ્યક્તિગત ડાયપોલ ચાકમાત્રાઓ ક્ષેત્રને સમાંતર બનવાનો પ્રયત્ન કરે છે. આથી, બધા અણુઓ માટે સરવાળો કરતાં, વિદ્યુતક્ષેત્રની દિશામાં ચોખ્ખી (Net) ડાયપોલ ચાકમાત્રા મળે છે, એટલે કે ડાયઇલેક્ટ્રીકનું ધ્રુવીભવન થાય છે. ધ્રુવીભવનનું પ્રમાણ નીચેના બે પરસ્પર વિરોધી પરિબળોની સાપેક્ષ પ્રબળતા પર આધારિત છે : બાહ્યક્ષેત્રમાં ડાયપોલ સ્થિતિઊર્જા કે જે ડાયપોલ્સને ક્ષેત્રને સમાંતર ગોઠવવાનો પ્રયત્ન કરે છે તે અને ઉષ્મીય ઊર્જા જે આવી ગોઠવણને છિન્ન ભિન્ન કરવાનો પ્રયત્ન કરે છે તે. વધારામાં અધ્રુવીય અણુઓની જેમ 'પ્રેરિત ડાયપોલ ચાકમાત્રા' અસર પણ હોય છે પરંતુ સામાન્ય રીતે ધ્રુવીય અણુઓ માટે સમાંતરે ગોઠવાઈ જવાની અસર વધારે મહત્ત્વની છે.

આમ, ધ્રુવીય કે અધ્રુવીય દરેક કિસ્સામાં બાહ્ય ક્ષેત્રની હાજરીમાં ડાયઇલેક્ટ્રીકમાં પરિણામી (Net) ડાયપોલ ચાકમાત્રા ઉત્પન્ન થાય છે. એકમ કદ દીઠ ડાયપોલ ચાકમાત્રાને પોલરાઇઝેશન (ધ્રુવીભવન) કહે છે અને તેને **P** વડે દર્શાવાય છે. રેખીય સમદિગ્ધર્મી (સમદૈશિક) ડાયઇલેક્ટ્રીક માટે

$$\mathbf{P} = \chi_e \mathbf{E} \tag{2.37}$$

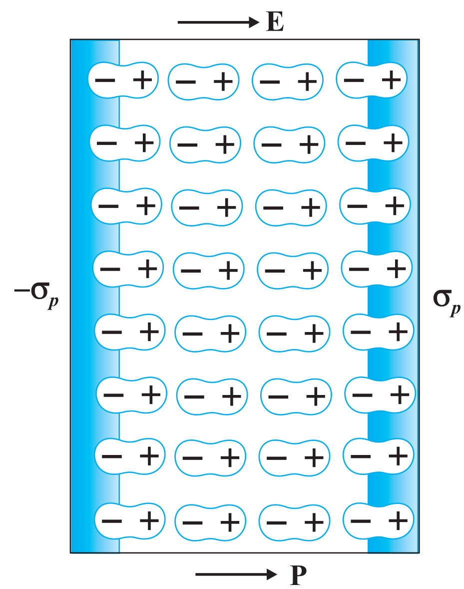
જ્યાં, χ_e ડાયઇલેક્ટ્રીકનો લાક્ષણિક અચળાંક છે અને તેને ડાયઇલેક્ટ્રીક માધ્યમની વિદ્યુત સસેપ્ટીબીલીટી કહે છે.

χ_eના દ્રવ્યના આણ્વિક ગુણધર્મો સાથેના સંબંધો મેળવી શકાય છે પરંતુ આપણે અહીં તેમ કરીશું નહિ.

પ્રશ્ન આ છે : ધ્રુવીભૂત થયેલ ડાયઇલેક્ટ્રીક તેના અંદરના ભાગમાં મૂળ વિદ્યુતક્ષેત્રમાં કેવો ફેરફાર કરે છે ? સરળતા ખાતર, લંબઘન ડાયઇલેક્ટ્રીક ચોસલાને બાહ્ય સમાન વિદ્યુતક્ષેત્ર $\mathbf{E}_0$માં તેની બે બાજુઓ $\mathbf{E}_0$ને સમાંતર રહે તેમ મૂકેલો વિચારીએ. ક્ષેત્ર ડાયઇલેક્ટ્રીકમાં સમાન પોલરાઇઝેશન **P** ઉપજાવે છે. આમ, ચોસલાનો દરેક કદ ખંડ $\Delta\upsilon$, $\mathbf{P}\Delta\upsilon$ જેટલી ડાયપોલ ચાકમાત્રા ક્ષેત્રની દિશામાં ધરાવે છે. કદ ખંડ $\Delta\upsilon$ સ્થૂળ દૃષ્ટિએ નાનો છે પરંતુ ઘણી મોટી સંખ્યાના આણ્વિક ડાયપોલ ધરાવે છે. ડાયઇલેક્ટ્રીકની અંદર ક્યાંય પણ કદ ખંડ $\Delta\upsilon$ને કોઈ ચોખ્ખો (Net) વિદ્યુતભાર નથી.

(જો કે તેને ચોખ્ખી ડાયપોલ ચાકમાત્રા છે). આનું કારણ એ છે કે એક ડાયપોલનો ધન વિદ્યુતભાર બાજુની ડાયપોલના ઋણ વિદ્યુતભારની પાસે બેઠેલો છે. આમ છતાં વિદ્યુતક્ષેત્રને લંબ એવી ડાયઇલેક્ટ્રીકની સપાટીઓ પર ચોખ્ખી વિદ્યુતભાર ઘનતા હોય છે. આકૃતિ 2.23માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે જમણી સપાટી પર ડાયપોલના ધન છેડાઓ અને ડાબી સપાટી પર ડાયપોલના ઋણ છેડાઓ તટસ્થીકરણ પામેલા નથી. આ અસમતુલિત વિદ્યુતભારો વિદ્યુતક્ષેત્રને લીધે પ્રેરિત થયેલા વિદ્યુતભારો છે.

આમ, ધ્રુવીભૂત થયેલ ડાયઇલેક્ટ્રીક, પ્રેરિત વિદ્યુતભારની પૃષ્ઠ ઘનતા σ_p અને $-\sigma_p$ ધરાવતી બે વિદ્યુતભારિત સપાટીઓને સમતુલ્ય છે. સ્પષ્ટપણે, આ પૃષ્ઠ વિદ્યુતભારો વડે ઉદ્‌ભવતું ક્ષેત્ર, બાહ્ય ક્ષેત્રનો વિરોધ કરે છે. ડાયઇલેક્ટ્રીકની અંદરના ભાગમાં વિદ્યુતક્ષેત્ર, ત્યાં ડાયઇલેક્ટ્રીક ન હતો ત્યારે જે ક્ષેત્ર હતું તેના કરતાં ઘટી જાય છે. આપણે એ નોંધવું જોઈએ કે વિદ્યુતભારની પૃષ્ઠ ઘનતા $\pm\sigma_p$, ડાયઇલેક્ટ્રીકમાંના બંધિત વિદ્યુતભારો (મુક્ત વિદ્યુતભારો નહિ)ને લીધે ઉત્પન્ન થાય છે.



આકૃતિ 2.23 સમાન રીતે ધ્રુવીભૂત થયેલ ડાયઇલેક્ટ્રીકને પ્રેરિત વિદ્યુતભાર પૃષ્ઠઘનતા છે પણ વિદ્યુતભાર કદ ઘનતા નથી

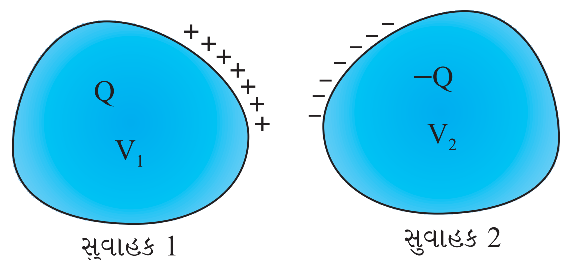
2.11 કેપેસીટરો અને કેપેસીટન્સ (CAPACITORS AND CAPACITANCE)

કેપેસીટર (સંધારક) એ એકબીજાથી અલગ કરેલા બે સુવાહકોથી બનતી રચના છે (આકૃતિ 2.24). સુવાહકો પર ધારોકે વિદ્યુતભારો Q_1 અને Q_2 છે અને તેમનાં સ્થિતિમાનો V_1 અને V_2 છે. સામાન્યતઃ વ્યવહારમાં બે સુવાહકો પર વિદ્યુતભારો Q અને –Q હોય છે અને તેમની વચ્ચેનો સ્થિતિમાનનો તફાવત $V = V_1 - V_2$ છે. આપણે માત્ર આવી વિદ્યુતભાર સંરચના ધરાવતા કેપેસીટરનો વિચાર કરીશું. (એક સુવાહકને પણ બીજો સુવાહક અનંત અંતરે ધારી લઈને કેપેસીટર તરીકે વાપરી શકાય.) સુવાહકોને બૅટરીના બે ટર્મિનલ સાથે જોડીને આ રીતે વિદ્યુતભારિત કરી શકાય છે. Qને કેપેસીટરનો વિદ્યુતભાર કહે છે, જો કે તે હકીકતમાં, એક જ સુવાહક પરનો વિદ્યુતભાર છે. વળી, કેપેસીટરનો કુલ વિદ્યુતભાર તો શૂન્ય છે.

સુવાહકોની વચ્ચેના વિસ્તારમાં વિદ્યુતક્ષેત્ર, વિદ્યુતભાર Qને સમપ્રમાણમાં છે. એટલે કે કેપેસીટર પરનો વિદ્યુતભાર બે ગણો કરવામાં આવે તો, દરેક બિંદુએ વિદ્યુતક્ષેત્ર પણ બે ગણું થશે (કુલંબના નિયમમાં વિદ્યુતભાર અને ક્ષેત્ર વચ્ચેની સપ્રમાણતા અને સંપાતપણાના સિદ્ધાંત પરથી આ બાબત સમજાય છે). હવે, સ્થિતિમાનનો તફાવત V, નાના પરીક્ષણ વિદ્યુતભારને સુવાહક 2 થી 1 પર લઈ જતાં એકમ ધન વિદ્યુતભાર દીઠ ક્ષેત્ર વિરૂદ્ધ કરેલું કાર્ય છે. પરિણામે V પણ Qને સમપ્રમાણમાં છે અને Q/V ગુણોત્તર અચળ છે :

$$C = \frac{Q}{V} \tag{2.38}$$

અચળાંક Cને કેપેસીટરનું કેપેસીટન્સ (સંધારકની ક્ષમતા) કહે છે. ઉપર જણાવ્યું તેમ C, Q અને V બંનેથી સ્વતંત્ર છે. કેપેસીટન્સ C બે સુવાહકોની માત્ર ભૌમિતિક સંરચના (આકાર, માપ, અંતર) પર આધારિત છે [આપણે આગળ જોઈશું કે તે બે સુવાહકોને અલગ કરતાં અવાહક (ડાયઇલેક્ટ્રીક) પર પણ આધાર રાખે છે]. કેપેસીટન્સનો SI એકમ 1 farad (= 1 coulomb volt^{-1}) અથવા 1 F = 1 C V^{-1} છે. નિશ્ચિત કેપેસીટન્સ ધરાવતા કેપેસીટરને પ્રતિકાત્મકરૂપે ⊣⊢ તરીકે દર્શાવાય છે અને ચલિત કેપેસીટન્સ ધરાવતા કેપેસીટરને ⊣⊬ તરીકે દર્શાવાય છે.



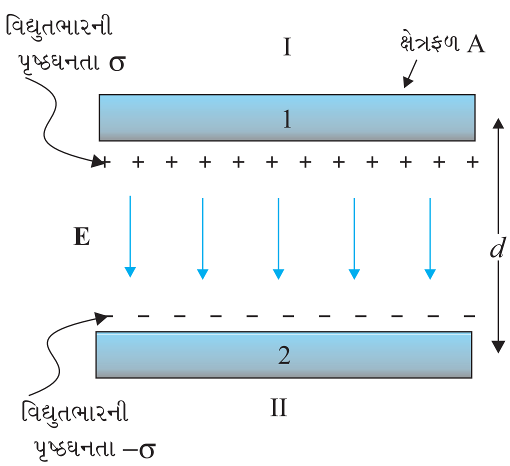
આકૃતિ 2.24 અવાહક વડે અલગ કરેલ બે સુવાહકોનું તંત્ર કેપેસીટર રચે છે

સમીકરણ (2.38) દર્શાવે છે કે, Cનું મૂલ્ય મોટું હોય તો, આપેલા Q માટે V નાનું છે. આનો અર્થ એ કે મોટું કેપેસીટન્સ ધરાવતું કેપેસીટર, પ્રમાણમાં નાના V માટે મોટા જથ્થાનો વિદ્યુતભાર ધારણ કરી શકે છે. આનું વ્યાવહારિક મહત્વ છે. વિદ્યુતસ્થિતિમાનનો તફાવત વધારે હોય તો સુવાહકની આસપાસ પ્રબળ વિદ્યુતક્ષેત્ર હોય છે. પ્રબળ વિદ્યુત ક્ષેત્ર આસપાસની હવાનું આયનીકરણ કરી શકે છે અને આ રીતે ઉત્પન્ન થયેલા વિદ્યુતભારોને વિરૂદ્ધ રીતે વિદ્યુતભારિત પ્લેટો તરફ પ્રવેગિત કરી શકે છે અને કેપેસીટરની પ્લેટો પરના વિદ્યુતભારને અંશતઃ પણ તટસ્થ કરી દે છે. બીજા શબ્દોમાં કેપેસીટરનો વિદ્યુતભાર વચ્ચેના માધ્યમની અવાહક તરીકેની ક્ષમતા ઘટવાથી સ્ખલન પામે છે (Leaks).

ડાયઈલેક્ટ્રીક માધ્યમ (તેનો અવાહકતાનો ગુણધર્મ) બ્રેક-ડાઉન થયા સિવાય, જે મહત્તમ વિદ્યુતક્ષેત્રનો સામનો કરી શકે તેને ડાયઈલેક્ટ્રીક સ્ટ્રેન્થ (મજબૂતાઈ) કહે છે. હવા માટે તે લગભગ 3×10^6 V m^{-1} છે. બે સુવાહકો વચ્ચેના 1 cmના ક્રમના અંતર માટે આ ક્ષેત્રને અનુરૂપ સ્થિતિમાનનો તફાવત 3×10^4 V છે. આમ, મોટા જથ્થાના વિદ્યુતભારને સ્ખલન (Leak) થયા વિના ધારણ કરવા માટે કેપેસીટરનું કેપેસીટન્સ પુરતું મોટું હોવું જોઈએ કે જેથી સ્થિતિમાન તફાવત અને તેથી વિદ્યુતક્ષેત્ર બ્રેક-ડાઉન સીમાથી વધી ન જાય. બીજી રીતે કહીએ તો, આપેલા કેપેસીટર પર ખાસ સ્ખલન (Leak) થયા વિના વિદ્યુતભારને સંગ્રહ કરવાની એક સીમા હોય છે. વ્યવહારમાં farad ખૂબ મોટો એકમ છે, બહુ વ્યાપક રીતે વપરાતા એકમો તેના અપૂર્ણાંક ગુણાંકો છે, 1 μF = 10^{-6} F, 1 nF = 10^{-9} F, 1 pF = 10^{-12} F, વગેરે. વિદ્યુતભારના સંગ્રહ કરવાના તેના ઉપયોગ ઉપરાંત, મોટાભાગના મહત્ત્વના *ac* પરિપથોમાં કેપેસીટર એ એક ચાવીરૂપ ઘટક છે, જે પ્રકરણ 7માં સમજાવેલ છે.

2.12 સમાંતર પ્લેટ કેપેસીટર (Parallel Plate Capacitor)

સમાંતર પ્લેટ કેપેસીટર, એકબીજાથી થોડા અંતરે રહેલી બે મોટી સમતલ સમાંતર વાહક પ્લેટોનું બનેલું છે (આકૃતિ 2.25). આપણે શરૂઆતમાં બે પ્લેટ વચ્ચેના માધ્યમ તરીકે શૂન્યાવકાશ લઈશું. બે પ્લેટો વચ્ચે ડાયઈલેક્ટ્રીક માધ્યમની અસર હવે પછીના પરિચ્છેદમાં ચર્ચેલ છે. દરેક પ્લેટનું ક્ષેત્રફળ A અને બે પ્લેટ વચ્ચેનું અંતર d ધારો. બે પ્લેટો પરના વિદ્યુતભારો Q અને −Q છે. d, પ્લેટોના રેખીય પરિમાણ કરતાં ઘણું નાનું ($d^2 << A$) હોવાથી, આપણે વિદ્યુતભારની સમાન પૃષ્ઠઘનતા ધરાવતા અનંત સમતલથી ઉદ્‌ભવતા ક્ષેત્ર અંગેનું પરિણામ (પરિચ્છેદ 1.15) વાપરી શકીએ છીએ. પ્લેટ 1 પર વિદ્યુતભારની પૃષ્ઠ ઘનતા $\sigma = Q/A$ છે અને પ્લેટ 2 પર વિદ્યુતભારની પૃષ્ઠ ઘનતા $-\sigma$ છે. સમીકરણ (1.33) પરથી, વિવિધ વિસ્તારોમાં વિદ્યુતક્ષેત્ર આ મુજબ છે :



આકૃતિ 2.25 સમાંતર પ્લેટ કેપેસીટર

બહારનો વિભાગ-I (પ્લેટ-1ની ઉપરનો વિભાગ)

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = 0 \qquad (2.39)$$

બહારનો વિભાગ-II (પ્લેટ-2ની નીચેનો વિસ્તાર)

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = 0 \qquad (2.40)$$

બે પ્લેટ 1 અને 2ની વચ્ચેના વિસ્તારમાં બે વિદ્યુતભારિત પ્લેટો વડે ઉદ્‌ભવતાં ક્ષેત્રોનો સરવાળો થાય છે. આ રીતે

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0 A} \quad (2.41)$$

મળે છે. આ વિદ્યુતક્ષેત્રની દિશા ધન પ્લેટથી ઋણ પ્લેટ તરફ છે.

આમ, વિદ્યુતક્ષેત્ર બે પ્લેટની વચ્ચેના વિસ્તાર પૂરતું મર્યાદિત અને એ સમગ્ર વિસ્તારમાં એકસમાન છે. સીમિત ક્ષેત્રફળની પ્લેટો માટે આ બાબત પ્લેટોની બહારની સીમાઓ આગળ સત્ય રહેતી નથી. કિનારીઓ પાસે ક્ષેત્ર રેખાઓ બહાર તરફ વળે છે. આ ઘટનાને 'Fringing of the field' કહે છે. આ જ લક્ષણથી σ સમગ્ર પ્લેટ પર એક સમાન નહિ હોય [E અને σ વચ્ચેનો સંબંધ સમીકરણ (2.35) છે]. આમ છતાં $d^2 << A$ માટે, કિનારીઓથી પૂરતા દૂરના વિસ્તારો માટે આ અસરો અવગણી શકાય છે અને તે સ્થાને ક્ષેત્ર સમીકરણ (2.41) પરથી મળે છે. સમાન વિદ્યુતક્ષેત્ર માટે સ્થિતિમાનનો તફાવત, વિદ્યુતક્ષેત્ર ગુણ્યા બે પ્લેટ વચ્ચેના અંતર જેટલો છે. એટલે કે,

$$V = Ed = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{Qd}{A} \quad (2.42)$$

આ પરથી સમાંતર પ્લેટ કેપેસીટરનું કેપેસીટન્સ

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\varepsilon_0 A}{d} \quad (2.43)$$

છે. અપેક્ષા મુજબ આ કેપેસીટન્સ તંત્રની માત્ર ભૂમિતિ પર આધાર રાખે છે. $A = 1\ m^2$ અને $d = 1$ mmના લાક્ષણિક મૂલ્યો માટે આપણને

$$C = \frac{8.85 \times 10^{-12}\ C^2\ N^{-1}\ m^{-2} \times 1\ m^2}{10^{-3}\ m} = 8.85 \times 10^{-9}\ F \quad (2.44)$$

[તમે $1F = 1C\ V^{-1} = 1C\ (NC^{-1}m)^{-1} = 1\ C^2 N^{-1} m^{-1}$ છે તેમ ચકાસી શકો છો.] આ દર્શાવે છે કે, અગાઉ નોંધ્યું તેમ 1F એ વ્યવહારમાં બહુ મોટો એકમ છે. 1Fનું 'મોટાપણું' જોવાનો એક બીજો રસ્તો, C = 1F માટે 1 cm અંતર ધરાવતી પ્લેટોનું ક્ષેત્રફળ ગણવાનો છે :

$$A = \frac{Cd}{\varepsilon_0} = \frac{1F \times 10^{-2} m}{8.85 \times 10^{-12} C^2 N^{-1} m^{-2}} = 10^9 m^2 \quad (2.45)$$

જે પ્લેટની લંબાઈ અને પહોળાઈ દરેક 30 km હોય તેમ સૂચવે છે.

2.13 કેપેસીટન્સ પર ડાયઈલેક્ટ્રીકની અસર (EFFECT OF DIELECTRIC ON CAPACITANCE)

પરિચ્છેદ 2.10માં મેળવેલ, બાહ્ય ક્ષેત્રમાં ડાયઈલેક્ટ્રીકની વર્તણૂંકની સમજણ સાથે, હવે આપણે જ્યારે ડાયઈલેક્ટ્રીક હાજર હોય ત્યારે સમાંતર પ્લેટ કેપેસીટરનું કેપેસીટન્સ કેવી રીતે બદલાય છે તે જોઈએ. અગાઉની જેમ આપણી પાસે એકબીજાથી d અંતરે રહેલી, દરેકનું ક્ષેત્રફળ A હોય તેવી બે મોટી પ્લેટ છે. પ્લેટ પરના વિદ્યુતભાર $\pm Q$ છે, અનુરૂપ વિદ્યુતભાર ઘનતા $\pm\sigma$ ($\sigma = Q/A$ સાથે) છે. જ્યારે બે પ્લેટ વચ્ચે શૂન્યાવકાશ હોય ત્યારે,

$$E_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

અને સ્થિતિમાનનો તફાવત V_0 છે.

PHYSICS

Factors affecting capacitance, capacitors in action interactive Java tutorial
http://micro.magnet.fsu.edu/electromag/java/capacitance/

$V_0 = E_0 d$

આ કિસ્સામાં કેપેસીટન્સ C_0

$$C_0 = \frac{Q}{V_0} = \varepsilon_0 \frac{A}{d} \tag{2.46}$$

છે.

હવે બે પ્લેટ વચ્ચેના વિસ્તારને પૂરેપૂરું ભરી દે તેમ ડાયઇલેક્ટ્રીકને દાખલ કરેલો વિચારો. ક્ષેત્ર વડે ડાયઇલેક્ટ્રીક ધ્રુવીભૂત થાય છે અને પરિચ્છેદ 2.10માં સમજાવ્યા મુજબ, વિદ્યુતભારની પૃષ્ઠ ઘનતા σ_p અને $-\sigma_p$ ધરાવતા બે વિદ્યુતભારિત સમતલો (ક્ષેત્રને લંબરૂપે ડાયઇલેક્ટ્રીકની સપાટીઓ પર) હોય તેને સમતુલ્ય અસર ઉત્પન્ન થાય છે. હવે ડાયઇલેક્ટ્રીકની અંદરનું ક્ષેત્ર, પ્લેટ પર ચોખ્ખી વિદ્યુતભારની પૃષ્ઠઘનતા $\pm(\sigma - \sigma_p)$ હોય તેવા કિસ્સાને અનુરૂપ છે. એટલે કે,

$$E = \frac{\sigma - \sigma_P}{\varepsilon_0} \tag{2.47}$$

છે. આથી, પ્લેટો વચ્ચેનો સ્થિતિમાનનો તફાવત

$$V = Ed = \frac{\sigma - \sigma_P}{\varepsilon_0} d \tag{2.48}$$

રેખીય ડાયઇલેક્ટ્રીક માટે σ_p, E_0ને એટલે કે σને સમપ્રમાણમાં હોય તેવું અપેક્ષિત છે. આમ, $(\sigma - \sigma_p)$, σને સમપ્રમાણમાં છે અને આપણે

$$\sigma - \sigma_P = \frac{\sigma}{K} \tag{2.49}$$

લખી શકીએ છીએ, જ્યાં K એ અચળાંક છે જે ડાયઇલેક્ટ્રીક માટે લાક્ષણિક છે. સ્પષ્ટપણે $K > 1$. આથી આપણે

$$V = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0 K} = \frac{Qd}{A\varepsilon_0 K} \tag{2.50}$$

લખી શકીએ છીએ. આ પરથી પ્લેટો વચ્ચે ડાયઇલેક્ટ્રીક રહેલું હોય ત્યારે કેપેસીટન્સ

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\varepsilon_0 KA}{d} \tag{2.51}$$

ગુણાકાર $\varepsilon_0 K$ને માધ્યમનો પરાવૈદ્યુતાંક (Permittivity) કહે છે અને તેને ε વડે દર્શાવવામાં આવે છે.

$$\varepsilon = \varepsilon_0 K \tag{2.52}$$

શૂન્યાવકાશ માટે $K = 1$ અને $\varepsilon = \varepsilon_0$, ε_0ને શૂન્યાવકાશનો *પરાવૈદ્યુતાંક* કહે છે. પરિમાણરહિત ગુણોત્તર

$$K = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \tag{2.53}$$

ને *દ્રવ્યનો ડાયઇલેક્ટ્રીક અચળાંક* કહે છે. સમીકરણ (2.49) પરથી અગાઉ નોંધ્યું તેમ એ સ્પષ્ટ છે કે, K, 1 કરતાં મોટું છે. સમીકરણ (2.46) અને (2.51) પરથી,

$$K = \frac{C}{C_0} \tag{2.54}$$

આમ, દ્રવ્યનો ડાયઇલેક્ટ્રીક અચળાંક એ, કેપેસીટરની બે પ્લેટ વચ્ચે સંપૂર્ણપણે ડાયઇલેક્ટ્રીક દાખલ કરતાં તેનું કેપેસીટન્સ તેના શૂન્યાવકાશ સાથેના મૂલ્ય કરતાં વધીને જેટલાં ગણું ($K > 1$) થાય છે તે અંક છે. જો કે આપણે સમીકરણ (2.54) સમાંતર પ્લેટ કેપેસીટરના કિસ્સા માટે મેળવ્યું છે, પરંતુ તે કોઈ પણ

પ્રકારના કેપેસીટર માટે સાચું છે અને હકીકતમાં વ્યાપકરૂપે તેને દ્રવ્યના ડાયઇલેક્ટ્રીક અચળાંકની વ્યાખ્યા તરીકે જોઈ શકાય છે.

વિદ્યુત સ્થાનાંતર

પ્રેરિત વિદ્યુતભાર પૃષ્ઠઘનતા σ_p અને પોલરાઈઝેશન **P** વચ્ચેનો કોઈ સ્પષ્ટ સંબંધ આપ્યા વિના આપણે ડાયઇલેક્ટ્રીકનો ખ્યાલ દાખલ કર્યો છે અને સમીકરણ (2.54) મેળવ્યું છે.

આપણે સાબિતી વિના

$$\sigma_p = \mathbf{P}\cdot\hat{\mathbf{n}}$$

પરિણામ સ્વીકારી લઈશું. જ્યાં $\hat{\mathbf{n}}$ સપાટીને બહારની તરફ લંબ એકમ સદિશ છે. ઉપરનું સમીકરણ વ્યાપક અને, ગમે તે આકારના ડાયઇલેક્ટ્રીક માટે સાચું છે. આકૃતિ 2.23માં ચોસલા માટે **P**, જમણી સપાટી માટે $\hat{\mathbf{n}}$ ની દિશામાં (સમાંતર) છે અને ડાબી સપાટી માટે $\hat{\mathbf{n}}$ ની વિરૂદ્ધ છે. આમ, જમણી સપાટીએ પ્રેરિત વિદ્યુતભાર ઘનતા ધન અને ડાબી સપાટીએ તે ઋણ છે, જે અગાઉની ગુણાત્મક ચર્ચામાં અનુમાન કરેલું હતું. વિદ્યુતક્ષેત્રના સમીકરણને સદિશ સ્વરૂપમાં લખતાં,

$$\mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{n}} = \frac{\sigma - \mathbf{P}\cdot\hat{\mathbf{n}}}{\varepsilon_0}$$

અથવા $(\varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P})\cdot\hat{\mathbf{n}} = \sigma$

$(\varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P})$ એ રાશિને વિદ્યુત સ્થાનાંતર (Electric Displacement) કહે છે અને તેને **D** વડે દર્શાવાય છે. તે સદિશ રાશિ છે. આમ,

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}, \qquad \mathbf{D}\cdot\hat{\mathbf{n}} = \sigma$$

Dનું મહત્ત્વ આ છે : શૂન્યાવકાશમાં વિદ્યુતક્ષેત્ર **E** મુક્ત વિદ્યુતભાર ઘનતા σ સાથે સંબંધ ધરાવે છે. જ્યારે ડાયઇલેક્ટ્રીક માધ્યમ હાજર હોય છે ત્યારે તેવો જ ભાગ **D** ભજવે છે. ડાયઇલેક્ટ્રીક માધ્યમ માટે ઉપરના સમીકરણમાં જણાય છે તેમ, મુક્ત વિદ્યુતભાર ઘનતા σ સાથે સીધો સંબંધ **E**નો નહિ પણ **D**નો છે. **P**, **E**ની દિશામાં જ હોવાથી ત્રણેય સદિશો **P**, **E** અને **D** સમાંતર છે. **D** અને **E**ના માનનો ગુણોત્તર

$$\frac{D}{E} = \frac{\sigma\varepsilon_0}{\sigma - \sigma_p} = \varepsilon_0 K \text{ છે.}$$

આમ, $\mathbf{D} = \varepsilon_0 K\mathbf{E}$

અને $\mathbf{P} = \mathbf{D} - \varepsilon_0\mathbf{E} = \varepsilon_0(K - 1)\mathbf{E}$

આ પરથી સમીકરણ (2.37)માં વ્યાખ્યાયિત કરેલ વિદ્યુત સસેપ્ટીબીલીટી χ_e માટે

$\chi_e = \varepsilon_0(K - 1)$ મળે છે.

ઉદાહરણ 2.8 ડાયઇલેક્ટ્રીક અચળાંક K ધરાવતા દ્રવ્યના એક ચોસલાનું ક્ષેત્રફળ સમાંતર પ્લેટ કેપેસીટરની પ્લેટ જેટલું છે, પરંતુ તેની જાડાઈ $(3/4)d$ છે. જ્યાં, d બે પ્લેટ વચ્ચેનું અંતર છે. જ્યારે આ ચોસલાને પ્લેટો વચ્ચે દાખલ કરવામાં આવે ત્યારે કેપેસીટન્સમાં કેવો ફેરફાર થાય ?

ઉકેલ જ્યારે ડાયઇલેક્ટ્રીક ન હોય ત્યારે પ્લેટો વચ્ચેનું વિદ્યુતક્ષેત્ર ધારોકે $E_0 = V_0/d$ છે અને સ્થિતિમાન તફાવત V_0 છે. હવે જો ડાયઇલેક્ટ્રીક દાખલ કરવામાં આવે તો, ડાયઇલેક્ટ્રીકની અંદરનું ક્ષેત્ર $E = E_0/K$. તેથી સ્થિતિમાન તફાવત,

ઉદાહરણ 2.8

ઉદાહરણ 2.8

$$V = E_0\left(\frac{1}{4}d\right) + \frac{E_0}{K}\left(\frac{3}{4}d\right)$$

$$= E_0 d\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4K}\right) = V_0\frac{K+3}{4K}$$

સ્થિતિમાન તફાવત (K + 3)/4K અવયવ જેટલો ઘટે છે જ્યારે પ્લેટો પરનો મુક્ત વિદ્યુતભાર Q_0 બદલાતો નથી. આમ, કેપેસીટન્સ વધે છે.

$$C = \frac{Q_0}{V} = \left(\frac{4K}{K+3}\right)\frac{Q_0}{V_0} = \left(\frac{4K}{K+3}\right)C_0$$

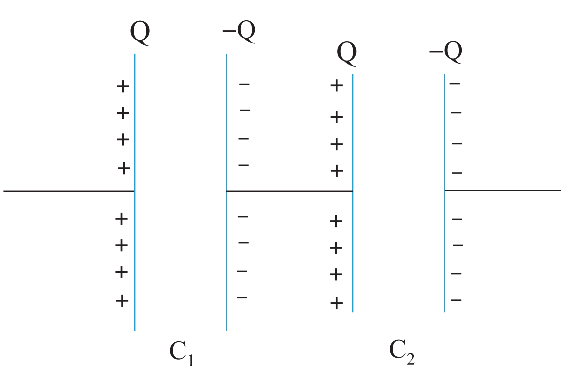
2.14 કેપેસીટરોનું સંયોજન (COMBINATION OF CAPACITORS)

આપણે C_1, C_2, ..., C_n કેપેસીટન્સ ધરાવતા કેપેસીટરોને સંયોજન કરીને અસરકારક કેપેસીટન્સ C ધરાવતું તંત્ર મેળવી શકીએ. અસરકારક કેપેસીટન્સ, વ્યક્તિગત કેપેસીટરોનાં સંયોજનની રીત પર આધાર રાખે છે. બે સરળ શક્યતાઓની નીચે ચર્ચા કરેલ છે.

2.14.1 કેપેસીટરો શ્રેણીમાં (Capacitors in Series)

આકૃતિ 2.26 કેપેસીટરો C_1 અને C_2ને શ્રેણીમાં જોડેલા દર્શાવે છે.

C_1ની ડાબી પ્લેટ અને C_2ની જમણી પ્લેટ બૅટરીના બે ટર્મિનલ સાથે જોડેલ છે અને તેમના પર અનુક્રમે Q અને –Q વિદ્યુતભાર છે. આ પરથી એવું સમજાય તેમ છે કે C_1ની જમણી પ્લેટ પર –Q અને C_2ની ડાબી પ્લેટ પર +Q વિદ્યુતભાર છે. જો આમ ન હોત તો દરેક કેપેસીટર પરનો કુલ (Net) વિદ્યુતભાર શૂન્ય ન હોત. આના પરિણામે C_1 અને C_2ને જોડતાં વાહકમાં વિદ્યુતક્ષેત્ર રચાયું હોત. આથી, C_1 અને C_2 બંને પરનો કુલ વિદ્યુતભાર શૂન્ય બને ત્યાં સુધી વિદ્યુતભાર વહન પામે અને તેથી C_1 અને C_2ને જોડતાં વાહકમાં ક્ષેત્ર શૂન્ય બને. આમ, શ્રેણી જોડાણમાં બે પ્લેટો પરના વિદ્યુતભાર (±Q) દરેક કેપેસીટર માટે સમાન મૂલ્યના હોય છે. સંયોજનના બે છેડા વચ્ચેનો સ્થિતિમાનનો તફાવત C_1 અને C_2ના સ્થિતિમાન તફાવતો અનુક્રમે V_1 અને V_2ના સરવાળા જેટલો છે.



આકૃતિ 2.26 બે કેપેસીટરોનું શ્રેણીમાં સંયોજન

$$V = V_1 + V_2 = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} \qquad (2.55)$$

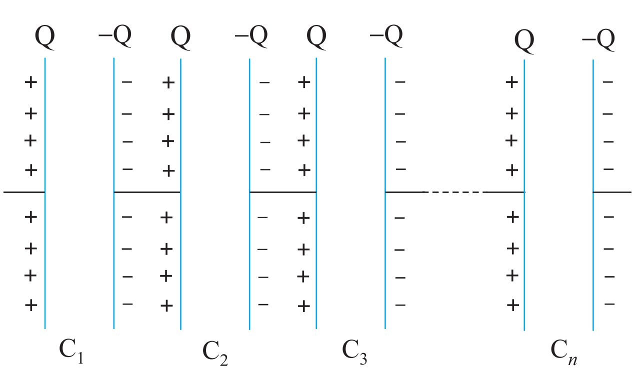
એટલે કે, $\frac{V}{Q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$ (2.56)

હવે, આ સંયોજનને આપણે વિદ્યુતભાર Q અને સ્થિતિમાન તફાવત V ધરાવતા અસરકારક કેપેસીટર તરીકે ગણી શકીએ છીએ. સંયોજનનું અસરકારક કેપેસીટન્સ

$$C = \frac{Q}{V} \qquad (2.57)$$

છે. આ સમીકરણ (2.57)ને આપણે સમીકરણ (2.56) સાથે સરખાવીએ તો,

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \qquad (2.58)$$



આકૃતિ 2.27 *n* કેપેસીટરોનું શ્રેણીમાં સંયોજન

મળે છે. આવી રીતે ગોઠવેલા ગમે તે સંખ્યાના કેપેસીટરો માટે પણ આ સાબિતિ લાગુ પડે છે. શ્રેણીમાં ગોઠવેલા n-કેપેસીટરો માટે સમીકરણ (2.55) વ્યાપક રૂપે

$$V = V_1 + V_2 + ... + V_n = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + ... + \frac{Q}{C_n} \qquad (2.59)$$

સ્વરૂપ ધારણ કરે છે. બે કેપેસીટરના કિસ્સા જેવાં જ પદો પ્રમાણે આગળ વધતાં આપણને n-કેપેસીટરોના શ્રેણી સંયોજનના અસરકારક કેપેસીટન્સનું વ્યાપક સૂત્ર મળે છે :

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + ... + \frac{1}{C_n} \qquad (2.60)$$

2.14.2 કેપેસીટરો સમાંતરમાં (Capacitors in Parallel)

આકૃતિ 2.28(a) સમાંતરમાં જોડેલા બે કેપેસીટરો દર્શાવે છે. આ કિસ્સામાં બંને કેપેસીટરો પર એકસરખો સ્થિતિમાન તફાવત લગાડેલો છે. પરંતુ કેપેસીટર 1ની પ્લેટો પરના વિદ્યુતભાર ($+Q_1$) અને કેપેસીટર 2ની પ્લેટો પરના વિદ્યુતભાર ($+Q_2$) સમાન હોવા જરૂરી નથી.

$$Q_1 = C_1V, Q_2 = C_2V \qquad (2.61)$$

સમતુલ્ય કેપેસીટર પરનો વિદ્યુતભાર

$$Q = Q_1 + Q_2 \qquad (2.62)$$

અને સ્થિતિમાન તફાવત V છે.

$$Q = CV = C_1V + C_2V \qquad (2.63)$$

સમીકરણ (2.63) પરથી સમતુલ્ય કેપેસીટન્સ C,

$$C = C_1 + C_2 \qquad (2.64)$$

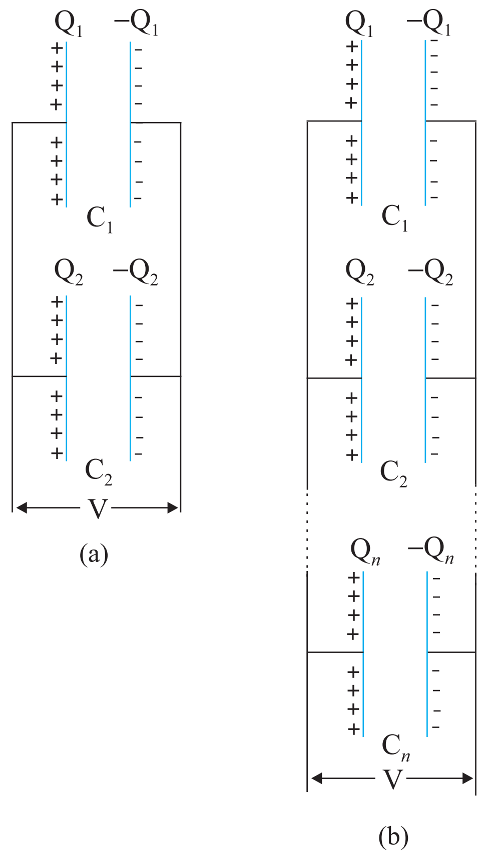
છે. આવી જ રીતે n-કેપેસીટરોના સમાંતર જોડાણ માટે સમતુલ્ય કેપેસીટન્સ C [આકૃતિ 2.28(b)] મળી શકે.

$$Q = Q_1 + Q_2 + ... + Q_n \qquad (2.65)$$

એટલે કે, $CV = C_1V + C_2V + ... + C_nV \qquad (2.66)$

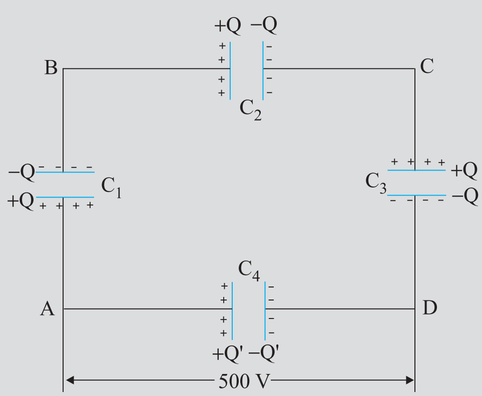
આ પરથી,

$$C = C_1 + C_2 + ... + C_n \qquad (2.67)$$



આકૃતિ 2.28 (a) બે કેપેસીટરોનું (b) n-કેપેસીટરોનું સમાંતર સંયોજન

ઉદાહરણ 2.9 આકૃતિ 2.29માં દર્શાવ્યા મુજબ 10 μFના ચાર કેપેસીટરોનું એક નેટવર્ક 500Vના સપ્લાય સાથે જોડેલ છે. (a) નેટવર્કનું સમતુલ્ય કેપેસીટન્સ (b) દરેક કેપેસીટર પરનો વિદ્યુતભાર શોધો. (નોંધો કે કેપેસીટર પરનો વિદ્યુતભાર એ ઊંચા સ્થિતિમાનની પ્લેટ પરનો વિદ્યુતભાર છે જે નીચા સ્થિતિમાનની પ્લેટ પરના વિદ્યુતભાર જેટલો જ અને વિરૂદ્ધ છે.)



આકૃતિ 2.29

ઉદાહરણ 2.9

ઉદાહરણ 2.9

ઉકેલ

(a) આપેલ નેટવર્કમાં C_1, C_2 અને C_3ને શ્રેણીમાં જોડેલા છે. આ ત્રણ કેપેસીટરોનું સમતુલ્ય કેપેસીટન્સ C'

$$\frac{1}{C'} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$ પરથી મળે છે.

$C_1 = C_2 = C_3 = 10\ \mu F$, માટે $C' = (10/3)\ \mu F$.

નેટવર્કમાં C' અને C_4 સમાંતરમાં જોડેલા છે. આમ, નેટવર્કનું સમતુલ્ય કેપેસીટન્સ

$$C = C' + C_4 = \frac{10}{3} + 10\ \mu F = 13.3\ \mu F$$

(b) આકૃતિ પરથી સ્પષ્ટપણે દરેક કેપેસીટર C_1, C_2 અને C_3 પરનો વિદ્યુતભાર સમાન, ધારો કે Q છે. C_4 પરનો વિદ્યુતભાર Q' છે. સ્થિતિમાનના તફાવત AB વચ્ચે Q/C_1, BC વચ્ચે Q/C_2 અને CD વચ્ચે Q/C_3 હોવાથી,

$$\frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_3} = 500\ V$$

વળી, $Q'/C_4 = 500\ V$

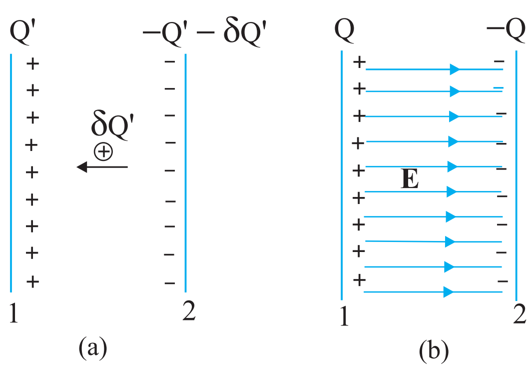
આ પરથી કેપેસીટન્સના આપેલાં મૂલ્યો માટે

$$Q = 500\ V \times \frac{10}{3}\ \mu F = 1.7 \times 10^{-3} C$$

$$Q' = 500\ V \times 10\mu F = 5.0 \times 10^{-3} C$$

2.15 કેપેસીટરમાં સંગ્રહિત ઊર્જા (Energy Stored in a Capacitor)

આપણે ઉપર જોયું તેમ, કેપેસીટર Q અને –Q વિદ્યુતભારો ધરાવતા બે સુવાહકોનું તંત્ર છે. આ સંરચનામાં સંગ્રહ પામેલી ઊર્જા શોધવા માટે, પ્રારંભમાં વિદ્યુતભાર-વિહીન સુવાહકો 1 અને 2ને ધ્યાનમાં લો. પછી વિદ્યુતભારને સુવાહક 2 પરથી સુવાહક 1 પર ટુકડે-ટુકડે લઈ જવાની પ્રક્રિયા વિચારો, જેથી અંતે સુવાહક 1 વિદ્યુતભાર Q પ્રાપ્ત કરે છે. વિદ્યુતભારના સંરક્ષણ પરથી, અંતે સુવાહક 2 પર વિદ્યુતભાર –Q છે (આકૃતિ 2.30).



આકૃતિ 2.30 (a) સુવાહક 1 પર વિદ્યુતભાર Q'થી વધારી Q'+ δQ' કરવાના નાના પગલામાં થતું કાર્ય (b) કેપેસીટરને વિદ્યુતભારિત કરવા માટે કરેલા કાર્યને, પ્લેટો વચ્ચેના ક્ષેત્રમાં સંગ્રહ પામેલી ઊર્જા તરીકે જોઈ શકાય

સુવાહક 2 પરથી ધન વિદ્યુતભારને સુવાહક 1 પર લઈ જવા માટે, બહારથી કાર્ય કરવું પડશે, કારણ કે કોઈ પણ તબક્કે સુવાહક 1, સુવાહક 2 કરતાં ઉંચા સ્થિતિમાને છે. કરેલા કુલ કાર્યની ગણતરી કરવા માટે આપણે પ્રથમ તો એક નાના પગલામાં અત્યંત સૂક્ષ્મ વિદ્યુતભારના સ્થાનાંતરમાં થતું કાર્ય ગણીએ. આ સમગ્ર પ્રક્રિયા દરમિયાનની વચગાળાની એવી પરિસ્થિતિનો વિચાર કરો કે જ્યારે સુવાહકો 1 અને 2 પર અનુક્રમે Q' અને –Q' વિદ્યુતભારો હોય. આ તબક્કે સુવાહકો 1 અને 2 વચ્ચેનો સ્થિતિમાનનો તફાવત V', Q'/C જેટલો છે. જ્યાં, C આ તંત્રનું કેપેસીટન્સ છે. હવે એક સૂક્ષ્મ વિદ્યુતભાર δQ'ને સુવાહક 2 પરથી 1 પર સ્થાનાંતરિત કર્યાની કલ્પના કરો. આ પગલામાં કરેલું કાર્ય (δW),

$$\delta W = V'\,\delta Q' = \frac{Q'}{C}\delta Q' \qquad (2.68)$$

પરથી મળે છે. આ કાર્યના પરિણામે સુવાહક 1 પરનો વિદ્યુતભાર Q' વધીને Q' + δQ' થાય છે. δQ'ને આપણે આપણી ઇચ્છા મુજબ ગમે તેટલો નાનો કરી શકીએ છીએ તેથી સમીકરણ (2.68)ને નીચે મુજબ લખી શકાય.

$$\delta W = \frac{1}{2C}[(Q' + \delta Q')^2 - Q'^2] \qquad (2.69)$$

સમીકરણ (2.68) અને (2.69) એકસમાન જ છે, કારણ કે δQ'માં દ્વિતિય ઘાતનું પદ એટલે કે $\delta Q'^2/2C$ અવગણ્ય છે, કારણ કે δQ' યાદચ્છિક રીતે નાનું છે. વિદ્યુતભાર Q'ને શૂન્યથી Q સુધી જમા કરવા માટે, કરેલું કુલ કાર્ય (W), નાનાં કાર્ય δWના ખૂબ મોટી સંખ્યાના પગલાંઓ માટે સરવાળો કરવાથી મળે છે.

$$W = \sum_{\text{બધાં પગલાં પર સરવાળો}} \delta W$$

$$= \sum_{\text{બધાં પગલાં પર સરવાળો}} \frac{1}{2C}[(Q' + \delta Q')^2 - Q'^2] \qquad (2.70)$$

$$= \frac{1}{2C}[\{\delta Q'^2 - 0\} + \{2\delta Q'\}^2 - \delta Q'^2\} + \{3\delta Q'\}^2 - \{2\delta Q'\}^2 + \ldots\ldots$$

$$+ \{Q^2 - (Q - \delta Q')^2\}] \qquad (2.71)$$

$$= \frac{1}{2C}[Q^2 - 0] = \frac{Q^2}{2C} \qquad (2.72)$$

આ જ પરિણામ સમીકરણ (2.68) પરથી સંકલન દ્વારા સીધું મળી શકે છે.

$$W = \int_0^Q \frac{Q'}{C}\delta Q' = \frac{1}{C}\left.\frac{Q'^2}{2}\right|_0^Q = \frac{Q^2}{2C}$$

આ નવાઈ જેવું નથી કારણ કે સંકલન એ મોટી સંખ્યાનાં નાનાં પદોનો સરવાળો છે.

આપણે અંતિમ પરિણામ સમીકરણ (2.72)ને જુદી જુદી રીતે લખી શકીએ.

$$W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}QV \qquad (2.73)$$

સ્થિતવિદ્યુત બળ સંરક્ષી હોવાથી આ કાર્ય તંત્રની સ્થિતિઊર્જા રૂપે સંગ્રહ પામે છે. આ જ કારણથી સ્થિતિઊર્જા માટેનું અંતિમ પરિણામ [સમીકરણ (2.73)], કેપેસીટરની વિદ્યુતભાર સંરચના કેવી રીતે મેળવી છે તેના પર આધારિત નથી. આ કેપેસીટર જ્યારે ડિસ્ચાર્જ (વિદ્યુતવિભાર, વિદ્યુતભાર વિસર્જન) થાય ત્યારે આ સંગ્રહિત ઊર્જા મુક્ત થાય છે. કેપેસીટરની સ્થિતિઊર્જાને પ્લેટો વચ્ચેના વિદ્યુતક્ષેત્રમાં 'સંગ્રહ પામેલી' ઊર્જા તરીકે જોઈ શકાય છે. આવું જોવા માટે, સરળતા ખાતર સમાંતર પ્લેટ કેપેસીટર (દરેક પ્લેટનું ક્ષેત્રફળ A અને પ્લેટો વચ્ચેનું અંતર d હોય તેવું) વિચારો.

કેપેસીટરમાં સંગ્રહિત ઊર્જા

$$= \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{(A\sigma)^2}{2} \times \frac{d}{\varepsilon_0 A} \qquad (2.74)$$

વિદ્યુતભારની પૃષ્ઠ ઘનતા σ, બે પ્લેટ વચ્ચેના વિદ્યુત ક્ષેત્ર સાથે સંબંધિત છે.

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \qquad (2.75)$$

સમીકરણ (2.74) અને (2.75) પરથી આપણને

કેપેસીટરમાં સંગ્રહિત ઊર્જા

$$U = (1/2)\,\varepsilon_0 E^2 \times Ad \qquad (2.76)$$

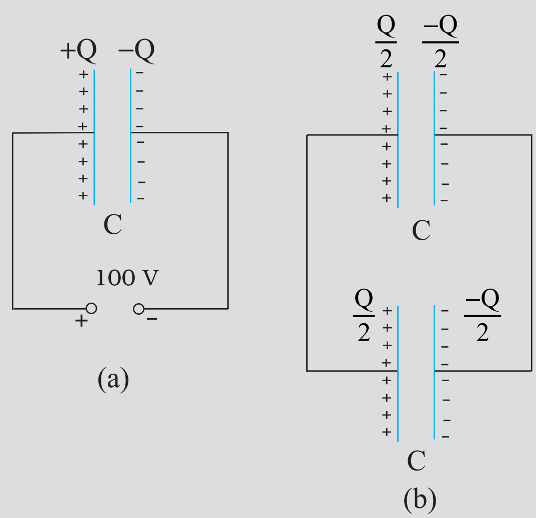
મળે છે.

નોંધો કે A*d*, બે પ્લેટ વચ્ચેના વિસ્તારનું કદ છે (જ્યાં, માત્ર વિદ્યુતક્ષેત્રનું અસ્તિત્વ છે). જો આપણે ઊર્જા ઘનતા એકમ કદમાં સંગ્રહિત ઊર્જા તરીકે વ્યાખ્યાયિત કરીએ તો સમીકરણ (2.76) દર્શાવે છે કે

વિદ્યુતક્ષેત્રની ઊર્જા ઘનતા $u = (1/2)\,\varepsilon_0 E^2$ (2.74)

જો કે આપણે સમીકરણ (2.77), સમાંતર પ્લેટ કેપેસીટરના કિસ્સા માટે સાધિત કર્યું છે, પરંતુ વિદ્યુતક્ષેત્રની ઊર્જા ઘનતા પરનું પરિણામ, હકીકતમાં ઘણું વ્યાપક છે અને વિદ્યુતભારોની કોઈ પણ સંરચનાના વિદ્યુતક્ષેત્ર માટે સાચું છે.

ઉદાહરણ 2.10 (a) 900 pFના એક કેપેસીટરને 100 Vની બૅટરી વડે વિદ્યુતભારિત કરાય છે [આકૃતિ 2.37(a)]. કેટલી સ્થિતવિદ્યુત ઊર્જા કેપેસીટર વડે સંગ્રહ પામશે ? (b) કેપેસીટરનું બૅટરીથી જોડાણ દૂર કરી બીજા 900 pFના વિદ્યુતભાર વિહિન કેપેસીટર સાથે જોડવામાં આવે છે [આકૃતિ 2.37(b)]. હવે આ તંત્ર વડે કેટલી સ્થિતવિદ્યુત ઊર્જા સંગ્રહ પામશે ?



આકૃતિ 2.31

ઉકેલ

(a) કેપેસીટર પરનો વિદ્યુતભાર

$Q = CV = 900 \times 10^{-12}\,F \times 100\,V = 9 \times 10^{-8}\,C$

કેપેસીટર વડે સંગ્રહિત ઊર્જા

$= (1/2)\,CV^2 = (1/2)\,QV$

$= (1/2) \times 9 \times 10^{-8}\,C \times 100\,V = 4.5 \times 10^{-6}\,J$

(b) સ્થાયી સ્થિતિમાં, બે કેપેસીટરોની ધન પ્લેટો પર સમાન વિદ્યુતભાર હશે અને તેમની ઋણ પ્લેટો પર પણ સમાન વિદ્યુતભાર હશે. તેમનો સામાન્ય સ્થિતિમાનનો તફાવત ધારોકે V' છે. દરેક કેપેસીટર પરનો વિદ્યુતભાર Q' = CV'. વિદ્યુતભાર સંરક્ષણ અનુસાર Q' = Q/2. આ પરથી V' = V/2. તંત્રમાં સંગ્રહિત કુલ ઊર્જા

$= 2 \times \frac{1}{2} Q'V' = \frac{1}{4} QV = 2.25 \times 10^{-6}\,J$

ઉદાહરણ 2.10

આમ, (a) થી (b) પર જવામાં કોઈ વિદ્યુતભાર ગુમાવાયો નથી, છતાં અંતિમ ઊર્જા પ્રારંભિક ઊર્જાની માત્ર અડધી છે. બાકીની ઊર્જા ક્યાં ગઈ ? તંત્ર (b) સ્થિતિમાં ઠરીઠામ (Settle) થાય તે અગાઉ થોડો સમય વ્યતિત થાય છે. આ સમય દરમ્યાન એક ક્ષણિક પ્રવાહ, પ્રથમથી બીજા કેપેસીટર તરફ વહન પામે છે. આ સમય દરમિયાન ઊર્જા, ઉષ્મા અને વિદ્યુતચુંબકીય વિકિરણના રૂપમાં વિખેરાય (ગુમાવાય) છે.

સારાંશ

1. સ્થિતવિદ્યુત બળ એ સંરક્ષી બળ છે. કોઈ બાહ્યબળ (સ્થિતવિદ્યુત બળ જેટલું જ અને વિરૂદ્ધ દિશામાં) વડે q વિદ્યુતભારને R બિંદુથી P બિંદુએ લાવવા કરેલું કાર્ય $q(V_P - V_R)$ છે, જે q વિદ્યુતભારની અંતિમ અને પ્રારંભિક બિંદુઓએ સ્થિતિઊર્જાનો તફાવત છે.
2. કોઈ બિંદુ આગળનું સ્થિતિમાન એ (બાહ્ય પરિબળ દ્વારા) એકમ ધન વિદ્યુતભારને અનંત અંતરેથી તે બિંદુએ લાવવા માટે કરેલું કાર્ય છે. કોઈ બિંદુનું સ્થિતિમાન યાદચ્છિક છે, જેમાં કોઈ અચળાંક ઉમેરી શકાય, કારણ કે ભૌતિક રીતે તો બે બિંદુ વચ્ચેનો સ્થિતિમાનનો તફાવત જ મહત્વનો છે. અનંત અંતરે સ્થિતિમાનને શૂન્ય તરીકે પસંદ કરીએ તો, ઉગમબિંદુએ મૂકેલા બિંદુ વિદ્યુતભાર Qને લીધે સ્થાન સદિશ **r** ધરાવતા બિંદુએ સ્થિતિમાન,

   $V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}$ દ્વારા અપાય છે.
3. ઉગમબિંદુએ મૂકેલ, **p** ડાયપોલ ચાકમાત્રા ધરાવતી બિંદુ ડાયપોલને લીધે, **r** સ્થાન સદિશ ધરાવતા બિંદુએ સ્થિતવિદ્યુત સ્થિતિમાન

   $$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

   છે. આ પરિણામ ડાયપોલ ($-q$ અને q વિદ્યુતભારો અને તેમની વચ્ચે $2a$ અંતર ધરાવતી) માટે પણ $r >> a$ માટે સાચું છે.
4. સ્થાન સદિશો $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots.. \mathbf{r}_n$ પર વિદ્યુતભાર $q_1, q_2, \ldots.. q_n$ હોય તેવી સંરચના માટે, P બિંદુએ સ્થિતિમાન સંપાતપણાના સિદ્ધાંત પરથી મળે છે.

   $$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_{1P}} + \frac{q_2}{r_{2P}} + \ldots + \frac{q_n}{r_{nP}}\right)$$

   જ્યાં, r_{1P} એ q_1 અને P વચ્ચેનું અંતર છે, વગેરે.
5. સમસ્થિતિમાન પૃષ્ઠ એ એવી સપાટી છે કે જેના પર સ્થિતિમાનનું મૂલ્ય અચળ છે. બિંદુ-વિદ્યુતભાર માટે, વિદ્યુતભારના સ્થાને કેન્દ્ર ધરાવતા સમકેન્દ્રિય ગોળાઓ, સમસ્થિતિમાન પૃષ્ઠો છે. કોઈ બિંદુએ વિદ્યુતક્ષેત્ર **E**, તે બિંદુમાંથી પસાર થતા સમસ્થિતિમાન પૃષ્ઠને લંબ છે. **E**, સ્થિતિમાનના(અંતર સાથેના) સૌથી ઝડપી ઘટાડાની દિશામાં હોય છે.

6. વિદ્યુતભારોના તંત્રમાં સંગ્રહ પામેલી સ્થિતિઊર્જા, એ (બાહ્ય પરિબળ દ્વારા) વિદ્યુતભારોને તેમનાં સ્થાનોએ એકઠા કરવા માટે કરેલું કાર્ય છે. $\mathbf{r}_1$ અને $\mathbf{r}_2$ આગળ બે વિદ્યુતભારો q_1 અને q_2ની સ્થિતિઊર્જા

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}}$$ છે.

જ્યાં, r_{12}, q_1 અને q_2 વચ્ચેનું અંતર છે.

7. બાહ્ય સ્થિતિમાન $V(\mathbf{r})$માં વિદ્યુતભાર qની સ્થિતિઊર્જા $qV(\mathbf{r})$ છે. ડાયપોલ ચાકમાત્રા $\mathbf{p}$ ધરાવતી ડાયપોલની સમાન વિદ્યુતક્ષેત્ર $\mathbf{E}$માં સ્થિતિઊર્જા $-\mathbf{p}\cdot\mathbf{E}$ છે.

8. સુવાહકની અંદરના ભાગમાં સ્થિતવિદ્યુત ક્ષેત્ર શૂન્ય છે. વિદ્યુતભારિત સુવાહકની તરત બહાર $\mathbf{E}$, સપાટીને લંબ હોય છે અને $\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{\mathbf{n}}$ વડે અપાય છે, જ્યાં $\hat{\mathbf{n}}$ એ સપાટીને બહારની તરફ લંબની દિશામાંનો એકમ સદિશ છે અને σ વિદ્યુતભારની પૃષ્ઠઘનતા છે. સુવાહકોમાં વિદ્યુતભારો માત્ર સપાટી પર જ રહેતા હોય છે. સુવાહકની અંદરના ભાગમાં અને સપાટી પર સ્થિતિમાન અચળ હોય છે. સુવાહકની અંદર (વિદ્યુતભારો વગરની) બખોલ (કેવીટી)ની અંદર વિદ્યુતક્ષેત્ર શૂન્ય હોય છે.

9. કેપેસીટર એ અવાહક વડે અલગ કરેલા બે સુવાહકોનું તંત્ર છે. તેનું કેપેસીટન્સ $C = Q/V$ તરીકે વ્યાખ્યાયિત કરાય છે. જ્યાં, Q અને –Q બે સુવાહકો પરના વિદ્યુતભાર છે અને V તેમની વચ્ચેનો સ્થિતિમાનનો તફાવત છે. Cનું મૂલ્ય બે સુવાહકોનાં આકાર, માપ અને સાપેક્ષ સ્થાનો વડે માત્ર ભૌમિતિક રીતે નક્કી થાય છે. કેપેસીટન્સનો એકમ farad છે : $1\,F = 1\,C\,V^{-1}$. સમાંતર પ્લેટ કેપેસીટર માટે (બે પ્લેટ વચ્ચે શૂન્યાવકાશ હોય ત્યારે),

$$C = \varepsilon_0 \frac{A}{d}$$

જ્યાં, A દરેક પ્લેટનું ક્ષેત્રફળ છે અને d તેમની વચ્ચેનું અંતર છે.

10. જો કેપેસીટરની બે પ્લેટો વચ્ચેનો અવકાશ અવાહક દ્રવ્ય (ડાયઈલેક્ટ્રીક)થી ભરવામાં આવે તો, વિદ્યુતભારિત પ્લેટો વડે ઉદ્‌ભવતું ક્ષેત્ર ડાયઈલેક્ટ્રીકમાં ચોખ્ખી (Net) ડાયપોલ ચાકમાત્રા પ્રેરિત કરે છે. આ ધ્રુવીભવન તરીકે ઓળખાતી અસરને લીધે વિરૂદ્ધ દિશામાં ક્ષેત્ર ઉત્પન્ન થાય છે. આથી, ડાયઈલેક્ટ્રીકની અંદરનું ચોખ્ખું (Net) ક્ષેત્ર અને તેથી પ્લેટો વચ્ચેનો સ્થિતિમાનનો તફાવત ઘટી જાય છે. પરિણામી કેપેસીટન્સ જ્યારે કોઈ માધ્યમ ન હતું (શૂન્યાવકાશ હતો) ત્યારના તેના મૂલ્ય C_0થી વધી જાય છે.

$$C = KC_0$$

જ્યાં, K અવાહક દ્રવ્યનો ડાયઈલેક્ટ્રીક અચળાંક છે.

11. કેપેસીટરોનાં શ્રેણી જોડાણ માટે કુલ કેપેસીટન્સ C,

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \ldots$$ દ્વારા અપાય છે.

સમાંતર જોડાણમાં કુલ કેપેસીટન્સ C :

$$C = C_1 + C_2 + C_3 + \ldots$$ પરથી મળે છે.

જ્યાં C_1, C_2, C_3 .... એ વ્યક્તિગત કેપેસીટન્સ છે.

12. કેપેસીટન્સ C, વિદ્યુતભાર Q અને વોલ્ટેજ V ધરાવતા કેપેસીટરમાં સંગ્રહિત ઊર્જા
$U = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$ છે.
વિદ્યુતક્ષેત્ર ધરાવતા વિસ્તારમાં વિદ્યુતઊર્જા ઘનતા (એકમ કદ દીઠ ઊર્જા) $(1/2)\varepsilon_0 E^2$ છે.

ભૌતિક રાશિ	પ્રતિક	પરિમાણો	એકમ	નોંધ
સ્થિતિમાન	ϕ અથવા V	$[M^1L^2T^{-3}A^{-1}]$	V	ભૌતિક રીતે સ્થિતિમાનનો તફાવત મહત્ત્વનો છે.
કેપેસીટન્સ	C	$[M^{-1}L^{-2}T^{-4}A^2]$	F	
પોલરાઈઝેશન	**P**	$[L^{-2}AT]$	$C\ m^{-2}$	એકમ કદ દીઠ ડાયપોલ ચાકમાત્રા
ડાયઈલેક્ટ્રીક અચળાંક	K	પરિમાણરહિત		

ગહન વિચારણાના મુદ્દાઓ

1. સ્થિતવિદ્યુત સ્થિર વિદ્યુતભારો વચ્ચે લાગતા બળો વિશે સમજાવે છે, પણ જો કોઈ વિદ્યુતભાર પર બળ લાગતું હોય તો તે સ્થિર કેવી રીતે રહી શકે ? આમ, જ્યારે આપણે વિદ્યુતભારો વચ્ચે લાગતા બળની વાત કરીએ ત્યારે તે સમજી લેવાનું છે કે દરેક વિદ્યુતભાર કોઈ અજાણ્યા બળ વડે સ્થિર જકડી રાખેલ છે. આ બળ વિદ્યુતભાર પરના કુલ કુલંબ બળનો વિરોધ કરે છે.
2. કેપેસીટર એવી સંરચના ધરાવે છે કે તે અવકાશના નાના વિસ્તારમાં વિદ્યુતક્ષેત્ર રેખાઓને મર્યાદિત કરે છે. આમ, વિદ્યુતક્ષેત્ર ખાસ્સું પ્રબળ હોવા છતાં, કેપેસીટરની બે પ્લેટો વચ્ચેનો સ્થિતિમાનનો તફાવત નાનો હોય છે.
3. ગોળાકાર વિદ્યુતભારિત કવચની આરપાર વિદ્યુતક્ષેત્ર અસતત હોય છે. અંદર તે શૂન્ય છે અને બહાર $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{\mathbf{n}}$ છે. આમ છતાં, વિદ્યુતસ્થિતિમાન સપાટીની આરપાર સતત છે અને સપાટી પર $q/4\pi\varepsilon_0 R$ જેટલું છે.
4. ડાયપોલ પર લાગતું ટૉર્ક $\mathbf{p} \times \mathbf{E}$, તેને $\mathbf{E}$ની આસપાસ દોલનો કરાવે છે. માત્ર જો ઊર્જા-વ્યય કરતી ક્રિયાઓ થતી હોય તો જ દોલનો મંદ પડે છે અને સમય જતાં ડાયપોલ $\mathbf{E}$ને સમાંતર બને છે.
5. વિદ્યુતભાર q વડે તેના પોતાના સ્થાને સ્થિતિમાન વ્યાખ્યાયિત થયેલ નથી - તે અનંત છે.
6. વિદ્યુતભાર qની સ્થિતિઊર્જા માટેના $qV(\mathbf{r})$ પદમાં $V(\mathbf{r})$એ બાહ્ય (અન્ય) વિદ્યુતભારોને લીધે સ્થિતિમાન છે, qને લીધે નહિ. મુદ્દા 5માં જોયું તેમ જો $V(\mathbf{r})$માં qને લીધે મળતા સ્થિતિમાનનો પણ સમાવેશ થાય તો આ પદની વ્યાખ્યા ખોટી પડે છે.

7. સુવાહકની અંદરની બખોલ (Cavity) બહારની વિદ્યુત અસરોથી રક્ષિત (Shielded) છે. એ નોંધવું યોગ્ય છે કે સ્થિતવિદ્યુત શીલ્ડીંગ ઉલટા ક્રમમાં કારગત નથી. એટલે કે જો તમે બખોલની અંદર વિદ્યુતભાર મૂકો તો સુવાહકની બહારનો ભાગ અંદરના વિદ્યુતભારોના ક્ષેત્રથી રક્ષિત (Shielded) નથી.

સ્વાધ્યાય

2.1 5×10^{-8} C અને -3×10^{-8} Cના બે વિદ્યુતભારો એકબીજાથી 16 cm અંતરે રહેલા છે. આ બે વિદ્યુતભારોને જોડતી રેખા પરના કયા બિંદુ(ઓ)એ વિદ્યુતસ્થિતિમાન શૂન્ય છે ? અનંત અંતરે સ્થિતિમાન શૂન્ય લો.

2.2 10 cmની બાજુવાળા નિયમિત ષટ્કોણના દરેક શિરોબિંદુએ 5 μC વિદ્યુતભાર છે. ષટ્કોણના કેન્દ્ર પર સ્થિતિમાન ગણો.

2.3 બે વિદ્યુતભારો 2 μC અને –2 μC એકબીજાથી 6 cm દૂર આવેલા બિંદુઓ A અને B પર મૂકેલા છે.

(a) તંત્રના કોઈ સમસ્થિતિમાન પૃષ્ઠની ઓળખ કરો.

(b) આ સપાટી પર દરેક બિંદુએ વિદ્યુતક્ષેત્રની દિશા કઈ છે ?

2.4 12 cm ત્રિજ્યાના એક ગોળાકાર સુવાહકની સપાટી પર 1.6×10^{-7} C વિદ્યુતભાર નિયમિત રીતે વિતરિત થયેલો છે.

(a) ગોળાની અંદર

(b) ગોળાની તરત બહાર

(c) ગોળાના કેન્દ્રથી 18 cm અંતરે આવેલા બિંદુએ - વિદ્યુતક્ષેત્ર કેટલું છે ?

2.5 પ્લેટો વચ્ચે હવા હોય તેવા સમાંતર પ્લેટ કેપેસીટરનું કેપેસીટન્સ 8 pF ($1\ pF = 10^{-12}$ F) છે. જો પ્લેટો વચ્ચેનું અંતર અડધું કરવામાં આવે અને તેમની વચ્ચેના અવકાશને ડાયઇલેક્ટ્રીક અચળાંક = 6 ધરાવતા દ્રવ્ય વડે ભરી દેવામાં આવે તો તેનું કેપેસીટન્સ કેટલું થશે ?

2.6 દરેક 9 pF કેપેસીટન્સ ધરાવતા ત્રણ કેપેસીટરોને શ્રેણીમાં જોડેલ છે.

(a) સંયોજનનું કુલ કેપેસીટન્સ કેટલું હશે ?

(b) આ સંયોજનને 120 Vના સપ્લાય સાથે જોડવામાં આવે તો દરેક કેપેસીટરને સમાંતર સ્થિતિમાનનો તફાવત કેટલો થશે ?

2.7 2 pF, 3 pF અને 4 pF કેપેસીટન્સના ત્રણ કેપેસીટરોને સમાંતરમાં જોડેલ છે.

(a) સંયોજનનું કુલ કેપેસીટન્સ કેટલું ?

(b) જો આ સંયોજનને 100 V સપ્લાય સાથે જોડવામાં આવે તો દરેક કેપેસીટર પરનો વિદ્યુતભાર શોધો.

2.8 બે પ્લેટો વચ્ચે હવા હોય તેવા સમાંતર પ્લેટ કેપેસીટરમાં દરેક પ્લેટનું ક્ષેત્રફળ $6 \times 10^{-3} m^2$ અને બે પ્લેટો વચ્ચેનું અંતર 3 mm છે. આ કેપેસીટરનું કેપેસીટન્સ ગણો. જો આ કેપેસીટરને 100 V સપ્લાય સાથે જોડવામાં આવે તો તેની દરેક પ્લેટ પરનો વિદ્યુતભાર કેટલો હશે ?

2.9 સ્વાધ્યાય 2.8માં આપેલ કેપેસીટરમાં 3 mm જાડાઈની માઈકા (અબરખ)ની પ્લેટ (ડાયઈલેક્ટ્રીક અચળાંક = 6) કેપેસીટરની બે પ્લેટ વચ્ચે

(a) વોલ્ટેજ સપ્લાય જોડેલો રહે ત્યારે,

(b) વોલ્ટેજ સપ્લાયનું જોડાણ દૂર કર્યા બાદ

- દાખલ કરવામાં આવે તો, દરેક કિસ્સામાં શું થાય તે સમજાવો.

2.10 12 pFનું એક કેપેસીટર 50 Vની બેટરી સાથે જોડેલું છે. કેપેસીટરમાં કેટલી સ્થિતવિદ્યુતઊર્જા સંગ્રહ પામી હશે ?

2.11 600 pFનું એક કેપેસીટર 200 Vના સપ્લાય વડે વિદ્યુતભારિત કરવામાં આવે છે. પછી તેનું સપ્લાય સાથેનું જોડાણ દૂર કરવામાં આવે છે અને બીજા વિદ્યુતભારિત ન હોય તેવા 600 pFના કેપેસીટર સાથે જોડવામાં આવે છે. આ પ્રક્રિયામાં કેટલી ઊર્જા ગુમાવાઈ હશે ?

વધારાના સ્વાધ્યાય

2.12 એક 8 mC વિદ્યુતભાર ઉગમબિંદુએ રહેલો છે. એક નાના -2×10^{-9} C વિદ્યુતભારને P(0, 0, 3 cm) બિંદુથી R(0, 6, 9 cm) બિંદુએ થઈ Q(0, 4 cm, 0) બિંદુએ લાવવા માટે કરેલું કાર્ય શોધો.

2.13 b બાજુવાળા એક ઘનના દરેક બિંદુએ વિદ્યુતભાર q છે. આ વિદ્યુતભારના તંત્રને લીધે ઘનના કેન્દ્ર પર સ્થિતિમાન અને વિદ્યુતક્ષેત્ર શોધો.

2.14 1.5 μC અને 2.5 μC વિદ્યુતભાર ધરાવતા બે નાના ગોળાઓ એકબીજાથી 30 cm અંતરે રહેલા છે. નીચેના સ્થાનોએ સ્થિતિમાન અને વિદ્યુતક્ષેત્ર શોધો.

(a) બે વિદ્યુતભારોને જોડતી રેખાના મધ્યબિંદુએ અને

(b) આ રેખાના મધ્યબિંદુમાંથી પસાર થતી અને રેખાને લંબ સમતલમાં મધ્યબિંદુથી 10 cm અંતરે આવેલા બિંદુએ.

2.15 અંદરની ત્રિજ્યા r_1 અને બહારની ત્રિજ્યા r_2 ધરાવતી એક ગોળાકાર સુવાહક કવચ પરનો વિદ્યુતભાર Q છે.

(a) કવચના કેન્દ્ર પર વિદ્યુતભાર q મૂકવામાં આવે છે. કવચની અંદરની અને બહારની સપાટીઓ પર વિદ્યુતભારની પૃષ્ઠઘનતા કેટલી હશે ?

(b) જો કવચ ગોળાકાર ન હોય પણ ગમે તેવો અનિયમિત આકાર ધરાવતી હોય તો પણ બખોલ (જેમાં કોઈ વિદ્યુતભાર નથી)ની અંદરનું વિદ્યુતક્ષેત્ર શૂન્ય છે ? સમજાવો.

2.16 (a) દર્શાવો કે સ્થિતવિદ્યુતક્ષેત્રના લંબ ઘટકનું, વિદ્યુતભારિત સપાટીની એકબાજુથી બીજી બાજુ સુધી અસતતપણું

$$(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

દ્વારા અપાય છે. જ્યાં, $\hat{\mathbf{n}}$ તે બિંદુએ સપાટીને લંબ એકમ સદિશ છે. σ તે બિંદુએ વિદ્યુતભારની પૃષ્ઠ ઘનતા છે. ($\hat{\mathbf{n}}$ ની દિશા બાજુ 1થી બાજુ 2 તરફ છે). આ પરથી દર્શાવો કે સુવાહકની તરત બહાર વિદ્યુતક્ષેત્ર $\sigma \hat{\mathbf{n}}/\varepsilon_0$ છે.

(b) દર્શાવો કે સ્થિતવિદ્યુત ક્ષેત્રનો સ્પર્શીય (Tangential) ઘટક, વિદ્યુતભારિત સપાટીની એક બાજુથી બીજી બાજુ સુધી સતત હોય છે. [**સૂચન :** (a) માટે ગૉસના નિયમનો ઉપયોગ કરો. (b) માટે સ્થિતવિદ્યુત ક્ષેત્ર વડે બંધ ગાળા પર કરેલું કાર્ય શૂન્ય છે તે હકીકતનો ઉપયોગ કરો.]

2.17 રેખીય વિદ્યુતભાર ઘનતા λ ધરાવતો એક લાંબો નળાકાર એક પોલા, સમઅક્ષીય, સુવાહક નળાકાર વડે ઘેરાયેલ છે. બે નળાકારની વચ્ચેના અવકાશમાં વિદ્યુતક્ષેત્ર કેટલું હશે ?

2.18 હાઇડ્રોજન પરમાણુમાં ઇલેક્ટ્રૉન અને પ્રોટોન 0.53 Å અંતરે એકબીજા સાથે બંધિત અવસ્થામાં છે.

(a) ઇલેક્ટ્રૉન અને પ્રોટોન વચ્ચેના અનંત અંતર માટે સ્થિતિઊર્જા શૂન્ય લઈને આ તંત્રની સ્થિતિઊર્જાનો eVમાં અંદાજ કરો.

(b) ઇલેક્ટ્રૉનને મુક્ત કરવા માટે કેટલું લઘુત્તમ કાર્ય કરવું પડે ? તેની કક્ષામાંની ગતિઊર્જા (a)માં મળેલી સ્થિતિઊર્જા કરતાં અડધી છે તેમ આપેલ છે.

(c) બંને વચ્ચેના 1.06 Å અંતર માટે સ્થિતિઊર્જા શૂન્ય લેવામાં આવે તો ઉપર (a) અને (b) માટેના જવાબો શું હશે ?

2.19 જો H_2 અણુના બેમાંથી એક ઇલેક્ટ્રૉન દૂર કરવામાં આવે તો આપણને હાઇડ્રોજન આણ્વિક આયન H_2^+ મળે. H_2^+ની ધરાસ્થિતિમાં બે પ્રોટોન વચ્ચેનું અંતર લગભગ 1.5 Å છે અને ઇલેક્ટ્રૉન દરેક પ્રોટોનથી લગભગ 1 Å અંતરે છે. આ તંત્રની સ્થિતિઊર્જા શોધો. સ્થિતિઊર્જાના શૂન્ય માટેની તમારી પસંદગી જણાવો.

2.20 a અને b ત્રિજ્યાઓ ધરાવતા બે વિદ્યુતભારિત સુવાહક ગોળાઓને એક તાર વડે જોડવામાં આવે છે. બે ગોળાઓની સપાટીઓ પરના વિદ્યુતક્ષેત્રનો ગુણોત્તર કેટલો હશે ? આ પરિણામનો ઉપયોગ કરી સુવાહકના તીક્ષ્ણ અને ધારદાર છેડાઓ આગળ સપાટ વિભાગો કરતાં વિદ્યુતભારની પૃષ્ઠ ઘનતા શા માટે વધારે હોય છે તે સમજાવો.

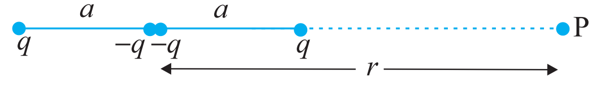
2.21 બે વિદ્યુતભારો $-q$ અને $+q$ અનુક્રમે $(0, 0, -a)$ અને $(0, 0, a)$ બિંદુઓએ રહેલા છે.

(a) $(0, 0, z)$ અને $(x, y, 0)$ બિંદુઓએ વિદ્યુતક્ષેત્ર કેટલું કેટલું છે ?

(b) સ્થિતિમાન, ઉગમબિંદુથી કોઈ બિંદુના અંતર r પર, $r/a >> 1$ હોય ત્યારે કેવી રીતે આધારિત છે તે દર્શાવતું સૂત્ર મેળવો.

(c) એક નાના પરીક્ષણ વિદ્યુતભારને x-અક્ષ પર $(5, 0, 0)$ બિંદુથી $(-7, 0, 0)$ બિંદુ સુધી લઈ જવામાં કેટલું કાર્ય થશે ? જો પરીક્ષણ વિદ્યુતભારનો માર્ગ તે જ બે બિંદુઓ વચ્ચે x-અક્ષ પર ન હોત તો જવાબમાં ફેર પડે ?

2.22 આકૃતિ 2.34 વિદ્યુત ચતુર્ધ્રુવી (Electric Quadrapole) તરીકે ઓળખાતી વિદ્યુતભારોની ગોઠવણ દર્શાવે છે. ચતુર્ધ્રુવીની અક્ષ પરના બિંદુ માટે, $r/a >> 1$ માટે, સ્થિતિમાન r પર કેવી રીતે આધારિત છે તે દર્શાવતું સૂત્ર મેળવો અને વિદ્યુત ડાયપોલ અને વિદ્યુત મોનોપોલ (એટલે કે એકલ વિદ્યુતભાર) માટેના આવા સૂત્રથી તમારું પરિણામ કેવી રીતે જુદું પડે છે તે જણાવો.

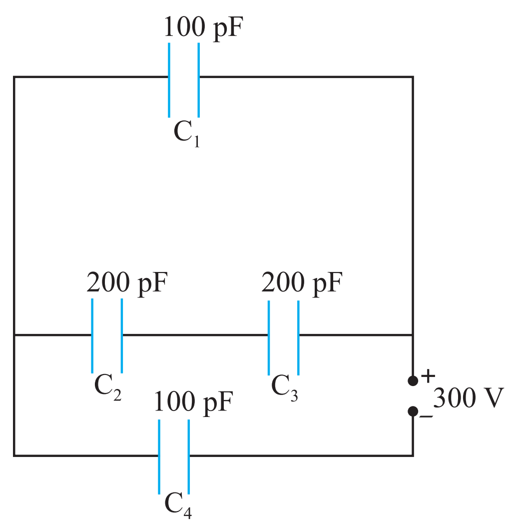


આકૃતિ 2.34

2.23 એક ઇલેક્ટ્રીકલ ટેકનીશિયનને એક પરિપથમાં 1 kVને સમાંતર 2 μFના કેપેસીટરની જરૂર પડે છે. તેની પાસે 1 μFના મોટી સંખ્યાના કેપેસીટર પ્રાપ્ય છે જેઓ 400 વોલ્ટ કરતાં વધુ ન હોય તેવો સ્થિતિમાનનો તફાવત ખમી શકે છે. એવી શક્ય ગોઠવણ દર્શાવો કે જેમાં લઘુત્તમ સંખ્યાના કેપેસીટરની જરૂર પડે.

2.24 2 Fના એક સમાંતર પ્લેટ કેપેસીટરની બે પ્લેટો વચ્ચેનું અંતર 0.5 cm આપેલ હોય તો તેની દરેક પ્લેટનું ક્ષેત્રફળ કેટલું હશે ? [તમારા જવાબ પરથી તમે સમજી શકશો કે સામાન્ય કેપેસીટરો શા માટે μFના અથવા ઓછા ક્રમના હોય છે. આમ છતાં, ઇલેક્ટ્રોલીટિક કેપેસીટરોનાં મૂલ્યો, સુવાહકો વચ્ચે ખૂબ નાનું અંતર હોવાથી, ઘણાં મોટાં (0.1 F) હોય છે.]

2.25 આકૃતિ 2.35માં દર્શાવેલ નેટવર્કનું સમતુલ્ય કેપેસીટન્સ શોધો. 300 Vના સપ્લાય માટે દરેક કેપેસીટરને સમાંતરે વોલ્ટેજ અને તેના પરનો વિદ્યુતભાર શોધો.



આકૃતિ 2.35

2.26 એક સમાંતર પ્લેટ કેપેસીટરની દરેક પ્લેટનું ક્ષેત્રફળ 90 cm^2 અને બે પ્લેટ વચ્ચેનું અંતર 2.5 mm છે. કેપેસીટરને 400 Vના સપ્લાય સાથે જોડીને વિદ્યુતભારિત કરવામાં આવે છે.

(a) કેપેસીટર વડે કેટલી સ્થિતવિદ્યુતઊર્જા સંગ્રહિત થયેલ છે ?

(b) આ ઊર્જાને બે પ્લેટ વચ્ચેના સ્થિતવિદ્યુત ક્ષેત્રમાં સંગ્રહ પામેલી ગણો અને એકમ કદ દીઠ ઊર્જા u મેળવો. આ પરથી u અને વિદ્યુતક્ષેત્રના માન E વચ્ચેનો સંબંધ મેળવો.

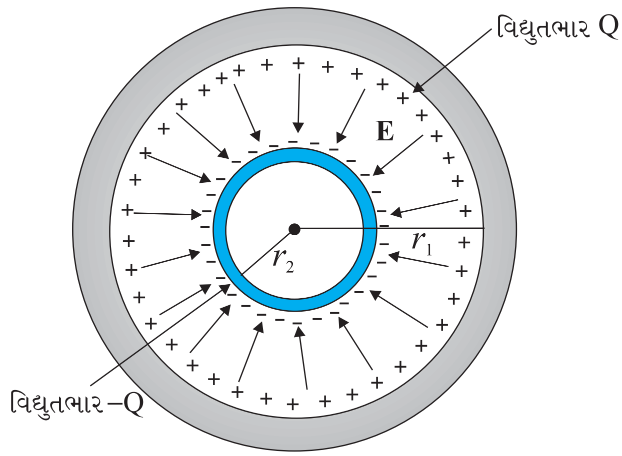
2.27 4 μFના એક કેપેસીટરને 400 V સપ્લાય વડે વિદ્યુતભારિત કરવામાં આવે છે. પછી તેને સપ્લાયથી જુદું પાડીને બીજા વિદ્યુતભારિત ન હોય તેવા 2 μFના કેપેસીટર સાથે જોડવામાં આવે છે. પ્રથમ કેપેસીટરની કેટલી ઊર્જા ઉષ્મા અને વિદ્યુતચુંબકીય વિકિરણના રૂપમાં ગુમાવાય છે ?

2.28 દર્શાવો કે સમાંતર પ્લેટ કેપેસીટરની દરેક પ્લેટ પર લાગતા બળનું માન (1/2)QE છે. જ્યાં, Q કેપેસીટર પરનો વિદ્યુતભાર છે અને E પ્લેટો વચ્ચેના વિદ્યુતક્ષેત્રનું માન છે. અહીં, અવયવ 1/2 કેવી રીતે આવે છે તે સમજાવો.

2.29 ગોળાકાર કેપેસીટરમાં બે સમકેન્દ્રિય ગોળાકાર સુવાહકોને યોગ્ય અવાહક ટેકાઓ વડે તેમના સ્થાનો પર જકડી રાખેલા હોય છે (આકૃતિ 2.36). દર્શાવો કે ગોળાકાર કેપેસીટરનું કેપેસીટન્સ

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0 r_1 r_2}{r_1 - r_2}$$

વડે અપાય છે. જ્યાં, r_1 અને r_2 અનુક્રમે બહારના અને અંદરના ગોળાઓની ત્રિજ્યાઓ છે.



આકૃતિ 2.36

2.30 એક ગોળાકાર કેપેસીટરના અંદરના ગોળાની ત્રિજ્યા 12 cm અને બહારના ગોળાની ત્રિજ્યા 13 cm છે. બહારના ગોળાનું અર્થિંગ (Earthing) કરી દીધેલું છે અને અંદરના ગોળા પર 2.5 μC વિદ્યુતભાર આપેલ છે. બે સમકેન્દ્રિય ગોળાઓ વચ્ચેના અવકાશને ડાયઈલેક્ટ્રીક અચળાંક 32 ધરાવતા પ્રવાહી વડે ભરી દીધેલ છે.

(a) કેપેસીટરનું કેપેસીટન્સ શોધો.

(b) અંદરના ગોળાનું સ્થિતિમાન કેટલું હશે ?

(c) આ કેપેસીટરના કેપેસીટન્સને 12 cm ત્રિજ્યાના અલગ કરેલા ગોળાના કેપેસીટન્સ સાથે સરખાવો. અલગ ગોળા માટેનું મૂલ્ય ખૂબ નાનું કેમ છે તે સમજાવો.

2.31 કાળજીપૂર્વક ઉત્તર આપો :

(a) બે મોટા Q_1 અને Q_2 વિદ્યુતભાર ધરાવતા સુવાહક ગોળાઓ એકબીજાની નજીક લાવવામાં આવે છે. તેમની વચ્ચેનું સ્થિતિવિદ્યુતબળ સચોટતાથી $Q_1Q_2/4\pi\varepsilon_0 r^2$ વડે અપાય છે, જ્યાં, r તેમનાં કેન્દ્રો વચ્ચેનું અંતર છે ?

(b) જો કુલંબનો નિયમ ($1/r^2$ ને બદલે) $1/r^3$ પર આધારિત હોત તો પણ શું ગૉસનો નિયમ સાચો રહેત ?

(c) એક સ્થિત વિદ્યુતક્ષેત્ર સંરચનામાં એક નાના પરિક્ષણ વિદ્યુતભારને સ્થિર સ્થિતિમાંથી મુક્ત કરવામાં આવે છે. તે વિદ્યુતભાર, તે બિંદુમાંથી પસાર થતી ક્ષેત્રરેખા પર ગતિ કરવા લાગશે ?

(d) ન્યુક્લિયસના ક્ષેત્ર વડે ઈલેક્ટ્રોનની પૂર્ણ વર્તુળાકાર કક્ષા દરમિયાન કેટલું કાર્ય થયું હશે ? જો કક્ષા લંબવૃત્તિય (Elliptical) હોય તો શું ?

(e) આપણે જાણીએ છીએ કે વિદ્યુતભારિત સુવાહકની સપાટીની આરપાર (Across) વિદ્યુતક્ષેત્ર અસતત હોય છે. શું ત્યાં વિદ્યુત સ્થિતિમાન પણ અસતત હોય છે ?

(f) એકલ (એકાકી, Single) સુવાહકના કેપેસીટન્સનો તમે શું અર્થ કરશો ?

(g) પાણીનો ડાયઇલેક્ટ્રીક અચળાંક (= 80) એ માઇકા (= 6) કરતાં ઘણો મોટો હોવાના શક્ય કારણનું અનુમાન કરો.

2.32 એક નળાકાર કેપેસીટરમાં બે સમ-અક્ષીય નળાકારોની લંબાઈ 15 cm અને ત્રિજ્યાઓ 1.5 cm અને 1.4 cm છે. બહારના નળાકારનું અર્થિંગ કરી દીધેલું છે અને અંદરના નળાકાર પર 3.5 μC વિદ્યુતભાર આપેલો છે. આ તંત્રનું કેપેસીટન્સ શોધો અને અંદરના નળાકારનું સ્થિતિમાન શોધો. છેડા પરની અસરો (એટલે કે છેડા પર ક્ષેત્ર રેખાઓનું વળવું)ને અવગણો.

2.33 ડાયઇલેક્ટ્રીક અચળાંક 3 અને ડાયઇલેક્ટ્રીક સ્ટ્રેન્થ લગભગ 10^7 V m^{-1} ધરાવતા દ્રવ્યની મદદથી 1 kV રેટીંગ ધરાવતા એક સમાંતર પ્લેટ કેપેસીટરની રચના કરવાની છે. [ડાયઇલેક્ટ્રીક સ્ટ્રેન્થ એ દ્રવ્ય દ્વારા બ્રેકડાઉન પામ્યા વિના (આંશિક આયનીકરણ દ્વારા વિદ્યુતનું વહન શરૂ થયા વિના) સહન કરી શકાતું મહત્તમ વિદ્યુતક્ષેત્ર છે.] સલામતી માટે ડાયઇલેક્ટ્રીક સ્ટ્રેન્થના 10% કરતાં ક્ષેત્ર કદી વધે નહિ તે ઇચ્છનીય છે. 50 pFનું કેપેસીટન્સ મેળવવા માટે પ્લેટોનું લઘુત્તમ ક્ષેત્રફળ કેટલું હોવું જરૂરી છે ?

2.34 નીચેના કિસ્સાઓ માટે સમસ્થિતિમાન પૃષ્ઠો રેખાકૃતિ દ્વારા દર્શાવો.

(a) z-દિશામાં અચળ વિદ્યુતક્ષેત્ર

(b) ક્ષેત્ર કે જેનું માન નિયમિત રીતે વધે છે પરંતુ અચળ દિશામાં (દા.ત., z-દિશા) રહે છે.

(c) ઉગમબિંદુએ એકલ ધન વિદ્યુતભાર.

(d) સમતલમાં સમાંતર અને સમાન અંતરે રહેલા લાંબા વિદ્યુતભારિત તારથી બનેલ નિયમિત જાળી.

2.35 r_1 ત્રિજ્યા અને q_1 વિદ્યુતભાર ધરાવતો એક નાનો ગોળો r_2 ત્રિજ્યા અને q_2 વિદ્યુતભાર ધરાવતી એક ગોળાકાર કવચ વડે ઘેરાયેલ છે. દર્શાવો કે જો q_1 ધન હોય તો (જ્યારે તે બંનેને તાર વડે જોડેલા હોય), કવચ પર કોઈ પણ વિદ્યુતભાર q_2 હોય તો પણ, વિદ્યુતભાર ગોળાથી કવચ પર વહન પામશે જ.

2.36 નીચેનાના જવાબ આપો :

(a) પૃથ્વીની સપાટીથી ઊંચાઈ સાથે ઘટતા વિદ્યુતક્ષેત્રને અનુરૂપ વાતાવરણની ટોચ પરનું સ્થિતિમાન જમીનની સાપેક્ષે 400 kV છે. પૃથ્વીની સપાટીની નજીક ક્ષેત્ર 100 V m^{-1} છે. તો પછી આપણા ઘરમાંથી બહાર ખુલ્લામાં પગ મૂકતાં આપણે વિદ્યુત આંચકો કેમ અનુભવતા નથી ? (ઘરને એક સ્ટીલનું પાંજરૂં ધારો કે જેમાં અંદર કોઈ ક્ષેત્ર નથી !)

(b) એક માણસ એક દિવસ સાંજે તેના ઘરની બહાર એક બે મીટર ઉંચાઈનું અવાહક ચોસલું (Slab) ગોઠવે છે કે જેની ટોચ પર મોટું 1 m^2 ક્ષેત્રફળનું ઍલ્યુમિનિયમનું પતરું રાખેલ છે. બીજે દિવસે સવારે જો તે ધાતુના પતરાને સ્પર્શ કરે તો તેને વિદ્યુતઆંચકો લાગશે ?

(c) હવાની નાની (ઓછી) વાહકતાને કારણે સમગ્ર પૃથ્વી પર વાતાવરણમાં સરેરાશ ડિસ્ચાર્જિંગ પ્રવાહ 1800 A જણાયો છે. તો પછી વાતાવરણ પોતે સમય જતાં સંપૂર્ણ ડિસ્ચાર્જ (વિદ્યુત વિભારિત) થઈને તટસ્થ કેમ બની જતું નથી ? બીજા શબ્દોમાં વાતાવરણ વિદ્યુતભારિત શાને લીધે રહે છે ?

(d) વાતાવરણમાં વીજળી (Lightning) થવા દરમિયાન વિદ્યુતઊર્જા, ઊર્જાના કયા સ્વરૂપોમાં વિખેરાય છે ? (સૂચન : પૃથ્વીની સપાટી આગળ વિદ્યુતક્ષેત્ર લગભગ $100\ V\ m^{-1}$ અધોદિશામાં છે. જે વિદ્યુતભારની પૃષ્ઠઘનતા = $10^{-9}\ C\ m^{-2}$ને અનુરૂપ છે. 50 km સુધી વાતાવરણની સ્હેજ વાહકતા (તેનાથી આગળ ઉપર તો તે સુવાહક છે)ને લીધે, સમગ્ર પૃથ્વીની અંદર દર સેકંડે લગભગ +1800 C વિદ્યુતભાર દાખલ થાય છે. આમ, છતાં પૃથ્વી ડિસ્ચાર્જ થઈ જતી નથી કારણ કે સમગ્ર પૃથ્વી પર થતી ગાજવીજને લીધે સમાન જથ્થાનો ઋણ વિદ્યુતભાર પણ પૃથ્વીમાં દાખલ થાય છે.)