Chapter
13
अतिपरवलयिक फलन

परिभाषा (Definition)

हम जानते हैं कि इकाई वृत्त $x^2+y^2=1$ पर किसी बिन्दु के प्राचलिक निर्देशांक (parametric co-ordinates) $(\cos\theta, \sin\theta)$ होते हैं; इसलिए ये फलन वृत्तीय फलन कहलाते हैं और इकाई अतिपरवलय $x^2-y^2=1$ पर किसी बिन्दु के निर्देशांक $\left(\frac{e^\theta+e^{-\theta}}{2}, \frac{e^\theta-e^{-\theta}}{2}\right)$ अर्थात् $(\cosh\theta, \sinh\theta)$ होते हैं अर्थात् जो सम्बन्ध $\cos\theta, \sin\theta$ और इकाई वृत्त में है वही सम्बन्ध $\cosh\theta, \sinh\theta$ का इकाई अतिपरवलय से है इसी कारण इन फलनों को अतिपरवलयिक फलन (hyperbolic function) कहते हैं।

किसी चर राशि x (वास्तविक या सम्मिश्र) के लिए,

(1) $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, [अतिपरवलयिक sine x कहते हैं]

(2) $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, [अतिपरवलयिक cosine x कहते हैं]

(3) $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

(4) $\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

(5) $\text{cosech}\, x = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$

(6) $\text{sec hx} = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$

- $\sinh 0 = 0, \quad \cosh 0 = 1, \quad \tanh 0 = 0$

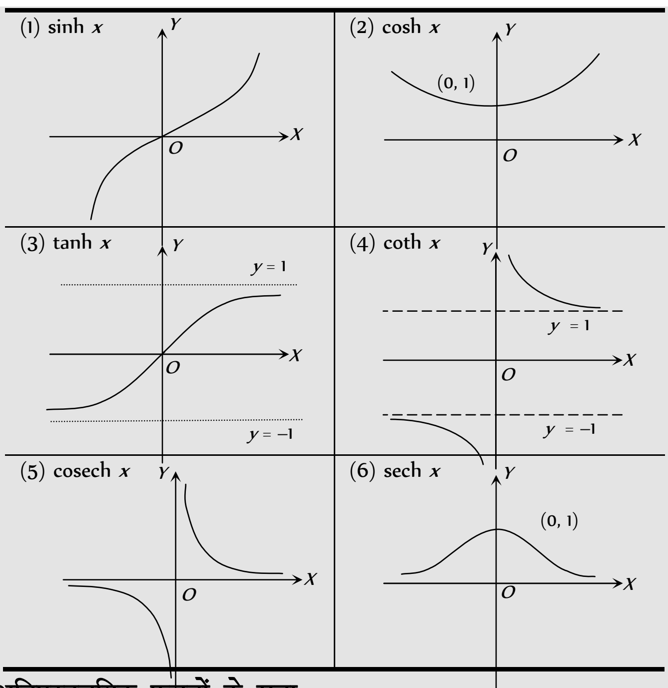
अतिपरवलयिक फलनों के प्रान्त (Domain and range of hyperbolic functions)

माना x कोई वास्तविक संख्या है

सारणी : 13.1

फलन	डोमेन	रेंज
$\sinh x$	R	R
$\cosh x$	R	$[1, \infty)$
$\tanh x$	R	$(-1, 1)$
$\coth x$	$R-\{0\}$	$R-[-1,1]$
$\text{sech}\, x$	R	$(0, 1]$
$\text{cosech}\, x$	$R-\{0\}$	$R-\{0\}$

वास्तविक अतिपरवलयिक फलनों के आलेख (Graph of real hyperbolic functions)



अतिपरवलयिक फलनों के सूत्रा (Formulae for hyperbolic functions)

अतिपरवलयिक फलनों की परिभाषा से उनमें परस्पर निम्न सूत्र आसानी से स्थापित किए जा सकते हैं।

(1) **व्युत्क्रम सूत्र** (Reciprocal formulae)

(i) $\text{cosech } x = \dfrac{1}{\sinh x}$ (ii) $\text{sech } x = \dfrac{1}{\cosh x}$

(iii) $\coth x = \dfrac{1}{\tanh x}$ (iv) $\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$

(v) $\coth x = \dfrac{\cosh x}{\sinh x}$

(2) **वर्ग सूत्र** (Square formulae)

(i) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ (ii) $\text{sec h}^2 x + \tanh^2 x = 1$

(iii) $\coth^2 x - \text{cosec h}^2 x = 1$ (iv) $\cosh^2 x + \sinh^2 x = \cosh 2x$

(3) **योग व अन्तर के लिए सूत्र** (Sum and Difference formulae)

(i) $\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y$

(ii) $\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$

(iii) $\tanh(x \pm y) = \dfrac{\tanh x \pm \tanh y}{1 \pm \tanh x \tanh y}$

(4) **गुणनफल को योग या अन्तर में परिवर्तित करने वाले सूत्र**

(i) $\sinh x + \sinh y = 2 \sinh \dfrac{x+y}{2} \cosh \dfrac{x-y}{2}$

(ii) $\sinh x - \sinh y = 2 \cos h \dfrac{x+y}{2} \sin h \dfrac{x-y}{2}$

(iii) $\cosh x + \cosh y = 2 \cosh \dfrac{x+y}{2} \cosh \dfrac{x-y}{2}$

(iv) $\cosh x - \cosh y = 2 \sinh \dfrac{x+y}{2} \sinh \dfrac{x-y}{2}$

(v) $2 \sinh x \cosh y = \sinh(x+y) + \sinh(x-y)$

(vi) $2 \cosh x \sinh y = \sinh(x+y) - \sinh(x-y)$

(vii) $2 \cosh x \cosh y = \cosh(x+y) + \cosh(x-y)$

(viii) $2 \sinh x \sinh y = \cosh(x+y) - \cosh(x-y)$

(5) **अपवर्त्य कोण के त्रिकोणमितीय अनुपात** (Trigonometric ratio of multiple of an angle)

(i) $\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x = \dfrac{2 \tanh x}{1 - \tanh^2 x}$

(ii) $\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x = 2\cosh^2 x - 1$

$= 1 + 2\sinh^2 x = \dfrac{1 + \tanh^2 x}{1 - \tanh^2 x}$

(iii) $2\cosh^2 x = \cosh 2x + 1$ (iv) $2 \sinh^2 x = \cosh 2x - 1$

(v) $\tanh 2x = \dfrac{2 \tanh x}{1 + \tanh^2 x}$ (vi) $\sinh 3x = 3 \sinh x + 4 \sinh^3 x$

(vii) $\cosh 3x = 4\cosh^3 x - 3\cosh x$

(viii) $\tanh 3x = \dfrac{3 \tanh x + \tanh^3 x}{1 + 3\tanh^2 x}$

(6) (i) $\cosh x + \sinh x = e^x$ (ii) $\cosh x - \sinh x = e^{-x}$

(iii) $(\cosh x + \sinh x)^n = \cosh nx + \sinh nx$

अतिपरवलयनिक फलनों का रूपान्तरण
(Transformation of a hyperbolic functions)

चूँकि, $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

$\Rightarrow \sinh x = \sqrt{\cosh^2 x - 1} \Rightarrow \sinh x = \dfrac{\sqrt{1 - \text{sech}^2 x}}{\text{sec h } x}$

$\Rightarrow \sinh x = \dfrac{\tanh x}{\sqrt{1 - \tanh^2 x}} \Rightarrow \sinh x = \dfrac{1}{\sqrt{\coth^2 x - 1}}$

$\sinh x = \dfrac{1}{\text{cosech } x}$

इसी प्रकार $\cosh x, \tanh x, \coth x$ ....को अन्य अतिपरवलयिक फलनों के पदों में व्यक्त कर सकते हैं।

अतिपरवलयिक फलनों का प्रसार
(Expansion of hyperbolic functions)

(1) $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \dfrac{x^7}{7!} + ...$

(2) $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dfrac{x^6}{6!} + ...$

(3) $\tanh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = x - \dfrac{x^3}{3} + 2x^5 - \dfrac{17}{315}x^7 + ...$

$\coth x, \text{cosech } x$ के प्रसार का अस्तित्व नहीं है, क्योंकि $\coth(0) = \infty, \text{cosech}(0) = \infty$.

अतिपरवलयिक एवं वृत्तीय फलनों में सम्बन्ध
(Relation between hyperbolic and circular functions)

आयलर (Euler) सूत्र से, $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ ....(i)

तथा $e^{-ix} = \cos x - i \sin x$ ....(ii)

समीकरण (i) तथा (ii) को जोड़ने एवं घटाने पर,

$\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ तथा $\sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$

इन सूत्रों में x के स्थान पर ix प्रतिस्थापित करने पर,

$\cos(ix) = \dfrac{e^{-x} + e^x}{2} = \cosh x$

$\therefore \cos(ix) = \cosh x$

$\sin(ix) = \dfrac{e^{-x} - e^x}{2i} = i\left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right)$

$\therefore \sin(ix) = i \sinh x$

पुनः $\tan(ix) = \dfrac{\sin(ix)}{\cos(ix)} = \dfrac{i \sinh x}{\cosh x}$

$\therefore \tan(ix) = i \tanh x$

इसी प्रकार, $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ तथा $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ में x के स्थान पर ix प्रतिस्थापित करने पर,

$\cosh(ix) = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \cos x$

पुनः $\tanh(ix) = \dfrac{\sinh(ix)}{\cosh(ix)} = \dfrac{i \sin x}{\cos x} = i \tan x$

इस प्रकार अतिपरवलयिक एवं त्रिकोणमितीय फलनों में निम्न सम्बन्ध स्थापित हो जाते हैं।

(1)	$\sin(ix) = i\sinh x$ $\sinh(ix) = i\sin x$ $\sinh x = -i\sin(ix)$ $\sin x = -i\sin h(ix)$	(2)	$\cos(ix) = \cosh x$ $\cosh(ix) = \cos x$ $\cosh x = \cos(ix)$ $\cos x = \cosh(ix)$
(3)	$\tan(ix) = i\tanh x$ $\tanh(ix) = i\tan x$ $\tanh x = -i\tan(ix)$ $\tan x = -i\tanh(ix)$	(4)	$\cot(ix) = -i\coth x$ $\coth(ix) = -i\cot x$ $\coth x = i\cot(ix)$ $\cot x = i\coth(ix)$
(5)	$\sec(ix) = \text{sech} x$ $\sec h(ix) = \sec x$ $\sec hx = \sec(ix)$ $\sec x = \text{sech}(ix)$	(6)	$\text{cosec}(ix) = -i\,\text{cosech}\, x$ $\text{cosech}(ix) = -i\,\text{cosec}\, x$ $\text{cosech}\, x = i\,\text{cosec}(ix)$ $\text{cosec}\, x = i\,\text{cosech}(ix)$

अतिपरवलयिक फलनों के आवर्तनांक
(Period of hyperbolic functions)

यदि किसी फलन $f(x)$ के लिए $f(x+T) = f(x)$ हो, तो $f(x)$ आवर्ती फलन कहलाता है एवं T का न्यूनतम धनात्मक मान फलन का आवर्तनांक कहलाता है।

$\because$ $\sinh x = \sinh(2\pi i + x)$, $\cosh x = \cosh(2\pi i + x)$ तथा $\tanh x = \tanh(\pi i + x)$

अतः इन फलनों के आवर्तनांक क्रमशः $2\pi i, 2\pi i$ तथा πi हैं। $\text{cosech}\, x$, $\text{sech}\, x$ और $\coth x$ के आवर्तनांक क्रमशः $2\pi i$, $2\pi i$ एवं πi हैं।

- यदि $f(x)$ का आवर्तनांक T है, तो $f(nx)$ का आवर्तनांक $\left(\frac{T}{n}\right)$ होगा।
- अतिपरवलयिक फलन आवर्ती फलन नहीं होते और न ही इनके वक्र आवर्ती वक्र होते हैं। लेकिन यह आवर्ती फलनों के बीजीय गुण को प्रदर्शित करते हैं और काल्पनिक आवर्त रखते हैं।

प्रतिलोम अतिपरवलयिक फलन
(Inverse hyperbolic functions)

यदि $\sinh y = x$ हो, तो $y = \sinh^{-1} x$ जिसे अतिपरवलयिक ज्या (hyperbolic sine) का प्रतिलोम फलन कहते हैं। इसी प्रकार अन्य अतिपरवलयिक फलनों $\text{cosech}^{-1} x, \cosh^{-1} x, \tanh^{-1} x$ इत्यादि के प्रतिलोम फलन परिभाषित हैं।

(1) **प्रतिलोम अतिपरवलयिक फलनों के प्रान्त** (Domain) **व परिसर** (Range)

सारणी : 13.2

फलन	प्रान्त	परिसर
$\sinh^{-1} x$	R	R
$\cosh^{-1} x$	$[1, \infty)$	R
$\tanh^{-1} x$	$(-1, 1)$	R
$\coth^{-1} x$	$R - [-1, 1]$	$R - \{0\}$
$\text{sech}^{-1} x$	$(0, 1]$	R
$\text{cosech}^{-1} x$	$R - \{0\}$	$R - \{0\}$

(2) **प्रतिलोम वृत्तीय एवं प्रतिलोम अतिपरवलयिक फलनों में सम्बन्ध : कार्यविधि :** माना $\sinh^{-1} x = y$

$\Rightarrow x = \sinh y = -i\sin(iy) \Rightarrow ix = \sin(iy) \Rightarrow iy = \sin^{-1}(ix)$

$\Rightarrow y = -i\sin^{-1}(ix) \Rightarrow \sinh^{-1} x = -i\sin^{-1}(ix)$

अतः निम्न सम्बन्ध प्राप्त होते हैं।

(i) $\sinh^{-1} x = -i\sin^{-1}(ix)$ (ii) $\cosh^{-1} x = -i\cos^{-1} x$

(iii) $\tanh^{-1} x = -i\tan^{-1}(ix)$ (iv) $\sec h^{-1} x = -i\sec^{-1} x$

(v) $\text{cosec}\, h^{-1} x = i\,\text{cosec}^{-1}(ix)$

(3) **किसी एक प्रतिलोम अतिपरवलयिक फलन को अन्य प्रतिलोम अतिपरवलयिक फलनों के पदों में व्यक्त करना :** $\sinh^{-1} x$ को अन्य पदों में व्यक्त करना।

(i) माना $\sinh^{-1} x = y \Rightarrow x = \sinh y$

$\Rightarrow \text{cosech}\, y = \frac{1}{x} \Rightarrow y = \text{cosec}^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$

(ii) $\because \cosh y = \sqrt{1+\sinh^2 y} = \sqrt{1+x^2}$

$\because y = \cosh^{-1}\sqrt{1+x^2} \Rightarrow \sinh^{-1} x = \cosh^{-1}\sqrt{1+x^2}$

(iii) $\because \tanh y = \frac{\sinh y}{\cosh y} = \frac{\sinh y}{\sqrt{1+\sinh^2 y}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

$\therefore y = \tanh^{-1}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow \sinh^{-1} x = \tanh^{-1}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

(iv) $\because \coth y = \frac{\sqrt{1+\sinh^2 y}}{\sinh y} = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$

$\therefore y = \coth^{-1}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \Rightarrow \sinh^{-1} x = \coth^{-1}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$

(v) $\because \sec hy = \frac{1}{\cosh y} = \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$y = \sec h^{-1}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow \sinh^{-1} x = \sec h^{-1}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

(vi) $\sinh^{-1} x = \text{cosech}^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$; $\coth^{-1} x = \tanh^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$

$\sec h^{-1} x = \cosh^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$; $\text{cosech}^{-1} = \sinh^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$

- यदि x वास्तविक हों, तो उपरोक्त सभी 6 प्रतिलोम फलनों का एकल (single) मान होगा।

(4) **प्रतिलोम अतिपरवलयिक फलन एवं लघुगणकीय फलनों के बीच सम्बन्ध : कार्यविधि :** माना $\sinh^{-1} x = y$

$\Rightarrow x = \sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \Rightarrow e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0$

$\Rightarrow e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2+4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2+1}$

परन्तु $e^y > 0, \forall y$ एवं $x < \sqrt{x^2+1}$

$\therefore e^y = x + \sqrt{x^2+1} \Rightarrow y = \log(x + \sqrt{x^2+1})$

$\therefore \sinh^{-1} x = \log(x + \sqrt{x^2+1})$

उपर्युक्त विधि से प्रतिलोम अतिपरिवलयिक फलनों के मुख्य मानों को निम्न लघुगणकीय रूप में व्यक्त कर सकते हैं।

(i) $\sinh^{-1} x = \log(x + \sqrt{x^2+1})$, $(-\infty < x < \infty)$

(ii) $\cosh^{-1} x = \log(x + \sqrt{x^2-1})$, $(x \geq 1)$

(iii) $\tanh^{-1} x = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, $|x| < 1$

(iv) $\coth^{-1} x = \frac{1}{2}\log\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$, $|x|>1$

(v) $\text{sec h}^{-1}x = \log\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$, $0 < x \le 1$

(vi) $\text{cosech}^{-1}x = \log\left(\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right)$, $(x \ne 0)$

- $\text{cosech}^{-1}x, \text{sec h}^{-1}x$ तथा $\coth^{-1}x$ के सूत्र क्रमशः $\sinh^{-1}x, \cosh^{-1}x$ एवं $\tanh^{-1}$ के सूत्रों में x के स्थान पर $\frac{1}{x}$ लिखने से प्राप्त हो जाते हैं।

प्रतिलोम त्रिकोणमितीय एवं प्रतिलोम अतिपरवलयिक फलनों का पृथक्करण (Separation of inverse trigonometric and inverse hyperbolic functions)

यदि $\sin(\alpha + i\beta) = x + iy$ हो, तो $(\alpha + i\beta)$, $(x+iy)$ के sine का प्रतिलोम कहलाता है।

$$\sin^{-1}(x+iy) = \alpha + i\beta$$

निम्लिखित प्रतिलोम फलनों को आसानी से स्थापित किया जा सकता है।

(1) $$\cos^{-1}(x+iy) = \frac{1}{2}\cos^{-1}\left[(x^2+y^2) - \sqrt{(1-x^2+y^2)^2+4x^2y^2}\right] + \frac{i}{2}\cosh^{-1}\left[(x^2+y^2)+\sqrt{(1-x^2+y^2)^2+4x^2y^2}\right]$$

(2) $$\sin^{-1}(x+iy) = \frac{\pi}{2} - \cos^{-1}(x+iy)$$
$$= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\cos^{-1}\left[(x^2+y^2) - \sqrt{(1-x^2+y^2)^2+4x^2y^2}\right] - \frac{i}{2}\cosh^{-1}\left[(x^2+y^2)+\sqrt{(1-x^2+y^2)^2+4x^2y^2}\right]$$

(3) $$\tan^{-1}(x+iy) = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2-y^2}\right) + \frac{i}{2}\tanh^{-1}\left(\frac{2y}{1+x^2+y^2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2-y^2}\right) + \frac{i}{4}\log\left[\frac{x^2+(1+y)^2}{x^2+(1-y)^2}\right]$$

(4) $\sin^{-1}(\cos\theta + i\sin\theta) = \cos^{-1}(\sqrt{\sin\theta}) + i\sinh^{-1}(\sqrt{\sin\theta})$

या $\cos^{-1}(\sqrt{\sin\theta}) + i\log(\sqrt{\sin\theta} + \sqrt{1+\sin\theta})$

(5) $\cos^{-1}(\cos\theta + i\sin\theta) = \sin^{-1}(\sqrt{\sin\theta}) - i\sinh^{-1}(\sqrt{\sin\theta})$

या $\sin^{-1}(\sqrt{\sin\theta}) - i\log(\sqrt{\sin\theta} + \sqrt{1+\sin\theta})$

(6) $\tan^{-1}(\cos\theta + i\sin\theta) = \frac{\pi}{4} + \frac{i}{4}\log\left(\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}\right)$, $(\cos\theta) > 0$

तथा $\tan^{-1}(\cos\theta + i\sin\theta) = \left(-\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{4}\log\left(\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}\right)$, $(\cos\theta) < 0$

चूँकि प्रत्येक प्रतिलोम अतिपरवलयिक फलन को लघुगणकीय फलन के पदों में व्यक्त कर सकते हैं। इसलिए सम्मिश्र संख्याओं के प्रतिलोम अतिपरवलयिक फलन के वास्तविक एवं काल्पनिक भागों में पृथक्करण करके अभीष्ट विधि का उपयोग करते हैं।

- प्रतिलोम वृत्तीय एवं प्रतिलोम अतिपरवलयिक फलनों के अनेक मान होते हैं।

Tips & Tricks

✍ अतिपरवलयिक फलनों का कोई भी सूत्र प्राप्त करने के लिए त्रिकोणमितीय फलनों के संगत सूत्र में निम्न प्रतिस्थापन करते हैं।

$\sin x \longrightarrow i\sinh x$

$\cos x \longrightarrow \cosh x$

$\tan x \longrightarrow i\tanh x$

$\sin^2 x \longrightarrow -\sinh^2 x$

$\cos^2 x \longrightarrow \cosh^2 x$

$\tan^2 x \longrightarrow -\tanh^2 x$

उदाहरण के लिए,

$\cosh 2x$ का $\tanh x$ के पदों में सूत्र ज्ञात करने के लिए, त्रिकोणमिति के संगत सूत्र $\cos 2x = \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$ में $\tan^2 x$ को $-\tanh^2 x$ से प्रतिस्थापित करने पर, $\cosh 2x = \frac{1+\tanh^2 x}{1-\tanh^2 x}$.

Ordinary Thinking

Objective Questions

अतिपरवलयिक फलन

1. $\frac{\sinh x - \sinh y}{\cosh x - \cosh y} =$

(a) $2\coth(x+y)$ (b) $\tanh\left(\frac{x+y}{2}\right)$

(c) $\coth\left(\frac{x+y}{2}\right)$ (d) $\text{cot h}\left(\frac{x-y}{2}\right)$

2. यदि $\tanh^2 x = \tan^2\theta$, तब $\cosh 2x =$ [EAMCET 1998]

(a) $-\sin 2\theta$ (b) $\sec 2\theta$

(c) $\cos 3\theta$ (d) $\cos 2\theta$

3. $\cosh 2 + \sinh 2 =$ [EAMCET 2000]

(a) $1/e$ (b) e

(c) $1/e^2$ (d) e^2

4. यदि $\cos(x+iy) = A + iB$, तब $A =$ [RPET 1994]

(a) $\cos x \cosh y$ (b) $\sin x \sinh y$

(c) $-\sin x \sinh y$ (d) $\cos x \sinh y$

5. $\text{sec h}(i\pi)$ का मान है [RPET 1999]

(a) – 1 (b) i

(c) 0 (d) 1

6. $\cos ix + i\sin ix =$

(a) e^{ix} (b) e^{-ix}

(c) e^{x} (d) e^{-x}

7. $\sinh\left(\frac{\pi}{6}i\right) =$
(a) $-i/2$ (b) $i/2$
(c) $i\frac{\sqrt{3}}{2}$ (d) $-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

8. $\sec h(\pi i) + \text{cosec } h\left(\frac{\pi}{2}i\right) =$
(a) $1-i$ (b) $-1+i$
(c) $-1-i$ (d) $1+i$

9. $\cosh\frac{\theta}{3}$ का आवर्तनांक है
(a) $6\pi i$ (b) $2\pi i$
(c) πi (d) $9\pi i$

10. $\sinh\left(\frac{x}{2}\right)$ का आवर्तनांक है
(a) $2\pi i$ (b) 2π
(c) $4\pi i$ (d) 4π

11. यदि $x = \log(y + \sqrt{y^2+1})$, तब $y =$ [EAMCET 1995]
(a) $\tanh x$ (b) $\coth x$
(c) $\sinh x$ (d) $\cosh x$

12. यदि $\cosh^{-1} x = \log(2+\sqrt{3})$, तब $x =$ [EAMCET 2000]
(a) 2 (b) 1
(c) 3 (d) 5

13. $\log(3+2\sqrt{2}) =$ [RPET 1990]
(a) $\sinh^{-1} 3$ (b) $\cosh^{-1} 3$
(c) $\tanh^{-1} 3$ (d) $\cosh^{-1} 3$

14. $\sec h^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) =$ [RPET 1998]
(a) $\log(\sqrt{3}+\sqrt{2})$ (b) $\log(\sqrt{3}+1)$
(c) $\log(2+\sqrt{3})$ (d) इनमें से कोई नहीं

15. $\sinh^{-1}(2^{3/2}) =$ [EAMCET 2002]
(a) $\log(2+\sqrt{18})$ (b) $\log(3+\sqrt{8})$
(c) $\log(3-\sqrt{8})$ (d) $\log(\sqrt{8}+\sqrt{27})$

16. यदि $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, तब $\log\sec x$ का मान होगा
(a) $2\coth^{-1}\left(\text{cosec}^2\frac{x}{2} - 1\right)$ (b) $2\coth^{-1}\left(\text{cosec}^2\frac{x}{2} + 1\right)$
(c) $2\text{cosech}^{-1}\left(\cot^2\frac{x}{2} - 1\right)$ (d) $2\text{cosech}^{-1}\left(\cot^2\frac{x}{2} + 1\right)$

17. $\cosh^{-1}(\sec x)$ का मान है
(a) $\log\left(\frac{1+\sin x}{\cos x}\right)$ (b) $\log\left(\frac{1-\sin x}{\cos x}\right)$
(c) $\log\left(\frac{1+\cos x}{\sin x}\right)$ (d) $\log\left(\frac{1-\cos x}{\sin x}\right)$

18. $\sinh^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$ का मान है
(a) $\tanh^{-1} x$ (b) $\coth^{-1} x$
(c) $\sinh^{-1}(2x)$ (d) $\cosh^{-1}(2x)$

19. यदि $\cos\alpha\cosh\beta = 1$, तब $\beta =$
(a) $\log\sec\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ (b) $\log\tan\alpha$
(c) $\log(\sec\alpha + \tan\alpha)$ (d) $\log\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

20. $\sinh^{-1}(\sinh^{-1}\theta) =$
(a) $i\theta$ (b) θ
(c) $-i\theta$ (d) $\pi + i\theta$

21. यदि $\sinh^{-1} x = \text{cosech}^{-1} y$,तब सही कथन है
(a) $x = y$ (b) $xy = -1$
(c) $xy = 1$ (d) $x + y = 0$

22. $\tan^{-1}(1+i)$ का वास्तविक भाग है
(a) $-\frac{1}{2}\tan^{-1}(2)$ (b) $\frac{1}{2}\tan^{-1}(2)$
(c) $-\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ (d) 0

23. $\cosh^{-1}(1)$ का वास्तविक भाग है
(a) -1 (b) 1
(c) 0 (d) इनमें से कोई नहीं

24. $\sin^{-1}\left(\frac{5\sqrt{7}-9i}{16}\right)$ का काल्पनिक भाग है
(a) $\log 2$ (b) $-\log 2$
(c) 0 (d) इनमें से कोई नहीं

25. $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)$ का वास्तविक भाग है
(a) $\pi/3$ (b) $\pi/4$
(c) $\log\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$ (d) इनमें से कोई नहीं

26. $\cosh 2x =$ [RPET 1985; 86; 88; 90; 2002]
(a) $\cosh^2 x - \sinh^2 x$ (b) $1 + 2\cosh^2 x$
(c) $1 + 2\sinh^2 x$ (d) इनमें से कोई नहीं

27. $\sinh 3z =$ [RPET 1990, 92]
(a) $3\sinh z - 4\sinh^3 z$ (b) $4\sinh^3 z - 3\sinh z$
(c) $3\sinh z + 4\sinh^3 z$ (d) इनमें से कोई नहीं

28. निम्न में से कौनसा कथन सत्य है [RPET 1988, 94]
(a) $\sinh^2 x - \cosh^2 x = 1$
(b) $\sinh^2 x + \cosh^2 x = 1$
(c) $\text{sech}^2 x - \tanh^2 x = 1$
(d) $\coth^2 x - \text{cosech}^2 x = 1$

29. $\tanh(x+y) =$ [RPET 1990, 91,92]
(a) $\frac{\tanh x + \tanh y}{1 - \tanh x \tanh y}$ (b) $\frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}$
(c) $\frac{\tanh x - \tanh y}{1 - \tanh x \tanh y}$ (d) $\frac{\tanh x - \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}$

30. $\sinh^2 x$ = [RPET 1991]

(a) $\cosh 2x - 1$ (b) $\cosh^2 x + 1$

(c) $\frac{1}{2}(\cosh 2x - 1)$ (d) $\frac{1}{2}(\cosh 2x + 1)$

31. $x = 0$ के लिए कौन सा फलन परिभाषित नहीं है

(a) $\tanh x$ (b) $\text{cosech } x$

(c) $\sin x$ (d) $\text{sech} x$

32. $(\cosh\theta + \sinh\theta)^n$ का मान होगा

(a) $e^{n\theta}$ (b) $e^{-n\theta}$

(c) $e^{in\theta}$ (d) $e^{-in\theta}$

33. $\frac{e^{2\theta}-1}{e^{2\theta}+1}$ का मान है

(a) $\coth\ \theta$ (b) $\coth\ 2\theta$

(c) $\tanh\ \theta$ (d) $\tanh\ 2\theta$

34. $\frac{1+\tanh x}{1-\tanh x}$ =

(a) e^{2x} (b) e^{-2x}

(c) i (d) – 1

35. यदि $u = \log\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$,तब $\tanh\frac{u}{2}$ का मान है [RPET 1997]

(a) $\cot\frac{x}{2}$ (b) $-\cot\frac{x}{2}$

(c) $-\tan\frac{x}{2}$ (d) $\tan\frac{x}{2}$

36. $\frac{\text{cosech } x}{\sqrt{\text{cosech}^2 x + 1}}$ =

(a) $\tanh x$ (b) $\coth x$

(c) $\text{sech } x$ (d) $\cosh x$

37. यदि $f(x) = \cosh x + \sinh x$ एवं $f(p) = f(x).f(y)$, तो p का मान है

(a) xy (b) $x - y$

(c) $x + y$ (d) इनमें से कोई नहीं

38. यदि $f(x) = \cosh x - \sinh x$, तब $f(x_1 + x_2 + ... + x_n)$ =

(a) $f(x_1).f(x_2)........ f(x_n)$

(b) $f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n)$

(c) 0

(d) 1

39. $\text{cosech}\left(\frac{\pi i}{6}\right)$ =

(a) – 2 (b) 2

(c) – 2 i (d) 2 i

40. $\sinh\left(x + \frac{\pi i}{2}\right)$ =

(a) $i\cosh x$ (b) $-i\cosh x$

(c) $\cos x$ (d) $-\cos x$

41. $\cos(i^5 x)$ = [RPET 1989]

(a) $i\cosh x$ (b) $-i\cosh x$

(c) $\cosh x$ (d) $-\cosh x$

42. यदि $\sin(x+iy) = A + iB$, तब A = [RPET 1994]

(a) $\sinh x \cos y$ (b) $\sin x \cosh y$

(c) $\cos x \sinh y$ (d) $\cosh x \sin y$

43. $\cosh(\alpha + i\beta) - \cosh(\alpha - i\beta)$ का काल्पनिक भाग है [RPET 2000]

(a) $2\sinh\alpha\sinh\beta$ (b) $2\sinh\alpha\sin\beta$

(c) $\cosh\alpha\cos\beta$ (d) $2\cos\alpha\cosh\beta$

44. $\cosh(\alpha + i\beta)$ वास्तविक भाग है [RPET 1995]

(a) $\cosh\alpha\cos\beta$ (b) $\cos\alpha\cos\beta$

(c) $\cos\alpha\cosh\beta$ (d) $\sin\alpha\sinh\beta$

45. $\sinh(x + 2\pi n i)$ का मान है

(a) $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$ (b) $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$

(c) $\frac{e^x - e^{-x}}{2i}$ (d) $\frac{e^x + e^{-x}}{2i}$

46. $\sin^2(ix) + \cosh^2 x$ =

(a) 1 (b) – 1

(c) $2\cosh^2 x$ (d) $\cosh 2x$

47. $\coth\left(\frac{nx}{4}\right)$ का आवर्तनांक है

(a) $\frac{\pi i}{n}$ (b) $\frac{4\pi i}{n}$

(c) $\frac{n\pi i}{4}$ (d) πi

48. e^z का आवर्तनांक है

(a) 2π (b) π

(c) $2\pi i$ (d) πi

49. $\cosh(4x)$ का आवर्तनांक है

(a) $2\pi i$ (b) πi

(c) $\frac{\pi i}{2}$ (d) 2π

50. $\sinh^{-1} x$ = [RPET 1987, 93, 96, 2000]

(a) $\log(x + \sqrt{1 - x^2})$ (b) $\log(x + \sqrt{x^2 + 1})$

(c) $\log(x + \sqrt{x^2 - 1})$ (d) इनमें से कोई नहीं

51. $\cosh^{-1} x$ = [RPET 1988, 90, 92, 2002]

(a) $\log(x + \sqrt{x^2 + 1})$ (b) $\log(x - \sqrt{x^2 + 1})$

(c) $\log(x - \sqrt{x^2 - 1})$ (d) $\log(x + \sqrt{x^2 - 1})$

52. $\tanh^{-1} x$ = [RPET 1988, 91, 92, 99]

(a) $\frac{1}{2}\log\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ (b) $\frac{1}{2}\log\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

(c) $\frac{1}{2}\log\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ (d) $\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

53. $\sinh^{-1}(1)$ का मान है [RPET 1989]

(a) 0 (b) $\log(\sqrt{2} + 1)$

(c) $\log(1 - \sqrt{2})$ (d) इनमें से कोई नहीं

54. $\coth^{-1} x$ = [RPET 1990]

(a) $\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ (b) $\frac{1}{2}\log\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

(c) $\frac{1}{2}\log\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ (d) इनमें से कोई नहीं

55. $\text{cosech}^{-1}x =$ [RPET 1991]

(a) $\log\left(\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right)$ (b) $\log\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$

(c) $\log\left(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$ (d) $\log\left(\frac{1-\sqrt{1+x^2}}{x}\right)$

56. $-i\tan^{-1}(ix) =$

(a) $\tanh^{-1}x$ (b) $-\tanh^{-1}x$

(c) $\tanh^{-1}(ix)$ (d) इनमें से कोई नहीं

57. $2\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) =$

(a) $\cosh^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ (b) $\cosh^{-1}(\sqrt{3})$

(c) $\cosh^{-1}(3)$ (d) $\cosh^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)$

58. यदि $\tanh x = \frac{3}{4}$, तब x का मान होगा

(a) $\sqrt{7}$ (b) $-\sqrt{7}$

(c) $\log\sqrt{7}$ (d) $-\log\sqrt{7}$

59. $\sinh^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) =$

(a) $\tanh^{-1}(\sqrt{5})$ (b) $\tanh^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

(c) $\tanh^{-1}(\sqrt{3})$ (d) $\tanh^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$

60. यदि $\sin^{-1}(A+iB) = x+iy$, तब $\frac{A}{B} =$ [RPET 1987]

(a) $\frac{\tan x}{\tanh y}$ (b) $\frac{\tanh x}{\tan y}$

(c) $\frac{\tanh x}{\tanh y}$ (d) $\frac{\cos x}{\cosh y}$

61. $\cosh^{-1}x$ का व्यापक मान है

(a) $2\pi ri + \log(x+\sqrt{x^2+1})$

(b) $2\pi ri + \log(x+\sqrt{x^2-1})$

(c) $\pi ri + (-1)^r \log(x+\sqrt{x^2+1})$

(d) $2\pi ri + (-1)^r \log(x+\sqrt{x^2-1})$

62. यदि $x = \log\left(\frac{1}{y}+\sqrt{\frac{1}{y^2}+1}\right)$, तब $y =$

(a) $\tanh x$ (b) $\cosh x$

(c) $\sinh x$ (d) $\text{cosech}\, x$

Critical Thinking

Objective Questions

1. यदि $u = \log\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$, तब $\cosh u =$ [EAMCET 1991; RPET 1999]

(a) $\sec x$ (b) $\text{cosec}\, x$

(c) $\tan x$ (d) $\sin x$

2. यदि $\cosh\alpha = \sec x$, तब $\tan^2\frac{x}{2} =$ [RPET 1998]

(a) $\cos^2\frac{\alpha}{2}$ (b) $\sin^2\frac{\alpha}{2}$

(c) $\cot^2\frac{\alpha}{2}$ (d) $\tanh^2\frac{\alpha}{2}$

3. यदि $\cos(u+iv) = x+iy$, तब $x^2+y^2+1 =$ [RPET 1999]

(a) $\cos^2 u + \sinh^2 v$ (b) $\sin^2 u + \cosh^2 v$

(c) $\cos^2 u + \cosh^2 v$ (d) $\sin^2 u + \sinh^2 v$

4. $\sin^{-1}(\text{cosec}\,\theta)$ का काल्पनिक भाग है

(a) $\log\left(\cot\frac{\theta}{2}\right)$ (b) $\frac{\pi}{2}$

(c) $\frac{1}{2}\log\left(\cot\frac{\theta}{2}\right)$ (d) इनमें से कोई नहीं

5. यदि $\cosh z = \sec\theta$, तब $\sinh z =$

(a) $\text{cosec}\,\theta$ (b) $\cot\theta$

(c) $\tan\frac{\theta}{2}$ (d) $\tan\theta$

6. यदि $\text{cosec}\,\theta = \coth x$, तब $\tan\theta$ का मान है

(a) $\cosh x$ (b) $\sinh x$

(c) $\tanh x$ (d) $\text{cosech}\, x$

7. यदि $\tan\left(\frac{x}{2}\right)\coth\left(\frac{x}{2}\right) = 1$, तब $\cos x\cosh x =$

(a) 1 (b) -1

(c) $\cos^2 x$ (d) $\sinh^2 x$

8. यदि $\sin x\cosh y = \cos\theta$ तथा $\cos x\sinh y = \sin\theta$, तब $\sinh^2 y =$

(a) $\sin^2 x$ (b) $\cosh^2 x$

(c) $\cos^2 x$ (d) 1

9. $\tanh\left(\frac{\pi i}{4}\right) - \coth\left(\frac{\pi i}{4}\right) =$

(a) 0 (b) 2

(c) $\sqrt{2}$ (d) इनमें से कोई नहीं

10. $\sin^2(x+iy)$ का काल्पनिक भाग है [RPET 1998]

(a) $\frac{1}{2}\cosh 2x\cos 2y$ (b) $\frac{1}{2}\cos 2x\cosh 2y$

(c) $\frac{1}{2}\sinh 2x\sin 2y$ (d) $\frac{1}{2}\sin 2x\sinh 2y$

11. $2\coth^{-1}\left(\frac{z}{2}\right) =$

(a) $\log\left(\frac{z-2}{z+2}\right)$ (b) $\frac{1}{2}\log\left(\frac{z-1}{z+1}\right)$

(c) $\frac{1}{2}\log\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$ (d) $-\log\left(\frac{z-2}{z+2}\right)$

12. $\text{sech}^{-1}(\sin x) =$

(a) $\log\cot\frac{x}{2}$ (b) $\log\tan\frac{x}{2}$

(c) $\log\cot x$ (d) इनमें से कोई नहीं

13. यदि $\text{cosech}^{-1}(1) = x + iy$, तब $y =$ [RPET 1986]

(a) 1 (b) 0

(c) $\log(1+\sqrt{2})$ (d) -1

14. $\tanh^{-1}(2^{-1})$ का मान है

(a) log 2 (b) $\log\ 2^{-1}$

(c) $\log\sqrt{3}$ (d) इनमें से कोई नहीं

15. $\tan^{-1}(\cos\theta + i\sin\theta)$ का काल्पनिक भाग है

(a) $\tanh^{-1}(\sin\theta)$ (b) $\tanh^{-1}(\infty)$

(c) $\frac{1}{2}\tanh^{-1}(\sin\theta)$ (d) इनमें से कोई नहीं

Answers

अतिपरवलयिक फलन

1	c	2	b	3	d	4	a	5	a
6	d	7	b	8	c	9	a	10	c
11	c	12	a	13	b	14	c	15	b
16	a	17	a	18	a	19	c	20	b
21	c	22	a	23	c	24	b	25	b
26	c	27	c	28	d	29	b	30	c
31	b	32	a	33	c	34	a	35	d
36	c	37	c	38	a	39	c	40	a
41	c	42	b	43	b	44	a	45	b
46	a	47	b	48	c	49	c	50	b
51	d	52	d	53	b	54	b	55	a
56	a	57	c	58	c	59	b	60	a
61	b	62	d						

Critical Thinking Questions

1	a	2	d	3	c	4	a	5	d
6	b	7	a	8	c	9	d	10	d
11	d	12	a	13	b	14	c	15	c

Answers and Solutions

अतिपरवलयिक फलन

1. (c) $\frac{\sinh x - \sinh y}{\cosh x - \cosh y} = \frac{2\cosh\frac{x+y}{2}\sinh\frac{x-y}{2}}{2\sinh\frac{x+y}{2}\sinh\frac{x-y}{2}} = \coth\left(\frac{x+y}{2}\right)$.

2. (b) $\cosh 2x = \frac{1+\tanh^2 x}{1-\tanh^2 x} = \frac{1+\tan^2\theta}{1-\tan^2\theta}$

$= \frac{1}{\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}} = \frac{1}{\cos 2\theta} = \sec 2\theta$.

3. (d) $\cosh 2 + \sinh 2 = \frac{e^2+e^{-2}}{2} + \frac{e^2-e^{-2}}{2} = e^2$.

4. (a) $\cos(x+iy) = A + iB$

$\Rightarrow \cos x\cos(iy) - \sin x\sin(iy) = A + iB$

$\Rightarrow \cos x\cosh y - i\sin x\sinh y = A + iB$

$\therefore A = \cos x\cosh y$.

5. (a) $\sec h(i\pi) = \frac{2}{e^{\pi i}+e^{-\pi i}} = \sec\pi = -1$.

6. (d) $\cos ix + i\sin ix = \cosh x + i.i\sinh x$

$= \cosh x - \sinh x = \frac{e^x+e^{-x}-e^x+e^{-x}}{2} = e^{-x}$.

7. (b) $\because \sinh\left(\frac{\pi}{6}i\right) = i.\sin\frac{\pi}{6} = i.\frac{1}{2} = \frac{i}{2}$.

8. (c) $\sec h(\pi i) + \text{cosech}\left(\frac{\pi}{2}i\right) = \sec\pi - i\text{cosec}\frac{\pi}{2} = -1 - i$.

9. (a) चूँकि $\cosh\theta$ का आवर्तनांक $2\pi i$ है, अतः $\cosh\frac{\theta}{3}$ का आवर्तनांक $3.2\pi i = 6\pi i$ होगा।

10. (c) चूँकि $\sinh x$ का आवर्तनांक $2\pi i$ है, अतः $\sinh\left(\frac{x}{2}\right)$ का आवर्तनांक $4\pi i$ होगा।

11. (c) $x = \log(y+\sqrt{y^2+1}) = \sinh^{-1}y \Rightarrow y = \sinh x$.

12. (a) $\cosh^{-1}x = \log(x+\sqrt{x^2-1}) = \log(2+\sqrt{3})$

$\therefore x = 2$.

13. (b) $\log(3+2\sqrt{2}) = \log(3+\sqrt{8}) = \log(3+\sqrt{9-1})$

$= \log(3+\sqrt{3^2-1}) = \cosh^{-1}3$.

14. (c) $\text{sech}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \cosh^{-1}(2) = \log(2+\sqrt{2^2-1}) = \log(2+\sqrt{3})$.

15. (b) $\sinh^{-1}(2^{3/2}) = \log(2^{3/2}+\sqrt{(2^{3/2})^2+1}) = \log(3+\sqrt{8})$.

16. (a) माना $\log \sec x = y$

$$\therefore \frac{1}{\cos x} = \frac{e^{y/2}}{e^{-y/2}}$$

योगान्तरानुपात नियम द्वारा,

$$\frac{1+\cos x}{1-\cos x} = \frac{e^{y/2}+e^{-y/2}}{e^{y/2}-e^{-y/2}} \Rightarrow \cot^2\left(\frac{x}{2}\right) = \coth\left(\frac{y}{2}\right)$$

$$\Rightarrow y = 2\coth^{-1}\left(\operatorname{cosec}^2\frac{x}{2}-1\right).$$

17. (a) यहाँ, $\cosh^{-1}(\sec x) = \log(\sec x + \sqrt{\sec^2 x - 1})$

$$= \log(\sec x + \tan x) = \log\left(\frac{1+\sin x}{\cos x}\right).$$

18. (a) माना $x = \tanh y$, तब $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\tanh y}{\sec hy} = \sinh y$

$$\therefore \sinh^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \sinh^{-1}(\sinh y) \Rightarrow y = \tanh^{-1}(x).$$

19. (c) $\cos\alpha . \cosh\beta = 1 \Rightarrow \cosh\beta = \sec\alpha$

$$\Rightarrow \beta = \cosh^{-1}(\sec\alpha) = \log(\sec\alpha + \sqrt{\sec^2\alpha - 1})$$

$$= \log(\sec\alpha + \tan\alpha)$$

20. (b) $\sinh^{-1}(\sinh^{-1}\theta) = -i\sin(i\sinh^{-1}\theta)$

$$= -i\sin[i(-i\sin^{-1}(i\theta)] = -i.i\theta = -i^2\theta = \theta.$$

21. (c) दिया है, $\sinh^{-1} x = \operatorname{cosech}^{-1} y$

या $\sinh^{-1} x = \sinh^{-1}\left(\frac{1}{y}\right)$

या $x = \sinh\left\{\sinh^{-1}\left(\frac{1}{y}\right)\right\}$ या $x = \frac{1}{y} \Rightarrow xy = 1$.

22. (a) वास्तविक भाग = $\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{2(1)}{1-1-1} = -\frac{1}{2}\tan^{-1}(2)$.

23. (c) हम जानते हैं कि, $\cosh^{-1} x = \log\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$

$$\therefore \cosh^{-1}(1) = \log\left(1+\sqrt{1^2-1}\right) = \log 1 = 0.$$

24. (b) $\left[\sin^{-1}\left(\frac{5\sqrt{7}}{16} - \frac{9i}{16}\right)\right]$ का काल्पनिक भाग

$$= -\log\left[\sqrt{\frac{9}{16}} + \sqrt{1+\frac{9}{16}}\right] = -\log(2).$$

25. (b) $\because$ व्यंजक $= \cos^{-1}(\cos\theta + i\sin\theta)$

$= \sin^{-1}\sqrt{\sin\theta} - i\log(\sqrt{\sin\theta} + \sqrt{1+\sin\theta})$, जहाँ $\theta = \frac{\pi}{6}$

$\therefore \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)$ का वास्तविक भाग $= \sin^{-1}\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{4}$.

26. (c) यह स्पष्ट है।

27. (c) $\sinh 3z = -i\sin 3(iz) = -i[3\sin(iz) - 4\sin^3(iz)]$

$$= -i[3i\sinh z - 4i^3\sinh^3 z] = 3\sinh z + 4\sinh^3 z.$$

28. (d) यह स्पष्ट है।

29. (b) यह स्पष्ट है।

30. (c) $\sinh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1)$.

31. (b) $\operatorname{cosech} x$ को $x = 0$ पर परिभाषित नहीं कर सकते हैं।

32. (a) डी–माइवर प्रमेय से, $(\cosh\theta + \sinh\theta)^n = e^{n\theta}$.

33. (c) $\frac{e^{2\theta}-1}{2e^{\theta}} = \sinh\theta$

$$\frac{e^{2\theta}+1}{2e^{\theta}} = \cosh\theta$$

$$\frac{e^{2\theta}-1}{e^{2\theta}+1} = \tanh\theta.$$

34. (a) $\left(\frac{1+\tanh x}{1-\tanh x}\right) = \left(\frac{1+\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}}{1-\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}}\right) = \frac{e^x+e^{-x}+e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}-e^x+e^{-x}}$

$$= \left(\frac{2e^x}{2e^{-x}}\right) = e^{2x}.$$

35. (d) $u = \log\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right) = \log\left(\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}\right)$

$$= 2\tanh^{-1}\left(\tan\frac{x}{2}\right) \Rightarrow \tanh\left(\frac{u}{2}\right) = \tan\frac{x}{2}.$$

36. (c) $\frac{\operatorname{cosech} x}{\sqrt{\operatorname{cosech}^2 x + 1}} = \frac{\operatorname{cosech} x}{\sqrt{\coth^2 x}} = \frac{\operatorname{cosech} x}{\coth x}$

$$= \frac{\frac{1}{\sinh x}}{\frac{\cosh x}{\sinh x}} = \operatorname{sech} x.$$

37. (c) $f(x) = e^x$

$f(x)f(y) = e^x.e^y = e^{x+y} = f(x+y) = f(p)$

$x + y = p$.

38. (a) $f(x) = e^{-x}$

$$\Rightarrow f(x_1 + x_2 + ... + x_n) = e^{-(x_1+x_2+....+x_n)}$$

$$= e^{-x_1}.e^{-x_2}....e^{-x_n} = f(x_1).f(x_2)...f(x_n).$$

39. (c) $\text{cosech}\left(\frac{\pi i}{6}\right) = i\,\text{cosec}\left(\frac{\pi i^2}{6}\right) = -i\,\text{cosec}\left(\frac{\pi}{6}\right) = -i.2 = -2i$.

40. (a) $\sinh\left(x + \frac{\pi}{2}i\right) = -i\sin\left(ix - \frac{\pi}{2}\right) = i\sin\left(\frac{\pi}{2} - ix\right)$

$= i\cos(ix) = i\cosh x$.

41. (c) $\cos(i^5 x) = \cos(ix) = \cosh x$.

42. (b) $\sin(x+iy) = A + iB$

$\sin x \cos iy + \cos x \sin iy = A + iB$

$\sin x \cosh y + \cos x \sinh y = A + iB$

$\sin x \cosh y = A$.

43. (b) $\cosh(\alpha + i\beta) - \cosh(\alpha - i\beta) = 2\sinh\alpha \sinh(i\beta)$

$= 2\sinh\alpha . i\sin\beta = 2i\sinh\alpha\sin\beta$

$\therefore$ काल्पनिक भाग $= 2\sinh\alpha\sin\beta$.

44. (a) $\because\ \cosh(\alpha + i\beta) = \cosh\alpha\cosh i\beta + \sinh\alpha\sinh i\beta$

$= \cosh\alpha\cos\beta + i\sinh\alpha\sin\beta$

$\therefore\ \cosh(\alpha + i\beta)$ का वास्तविक भाग = $\cosh\alpha\cos\beta$.

45. (b) $\sinh x$ का आवर्तनांक $= 2\pi i$

अतः $\sinh(x + 2n\pi i)$ का मान $= \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

46. (a) हम जानते हैं कि, $\sin ix = i\sinh x$

$\sin^2(ix) = (i\sinh x)^2 = -\sinh^2 x$

$\therefore \sin^2(ix) + \cosh^2 x = \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

47. (b) $\coth\left(\frac{nx}{4}\right) = \coth\left(\pi i + \frac{nx}{4}\right) = \coth\frac{n}{4}\left(\frac{4\pi i}{n} + x\right)$

$\therefore$ आवर्तनांक $\frac{4\pi i}{n}$ है।

48. (c) e^z का आवर्तनांक $2\pi i$ है।

49. (c) $\cosh(4x) = \cosh(2\pi i + 4x) = \cosh 4\left(\frac{\pi i}{2} + x\right)$

$\therefore$ आवर्तनांक $\frac{\pi i}{2}$ है।

50. (b) यह स्पष्ट है।

51. (d) यह स्पष्ट है।

52. (d) यह स्पष्ट है।

53. (b) $\sinh^{-1} 1 = \log(1 + \sqrt{1+1}) = \log(1+\sqrt{2})$.

54. (b) यह स्पष्ट है।

55. (a) यह स्पष्ट है।

56. (a) यह स्पष्ट है।

57. (c) $\because 2\tanh^{-1} x = \cosh^{-1}\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)$

$\Rightarrow 2\tanh^{-1}(1/\sqrt{2}) = \cosh^{-1}\left(\frac{1+(1/2)}{1-(1/2)}\right) = \cosh^{-1}(3)$.

58. (c) $x = \tanh^{-1}(3/4) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+3/4}{1-3/4}\right) = \frac{1}{2}\log 7 = \log\sqrt{7}$.

59. (b) $\sinh^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \tanh^{-1}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \tanh^{-1}\left(\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}}\right)$

$= \tanh^{-1}\left(\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1+\frac{1}{4}}}\right) = \tanh^{-1}\left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}}\right) = \tanh^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

60. (a) $\sin^{-1}(A+iB) = x + iy \Rightarrow A + iB = \sin(x+iy)$

$\Rightarrow A + iB = \sin x\cosh y + i\cos x\sinh y$

$\therefore\ \frac{A}{B} = \frac{\sin x\cosh y}{\cos x\sinh y} = \frac{\tan x}{\tanh y}$.

61. (b) यह स्पष्ट है।

62. (d) यह स्पष्ट है।

Critical Thinking Questions

1. (a) $u = \log\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$

$\Rightarrow \frac{e^u}{1} = \frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}$

$$\cosh u = \frac{e^u + e^{-u}}{2} = \frac{e^{2u}+1}{2e^u} = \frac{\left(\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}\right)^2 + 1}{2.\left(\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}\right)}$$

$$= \frac{2\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)}{2\left(1-\tan\frac{x}{2}\right)\left(1+\tan\frac{x}{2}\right)} = \frac{1+\tan^2\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{1}{\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}} = \frac{1}{\cos x} = \sec x .$$

2. (d) $\cosh\alpha = \sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}}$

$$\frac{\cosh\alpha}{1} = \frac{1+\tan^2\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{\cosh\alpha - 1}{\cosh\alpha + 1} = \frac{2\tan^2\frac{x}{2}}{2} = \tan^2\frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{2\sinh^2\frac{\alpha}{2}}{2\cosh^2\frac{\alpha}{2}} = \tan^2\frac{x}{2} \Rightarrow \tanh^2\frac{\alpha}{2} = \tan^2\frac{x}{2}.$$

3. (c) $\cos(u+iv) = x+iy$

$\Rightarrow \cos u\cos(iv) - \sin u\sin(iv) = x+iy$

$\Rightarrow \cos u\cosh v - i\sin u\sinh v = x+iy$

$\therefore\ x = \cos u\cosh v\ ,\ y = -\sin u\sinh v$

अतः, $x^2+y^2 = \cos^2 u.\cosh^2 v + \sin^2 u.\sinh^2 v$

$= (1-\sin^2 u)\cosh^2 v + \sin^2 u(\cosh^2 v - 1)$

$= \cos^2 v - \sin^2 u$

$\therefore\ x^2+y^2+1 = \cosh^2 v + 1 - \sin^2 u\ =\ \cosh^2 v + \cos^2 u .$

4. (a) माना $\sin^{-1}(\mathrm{cosec}\,\theta) = x+iy$

$\therefore\ \mathrm{cosec}\,\theta = \sin(x+iy) = \sin x\cosh y + i\cos x\sinh y$

तुलना करने पर, $\sin x\cosh y = \mathrm{cosec}\,\theta$ .....(i)

एवं $\cos x\sinh y = 0$ .....(ii)

समीकरण (ii) से, $\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$

$\therefore$ समीकरण (i) से, $\sin\frac{\pi}{2}.\cosh y = \mathrm{cosec}\,\theta$

या $y = \cosh^{-1}(\mathrm{cosec}\,\theta)$

$\Rightarrow y = \log(\mathrm{cosec}\,\theta + \cot\theta) = \log\left(\cot\frac{\theta}{2}\right)$

$\therefore\ \sin^{-1}(\mathrm{cosec}\,\theta)$ का वास्तविक भाग $= \log\left(\cot\frac{\theta}{2}\right).$

5. (d) हम जानते हैं कि, $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$

$\sinh^2 z = \cosh^2 z - 1$

$\Rightarrow \sinh^2 z = \sec^2\theta - 1$

$\sinh^2 z = \tan^2\theta$

$\Rightarrow \sinh z = \tan\theta .$

6. (b) $\mathrm{cosec}\,\theta = \coth x$

$1 + \cot^2\theta = \coth^2 x$

$\cot^2\theta = \coth^2 x - 1 = \mathrm{cosech}^2 x$

$\cot\theta = \mathrm{cosech} x$

$\tan\theta = \sinh x .$

7. (a) यहाँ $\tan\frac{x}{2} = \tanh\frac{x}{2} \Rightarrow \frac{\tan^2(x/2)}{1} = \frac{\tanh^2(x/2)}{1}$

$\Rightarrow \frac{1+\tan^2 x/2}{1-\tan^2 x/2} = \frac{1+\tanh^2 x/2}{1-\tanh^2 x/2}$

$\Rightarrow \frac{1}{\cos x} = \cosh x \Rightarrow \cos x\cosh x = 1 .$

8. (c) दिये गये सम्बन्ध को वर्ग करके जोड़ने पर,

$\sin^2 x\cosh^2 y + \cos^2 x\sinh^2 y = 1$

$\Rightarrow \sin^2 x(1+\sinh^2 y) + \cos^2 x\sinh^2 y = 1$

$\Rightarrow \sinh^2 y = 1 - \sin^2 x = \cos^2 x .$

9. (d) $i\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\cot\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2i .$

10. (d) $2\sin^2(x+iy) = 1 - \cos 2(x+iy)$

$= 1 - [\cos 2x\cos 2iy - \sin 2x\sin 2iy]$

$= 1 - \cos 2x\cosh 2y + i\sin 2x\sinh 2y$

$\therefore\ \sin^2(x+iy)$ का काल्पनिक भाग $= \frac{1}{2}\sin 2x\sinh 2y .$

11. (d) हम जानते हैं कि, $2\coth^{-1} x = \log\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

$$\therefore 2\cot h^{-1}\left(\frac{z}{2}\right) = \log\left(\frac{\frac{z}{2}+1}{\frac{z}{2}-1}\right) = \log\left(\frac{z+2}{z-2}\right) = -\log\left(\frac{z-2}{z+2}\right).$$

12. (a) $\mathrm{sec\,h}^{-1}(\sin x) = \log\left(\frac{1+\sqrt{1-(\sin x)^2}}{\sin x}\right) = \log\left(\frac{1+\cos x}{\sin x}\right)$

$$= \log\left(\frac{2\cos^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\right) = \log\left(\cot\frac{x}{2}\right).$$

13. (b) $\mathrm{cosech}^{-1} x = \log\left(\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right)$

$\mathrm{cosech}^{-1} 1 = \log\left(\frac{1+\sqrt{2}}{1}\right)$

$x + iy = \log(\sqrt{2} + 1) + 0$

तुलना करने पर, $y = 0$.

14. (c) हम जानते हैं कि, $\tanh^{-1} x = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

$$\therefore \tanh^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}\log(3)$$

$$= \log(3)^{\frac{1}{2}} = \log\sqrt{3}\,.$$

15. (c) हम जानते हैं कि,

$$\tan^{-1}(\cos\theta + i\sin\theta) = \frac{\pi}{4} + \frac{i}{4}\log\left(\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}\right), (\cos\theta) > 0$$

तब $\tan^{-1}(\cos\theta + i\sin\theta)$ का काल्पनिक भाग

$\frac{1}{2}\tanh^{-1}(\sin\theta)$ है, $\left(\because \tanh^{-1} x = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right)$.

अतिपरवलयिक फलन

Self Evaluation Test - 13

1. यदि $\tan^{-1}(\alpha + i\beta) = x + iy$, तब $x =$ [RPET 2002]

(a) $\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{2\alpha}{1-\alpha^2-\beta^2}\right)$ (b) $\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{2\alpha}{1+\alpha^2+\beta^2}\right)$

(c) $\tan^{-1}\left(\frac{2\alpha}{1-\alpha^2-\beta^2}\right)$ (d) इनमें से कोई नहीं

2. $2\sinh^{-1}(\theta) =$

(a) $\sinh^{-1}(2\theta\sqrt{1+\theta^2})$ (b) $\sinh^{-1}(2\theta\sqrt{1-\theta^2})$

(c) $\sinh^{-1}(\theta\sqrt{1+\theta^2})$ (d) इनमे से कोई नहीं

3. $\left(\frac{1+\tanh\theta}{1-\tanh\theta}\right)^5 =$

(a) $e^{10\theta}$ (b) $e^{5\theta}$

(c) 1 (d) – 1

4. यदि $\cosh y = \sec x$, तब $\tanh^2\left(\frac{y}{2}\right) =$

(a) $\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)$ (b) $\cot^2\frac{x}{2}$

(c) $\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$ (d) $\cos^2\frac{x}{2}$

5. यदि $\tan\theta = \tanh x \cot y$ तथा $\tan\phi = \tanh x \tan y$, तब $\frac{\sin 2\theta}{\sin 2\phi} =$

(a) $\frac{\cosh 2x + \cos 2y}{\cosh 2x - \cos 2y}$ (b) $\frac{\cosh 2x - \cos 2y}{\cosh 2x + \cos 2y}$

(c) $\frac{\cos 2x + \cosh 2y}{\cos 2x - \cosh 2y}$ (d) इनमें से कोई नहीं

6. यदि $\tan(\theta + i\phi) = \sin(x+iy)$, तब $\coth y \sinh 2\phi =$

(a) $\tan x . \cot 2\theta$

(b) $\tan x \sin 2\theta$

(c) $\cot x \sin 2\theta$

(d) इनमें से कोई नहीं

7. यदि $\cos(\alpha + i\beta) = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$, तब $\tan\psi$ का मान है

(a) $\tanh\alpha \tan\beta$ (b) $\frac{-\tanh\alpha\tan\beta}{\rho}$

(c) $-\cot\alpha\coth\beta$ (d) $-\tan\alpha\tanh\beta$

8. $\tanh^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + \tanh^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) =$

(a) $\tanh^{-1}\left(\frac{5}{7}\right)$ (b) $\tanh^{-1}\left(\frac{7}{5}\right)$

(c) $\tanh^{-1}\left(\frac{1}{6}\right)$ (d) $\tanh^{-1}\left(\frac{5}{6}\right)$

9. यदि $\cosh^{-1}(p+iq) = u + iv$, तब वह समीकरण जिसके मूल $\cos^2 u$ एवं $\cosh^2 v$ हैं, है

(a) $x^2 - x(p^2+q^2) + p^2 = 0$

(b) $x^2 - x(p^2+q^2+1) + 1 = 0$

(c) $x^2 + x(p^2+q^2+1) + 1 = 0$

(d) $x^2 - x(p^2+q^2+1) + p^2 = 0$

10. $\log\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ix}{2}\right)$ का मान है

(a) $i\tan^{-1}(\sinh x)$ (b) $-i\tan^{-1}(\sinh x)$

(c) $i\tan^{-1}(\cosh x)$ (d) इनमें से कोई नहीं

Answers and Solutions

(SET - 13)

1. (a) $\tan^{-1}(\alpha+i\beta)=x+iy$; $\tan^{-1}(\alpha-i\beta)=x-iy$

$2x=x+iy+x-iy=\tan^{-1}(\alpha+i\beta)+\tan^{-1}(\alpha-i\beta)$

$$\therefore\ x=\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{\alpha+i\beta+\alpha-i\beta}{1-(\alpha+i\beta)(\alpha-i\beta)}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{2\alpha}{1-\alpha^2-\beta^2}\right).$$

2. (a) हम जानते हैं कि, $2\sin^{-1}x=\sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2})$

$x=i\theta$ रखने पर,

$2\sin^{-1}(i\theta)=\sin^{-1}(2i\theta\sqrt{1-i^2\theta^2})$

$2i\sinh^{-1}(\theta)=\sin^{-1}(2i\theta\sqrt{1+\theta^2})$

या $2i\sinh^{-1}(\theta)=i\sinh^{-1}(2\theta\sqrt{1+\theta^2})$

($\because\ \sin^{-1}(ix)=i\sinh^{-1}x$)

$\Rightarrow\ 2\sinh^{-1}(\theta)=\sinh^{-1}(2\theta\sqrt{1+\theta^2})$.

3. (a) $$\left(\frac{1+\tanh\theta}{1-\tanh\theta}\right)^5=\left(\frac{1+\dfrac{e^\theta-e^{-\theta}}{e^\theta+e^{-\theta}}}{1-\dfrac{e^\theta-e^{-\theta}}{e^\theta+e^{-\theta}}}\right)^5$$

$$=\left(\frac{e^\theta+e^{-\theta}+e^\theta-e^{-\theta}}{e^\theta+e^{-\theta}-e^\theta+e^{-\theta}}\right)^5=\left(\frac{2e^\theta}{2e^{-\theta}}\right)^5=(e^{2\theta})^5=e^{10\theta}.$$

4. (a) $$\cosh y=\sec x=\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{\dfrac{1-\tan^2(x/2)}{1+\tan^2(x/2)}}$$

$$\frac{\cosh y}{1}=\frac{1+\tan^2(x/2)}{1-\tan^2(x/2)}$$

$$\frac{\cosh y-1}{\cosh y+1}=\frac{2\tan^2(x/2)}{2}=\tan^2(x/2)$$

$$\frac{2\sinh^2\frac{y}{2}}{2\cosh^2\frac{y}{2}}=\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\Rightarrow\ \tanh^2\left(\frac{y}{2}\right)=\tan^2\left(\frac{x}{2}\right).$$

5. (a) $$\frac{\sin 2\theta}{\sin 2\phi}=\left(\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\right)\left(\frac{1+\tan^2\phi}{2\tan\phi}\right)$$

$$=\frac{\cot y}{\tan y}\,\frac{1+\tanh^2x\tan^2y}{1+\tanh^2x\cot^2y}$$

$$=\frac{\cot y}{\tan y}\,\frac{\cosh^2x\cos^2y+\sinh^2x\sin^2y}{\cosh^2x\sin^2y+\sinh^2x\cos^2y}\,\frac{\sin^2y}{\cos^2y}$$

$$=\frac{(\cosh 2x+1)(\cos 2y+1)+(\cosh 2x-1)(1-\cos 2y)}{(\cosh 2x+1)(-\cos 2y+1)+(\cosh 2x-1)(\cos 2y+1)}$$

$$=\frac{\cosh 2x+\cos 2y}{\cosh 2x-\cos 2y}$$

6. (c) माना $p+iq=\tan(\theta+i\phi)=\sin(x+iy)$

$\therefore\ p=\sin x\cosh y$ तथा $q=\cos x\sinh y$

या $\coth y=\dfrac{p}{q}\cot x$ .....(i)

एवं, $\dfrac{\tan\theta+i\tanh\phi}{1-i\tan\theta\tanh\phi}=p+iq$

$\therefore\ p=\dfrac{\tan\theta(1-\tanh^2\phi)}{1+\tan^2\theta\tanh^2\phi}$ तथा $q=\dfrac{\tanh\phi(1+\tan^2\theta)}{1+\tan^2\theta\tanh^2\phi}$

अतः $\dfrac{p}{q}=\left(\dfrac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\right)\left(\dfrac{1-\tanh^2\phi}{2\tanh\phi}\right)$

या $\sinh 2\phi=(q/p)\sin 2\theta$ .....(ii)

समीकरण (i) तथा (ii) को गुणा करने पर,

$\coth y\sinh 2\phi=\cot x\sin 2\theta$.

7. (d) $\cos(\alpha+i\beta)=\rho(\cos\psi+i\sin\psi)$

$\Rightarrow\ \cos\alpha\cos(i\beta)-\sin\alpha\sin(i\beta)=\rho\cos\psi+i(\rho\sin\psi)$

$\Rightarrow\ (\cos\alpha\cosh\beta)-i(\sin\alpha\sinh\beta)=\rho\cos\psi+i\rho\sin\psi$

अतः $\cos\alpha\cosh\beta=\rho\cos\psi$ .....(i)

$-\sin\alpha\sinh\beta=\rho\sin\psi$ .....(ii)

समीकरण (ii) को (i) से भाग देने पर,

$\tan\psi=-\tan\alpha\tanh\beta$.

8. (a) $\tanh^{-1}x+\tanh^{-1}y=\tanh^{-1}\left(\dfrac{x+y}{1+xy}\right)$

$$\therefore \tanh^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)=\tanh^{-1}\left(\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{2}.\frac{1}{3}}\right)$$

$$=\tanh^{-1}\left(\frac{\frac{3+2}{6}}{\frac{6+1}{6}}\right)=\tanh^{-1}\left(\frac{5}{7}\right).$$

9. (d) $\because \cos(u+iv)=p+iq$

$\Rightarrow \cos u\cosh v - i\sin u\sinh v = p+iq$

$\Rightarrow p=\cos u\cosh v$ तथा $q=-\sin u\sinh v$ एवं

$$p^2+q^2=\cos^2 u\cosh^2 v+\sin^2 u\sinh^2 v$$

$$=\cos^2 u\cosh^2 v+(1-\cos^2 u)(\cosh^2 v-1)$$

$$\therefore p^2+q^2+1=\cos^2 u+\cosh^2 v$$

अब समीकरण जिसके मूल $\cos^2 u$ एवं $\cosh^2 v$ हैं, है

$$x^2-(\cos^2 u+\cosh^2 v)+\cos^2 u\cosh^2 v=0$$

$$\therefore x^2-x(p^2+q^2+1)+p^2=0\ .$$

10. (a) $\log\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{ix}{2}\right)=\log\left\{\frac{1+\tan\left(\frac{ix}{2}\right)}{1-\tan\left(\frac{ix}{2}\right)}\right\}$

$$=\log\left\{1+i\tan h\left(\frac{x}{2}\right)\right\}-\log\left\{1-i\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right\}$$

अब, $z=\log\left\{1+i\tan h\left(\frac{x}{2}\right)\right\}$

$$=\frac{1}{2}\log\left\{1+\tan h^2\left(\frac{x}{2}\right)\right\}+i\tan^{-1}\left\{\tan h\left(\frac{x}{2}\right)\right\}$$

$$\therefore \log\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{ix}{2}\right)=z-\bar{z}=2i\,\mathrm{Im}(z)$$

$$=2i\tan^{-1}\left\{\tanh\left(\frac{x}{2}\right)\right\}$$

$$=i\tan^{-1}\left\{\frac{2\tanh\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\tanh^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right\}$$

$$=i\tan^{-1}(\sinh x).$$

* * *