حقیقی اعداد
Real Numbers

1

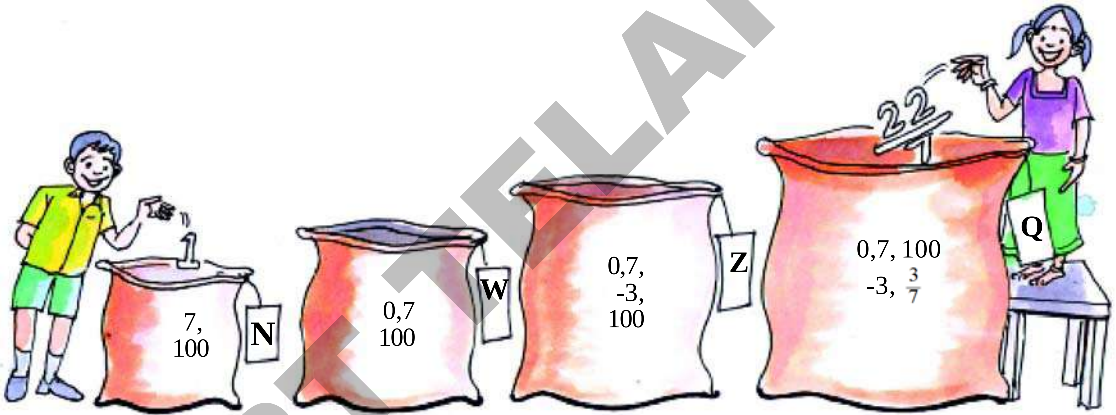
1.1 تعارف

آیئے ہم اب چند اعداد کے اقسام کا مختصراً اعادہ کریں گے۔

حسب ذیل اعداد پر غور فرمائیں۔

$$7, 100, 9, 11, -3, 0, -\frac{1}{4}, 5, 1, \frac{3}{7}, -1, 0.12, -\frac{13}{17}, 13.222..., 19, \frac{-5}{3}, \frac{213}{4}, \frac{-69}{1}, \frac{22}{7}, 5.\bar{6}$$

جاوید اور صبیحہ مندرجہ بالا اعداد کی درجہ بندی کرکے ان کے متعلقہ بیاگ میں رکھنا چاہتے ہیں۔ کچھ اعداد ان کے متعلقہ بیاگ میں موجود ہیں۔ اب آپ باقی اعداد کو منتخب کیجیے اور ان کے متعلقہ بیاگ میں ڈال لیے۔ اگر ایک عدد کا تعلق ایک سے زائد بیاگ سے ہو تو اس عدد کی نقل کرکے متعلقہ بیاگ میں رکھیے۔



آپ نے ان بیاگوں کا مشاہدہ کیا جہاں پر N بیاگ میں طبعی اعداد، W بیاگ میں مکمل اعداد Z بیاگ میں صحیح اعداد اور Q بیاگ میں ناطق اعداد ہیں۔

بیاگ Z میں صحیح اعداد ہیں جو منفی اعداد اور مکمل اعداد کا اجماع ہوتا ہے۔ جنھیں I یا Z سے تعبیر کرتے ہیں۔

$$Z = \{... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$$

اسی طرح بیاگ Q میں وہ اعداد موجود ہوتے ہیں جن کو $\frac{p}{q}$ کی شکل میں ظاہر کیا جاتا ہے جہاں پر q اور p صحیح اعداد ہیں اور $q \neq 0$

آپ یہ ملاحظہ فرمائیں کہ طبعی اعداد، مکمل اعداد، صحیح اعداد اور ناطق اعداد کو $\frac{p}{q}$ کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے۔ جہاں پر p اور q صحیح اعداد ہیں اور $q \neq 0$

SCERT TELANGANA

مثال کے طورپر 15− کو $\frac{-15}{1}$ سے ظاہر کرتے ہیں جہاں p = -15 اور q = 1

مثال دیکھیے $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{10}{20}=\frac{50}{100}=$...............

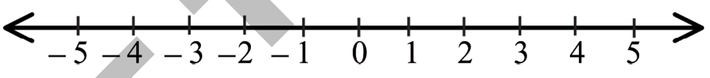
یہ معادل ناطق اعداد (کسر) ہیں اس سے مراد یہ ہے کہ ناطق اعداد کو $\frac{p}{q}$ کی شکل میں ظاہر کرنے کا واحد طریقہ نہیں ہے۔

جہاں p اور q صحیح اعداد ہیں اور $q \neq 0$ تاہم جب ہم $\frac{p}{q}$ کو ناطق عدد کہتے ہیں یا جب $\frac{p}{q}$ کو عددی خط پر ظاہر کرتے ہیں۔ تو یہ بھی دیکھنا ضروری ہے کہ $q \neq 0$ اور p اور q میں کوئی مشترک جُزضربی نہیں رکھتے سوائے آفاقی جزضربی *(Universal factor)* "1" کے (یعنی p اور q ہم مفرد اعداد ہیں) $\frac{1}{2}$ کے مساوی لامتناہی ناطق اعداد ہوتے ہیں ہم ان تمام کو $\frac{1}{2}$ عام شکل میں ظاہر کرنے کے لیے $\frac{1}{2}$ کو لیں گے۔

جو انہیں ظاہر کرنے کی سب سے مختصر ترین شکل ہے۔

آپ کو معلوم ہوگا کہ صحیح عدد کو عددی خط پر کس طرح ظاہر کیا جاتا ہے۔ ہم ایک خط کھینچیں گے اور اس پر نقطہ '0' نشان لگائیں گے ان کے درمیان مساوی وقفہ لیتے ہیں۔ صفر کے دائیں جانب نشانات لگائیں گے پھر انھیں مساوی وقفہ پر ..... ,1, 2, 3, 4 سے تعبیر کریں گے۔

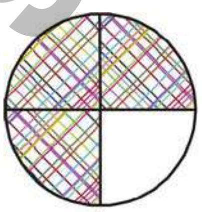
صحیح اعداد کو عددی خط پر اس طرح ظاہر کیا جاتا ہے۔



کیا آپ جانتے ہیں ناطق اعداد کو عددی خط پر کس طرح ظاہر کر سکتے ہیں؟

اس کے اعادہ کے طور پر پہلے $\frac{3}{4}$ لیتے ہوئے اس کو تصویری طور پر اور عددی خط پر ظاہر کیجیے۔

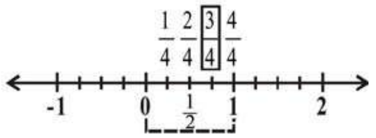
ہم جانتے ہیں کہ $\frac{3}{4}$ ایک کسر ہے جس میں 3، شمار کنندہ اور 4 نسب نما ہے جس سے مراد کسی چیز کے 4 مساوی حصے کرکے صرف 3 حصوں کا شمار کیا گیا۔ یہاں پر $\frac{3}{4}$ کو ظاہر کرنے کے چند طریقے ہیں:



$\frac{3}{4}$

$\frac{3}{4}$

تصویری
(Pictorially)

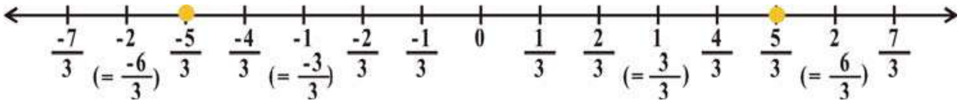


عددی خط
(Numberline)

SCERT TELANGANA

مثال 1: $\frac{5}{3}$ اور $-\frac{5}{3}$ کو عدد خط پر ظاہر کیجیے۔

حل: $-2, -1, 0, 1, 2$ کو ظاہر کرنے والا عددی خط کھینچیے۔



صفر کے دائیں اور بائیں جانب ہر اکائی کو 3 مساوی حصوں میں تقسیم کیجیے۔ ان میں سے پانچ حصوں کو لیجیے۔ عددی خط پر صفر کے دائیں جانب پانچواں نقطہ $\frac{5}{3}$ کو ظاہر کرتا ہے اور بائیں جانب پانچواں حصہ $\frac{-5}{3}$ کو ظاہر کرتا ہے۔

یہ کیجیے

1. $-3/4$ کو عددی خط پر ظاہر کیجیے۔ 2. 0,7,10,-4 کو p/q کی شکل میں لکھیے۔
3. **میرے عدد کا اندازہ کیجیے۔** آپ کے دوست 0 اور 100 کے درمیان کوئی ایک عدد کا انتخاب کرتے ہیں۔ آپ کو یہ عدد سوالات کے طریقے سے معلوم کرنا ہے لیکن آپ کا دوست صرف ''ہاں'' یا ''نہیں'' میں جواب دیتا ہے۔ آپ کونسا طریقہ اختیار کریں گے۔

مثال 2 : کیا ذیل کے بیانات صحیح ہیں۔ آپ اپنے جواب کو مثال کے ذریعہ سمجھایئے اور وجوہات بیان کیجیے۔

i. ہر ناطق عدد صحیح عدد ہوتا ہے۔
ii. ہر صحیح عدد ناطق عدد ہوتا ہے۔
iii. صفر ایک ناطق عدد ہے۔

حل: i. غلط: مثال کے طور پر $\frac{7}{8}$ ایک ناطق عدد ہے لیکن صحیح عدد نہیں ہے۔

ii. صحیح: ہر صحیح عدد کو $\frac{p}{q}$ کی شکل میں ظاہر کیا جاسکتا ہے (جہاں پر $q \neq 0$)

مثال کے طور پر $-2 = \frac{-2}{1} = \frac{-4}{2}$ یہ ایک ناطق عدد ہے۔

(یعنی کسی صحیح عدد b کو $\frac{b}{1}$ کی شکل میں ظاہر کیا جاتا ہے)

iii. صحیح: صفر کو $\frac{0}{2}, \frac{0}{7}, \frac{0}{13}$ کی شکل میں ظاہر کرتے ہیں۔ ($\frac{p}{q}$ کی شکل میں جہاں p،q صحیح اعداد ہیں $q \neq 0$)

('0' کو $\frac{0}{x}$ کی شکل میں ظاہر کرسکتے ہیں جہاں پر x ایک صحیح عدد ہے اور $x \neq 0$)

SCERT TELANGANA

مثال 3: 3 اور 4 کے درمیان دو ناطق اعداد کو اوسط طریقے سے معلوم کیجیے۔

حل: **طریقہ I:** ہمیں معلوم ہے کہ اگر a اور b دو ناطق اعداد ہیں ان کے درمیان واقع ناطق عدد کو اوسط کا طریقہ استعمال کر کے معلوم کر سکتے ہیں یعنی $\frac{a+b}{2}$

یہاں a = 3 اور b = 4 (ہمیں معلوم ہے کہ a اور b دو ناطق اعداد کے درمیان واقع ایک ناطق عدد کو اوسط کا طریقہ استعمال کرتے ہوئے معلوم کیا جا سکتا ہے یعنی $\frac{a+b}{2}$

اس لیے $\frac{7}{2} = \frac{3+4}{2}$ جو 3 اور 4 کے درمیان واقع ہے اور $3 < \frac{7}{2} < 4$

اگر ہم اس طریقہ کار کو وسعت دیں گے تب ہمیں اور کئی ناطق اعداد حاصل ہوں گے۔

$$\frac{3+\frac{7}{2}}{2} = \frac{\frac{6+7}{2}}{2} = \frac{\frac{13}{2}}{2} = \frac{13}{2\times 2} = \frac{13}{4}$$

$$3 < \frac{13}{4} < \frac{7}{2} < 4$$

طریقہ II: اس کو ایک ہی مرحلے میں کیا جا سکتا ہے۔

چونکہ ہمیں دو اعداد چاہئے، اس لیے ہم 3 اور 4 کو ناطق اعداد کے طور پر لکھیں گے۔ جس کا نسب نما $2 + 1 = 3$ ہو

یعنی $3 = \frac{3}{1} = \frac{9}{3}$ اور $4 = \frac{4}{1} = \frac{12}{3}$

تب ہم دیکھتے ہیں کہ $\frac{11}{3}, \frac{10}{3}$، ناطق اعداد 3 اور 4 کے درمیان واقع ہوں گے۔

$$3 = \frac{9}{3} < \left(\frac{10}{3} < \frac{11}{3}\right) < \frac{12}{3} = 4$$

اگر ہم 3 اور 4 کے درمیان 5 ناطق اعداد معلوم کرنا چاہتے ہیں تب ہم 3 اور 4 کو ناطق عدد کے طور پر لکھیں گے جس کا نسب نما $5 + 1 = 6$ ہو

$$3 = \frac{18}{6} \text{ اور } 4 = \frac{24}{6}$$

$$3 = \frac{18}{6} < \left(\frac{19}{6}, \frac{20}{6}, \frac{21}{6}, \frac{22}{6}, \frac{23}{6}\right) < \frac{24}{6} = 4$$

اس سے آپ واقف ہوں گے کہ اعداد 3 اور 4 کے درمیان لامتناہی ناطق اعداد پائے جاتے ہیں۔ تصدیق کیجیے کہ کیا کوئی اور اعداد کے جوڑ کے لیے صادق ہے۔ تب ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ کوئی دو اعداد کے درمیان لامتناہی ناطق اعداد پائے جاتے ہیں۔

یہ کیجیے

i. 2 اور 3 کے درمیان کوئی 5 ناطق اعداد اوسط کے طریقے سے معلوم کیجیے۔

ii. –3/11 اور 8/11 کے درمیان کوئی 10 ناطق اعداد معلوم کیجیے۔

SCERT TELANGANA

مثال 4: $\frac{7}{16}$ ، $\frac{2}{3}$ اور $\frac{10}{7}$ کو اعشاری شکل میں ظاہر کیجیے۔

حل:

$$\begin{array}{r}
0.666\\
3\,)\,\overline{2.0000}\\
18\\
\overline{20}\\
18\\
\overline{20}\\
18\\
\overline{2}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
1.428571\\
7\,)\,\overline{10}\\
7\\
\overline{30}\\
28\\
\overline{20}\\
14\\
\overline{60}\\
56\\
\overline{40}\\
35\\
\overline{50}\\
49\\
\overline{10}\\
7\\
\overline{3}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
0.4375\\
16\,)\,\overline{7.00000}\\
0\\
\overline{70}\\
64\\
\overline{60}\\
48\\
\overline{120}\\
112\\
\overline{80}\\
80\\
\overline{0}
\end{array}$$

$\therefore\ 2/3 = 0.666 = 0.\overline{6}$
یہ ایک غیر مختتم متوالی اعشاری کسر ہے

$\therefore\ 10/7 = 1.\overline{428571}$
یہ ایک غیر مختتم متوالی اعشاری کسر ہے

$\therefore\ 7/16 = 0.4375$
یہ ایک مختتم اعشاری کسر ہے

یہ کیجیے

اعشاری یا غیر مختتم تکراری اعشاری کسر میں ظاہر کیجیے۔ (i) $\frac{1}{7}$ (ii) $\frac{1}{19}$

مثال 5: 3.28 کو $\frac{p}{q}$ کی شکل میں ظاہر کیجیے۔ (p اور q صحیح اعداد ہیں جہاں $q \neq 0$)

حل:

$$3.28 = \frac{328}{100}$$

$$= \frac{328 \div 2}{100 \div 2} = \frac{164}{50}$$ (شمار کنندہ اور نسب نما ہم مفرد اعداد ہیں)

$$= \frac{164 \div 2}{50 \div 2} = \frac{82}{25}$$

$$\therefore\ 3.28 = \frac{82}{25}$$

SCERT TELANGANA

مثال 6: $1.\overline{62}$ کو $\frac{p}{q}$ کی شکل میں ظاہر کیجیے جہاں $q \neq 0$ ، p اور q صحیح اعداد ہیں۔

حل: فرض کرو کہ $x = 1.626262.....$ (1)

مساوات کی دونوں جانب 100 سے ضرب دینے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$100x = 162.6262...$ (2)

مساوات (2) سے مساوات (1) تفریق کرنے پر ہمیں حاصل ہوگا

$$100x = 162.6262...$$
$$x = 1.6262...$$
$$99x = 161$$
$$x = \frac{161}{99}$$
$$\therefore 1.\overline{62} = \frac{161}{99}$$

انھیں کوشش کیجیے

(1) ذیل کی کسور کو اعشاری کسر میں ظاہر کیجیے۔

i.	$\frac{1}{2}$	ii.	$\frac{1}{2^2}$	iii.	$\frac{1}{5}$	iv.	$\frac{1}{5\times2}$
v.	$\frac{3}{10}$	vi.	$\frac{27}{25}$	vii.	$\frac{1}{3}$	viii.	$\frac{7}{6}$
ix.	$\frac{5}{12}$	x.	$\frac{1}{7}$				

ذیل کے اعشاریہ کا مشاہدہ کیجیے۔

$\frac{1}{2} = 0.5$ $\quad \frac{1}{10} = 0.1$ $\quad \frac{32}{5} = 6.4$ $\quad \frac{1}{3} = 0.333.....$ $\quad \frac{4}{15} = 0.2\overline{6}$

کیا آپ نسب نما کی کوئی مخصوص خصوصیت کے بارے میں انداز ہ لگا سکتے ہیں جو کسر کو مختتم اعشاریہ یا غیر مختتم اعشاریہ بنا سکتی ہے۔

ہر ناطق اعداد کے نسب نما کے مفرد اجزا لکھیے۔

نتیجہ سے آپ کیا اخذ کریں گے؟

SCERT TELANGANA

مشق 1.1

1. (a) کوئی تین ناطق اعداد لکھیے۔

(b) ناطق عدد کو آپ اپنے الفاظ میں بیان کیجیے۔

2. ذیل کے ہر بیان کے لیے ایک مثال دیجیے۔

i. عدد جو کہ ناطق عدد ہے مگر صحیح عدد نہیں۔

ii. ایک مکمل عدد جو کہ طبعی عدد نہیں ہے۔

iii. صحیح عدد جو کہ مکمل عدد نہیں ہے۔

iv. عدد جو کہ طبعی عدد ہے، مکمل عدد ہے، صحیح عدد اور ناطق عدد ہے۔

v. عدد جو کہ صحیح عدد ہے اور طبعی عدد نہیں ہے۔

3. 1 اور 2 کے درمیان کوئی پانچ ناطق اعداد معلوم کیجیے۔

4. $\frac{3}{5}$ اور $\frac{2}{3}$ کے درمیان تین ناطق اعداد درج کیجیے۔

5. $\frac{8}{5}$ اور $\frac{-8}{5}$ کو عددی خط پر ظاہر کیجیے۔

6. ذیل کے ناطق اعداد کو اعشاری شکل میں ظاہر کیجیے۔

I. (i $\frac{242}{1000}$ (ii $\frac{354}{500}$ (iii $\frac{2}{5}$ (iv $\frac{115}{4}$

II. (i $\frac{2}{3}$ (ii $-\frac{25}{36}$ (iii $\frac{22}{7}$ (iv $\frac{11}{9}$

7. ذیل کی اعشاری کسر کو $\frac{p}{q}$ میں ظاہر کیجیے۔ جہاں $q \neq 0$ اور p، q صحیح اعداد ہیں۔

(i 0.36 (ii 15.4 (iii 10.25 (iv 3.25

8. ذیل کی اعشاری کسور کو $\frac{p}{q}$ کی شکل میں ظاہر کیجیے۔

(i $0.\overline{5}$ (ii $3.\overline{8}$ (iii $0.\overline{36}$ (iv $3.12\overline{7}$

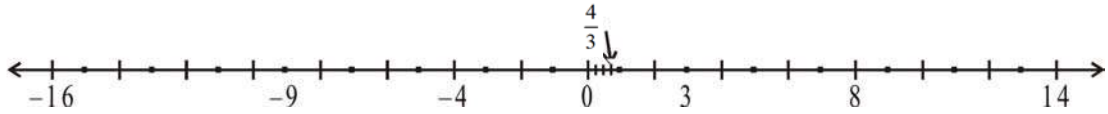
9. تقسیم کیے بغیر بتائیے کہ کونسی مختتم کسر ہیں۔

(i $\frac{3}{25}$ (ii $\frac{11}{18}$ (iii $\frac{13}{20}$ (iv $\frac{41}{42}$

SCERT TELANGANA

1.2 غیر ناطق اعداد

اب ہم عددی خط کا جائزہ لیں گے۔ کیا ہم تمام اعداد کو اس عددی خط پر ظاہر کر سکتے ہیں؟ حقیقت میں لا متناہی اعداد موجود ہوتے ہیں جو عددی خط پر چھوٹ گئے ہیں۔



اس کو سمجھنے کے لیے حسب ذیل مساوات پر غور کیجئے۔

(i) $x^2 = 4$ (ii) $3x = 4$ (iii) $x^2 = 2$

مساوات (i) کے لیے ہمیں معلوم ہے کہ x کی قدر -2 اور 2 ہے، ہم ان اعداد 2 اور 2– کو عددی خط پر ظاہر کر سکتے ہیں۔

مساوات (ii) کے لیے $3x = 4$ کے دونوں جانب 3 سے تقسیم کرنے پر $\frac{3x}{3} = \frac{4}{3} \Rightarrow x = \frac{4}{3}$

ہم اس کو عددی خط پر ظاہر کر سکتے ہیں۔

مساوات (iii) $x^2 = 2$ کو حاصل کرنے کے لئے دونوں جانب جذر المربع لینے پر

$\sqrt{x^2} = \sqrt{2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$ آیئے $x = \sqrt{2}$ پر غور کریں۔

کیا ہم $\sqrt{2}$ کو عددی خط پر ظاہر کر سکتے ہیں۔

$\sqrt{2}$ کی قدر کیا ہے۔ کونسے اعداد سے $\sqrt{2}$ کا تعلق ہے۔

اب ہم $\sqrt{2}$ کی قدر طویل تقسیم کے طریقہ سے معلوم کریں گے۔

	1.4142135
1	2.$\overline{00}$ $\overline{00}$ $\overline{00}$ $\overline{00}$ $\overline{00}$ $\overline{00}$ $\overline{00}$
	1
24	100
	96
281	400
	281
2824	11900
	11296
28282	60400
	56564
282841	383600
	282841
2828423	10075900
	8485269
28284265	159063100
	141421325
28284270	17611775

مرحلہ I: 2 کے بعد اعشاریہ لگایئے۔

مرحلہ II: اعشاریہ کے بعد صفر لگایئے۔

مرحلہ III: صفر کو جوڑی میں لیا جائے۔

مرحلہ IV: اس کے بعد جذر المربع معلوم کرنے کا طریقہ استعمال کریں گے۔

$\therefore \sqrt{2} = 1.4142135$

SCERT TELANGANA

اگر آپ $\sqrt{2}$ کی قدر مسلسل معلوم کرتے چلے جائیں تو $\sqrt{2}$ کے لیے آپ مشاہدہ کریں گے کہ $\sqrt{2} = 1.4142135623731...$ نہ تو مختتم ہے نہ متوالی اعشاری کسر ہے۔

یہاں تک ہم مشاہدہ کر چکے ہیں اعشاری عدد یا تو مختتم ہے یا غیر مختتم یا متوالی اعشاری عدد ہے جن کو $\frac{p}{q}$ کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے۔ یہ ناطق اعداد کہلاتے ہیں۔

لیکن $\sqrt{2}$ کی قدر غیر مختتم اور غیر متوالی اعشاریہ ہے۔ کیا آپ اسے متوالی بار کے استعمال سے ظاہر کر سکتے ہیں؟ نہیں۔ اس قسم کے اعداد غیر ناطق اعداد کہلاتے ہیں اور انھیں $\frac{p}{q}$ کی شکل میں ظاہر نہیں کیا جا سکتا جو کہ $\sqrt{2} \neq \frac{p}{q}$ (جہاں p اور q صحیح عدد اور ; $q \neq 0$)

اسی طرح $\sqrt{3} = 1.7320508075689$

$\sqrt{5} = 2.2360679774998...$

یہ غیر مختتم اور غیر متوالی اعشاریہ ہیں۔ جو غیر ناطق اعداد کہلاتے ہیں۔ جن کو S اور Q' سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

غیر ناطق اعداد کی مثالیں

(1) 2.1356217528... (2) $\sqrt{2}$ ، $\sqrt{3}$ ، π وغیرہ

پانچویں صدی قبل مسیح میں یونان کے رہنے والے مشہور ریاضی داں اور فلاسفی فیثا غورث کے ماننے والوں نے ایسے اعداد کو دریافت کیا جو ناطق نہیں تھے۔ ان اعداد کو غیر ناطق اعداد سے موسوم کیا گیا۔ انھوں نے یہ ثابت کیا کہ $\sqrt{2}$ ایک غیر ناطق عدد ہے۔

بعد میں Theodorus نے بتلایا کہ $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{10}, \sqrt{11}, \sqrt{12}, \sqrt{13}, \sqrt{14}, \sqrt{15}$ اور $\sqrt{17}$ بھی غیر ناطق اعداد ہیں۔ اس کا حوالہ Sulba Sutra (800BC) میں بھی موجود ہے۔

$\sqrt{1}$	=	1
$\sqrt{2}$	=	1.414213.....
$\sqrt{3}$	=	1.7320508.....
$\sqrt{4}$	=	2
$\sqrt{5}$	=	2.2360679.....
$\sqrt{6}$	=	
$\sqrt{7}$	=	
$\sqrt{8}$	=	
$\sqrt{9}$	=	3

اگر n طبعی عدد ہے اور کامل مربع نہیں تب $\sqrt{n}$ ایک غیر ناطق عدد ہے۔

SCERT TELANGANA

کیا اب آپ ناطق اور غیر ناطق اعداد کی درجہ بندی کر سکتے ہیں

$\sqrt{1}$ ، $\sqrt{4}$ ، $\sqrt{9}$ ناطق اعداد ہیں۔

$\sqrt{2}$ ، $\sqrt{3}$ ، $\sqrt{5}$ ، $\sqrt{6}$ ، $\sqrt{7}$ ، $\sqrt{8}$ غیر ناطق اعداد ہیں۔

سوچیے، مباحثہ کیجیے اور لکھیے

کریمہ نے کہا کہ $\sqrt{2}$ کو $\frac{\sqrt{2}}{1}$ کی شکل میں بھی لکھا جا سکتا ہے۔ جو $\frac{p}{q}$ کی شکل میں ہے۔ اس لیے $\sqrt{2}$ ایک ناطق عدد ہے۔ کیا آپ اس بیان سے متفق ہیں۔

π کے بارے میں جانئے

π کی تعریف اس طرح بیان کی گئی ہے کہ یہ دائرہ کے محیط (C) اور قطر (d) کی نسبت ہے۔ یعنی $\pi = \frac{c}{d}$

چونکہ π نسبت کی شکل میں ہے۔ یہ بات غلط محسوس ہوتی ہے کہ π ایک غیر ناطق عدد ہے۔ دائرہ کا محیط (C) اور قطر (d) کی پیائش کا کوئی معیاری پیمانہ نہیں ہے یعنی نسبت کو صحیح اعداد کی نسبت میں ظاہر نہیں کیا جا سکتا۔ اگر آپ صحیح پیائش کریں تو C یا d غیر ناطق عدد حاصل ہوگا۔ لہٰذا π غیر ناطق عدد ہے۔

یونان کے ماہر آرشمدس نے پہلی مرتبہ π کی قدر محسوب کی۔ اس نے بتایا کہ π کی قدر 3.140845 اور 3.142857 کے درمیان واقع ہے یعنی $(3.140845 < \pi < 3.142857)$

آریا بھٹ (476-500AD) مشہور ہندوستانی ریاضی داں و ماہر فلکیات نے π کی قدر اعشاریہ کے چار مقامات 3.1416 تک صحیح طور پر دریافت کی۔ تیز رفتار کمپیوٹر اور جدید الگورتھم کے استعمال سے π کی قدر 1.24 ٹریلین اعشاریہ مقام تک محسوب کی گئی

π =3.14159265358979323846264338327950 .....

π کے اعشاریہ کا پھیلاؤ غیر مختتم اور غیر متوالی ہے۔ اس لیے π ایک غیر ناطق عدد ہے۔

یہ نوٹ کیجیے کہ عام طور پر ہم اس کی قدر $\frac{22}{7}$ لیتے ہیں جو کہ ایک تخمینی قدر ہے مگر $\pi \neq \frac{22}{7}$

14/مارچ کو ہم یوم π کے طور پر مناتے ہیں چونکہ 3.14 $(\pi = 3.14159 ....)$

یہ بھی محض ایک اتفاق ہے کہ البرٹ آئنسٹائن بھی 14/مارچ 1829 کو ہی پیدا ہوئے۔

یہ کوشش کیجیے

$\sqrt{3}$ کی قدر اعشاریہ کے چھ مقامات تک معلوم کیجیے۔

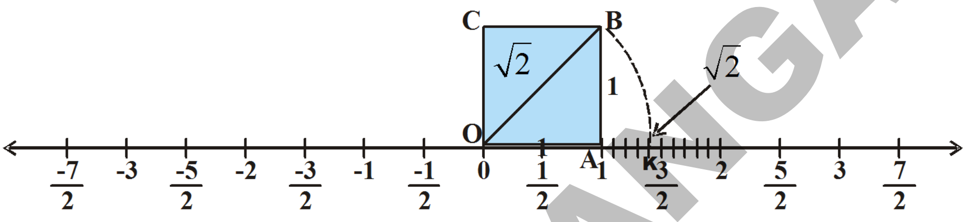
SCERT TELANGANA

1.3 غیر ناطق اعداد کا عددی خط پر اظہار

ہم نے یہ سیکھا کہ ایک ناطق عدد ہوتا ہے جو دو ناطق اعداد کے درمیان پایا جاتا ہے۔ اس لیے جب دو ناطق اعداد کو نقاط کی مدد سے ظاہر کرتے ہیں تو ان کے درمیان نقطہ استعمال کرتے ہوئے اس کا اظہار کر سکتے ہیں۔ اس لیے ناطق اعداد کے لئے وہاں لامتناہی نقاط تعبیر کرتے ہیں۔ اس سے مراد یہ ہے کہ عددی خط پر ناطق اعداد ہوتے ہیں۔ کیا یہ سچ ہے؟ کیا آپ ظاہر کر سکتے ہیں۔ $\sqrt{2}$ کو عددی خط پر ظاہر کر سکتے ہیں۔ اب ہم غیر ناطق اعداد کے بارے میں سیکھیں گے۔ اس طرح کہ $\sqrt{2}$، $\sqrt{3}$ عددی خط پر ہوں۔

مثال 7: $\sqrt{2}$ کو عددی خط پر ظاہر کیجیے۔

حل: نقطہ O پر مربع OABC عددی خط پر بتائیے جس کا ضلع 1 اکائی طول ہو۔ مسئلہ فیثا غورث کی رو سے $OB=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

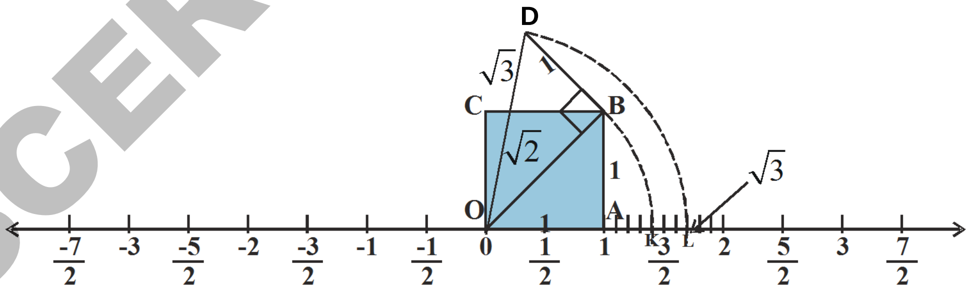


شکل (i)

ہم نے یہ دیکھا کہ $OB=\sqrt{2}$ پرکار کی مدد سے مرکز O اور نصف قطر OB، ایک قوس کھینچئے۔ O کے دائیں جانب اس O کو قطع کرنے کے لیے عددی خط پر نقطہ K لکھئے۔ اب $\sqrt{2}$ عددی خط پر ظاہر کر دیا گیا۔

مثال 8: $\sqrt{3}$ کو عددی خط پر ظاہر کیجیے۔

حل: شکل (i) پر غور کرتے ہیں۔



شکل (ii)

BD بنائیے جس کا طول 1، اکائی طول عمودوار ہے۔ OB جس طرح شکل (ii) میں بتایا گیا ہے OD کو ملائیے

SCERT TELANGANA

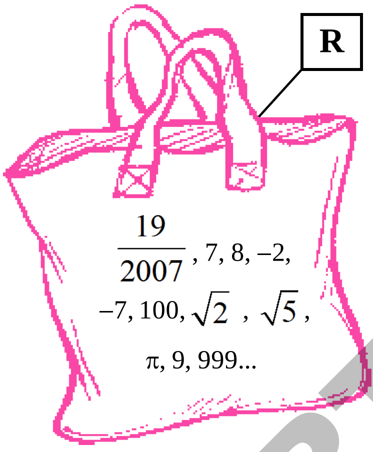
فیثا غورث مسئلہ کی رو سے $OD = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 1^2} = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}$

پرکار کے استعمال سے مرکز O مان کر OD قوس بنایا گیا۔ جو کہ عددی خط کو قطع کرے۔نقطہ C پر جو کہ O کے دائیں جانب ہوگا۔ L سے متعلقہ $\sqrt{3}$ ۔اس سے ہم یہ نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں کہ کئی نقاط عددی خط پر غیر ناطق عدد کے طور پر ظاہر کیے جاسکتے ہیں۔اسی طرح ہم کسی مثبت صحیح عدد n کے لیے $\sqrt{n}$ کو عددی خط پر ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ $\sqrt{n-1}$ کو عددی خط پر بتلانے کے بعد

یہ کوشش کیجیے

$\sqrt{5}$ اور $-\sqrt{5}$ کو عددی خط پر ظاہر کیجیے [اشارہ $5^2 = (2)^2 + (1)^2$]

1.3 حقیقی اعداد (Real Numbers)



تمام ناطق اعداد کو $\frac{p}{q}$ کی شکل میں لکھا جاسکتا ہے جہاں p اور q صحیح اعداد ہیں۔ $q \neq 0$ یہاں اس کے علاوہ بھی اعداد ہیں جنھیں $\frac{p}{q}$ کی شکل میں ظاہر نہیں کر سکتے ہیں جہاں p اور q صحیح اعداد ہیں اور غیر ناطق اعداد کہلاتے ہیں۔ ہم تمام ناطق اعداد اور غیر ناطق اعداد کو عددی خط پر تعبیر کر سکتے ہیں۔کیا کوئی اور عدد ہوگا جو اس میں ظاہر نہیں کیا جاسکتا ہے۔

جواب نہیں۔ناطق اور غیر ناطق اعداد مل کر خط کا احاطہ کرتے ہیں۔ان دونوں کا یکجا کیا جانا اعداد کی ایک نوعیت کو ظاہر کرتا ہے جس کو حقیقی اعداد Real Numbers کہتے ہیں اور اس کو R سے ظاہر کرتے ہیں۔حقیقی اعداد تمام اعداد کا احاطہ کرتے ہیں۔ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ ہر حقیقی عدد ایک منفرد نقطہ کو عددی خط پر ظاہر کرتا ہے اور عددی خط کا ہر نقطہ ایک منفرد حقیقی عدد کو ظاہر کرتا ہے۔اب ہم اس کو حقیقی عددی خط کہتے ہیں۔

یہاں پر چند مثالیں اس طرح ہیں۔

$-5.6, \sqrt{21}, -2, 0, 1, \frac{1}{5}, \frac{22}{7}, \pi, \sqrt{2}, \sqrt{7}, \sqrt{9}, 12.5, 12.5123.....$ وغیرہ

آپ نے مشاہدہ کیا ہوگا کہ ان اعداد میں ناطق اور غیر ناطق دونوں اعداد شامل ہیں۔

SCERT TELANGANA

مثال 9: $\frac{1}{5}$ اور $\frac{2}{7}$ کے درمیان کوئی دو غیر ناطق اعداد معلوم کیجیے۔

حل: ہم جانتے ہیں کہ $\frac{1}{5} = 0.20$

$\frac{2}{7} = 0.\overline{285714}$

$\frac{1}{5}$ اور $\frac{2}{7}$ کے درمیان دو غیر ناطق اعداد معلوم کیجیے۔ ہم کو اس کے اعشاری طریق اظہار کو دیکھنا ہے۔ ہم اس طرح کے لامتناہی اعداد معلوم کر سکتے ہیں۔

غیر ناطق اعداد کی دو مثالیں۔

0.201201120111..., 0.24114111411114..., 0.25231617181912..., 0.267812147512 ...

کیا آپ اس طرح کی مزید 4 مثالیں دے سکتے ہیں جو $\frac{1}{5}$ اور $\frac{2}{7}$ کے درمیان ہوں؟

مثال 10: 3 اور 4 کے درمیان ایک غیر ناطق عدد معلوم کیجیے۔

حل:

اگر a اور b دو مثبت ناطق اعداد اس طرح ہیں کہ ab ایک کامل مربع نہیں ہے تب $\sqrt{ab}$ ایک غیر ناطق عدد ہے جو a اور b کے درمیان واقع ہوگا۔

∴ 3 اور 4 کے درمیان غیر ناطق اعداد $\sqrt{3\times 4} = \sqrt{3}\times\sqrt{4}$

$= \sqrt{3}\times 2 = 2\sqrt{3}$

مثال 11: حسب ذیل اعداد ناطق ہیں یا غیر ناطق جانچ کیجیے۔

(i) $\left(3+\sqrt{3}\right)+\left(3-\sqrt{3}\right)$ (ii) $\left(3+\sqrt{3}\right)\left(3-\sqrt{3}\right)$

(iii) $\frac{10}{2\sqrt{5}}$ (iv) $\left(\sqrt{2}+2\right)^2$

حل: (i) $\left(3+\sqrt{3}\right)+\left(3-\sqrt{3}\right) = 3+\sqrt{3}+3-\sqrt{3}$

$= 6$ جو کہ ناطق عدد ہے۔

(ii) $\left(3+\sqrt{3}\right)\left(3-\sqrt{3}\right)$

ہم جانتے ہیں کہ $(a+b)(a-b) \equiv a^2-b^2$ یہ ایک اکائی ہے۔

SCERT TELANGANA

$$\left(3+\sqrt{3}\right)\left(3-\sqrt{3}\right)=3^2-\left(\sqrt{3}\right)^2=9-3=6$$

جو کہ ایک ناطق عدد ہے۔

(iii) $$\frac{10}{2\sqrt{5}}=\frac{10\div 2}{2\sqrt{5}\div 2}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

جو کہ ایک غیر ناطق عدد ہے۔

(iv) $$\left(\sqrt{2}+2\right)^2=\left(\sqrt{2}\right)^2+2.\sqrt{2}\ .2+2^2=2+4\sqrt{2}+4$$

جو کہ ایک غیر ناطق عدد ہے $6+4\sqrt{2}$

مشق 1.2

1. ذیل کے اعداد میں کونسے ناطق اور غیر ناطق ہیں درجہ بندی کیجیے۔

(i) $\sqrt{27}$ (ii) $\sqrt{441}$ (iii) 30.232342345…

(iv) 7.484848… (v) 11.2132435465 (vi) 0.3030030003.....

2. مثال کے ذریعہ واضح کیجیے کہ کس طرح، ناطق اور غیر ناطق اعداد ایک دوسرے سے جدا ہوتے ہیں۔

3. $\frac{5}{7}$ اور $\frac{7}{9}$ کے درمیان ایک غیر ناطق عدد معلوم کیجیے اور کتنے اعداد ہو سکتے ہیں بتلایئے۔

4. 0.7 اور 0.77 کے درمیان غیر ناطق اعداد معلوم کیجیے۔

5. $\sqrt{5}$ کی قدر اعشاریہ کے 3 مقامات تک معلوم کیجیے۔

6. $\sqrt{7}$ کی قدر طویل تقسیم کے طریقہ سے اعشاریہ کے چھ مقامات تک معلوم کیجیے۔

7. $\sqrt{10}$ کو عددی خط پر ظاہر کیجیے۔

8. 2 اور 3 کے درمیان کم از کم 2 غیر ناطق اعداد معلوم کیجیے۔

9. دیئے گئے بیانات صحیح ہیں یا غلط بتایئے کہ کس طرح وہ معقولیت رکھتے ہیں۔

(i) ہر غیر ناطق عدد حقیقی عدد ہوتا ہے۔

(ii) ہر ناطق عدد حقیقی عدد ہوتا ہے۔

(iii) ہر حقیقی عدد ضروری نہیں کہ ناطق عدد ہو۔

(iv) $\sqrt{n}$ ایک غیر ناطق عدد نہیں ہے جب کہ n ایک کامل مربع ہے۔

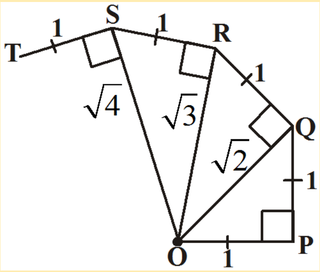
(v) $\sqrt{n}$ ایک غیر ناطق عدد ہے جب کہ n ایک کامل مربع نہیں ہے۔

(vi) تمام حقیقی اعداد غیر ناطق اعداد ہوتے ہیں۔

SCERT TELANGANA

مشغلہ

جذرالمربع کا پیچ دار (لچھا) بنانا



ایک بڑا کاغذ لے کر اس پر جذرالمربع کا پیچ دار (لچھا) اس طرح بنایا جائے۔

مرحلہ 1: نقطہ O لے کر ایک خطی مقطوعہ $\overline{OP}$ اکائی طول کھینچیے۔

مرحلہ 2: خطی مقطوعہ $\overline{PQ}$ عمود دار $\overline{OP}$ پر کھینچیے جو کہ اکائی طول ہو۔

(جہاں پر $OP = PQ = 1$) (شکل دیکھیے)

مرحلہ 3: O کو Q سے ملائیے۔ Q ($OQ = \sqrt{2}$)

مرحلہ 4: خطی مقطوعہ $\overline{QR}$ اکائی طول عمود دار $\overline{OQ}$ پر کھینچیے۔

مرحلہ 5: O، کو R سے ملائیے ($OR = \sqrt{3}$)

مرحلہ 6: خطی مقطوعہ $\overline{RS}$، ایک اکائی طول لے کر عمود $\overline{OR}$ پر کھینچیے۔

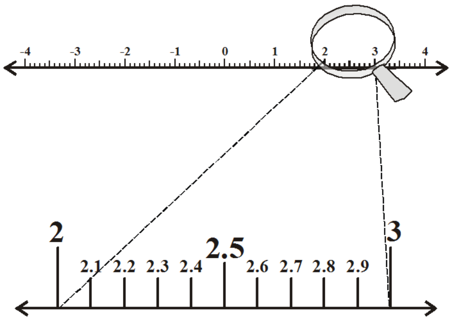
مرحلہ 7: اسی طرح چند اور مراحل پر۔ آپ ایک خوب صورت پیچدار دائرہ بنائیں گے جو کہ خطوط مقطوعہ $\overline{PQ}$، $\overline{QR}$، $\overline{RS}$، $\overline{ST}$، $\overline{TU}$ .... وغیرہ پر مشتمل ہوگا۔

یہ غور کیجیے کہ $\overline{OQ}$، $\overline{OR}$، $\overline{OS}$، $\overline{OT}$، $\overline{OU}$ ... وغیرہ ترتیب وار طول $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{6}$ کو ظاہر کرتے ہیں

1.4 حقیقی اعداد کا عددی خط پر اظہار بذریعہ مسلسل کلاں نمائی (تکبیر)

اس سے قبل ہم یہ دیکھ چکے ہیں کہ کوئی بھی حقیقی عدد کو اعشاریہ میں پھیلایا جاسکتا ہے۔ اب ہم یہ دیکھیں گے کہ مختتم اعشاری کسر کو عددی خط پر کس طرح ظاہر کیا جاتا ہے۔

فرض کیجیے کہ ہمیں 2.776 کو عددی خط پر ظاہر کرنا ہے۔ ہم کو یہ اندازہ ہے کہ یہ ایک مختتم اعشاری کسر ہے اور یہ، اعداد 2 اور 3 کے درمیان واقع ہوگا۔

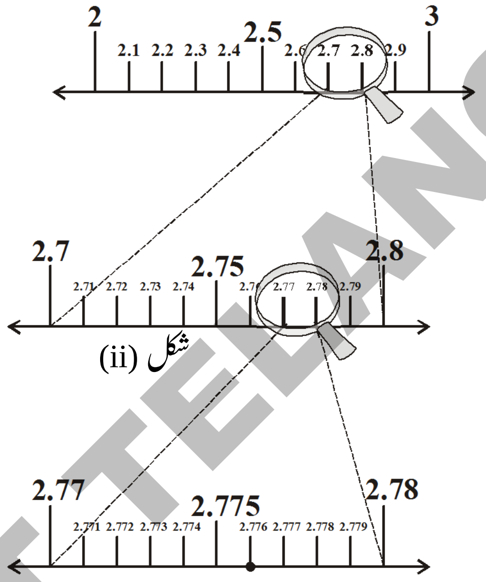


شکل (i)

SCERT TELANGANA

عددی خط پر 2 اور 3 کے درمیان بغور مشاہدہ کرتے ہیں۔فرض کیجیے ہم اس کو 10 مساوی حصوں میں تقسیم کرتے ہیں جیسے شکل (i) تب نشاندہی اس طرح کیجئے کہ 2.1, 2.2, 2.3 وغیرہ صاف نظر آجائیں۔ فرض کیجیے کہ ہمارے پاس تکبیری عدسہ (Magnifying Glass) ہے اور ہم اس حصہ کو دیکھتے ہیں جو 2 اور 3 کے درمیان واقع ہے۔ وہ اس طرح دکھائی دے گا جس طرح شکل (i) میں بتایا گیا ہے۔

اب 2.776 اعداد 2.7 اور 2.8 کے درمیان واقع ہے۔اب ہم اس حصہ پر جس میں 2.7 اور 2.8 واقع ہیں دھیان دیں گے۔پھر دوبارہ اس کو مزید 10 حصوں میں تقسیم کریں گے۔ پہلا نشان 2.71 اور دوسرا نشان 2.72 وغیرہ کو ظاہر کرے گا۔اس کو واضح طور پر دیکھنے کے لیے ہم اس کو بڑا کرتے ہیں۔



شکل (ii)

شکل (iii)

2.776 ،اعداد 2.77 اور 2.78 کے درمیان واقع ہوگا۔اب اس حصہ پر دھیان دیں گے جہاں عددی خط پر اعداد موجود ہیں جیسا کہ شکل (iii)۔ اندازہ لگائیے کہ اس کو مزید 10 حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔اس کو ہم تکبیری عدسہ کی مدد سے واضح اور صاف طور پر دیکھ سکتے ہیں جیسا کہ شکل (iii)۔

پہلا نشان 2.771 ہے دوسرا نشان 2.772 اس طرح اس ذیلی تقسیم میں 2.776 چھٹویں نشان پر ہے۔ہم اس طریقے کو عددی خط پر اعداد کا بصری اظہار بذریعہ تکبیری عدسہ بطور مسلسل کلاں نمائی (تکبیری) طریقہ کہتے ہیں۔

اب ہم حسب ذیل مثالوں کا مسلسل کلاں نمائی طریقہ کے ذریعہ عددی خط پر غیر مختتم تکراری اعشاریہ، بصری پھیلاؤ کا مشاہدہ کریں گے۔

SCERT TELANGANA

مثال 12: $3.5\overline{8}$ کو عددی خط پر مسلسل کلاں نمائی کے ذریعہ دکھلایئے۔ اعشاریہ 4 مقامات تک لیجیے

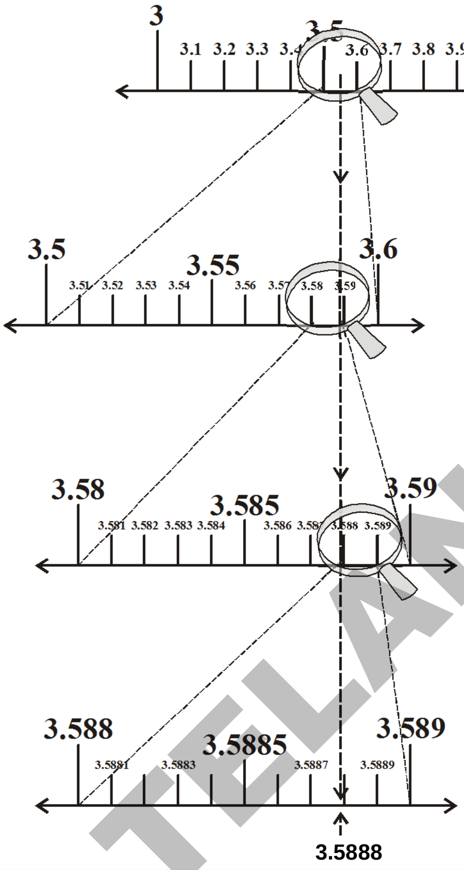
حل: تکبیری عدسے کے متواتر استعمال سے 3.5888 کو عددی خط پر ظاہر کریں گے۔

مرحلہ I:

مرحلہ II:

مرحلہ III:

مرحلہ IV:



مشق 1.3

1. 2.874 کو عددی خط پر مسلسل کلاں نمائی سے ظاہر کیجیے۔
2. $5.\overline{28}$ کو عددی خط پر دکھایئے۔ اعشاریہ کے 3 مقامات تک عددی خط پر دکھایئے۔

1.5 حقیقی اعداد پر اعمال

گذشتہ جماعت میں ہم یہ پڑھ چکے ہیں کہ ناطق اعداد تقلیبی خاصیت، تلازمی خاصیت اور تقسیمی خاصیت بلحاظ جمع اور ضرب مطمئن کرتے ہیں اور اس کے علاوہ یہ بھی جانتے ہیں کہ ناطق اعداد بلحاظ جمع، تفریق، ضرب، بندشی خاصیت رکھتے ہیں۔ کیا آپ کہہ سکتے ہیں غیر ناطق اعداد بھی چار بنیادی اعمال پر بندشی خاصیت رکھتے ہیں؟

SCERT TELANGANA

ذیل کی مثالوں پر غور کیجیے۔

$\left(\sqrt{3}\right)+\left(-\sqrt{3}\right)=0$ یہاں O ایک ناطق عدد ہے۔

$\left(\sqrt{5}\right)-\left(\sqrt{5}\right)=0$ یہاں پر O ایک ناطق عدد ہے۔

$\left(\sqrt{2}\right).\left(\sqrt{2}\right)=2$ یہاں پر 2 ایک ناطق عدد ہے۔

$\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}}=1$ یہاں پر '1' ایک ناطق عدد ہے۔

آپ نے کیا مشاہدہ کیا؟ غیر ناطق اعداد کے حاصل جمع فرق، خارج قسمت اور حاصل ضرب غیر ناطق اعداد کے غیر ناطق ہونا لازمی نہیں۔ تب ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ غیر ناطق اعداد بلحاظ جمع، ضرب، تفریق اور تقسیم بندشی خاصیت نہیں رکھتے۔ فرض کیجیے کہ آپ $2\sqrt{2}$ کو $3\sqrt{2}$ میں جمع کرنا چاہتے ہیں تو حاصل جمع $5\sqrt{2}$ لکھا جاتا ہے اسی طرح اگر آپ $3\sqrt{2}$ میں سے $2\sqrt{2}$ تفریق کرنا چاہتے ہیں تو آپ $\sqrt{2}$ حاصل کرتے ہیں۔

سوچیے، مباحثہ کیجیے اور لکھیے

1. طلحہ کہتا ہے کہ $5\sqrt{3}+2\sqrt{7}=7\sqrt{10}$ کیا آپ طلحہ سے متفق ہیں؟
2. $5\sqrt{2}-\sqrt{8}$ کی قدر آپ کیسے معلوم کروگے؟

اب ہم غیر ناطق اعداد پر چند سوالات دیکھیں گے۔

مثال 13: جانچ کیجیے کہ

(i) $5\sqrt{2}$ (ii) $\frac{5}{\sqrt{2}}$ (iii) $21+\sqrt{3}$ (iv) $\pi+3$ غیر ناطق اعداد ہیں یا نہیں۔

حل: ہم جانتے ہیں کہ $\sqrt{2}=1.414...$ ، $\sqrt{3}=1.732...$ ، $\pi=3.1415...$

(i) $5\sqrt{2} = 5(1.414\ldots) = 7.070\ldots$

(ii) $\frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}=\frac{7.070}{2} = 3.535\ldots$ (i کی رو سے)

(iii) $21+\sqrt{3} = 21+1.732\ldots = 22.732\ldots$

(iv) $\pi+3 = 3.1415\ldots + 3 = 6.1415\ldots$

اگر q ایک ناطق عدد ہے اور s ایک غیر ناطق عدد ہے تب $q+s$ ، $q-s$ ، qs اور $\frac{q}{s}$ $(s\neq 0)$ غیر ناطق عدد ہے۔

یہ تمام غیر مختتم اور غیر متوالی اعشاریہ ہیں تب وہ غیر ناطق اعداد ہیں۔

SCERT TELANGANA

مثال 14: $5\sqrt{3}+7\sqrt{5}$ کو $3\sqrt{5}-7\sqrt{3}$ سے تفریق کیجیے۔

حل:
$$(3\sqrt{5}-7\sqrt{3})-(5\sqrt{3}+7\sqrt{5})$$
$$=3\sqrt{5}-7\sqrt{3}-5\sqrt{3}-7\sqrt{5}$$
$$=-4\sqrt{5}-12\sqrt{3}$$
$$=-(4\sqrt{5}+12\sqrt{3})$$

مثال 15: $6\sqrt{3}$ کو $13\sqrt{3}$ سے ضرب دیجیے۔

حل: $6\sqrt{3}\times13\sqrt{3}=6\times13\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}=78\times3=234$

اب ہم جذرالمربع سے متعلق چند خصوصیات کا مطالعہ کریں گے۔

فرض کرو کہ a اور b کوئی دو مثبت حقیقی اعداد ہیں تب

(i) $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$

(ii) $\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\qquad b\neq0$

(iii) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)=a-b$

(iv) $\left(a+\sqrt{b}\right)\left(a-\sqrt{b}\right)=a^2-b$

(v) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{c}+\sqrt{d}\right)=\sqrt{ac}+\sqrt{ad}+\sqrt{bc}+\sqrt{bd}$

(vi) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2=a+2\sqrt{ab}+b$

(vii) $\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$

مذکورہ بالا خصوصیات پر چند سوالات کے حل کا مشاہدہ کریں گے۔

مثال 16: عبارت کو مختصر کیجیے۔

(i) $\left(3+\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{2}\right)$ (ii) $\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)$

(iii) $\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)^2$ (iv) $\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)$

حل:

(i) $\left(3+\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{2}\right)=6+3\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{6}$

(ii) $\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)=2^2-\left(\sqrt{3}\right)^2=4-3=1$

(iii) $\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)^2=\left(\sqrt{5}\right)^2+2\sqrt{5}\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2=5+2\sqrt{10}+2=7+2\sqrt{10}$

(iv) $\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)=\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2=5-2=3$

SCERT TELANGANA

مثال 17: $5+2\sqrt{6}$ کا جذرالمربع معلوم کیجیے۔

حل

$$\sqrt{5+2\sqrt{6}}$$
$$=\sqrt{3+2+2.\sqrt{3}.\sqrt{2}}$$
$$=\sqrt{3}+\sqrt{2}$$
$$\because \sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$$

1.5.1 نسب نما کو نطقانہ

کیا ہم $\frac{1}{\sqrt{2}}$ کو عددی خط پر ظاہر کر سکتے ہیں۔

$\frac{1}{\sqrt{2}}$ کی قدر کیا ہوگی؟

اس کی قدر کس طرح معلوم کی جاتی ہے۔ کیوں کہ $\sqrt{2} = 1.4142135.....$ جو کہ نہ تو مختتم ہے اور نہ متوالی ہے۔ کیا اس لیے ایک کو تقسیم کر سکتے ہیں؟

بظاہر یہ اتنا آسان نہیں ہے کہ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ کی قدر معلوم کریں۔

نسب نما کو نطقانے کے لیے $\frac{1}{\sqrt{2}}$ کو شمار کنندہ اور نسب نما میں $\sqrt{2}$ سے ضرب دینے پر ہمیں حاصل ہوگا۔

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

یعنی $\frac{\sqrt{2}}{2}$ سے مراد $\sqrt{2}$ کا نصف ہے

کیا اب ہم $\frac{\sqrt{2}}{2}$ کو عددی خط پر بتا سکتے ہیں؟ یہ صفر اور $\sqrt{2}$ کے درمیان واقع ہوگا۔

مشاہدہ کیجیے $2=\sqrt{2}\times\sqrt{2}$ تب ہم کہہ سکتے ہیں $\sqrt{2}$ نطقی جزضربی ہے $\sqrt{2}$ کا۔

اسی طرح $\sqrt{2}\times\sqrt{8}=\sqrt{16}=4$ تب $\sqrt{2}$ اور $\sqrt{8}$ ایک دوسرے کے نطقی جزوضربی ہیں۔

نوٹ کیجیے کہ دو غیر ناطق اعداد کا حاصل ایک ناطق عدد ہوتا ہے۔ تب یہ دو میں ہر ایک نطقی جزوضربی (R.F) ایک دوسرے کے نطقی جزوضربی ہیں۔ آپ نے غور کیا ہوگا کہ ایک دیے گئے غیر ناطق عدد کے (R.F) نطقی جزوضربی ایک جیسے نہیں ہیں۔ ہم سہولت کے لئے متفرق نطقی جزضربی لیں گے۔

یہ کیجیے

نسب نما کا نطقی جزضربی معلوم کیجیے۔ (i) $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ (ii) $\frac{3}{\sqrt{5}}$ (iii) $\frac{1}{\sqrt{8}}$

SCERT TELANGANA

مثال 18: نسب نما کو نطقائیے $\dfrac{1}{4+\sqrt{5}}$

حل: ہمیں معلوم ہے کہ $(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b}) = a^2 - b$

شمار کنندہ اور نسب نما کو $4-\sqrt{5}$ سے ضرب دیں گے۔

$$\frac{1}{4+\sqrt{5}} \times \frac{4-\sqrt{5}}{4-\sqrt{5}} = \frac{4-\sqrt{5}}{4^2-\left(\sqrt{5}\right)^2} = \frac{4-\sqrt{5}}{16-5} = \frac{4-\sqrt{5}}{11}$$

مثال 19: اگر $x = 7+4\sqrt{3}$ تب $x+\dfrac{1}{x}$ کی قدر معلوم کیجیے۔

حل:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{7+4\sqrt{3}} \times \frac{7-4\sqrt{3}}{7-4\sqrt{3}}$$

$$= \frac{7-4\sqrt{3}}{(7)^2-\left(4\sqrt{3}\right)^2} = \frac{7-4\sqrt{3}}{49-16(3)} = \frac{7-4\sqrt{3}}{49-48} = 7-4\sqrt{3}$$

$$\therefore x+\frac{1}{x} = 7+4\sqrt{3}+7-4\sqrt{3} = 7+7 = 14$$

مثال 20: مختصر کیجیے۔ $\dfrac{1}{7+4\sqrt{3}} + \dfrac{1}{2+\sqrt{5}}$

حل: $7+4\sqrt{3}$ کا نطقی جزضربی $7-4\sqrt{3}$ ہے اور $2+\sqrt{5}$ کا نطقی جزضربی $2-\sqrt{5}$ ہے۔

$$= \frac{1}{7+4\sqrt{3}} + \frac{1}{2+\sqrt{5}}$$

$$= \frac{1}{7+4\sqrt{3}} \times \frac{7-4\sqrt{3}}{7-4\sqrt{3}} + \frac{1}{2+\sqrt{5}} \times \frac{2-\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}}$$

$$= \frac{7-4\sqrt{3}}{7^2-(4\sqrt{3})^2} + \frac{2-\sqrt{5}}{2^2-(\sqrt{5})^2}$$

$$= \frac{7-4\sqrt{3}}{49-48} + \frac{2-\sqrt{5}}{(4-5)}$$

$$= \frac{7-4\sqrt{3}}{1} + \frac{2-\sqrt{5}}{(-1)}$$

$$= 7-4\sqrt{3} - 2+\sqrt{5} = 5-4\sqrt{3}+\sqrt{5}$$

SCERT TELANGANA

یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لیے ہے۔2020-21

1.5.2 حقیقی اعداد پر قوت نما کے قوانین

اب ہم قوت نما کے قوانین کا اعادہ کریں گے۔

(i) $a^m . a^n = a^{m+n}$ (ii) $(a^m)^n = a^{mn}$ (iii) $\frac{a^m}{a^n} = \begin{cases} a^{m-n} & \text{if } m > n \\ 1 & \text{if } m = n \\ \frac{1}{a^{n-m}} & \text{if } m < n \end{cases}$

(iv) $a^m b^m = (ab)^m$ (v) $\frac{1}{a^m} = a^{-m}$ (vi) $a^0 = 1$ $(a \neq 0)$

یہاں a' b اور m صحیح اعداد ہیں اور $a \neq 0$، $b \neq 0$، a، b اساس ہے کہلاتے ہیں اور m' n قوت نما ہیں۔

مثال کے طور پر

(i) $7^3.7^{-3} = 7^{3+(-3)} = 7^0 = 1$ (ii) $(2^3)^{-7} = 2^{-21} = \frac{1}{2^{21}}$

(iii) $\frac{23^{-7}}{23^4} = 23^{-7-4} = 23^{-11}$ (iv) $(7)^{-13}.(3)^{-13} = (7\times3)^{-13} = (21)^{-13}$

فرض کیجیے ہم حسب ذیل کو حل کرنا چاہتے ہیں

(i) $2^{\frac{2}{3}}.2^{\frac{1}{3}}$ (ii) $\left(5^{\frac{1}{7}}\right)^4$ (iii) $\frac{3^{\frac{1}{5}}}{3^{\frac{1}{3}}}$ (iv) $7^{\frac{1}{17}}.11^{\frac{1}{17}}$

ہم اس کو کس طرح حل کر سکیں گے؟ اوپر کی مثالوں میں قوت نما اور اساس ناطق اعداد ہیں۔ یہاں پر اس بات کی ضرورت ہے کہ ان قوانین کو جو کہ قوت نما کے قوانین ہیں مثبت حقیقی اعداد اور ناطق اعداد تک توسیع دینا ہے۔ کچھ کہنے سے پہلے ہمیں اس بات کو سمجھنا چاہیے کہ کسی حقیقی اعداد کا n^{th} (nواں) جذر کیا ہے۔

ہم جانتے ہیں کہ $3^2 = 9$ تب $\sqrt{9} = 3$ (کیونکہ 9 کا جذرالمربع 3 ہے)

اس لیے $\sqrt[2]{9} = 3$

اگر $5^2 = 25$ تب $\sqrt{25} = 5$ جو کہ $\sqrt[2]{25} = 5$ اور پھر $\sqrt[2]{25} = (25)^{\frac{1}{2}} = (5^2)^{\frac{1}{2}} = 5^{2\times\frac{1}{2}} = 5$

ذیل کا مشاہدہ کیجیے

اگر $2^3 = 8$ تب $\sqrt[3]{8} = 2$ (8 کا جذرالمکعب 2 ہے) $\sqrt[3]{8} = 8^{\frac{1}{3}} = (2^3)^{\frac{1}{3}} = 2$

SCERT TELANGANA

اگر $2^4 = 16$ تب $\sqrt[4]{16} = 2$ (16 کا چوتھا جذر) $\sqrt[4]{16} = (16)^{\frac{1}{4}} = \left(2^4\right)^{\frac{1}{4}} = 2$

$2^5 = 32$ تب $\sqrt[5]{32} = 2$ (32 کا پانچواں جذر 2 ہے) $\sqrt[5]{32} = (32)^{\frac{1}{5}} = \left(2^5\right)^{\frac{1}{5}} = 2$

$2^6 = 64$ تب $\sqrt[6]{64} = 2$ (64 کا چھٹا جذر 2 ہے) $\sqrt[6]{64} = (64)^{\frac{1}{6}} = \left(2^6\right)^{\frac{1}{6}} = 2$

اس طرح اگر $a^n = b$ تب $\sqrt[n]{b} = a$ (b کا nواں جذر a ہے)

$$\sqrt[n]{b} = (b)^{\frac{1}{n}} = \left(a^n\right)^{\frac{1}{n}} = a$$

فرض کرو کہ $a > 0$ ایک حقیقی عدد ہے n مثبت صحیح عدد ہے۔

اگر $b^n = a$ کسی مثبت حقیقی قدر b، کے لئے تب a کا nواں جذر ہوگا اور ہم اس کو اس طرح لکھ سکتے ہیں $\sqrt[n]{a} = b$

اوپر کی سطور میں قوت نما کے قوانین کو مثبت حقیقی اعداد کے اساس اور ناطق قوت نما تک توسیع دیں۔

فرض کرو کہ $a > 0$ ایک حقیقی عدد اور p اور q ناطق عدد ہیں تب ہمارے پاس

(i) $a^p . a^q = a^{p+q}$ (ii) $(a^p)^q = a^{pq}$

(iii) $\dfrac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$ (iv) $a^p . b^p = (ab)^p$ (v) $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

اب ہم ان قوانین کو سوالات حل کرنے میں استعمال کر سکتے ہیں۔

مثال 21: حل کیجیے۔

(i) $2^{\frac{2}{3}} . 2^{\frac{1}{3}}$ (ii) $\left(5^{\frac{1}{7}}\right)^4$ (iii) $\dfrac{3^{\frac{1}{5}}}{3^{\frac{1}{3}}}$ (iv) $7^{\frac{1}{17}} . 11^{\frac{1}{17}}$

حل: (i) $2^{\frac{2}{3}} . 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)} = 2^{\frac{3}{3}} = 2^1 = 2$

(ii) $\left(5^{\frac{1}{7}}\right)^4 = 5^{\frac{4}{7}}$

(iii) $\dfrac{3^{\frac{1}{5}}}{3^{\frac{1}{3}}} = 3^{\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right)} = 3^{\frac{3-5}{15}} = 3^{\frac{-2}{15}} = \dfrac{1}{3^{2/15}}$

(iv) $7^{\frac{1}{17}} . 11^{\frac{1}{17}} = (7 \times 11)^{\frac{1}{17}} = 77^{\frac{1}{17}}$

یہ کیجیے

مختصر کیجیے

(i) $(16)^{1/2}$

(ii) $(128)^{1/7}$

(iii) $(343)^{1/5}$

SCERT TELANGANA

اصم (Surd)

اگر n ایک مثبت صحیح عدد ہے جو ایک سے بڑا ہے اور a ایک مثبت ناطق عدد ہے مگر کسی بھی ناطق عدد کا nواں قوت نہیں ہے۔ تب $\sqrt[n]{a}$ یا $a^{1/n}$ n درجہ کا اصم کہلاتا ہے۔ عام طور پر ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ a کا nواں جذر، اصم کہلاتا ہے۔ aاساس اور $\sqrt[n]{\ }$ کو اصم کی علامت کہتے ہیں۔ اور n کو اصم کا درجہ کہتے ہیں۔

اصم کی اقسام

قوت نمائی شکل $a^{\frac{1}{n}}$

اصم کی شکل $\sqrt[n]{a}$

یہاں پر اصم کی چند مثالیں ہیں

$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt[3]{9}, ...$

ایک حقیقی عدد $\sqrt{7}$ لیجیے جہاں پر اس کو $7^{\frac{1}{2}}$ بھی لکھا جاتا ہے چونکہ 7 کوئی ناطق عدد کا مربع نہیں ہے۔ لہذا $\sqrt{7}$ ایک اصم ہے۔

ایک حقیقی اعداد $\sqrt[3]{8}$ لیجیے۔ چونکہ 8 دو کا مکعب ہے۔ اس لیے $\sqrt[3]{8}$ ایک اصم نہیں ہے۔

حقیقی عدد $\sqrt{\sqrt{2}}$ لیجیے، اس کو اس طرح بھی لکھا جاتا ہے $\sqrt[4]{2} = 2^{\frac{1}{4}} = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$

اس لیے یہ ایک اصم ہے۔

یہ کیجیے۔

1. ذیل کے مقدار اصم کو قوت نما میں لکھیے۔

i. $\sqrt{2}$ ii. $\sqrt[3]{9}$ iii. $\sqrt[5]{20}$ iv. $\sqrt[17]{19}$

2. ذیل کے اصم کی اساسی شکل لکھیے۔

i. $5^{\frac{1}{7}}$ ii. $17^{\frac{1}{6}}$ iii. $5^{\frac{2}{5}}$ iv. $142^{\frac{1}{2}}$

مشق 1.4

i) $(5+\sqrt{7})(2+\sqrt{5})$ ii) $(5+\sqrt{5})(5-\sqrt{5})$

iii) $(\sqrt{3}+\sqrt{7})^2$ iv) $(\sqrt{11}-\sqrt{7})(\sqrt{11}+\sqrt{7})$

2. ذیل کے اعداد کو ناطق اور غیر ناطق میں لکھیے۔

i) $5-\sqrt{3}$ ii) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ iii) $(\sqrt{2}-2)^2$

iv) $\frac{2\sqrt{7}}{7\sqrt{7}}$ v) 2π vi) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ vii) $(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})$

SCERT TELANGANA

3. ذیل کی مساوات میں متغیرات x, y, z کیا ناطق اعداد ہیں؟ یا غیر ناطق اعداد لکھیے۔

(i) $x^2 = 7$ (ii) $y^2 = 16$ (iii) $z^2 = 0.02$

(iv) $u^2 = \frac{17}{4}$ (v) $w^2 = 27$ (vi) $t^4 = 256$

4. ہر اصم ایک غیر ناطق ہوتا ہے۔لیکن ہر غیر ناطق عدد، اصم نہیں ہوتا ہے۔اپنے جواب کی تصدیق کیجیے۔

5. ذیل کے نسب نماؤں کو نطقائیے۔

(i) $\frac{1}{3+\sqrt{2}}$ (ii) $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}$ (iii) $\frac{1}{\sqrt{7}}$ (iv) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

6. ذیل کے ہر ایک نسب نما کو نطقاتے ہوئے مختصر کیجیے۔

(i) $\frac{6-4\sqrt{2}}{6+4\sqrt{2}}$ (ii) $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$ (iii) $\frac{1}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$ (iv) $\frac{3\sqrt{5}-\sqrt{7}}{3\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

7. $\frac{\sqrt{10}-\sqrt{15}}{2\sqrt{2}}$ کی قدر اعشاریہ کے تین مقامات تک معلوم کیجیے۔ ($\sqrt{2}=1.414$ $\sqrt{3}=1.732$ اور $\sqrt{5}=2.236$)

8. قیمت معلوم کیجیے۔

(i) $64^{\frac{1}{6}}$ (ii) $32^{\frac{1}{5}}$ (iii) $625^{\frac{1}{4}}$

(iv) $16^{\frac{3}{2}}$ (v) $243^{\frac{2}{5}}$ (vi) $(46656)^{\frac{-1}{6}}$

9. مختصر کیجیے۔ $\sqrt[4]{81} - 8\sqrt[3]{343} + 15\sqrt[5]{32} + \sqrt{225}$

10. اگر a اور b ناطق اعداد ہوں تو ہر سوال میں a اور b کی قدر معلوم کیجیے۔

(i) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = a+b\sqrt{6}$ (ii) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2\sqrt{5}-3\sqrt{3}} = a-b\sqrt{15}$

11. $11+2\sqrt{30}$ کا جزر المربع معلوم کیجیے۔

SCERT TELANGANA

ہم نے کیا سیکھا

اس سبق میں ان نکات پر غور کیجیے۔

1. ایک عدد جس کو $\frac{p}{q}$ کی شکل میں لکھا جاتا ہے جہاں پر p اور q صحیح اعداد ہیں اور $q \neq 0$ کو ناطق عدد کہتے ہیں۔
2. ایسے اعداد جن کو $\frac{p}{q}$ کی شکل میں لکھا نہیں جاسکتا جہاں پر p اور q صحیح اعداد ہیں اور $q \neq 0$ کو غیر ناطق اعداد کہتے ہیں۔
3. ناطق اعداد کی اعشاری شکل نہ تو مختتم ہے اور نہ ہی غیر مختتم ہے۔
4. غیر ناطق عدد کی اعشاری شکل غیر مختتم اور غیر متوالی ہوتی ہے۔
5. ناطق اور غیر ناطق اعداد کا مجموعہ حقیقی اعداد کہلاتا ہے۔
6. عددی خط پر ہر حقیقی عدد کے لیے ایک منفرد حقیقی عدد کا نقطہ ہوتا ہے۔
7. اگر q ایک ناطق عدد ہے s ایک غیر ناطق عدد ہے تب $q + s$ ‘$q - s$ اور qs ‘اور $\frac{q}{s}$ ناطق اعداد ہوں گے۔
8. اگر n ایک طبعی عدد ہے لیکن کامل مربع نہ ہو تب $\sqrt{n}$ ایک غیر ناطق عدد ہے۔
9. مندرجہ ذیل مساوات تمام مثبت حقیقی اعداد a اور b پر صادق آتی ہیں۔

(i) $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ (ii) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ $(b \neq 0)$

(iii) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right) = a - b$ (iv) $\left(a+\sqrt{b}\right)\left(a-\sqrt{b}\right) = a^2 - b$

(v) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 = a + 2\sqrt{ab} + b$ (vi) $\sqrt{a+b+2\sqrt{ad}} = \sqrt{a}+\sqrt{b}$

10. نسب نما کو نطقانے کے لیے $\frac{1}{\sqrt{a}+b}$ کو ہم $\frac{\sqrt{a}-b}{\sqrt{a}-b}$ سے ضرب دیں گے جہاں a اور b صحیح اعداد ہیں۔
11. فرض کرو کہ $a > 0$ $b > 0$ ایک مثبت حقیقی عدد ہے اور p اور q ناطق اعداد ہیں تب

(i) $a^p . a^q = a^{p+q}$ (ii) $(a^p)^q = a^{pq}$ (iii) $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$

(iv) $a^p . b^p = (ab)^p$

12. اگر n ایک مثبت صحیح عدد ہے اور a ایک ناطق عدد ہے مگر n واں رکن کوئی ایک ناطق عدد نہ ہو تب $\sqrt[n]{a}$ یا $a^{\frac{1}{n}}$ n رتبہ کا اصم ہوگا۔

SCERT TELANGANA