પ્રકરણ 5

સમાંતર શ્રેણી

વિહંગાવલોકન

મુખ્ય સંકલ્પનાઓ અને પરિણામો

- પ્રથમ પદ a સિવાયનું કોઈ પણ પદ આગળના પદમાં નિશ્ચિત સંખ્યા d ઉમેરવાથી મળે તેવી સંખ્યાઓની યાદીને સમાંતર શ્રેણી કહે છે. નિશ્ચિત સંખ્યા d ને સમાંતર શ્રેણીનો સામાન્ય તફાવત કહે છે.

  સમાંતર શ્રેણીનું વ્યાપક સ્વરૂપ $a, a + d, a + 2d, a + 3d, \ldots$

- જો તફાવત $a_2 - a_1, a_3 - a_2, a_4 - a_3, \ldots$ એકસમાન મૂલ્ય આપે, અર્થાત્ પ્રત્યેક પ્રાકૃતિક સંખ્યા k માટે $a_{k+1} - a_k$ સમાન થાય, તો સંખ્યાઓની યાદી $a_1, a_2, a_3, \ldots$ સમાંતર શ્રેણી છે.

- સમાંતર શ્રેણીનું n મું પદ (અથવા વ્યાપક પદ) $a_n = a + (n - 1)\, d$ છે. અહીં a એ પ્રથમ પદ અને d સામાન્ય તફાવત છે. નોંધીશું કે $a_1 = a$.

- સમાંતર શ્રેણીનાં પ્રથમ n પદોનો સરવાળો

$$S_n = \frac{n}{2}\, [2a + (n - 1)\, d]$$

  જો n પદોવાળી સમાંતર શ્રેણીનું છેલ્લું પદ l હોય, તો આ તમામ પદોનો સરવાળો

$$S_n = \frac{n}{2}\, [a + l]$$ થી પણ મળે છે.

  કેટલીક વખત S_n ને S વડે પણ દર્શાવાય છે.

- જો સમાંતર શ્રેણીનાં પ્રથમ n પદોનો સરવાળો S_n હોય, તો તેનું n મું પદ

  $n > 1$ માટે $a_n = S_n - S_{n-1}$ થાય. વળી, $a_1 = S_1$

વિધાન સત્ય બને તે રીતે આપેલા ચાર વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી ક્રમાંક 1 અને 2 વાળા પ્રશ્નોના ઉત્તર આપો :

ઉદાહરણ 1 : સમાંતર શ્રેણી 5, 8, 11, 14, ... નું 10 મું પદ ....

(A) 32 (B) 35 (C) 38 (D) 185

ઉકેલ : અહીં $a = 5$, $d = 8 - 5 = 3$

$\therefore a_{10} = a + (n - 1)d = 5 + 9 \times 3 = 5 + 27 = 32$

ઉત્તર (A)

ઉદાહરણ 2 : જો સમાંતર શ્રેણીમાં $a = -7.2$, $d = 3.6$ અને $a_n = 7.2$ હોય, તો $n =$ ....

(A) 1 (B) 3 (C) 4 (D) 5

ઉકેલ : $a_n = a + (n - 1)d$

$\therefore 7.2 = (-7.2) + (n - 1)(3.6)$

$\therefore 14.4 = (n - 1)(3.6)$

$\therefore \frac{14.4}{3.6} = (n - 1)$

$\therefore 4 + 1 = n$

$\therefore n = 5$

ઉત્તર (D)

સ્વાધ્યાય 5.1

વિધાન સત્ય બને તે રીતે આપેલા ચાર વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી ક્રમાંક 1 થી 18 વાળા પ્રશ્નોના ઉત્તર આપો :

1. જો સમાંતર શ્રેણીમાં $d = -4$, $n = 7$, $a_n = 4$, હોય, તો $a =$ ....

(A) 6 (B) 7 (C) 20 (D) 28

2. જો સમાંતર શ્રેણીમાં $a = 3.5$, $d = 0$, $n = 101$, હોય, તો $a_n =$ ....

(A) 0 (B) 3.5 (C) 103.5 (D) 104.5

3. – 10, – 6, – 2, 2,... સંખ્યાઓની યાદી ....

(A) $d = -16$ હોય તેવી સમાંતર શ્રેણી છે. (B) $d = 4$ હોય તેવી સમાંતર શ્રેણી છે.

(C) $d = -4$ હોય તેવી સમાંતર શ્રેણી છે. (D) સમાંતર શ્રેણી નથી.

4. સમાંતર શ્રેણી : $-5, \frac{-5}{2}, 0, \frac{5}{2}, \ldots$ નું 11 મું પદ .... છે.

(A) –20 (B) 20 (C) –30 (D) 30

5. જેનું પ્રથમ પદ –2 અને સામાન્ય તફાવત –2 હોય, તેવી સમાંતર શ્રેણીનાં પ્રથમ ચાર પદો .... છે.

(A) – 2, 0, 2, 4 (B) – 2, 4, – 8, 16

(C) – 2, – 4, – 6, – 8 (D) – 2, – 4, – 8, –16

6. જેનાં પ્રથમ બે પદો –3 અને 4 હોય તેવી સમાંતર શ્રેણીનું 21 મું પદ .... છે.

(A) 17 (B) 137 (C) 143 (D) –143

7. જો સમાંતર શ્રેણીનું બીજું પદ 13 અને 5 મું પદ 25 હોય, તો આ શ્રેણીનું 7 મું પદ કેટલું થશે ?

(A) 30 (B) 33 (C) 37 (D) 38

8. સમાંતર શ્રેણી : 21, 42, 63, 84,... નું કેટલામું પદ 210 છે ?

(A) 9 મું (B) 10 મું (C) 11 મું (D) 12 મું

9. જો એક સમાંતર શ્રેણીનો સામાન્ય તફાવત 5 હોય, તો $a_{18} - a_{13}$ નું મૂલ્ય કેટલું થાય ?

(A) 5 (B) 20 (C) 25 (D) 30

10. જો કોઈ સમાંતર શ્રેણી માટે $a_{18} - a_{14} = 32$ હોય, તો તે સમાંતર શ્રેણીનો સામાન્ય તફાવત શું હશે ?

(A) 8 (B) – 8 (C) – 4 (D) 4

11. બે સમાંતર શ્રેણીનો સામાન્ય તફાવત સમાન છે. આમાંની એક શ્રેણીનું પ્રથમ પદ –1 અને બીજી શ્રેણીનું પ્રથમ પદ – 8 છે. તેમના ચોથા પદનો તફાવત .... છે.

(A) –1 (B) – 8 (C) 7 (D) –9

12. એક સમાંતર શ્રેણીના 7 માં પદના 7 ગણા એ 11 માં પદના 11 ગણા બરાબર થાય, તો તેનું 18 મું પદ .... થાય.

(A) 7 (B) 11 (C) 18 (D) 0

13. સમાંતર શ્રેણી : –11, –8, –5, ..., 49 ના અંતિમ પદથી 4 થું પદ .... થાય.

(A) 37 (B) 40 (C) 43 (D) 58

14. પ્રથમ 100 પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો સરવાળો શોધવા માટેના પ્રસંગ સાથે સંકળાયેલ પ્રખ્યાત ગણિતજ્ઞનું નામ .... છે.

(A) પાયથાગોરસ (B) ન્યૂટન (C) ગાઉસ (D) યુક્લિડ

15. એક સમાંતર શ્રેણીનું પ્રથમ પદ –5 અને સામાન્ય તફાવત 2 હોય, તો તેનાં પ્રથમ 6 પદોનો સરવાળો .... છે.

(A) 0 (B) 5 (C) 6 (D) 15

16. સમાંતર શ્રેણી 10, 6, 2,... નાં પ્રથમ 16 પદોનો સરવાળો .... છે.

(A) –320 (B) 320 (C) –352 (D) –400

17. એક સમાંતર શ્રેણીના સંદર્ભમાં જો $a = 1$, $a_n = 20$ અને $S_n = 399$ હોય, તો $n =$ ....

(A) 19 (B) 21 (C) 38 (D) 42

18. સંખ્યા 3 ના પ્રથમ પાંચ ગુણિતોનો સરવાળો .... છે.

(A) 45 (B) 55 (C) 65 (D) 75

કારણ સહિત ટૂંક જવાબી પ્રશ્નો

ઉદાહરણ 1 : સમાંતર શ્રેણી : 10, 5, 0, –5, ... નો સામાન્ય તફાવત $d = 5$ છે.

ઉપરનું વિધાન સત્ય છે કે અસત્ય તે ચકાસો.

ઉકેલ : $a_2 - a_1 = 5 - 10 = -5$

સામાન્ય તફાવત $d = -5$ છે.

આથી આપેલું વિધાન અસત્ય છે.

ઉદાહરણ 2 : વાર્ષિક 10 ટકાના ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજના દરે દિવ્યાએ ₹ 1000 નું રોકાણ કર્યું. પ્રથમ વર્ષ, દ્વિતીય વર્ષ, તૃતીય વર્ષ, ... ના અંતે થતી રકમ સમાંતર શ્રેણી બનાવે છે. તમારો ઉત્તર ચકાસો.

ઉકેલ : પ્રથમ વર્ષના અંતે થતી રકમ = ₹ 1100

બીજા વર્ષના અંતે થતી રકમ = ₹ 1210

ત્રીજા વર્ષના અંતે થતી રકમ = ₹ 1331 અને તે રીતે આગળ.

આથી પ્રથમ વર્ષ, દ્વિતીય વર્ષ, તૃતીય વર્ષ,... ના અંતે થતી રકમ (₹ માં)

1100, 1210, 1331, ...

અહીં, $a_2 - a_1 = 110$

$a_3 - a_2 = 121$

$a_2 - a_1 \neq a_3 - a_2$ હોવાથી, તે સમાંતર શ્રેણી બનાવશે નહિ.

ઉદાહરણ 3 : પ્રત્યેક ધન પૂર્ણાંક n માટે સમાંતર શ્રેણીનું n મું પદ $n^2 + 1$ હોય તે શક્ય નથી. તમારા ઉત્તરની યથાર્થતા ચકાસો.

ઉકેલ : અહીં, $a_n = n^2 + 1$

આથી, $a_1 = 1^2 + 1 = 2$

$a_2 = 2^2 + 1 = 5$

$a_3 = 3^2 + 1 = 10$

$\vdots$

સંખ્યાઓની યાદી 2, 5, 10, ...

અહીં, $5 - 2 \neq 10 - 5$. આથી તે સમાંતર શ્રેણી બનાવશે નહિ. આથી આપેલ વિધાન સત્ય છે.

વૈકલ્પિક ઉકેલ 1 : આપણે જાણીએ છીએ કે, સમાંતર શ્રેણીમાં, $d = a_n - a_{n-1}$

અહીં, $a_n = n^2 + 1$

તેથી, $a_n - a_{n-1} = (n^2 + 1) - [(n-1)^2 + 1]$

$= 2n - 1$

$a_n - a_{n-1}$ એ n પર આધારિત છે, આથી d અચળ સંખ્યા નથી.

તેથી, $a_n = n^2 + 1$ એ સમાંતર શ્રેણીનું n મું પદ નથી.

વૈકલ્પિક ઉકેલ 2 : આપણે જાણીએ છીએ કે સમાંતર શ્રેણીમાં

$a_n = a + (n-1)d$ છે. નિરીક્ષણ કરીશું કે a_n એ n માં સુરેખ બહુપદી છે.

અહીં, $a_n = n^2 + 1$ એ n માં સુરેખ બહુપદી નથી. આથી, તે સમાંતર શ્રેણીનું n મું પદ નથી.

સ્વાધ્યાય 5.2

1. નીચેનામાંથી કઈ શ્રેણી સમાંતર શ્રેણી છે ? તમારો ઉત્તર ચકાસો :

(i) −1, −1, −1, −1, ...

(ii) 0, 2, 0, 2, ...

(iii) 1, 1, 2, 2, 3, 3,...

(iv) 11, 22, 33,...

(v) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$

(vi) $2, 2^2, 2^3, 2^4, \ldots$

(vii) $\sqrt{3}, \sqrt{12}, \sqrt{27}, \sqrt{48}, \ldots$

2. $-1, -\frac{3}{2}, -2, \frac{5}{2}, ...$ માં $a_2 - a_1 = a_3 - a_2$ પરથી આ સમાંતર શ્રેણી છે તેમ કહેવું સત્ય છે ? તમારો ઉત્તર ચકાસો.

3. સમાંતર શ્રેણી : –3, –7, –11, ..., પરથી આપણે a_{30} અને a_{20} શોધ્યા સિવાય સીધા જ $a_{30} - a_{20}$ મેળવી શકીએ ? તમારા ઉત્તર માટે કારણ આપો.

4. બે સમાંતર શ્રેણીનો સામાન્ય તફાવત સમાન છે. પ્રથમ સમાંતર શ્રેણીનું પ્રથમ પદ 2 અને બીજી સમાંતર શ્રેણીનું પ્રથમ પદ 7 છે. તેમનાં 10 મા પદોનો તફાવત અને 21મા પદોનો તફાવત સમાન છે અને તે કોઈ પણ બે અનુરૂપ પદોના તફાવતને સમાન થાય છે. શા માટે ?

5. સમાંતર શ્રેણી : 31, 28, 25, ...નું કોઈ પદ 0 હોઈ શકે ? તમારા ઉત્તરની યથાર્થતા ચકાસો.

6. એક ટેક્સીનું પ્રથમ કિમીનું ભાડું ₹ 15 છે. ત્યાર પછીના દરેક કિમીનું ભાડુ ₹ 8 છે. આ ભાડાની રકમો સમાંતર શ્રેણી બનાવતી નથી, કારણ કે પ્રત્યેક કિમી પછી તેનું કુલ ભાડુ (₹ માં) 15, 8, 8, 8, ...

આ વિધાન સત્ય છે ? કારણ આપો.

7. નીચેનામાંથી કઈ સ્થિતિમાં યાદીમાં સમાયેલી સંખ્યાઓ સમાંતર શ્રેણી બનાવે છે ? તમારા ઉત્તરનું કારણ આપો :

(i) જ્યારે મહિનાની ફી ₹ 400 હોય, ત્યારે વિદ્યાર્થી પાસેથી પ્રત્યેક મહિને એક શાળા દ્વારા વસૂલવામાં આવતી આખા વર્ષની ફી.

(ii) જ્યારે ધોરણ I ની મહિનાની ફી ₹ 250 અને તે પછીના ઉપરના ધોરણ માટે ₹ 50 વધતી હોય ત્યારે એક શાળાએ ધોરણ I થી XII માં પ્રત્યેક મહિને વસૂલેલી ફી.

(iii) જ્યારે પ્રતિ વર્ષ 10 ટકાના સાદા વ્યાજે ₹ 1000 જમા કરવામાં આવે, ત્યારે વરૂણના ખાતામાં પ્રત્યેક વર્ષના અંતે જમા થતી રકમ.

(iv) જ્યારે પ્રત્યેક સેકન્ડે બૅક્ટેરિયાની સંખ્યા બમણી થતી હોય, ત્યારે પ્રત્યેક સેકન્ડ પછી ખાદ્યસામગ્રીમાં મળતા બૅક્ટેરિયાની સંખ્યા.

8. નીચે આપેલું એક શ્રેણીનું વ્યાપક n મું પદ સમાંતર શ્રેણીનું છે તે કહેવું સત્ય છે ? યથાર્થતા ચકાસો.

(i) $2n - 3$ (ii) $3n^2 + 5$ (iii) $1 + n + n^2$

ટૂંક જવાબી પ્રશ્નો

ઉદાહરણ 1 : જો સંખ્યાઓ $n - 2$, $4n - 1$ અને $5n + 2$ સમાંતર શ્રેણીમાં હોય, તો n નું મૂલ્ય શોધો.

ઉકેલ : $n - 2$, $4n - 1$, $5n + 2$ સમાંતર શ્રેણીમાં હોવાથી,

$$(4n - 1) - (n - 2) = (5n + 2) - (4n - 1)$$

અર્થાત્, $3n + 1 = n + 3$

તેથી, $n = 1$

ઉદાહરણ 2 : સમાંતર શ્રેણી : –11, –7, –3,..., 49 ના મધ્યમ પદ (પદો)નું મૂલ્ય શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $a = -11$, $d = -7 - (-11) = 4$, $a_n = 49$

હવે, $a_n = a + (n - 1) d$

$\therefore \quad 49 = -11 + (n - 1) \times 4$

$\therefore \quad 60 = (n - 1) \times 4$

$\therefore \quad n = 16$

n યુગ્મ સંખ્યા હોવાથી, બે મધ્યમ પદો મળે, તે $\frac{16}{2}$ મું અને $\left(\frac{16}{2}+1\right)$ મું એટલે કે, 8 મું પદ અને 9 મું પદ.

$a_8 = a + 7d = -11 + 7 \times 4 = 17$ અને

$a_9 = a + 8d = -11 + 8 \times 4 = 21$

તેથી, બે મધ્યમ પદો 17 અને 21 છે.

ઉદાહરણ 3 : એક સમાંતર શ્રેણીનાં પ્રથમ ત્રણ પદોનો સરવાળો 33 છે. જો પ્રથમ પદ અને ત્રીજા પદનો ગુણાકાર, બીજા પદ કરતાં 29 જેટલો વધારે હોય, તો તે સમાંતર શ્રેણી શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે સમાંતર શ્રેણીનાં ત્રણ પદો $a - d, \quad a, \quad a + d$ છે.

તેથી, $\quad a - d + a + a + d = 33$. આથી $a = 11$

વળી, $\quad (a - d)(a + d) = a + 29$

એટલે કે, $a^2 - d^2 = a + 29$

$\therefore 121 - d^2 = 11 + 29$

$\therefore d^2 = 81$

$\therefore d = \pm 9$

આથી, બે સમાંતર શ્રેણી મળે અને તે 2, 11, 20, ... તથા 20, 11, 2, ...

સ્વાધ્યાય 5.3

1. વિભાગ A ની સમાંતર શ્રેણીને સંગત, વિભાગ B ના યોગ્ય સામાન્ય તફાવત સાથે જોડો.

વિભાગ A		વિભાગ B	
(A_1)	$2, -2, -6, -10, \ldots$	(B_1)	$\frac{2}{3}$
(A_2)	$a = -18, n = 10, a_n = 0$	(B_2)	-5
(A_3)	$a = 0, a_{10} = 6$	(B_3)	4
(A_4)	$a_2 = 13, a_4 = 3$	(B_4)	-4
		(B_5)	2
		(B_6)	$\frac{1}{2}$
		(B_7)	5

2. નીચેની પ્રત્યેક શ્રેણી સમાંતર શ્રેણી છે કે કેમ તે ચકાસો અને પછી તેમનાં આપેલાં પદો પછીનાં ત્રણ પદો લખો :

(i) $0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \ldots$

(ii) $5, \frac{14}{3}, \frac{13}{3}, 4, \ldots$

(iii) $\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 3\sqrt{3}, \ldots$

(iv) $a + b, (a + 1) + b, (a + 1) + (b + 1), \ldots$

(v) $a, 2a + 1, 3a + 2, 4a + 3, \ldots$

3. નીચે સમાંતર શ્રેણીનાં a અને d આપ્યાં છે, પ્રથમ ત્રણ પદો લખો :

(i) $a = \frac{1}{2}, d = -\frac{1}{6}$ (ii) $a = -5, d = -3$ (iii) $a = \sqrt{2}, d = \frac{1}{\sqrt{2}}$

4. સંખ્યાઓ a, 7, b, 23, c સમાંતર શ્રેણીમાં હોય, તો a, b અને c શોધો.

5. જે શ્રેણીનું પાંચમું પદ 19 તથા તેરમા પદ અને આઠમા પદનો તફાવત 20 હોય, તે સમાંતર શ્રેણી મેળવો.

6. એક સમાંતર શ્રેણીનું 26 મું, 11મું અને છેલ્લું પદ અનુક્રમે 0, 3 અને $-\frac{1}{5}$ છે. સામાન્ય તફાવત અને પદોની કુલ સંખ્યા શોધો.

7. એક સમાંતર શ્રેણીનાં 5 મા અને 7 મા પદોનો સરવાળો 52 અને 10 મું પદ 46 છે આ સમાંતર શ્રેણી શોધો.

8. જો સમાંતર શ્રેણીનું 7 મું પદ એ 11 મા પદ કરતાં 24 ઓછું હોય તથા પ્રથમ પદ 12 હોય, તો તે શ્રેણીનું 20 મું પદ શોધો.

9. જો સમાંતર શ્રેણીનું 9 મું પદ શૂન્ય હોય, તો સાબિત કરો કે તેનું 29 મું પદ એ 19 મા પદથી બમણું છે.

10. સમાંતર શ્રેણી 7, 10, 13,.... નું કોઈક પદ 55 છે કે નહિ ? જો હા, તો તે કેટલામું પદ છે ?

11. $k^2 + 4k + 8$, $2k^2 + 3k + 6$, $3k^2 + 4k + 4$ સમાંતર શ્રેણીનાં ત્રણ ક્રમિક પદો થાય તે માટે k નું મૂલ્ય મેળવો.

12. 207 નું ત્રણ ભાગમાં વિભાજન કરો કે જેથી તે સમાંતર શ્રેણીમાં હોય તથા તેમના બે નાના ભાગનો ગુણાકાર 4623 થાય.

13. એક ત્રિકોણના ખૂણાઓ સમાંતર શ્રેણીમાં છે. મોટામાં મોટો ખૂણો, સૌથી નાના ખૂણાથી બમણો છે. ત્રિકોણના બધા ખૂણાનાં માપ શોધો.

14. જો બે સમાંતર શ્રેણી 9, 7, 5, ... અને 24, 21, 18,... ના n મા પદ સમાન હોય, તો n નું મૂલ્ય શોધો. તે પદ પણ શોધો.

15. જો સમાંતર શ્રેણીના ત્રીજા અને આઠમા પદનો સરવાળો 7 થાય અને સાતમા તથા ચૌદમા પદનો સરવાળો –3 હોય, તો 10 મું પદ શોધો.

16. સમાંતર શ્રેણી –2, –4, –6,..., –100 નું છેલ્લેથી 12 મું પદ શોધો.

17. સમાંતર શ્રેણી 53, 48, 43,... નું પ્રથમ ઋણ પદ કેટલામું પદ છે ?

18. 10 અને 300 વચ્ચે એવી કેટલી સંખ્યાઓ છે કે જેમને 4 વડે ભાગતાં શેષ 3 રહે ?

19. સમાંતર શ્રેણી $-\frac{4}{3}, -1, -\frac{2}{3}, ..., 4\frac{1}{3}$ નાં બે મધ્યમ પદોનો સરવાળો શોધો.

20. સમાંતર શ્રેણીનું પ્રથમ પદ –5 અને છેલ્લું પદ 45 છે. જો આ સમાંતર શ્રેણીનાં પદોનો સરવાળો 120 હોય, તો પદોની કુલ સંખ્યા અને સામાન્ય તફાવત શોધો.

21. સરવાળો કરો :

(i) $1 + (-2) + (-5) + (-8) + ... + (-236)$

(ii) $\left(4 - \frac{1}{n}\right) + \left(4 - \frac{2}{n}\right) + \left(4 - \frac{3}{n}\right) + ...$ n પદ સુધી.

(iii) $\frac{a-b}{a+b} + \frac{3a-2b}{a+b} + \frac{5a-3b}{a+b} + \cdots$ 11 પદ સુધી.

22. સમાંતર શ્રેણી $-2, -7, -12,...$ નું કેટલામું પદ -77 છે ? આ સમાંતર શ્રેણીનું પદ -77 મળે ત્યાં સુધીનાં પદોનો સરવાળો શોધો.

23. જો $a_n = 3 - 4n$ હોય, તો દર્શાવો $a_1, a_2, a_3,...$ સમાંતર શ્રેણી બનાવે છે. S_{20} પણ શોધો.

24. જો સમાંતર શ્રેણી માટે $S_n = n(4n + 1)$ હોય, તો તે શ્રેણી શોધો.

25. જો સમાંતર શ્રેણી માટે $S_n = 3n^2 + 5n$ અને $a_k = 164$ હોય, તો k શોધો.

26. જો સમાંતર શ્રેણીનાં પ્રથમ n પદોનો સરવાળો S_n હોય, તો સાબિત કરો કે $S_{12} = 3(S_8 - S_4)$

27. જે સમાંતર શ્રેણીનાં 4 થા અને 9 મા પદ અનુક્રમે -15 અને -30 હોય, તે સમાંતર શ્રેણીનાં પ્રથમ 17 પદોનો સરવાળો શોધો.

28. જો સમાંતર શ્રેણીનાં પ્રથમ 6 પદોનો સરવાળો 36 અને પ્રથમ 16 પદોનો સરવાળો 256 હોય, તો પ્રથમ 10 પદોનો સરવાળો શોધો.

29. જે સમાંતર શ્રેણીનું મધ્યમ પદ 30 હોય, તેનાં પ્રથમ 11 પદોનો સરવાળો શોધો.

30. સમાંતર શ્રેણી : 8, 10, 12,..., 126 નાં છેલ્લાં 10 પદોનો સરવાળો શોધો.

31. જે સંખ્યાઓ 2 અને 9 ની ગુણિત હોય, તેવી પ્રથમ સાત સંખ્યાઓનો સરવાળો શોધો.
[**સૂચન :** 2 અને 9 નો લ.સા.અ. લો.]

32. સમાંતર શ્રેણી : $-15, -13, -11,...$ નાં પ્રથમ n પદોનો સરવાળો -55 થાય તે માટે કેટલાં પદોનો સરવાળો કરવો જોઈએ ? બે ઉત્તર મળે છે તે માટેનું કારણ આપો.

33. પ્રથમ પદ 8 અને સામાન્ય તફાવત 20 હોય તેવી સમાંતર શ્રેણીનાં પ્રથમ n પદોનો સરવાળો એ પ્રથમ પદ -30 અને સામાન્ય તફાવત 8 હોય તેવી બીજી સમાંતર શ્રેણીનાં પ્રથમ $2n$ પદોના સરવાળા બરાબર હોય, તો n શોધો.

34. કનિકાને તેના ખિસ્સાખર્ચ માટે 1 જાન્યુઆરી 2008 ના રોજ કેટલાક રૂપિયા મળ્યા. તે આ રકમમાંથી, પ્રથમ દિવસે ₹ 1, બીજા દિવસે ₹ 2, ત્રીજા દિવસે ₹ 3 આ રીતે મહિનાના અંત સુધી તેની પિગી બૅન્કમાં મૂકે છે. તે તેના ખિસ્સાખર્ચમાંથી ₹ 204 ખર્ચ પણ કરે છે અને મહિનાના અંતે હજુ તેની પાસે ₹ 100 બાકી રહે છે. તો આ મહિનામાં ખિસ્સાખર્ચ પેટે કેટલા રૂપિયા તેની પાસે હશે ?

35. યાસ્મિન પ્રથમ મહિના દરમિયાન ₹ 32, બીજા મહિને ₹ 36 અને ત્રીજા મહિને ₹ 40 બચાવે છે. જો તે આ પ્રમાણે બચત કરવાનું ચાલુ રાખે, તો કેટલા મહિનામાં તેની બચત ₹ 2000 થશે?

વિસ્તૃત જવાબી પ્રશ્નો

ઉદાહરણ 1 : સમાંતર શ્રેણીની ચાર ક્રમિક સંખ્યાઓનો સરવાળો 32 છે અને પ્રથમ તથા છેલ્લા પદના ગુણાકારનો અને બે મધ્યમ પદોના ગુણાકારનો ગુણોત્તર 7 : 15 હોય, તો તે સંખ્યાઓ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે સમાંતર શ્રેણીનાં ચાર ક્રમિક પદો

$a - 3d, a - d, a + d, a + 3d$ છે.

આથી, $a - 3d + a - d + a + d + a + 3d = 32$ **અથવા** $4a = 32$ **અથવા** $a = 8$

વળી, $\dfrac{(a-3d)(a+3d)}{(a-d)(a+d)}=\dfrac{7}{15}$

$\therefore \quad \dfrac{a^2-9d^2}{a^2-d^2}=\dfrac{7}{15}$

$\therefore \quad 15a^2 - 135d^2 = 7a^2 - 7d^2$

$\therefore \quad 8a^2 - 128d^2 = 0$

$\therefore \quad d^2 = \dfrac{8\times8\times8}{128}=4$

$\therefore \quad d = \pm 2$

આથી, જ્યારે $a = 8$, $d = 2$ હોય ત્યારે તે સંખ્યાઓ 2, 6, 10, 14 છે.

જ્યારે $a = 8$, $d = -2$ હોય, ત્યારે તે સંખ્યાઓ 14, 10, 6, 2 છે.

ઉદાહરણ 2 : સમીકરણ $1 + 4 + 7 + 10 + ... + x = 287$ નો ઉકેલ શોધો.

ઉકેલ : $a = 1$, $d = 3$, $a_n = x$ હોય, તેવી સમાંતર શ્રેણી 1, 4, 7, 10, ..., x છે.

હવે, $a_n = a + (n-1)d$

આથી, $x = 1 + (n-1) \times 3 = 3n - 2$

વળી, $S = \dfrac{n}{2}(a+l)$

આથી, $287 = \dfrac{n}{2}(1+x) = \dfrac{n}{2}(1+3n-2)$

અથવા $574 = n(3n-1)$

અથવા $3n^2 - n - 574 = 0$

આથી, $n = \dfrac{1\pm\sqrt{1+6888}}{6}$

$= \dfrac{1\pm83}{6} = \dfrac{84}{6}$ અથવા $\dfrac{-82}{6}$

$= 14$ અથવા $\dfrac{-41}{3}$

પરંતુ n નું મૂલ્ય ઋણ તથા અપૂર્ણાંક હોઈ શકે નહિ. આથી $n = 14$

તેથી, $x = 3n - 2 = 3 \times 14 - 2 = 40$.

વૈકલ્પિક રીત : અહીં 1, 4, 7, 10, ..., x એ સમાંતર શ્રેણી રચે છે. અહીં $a = 1$, $d = 3$ અને $S = 287$

હવે, $S=\dfrac{n}{2}\left[2a+(n-1)d\right]$

$\therefore \quad 287 = \dfrac{n}{2}\left[2+(n-1)\times3\right]$

$\therefore\ 574 = n\,(3n - 1)$

$\therefore\ 3n^2 - n - 574 = 0$

અને હવે ઉપર પ્રમાણે આગળ વધો.

સ્વાધ્યાય 5.4

1. સમાંતર શ્રેણીનાં પ્રથમ પાંચ પદોનો સરવાળો અને આ જ શ્રેણીનાં પ્રથમ સાત પદોનો સરવાળો સમાન અને તે 167 છે. જો આ જ શ્રેણીનાં પ્રથમ દસ પદોનો સરવાળો 235 હોય, તો આ શ્રેણીનાં પ્રથમ વીસ પદોનો સરવાળો શોધો.

2. (i) 2 અને 5 બંનેની ગુણિત હોય તેવી 1 અને 500 વચ્ચેની પૂર્ણાંક સંખ્યાઓનો સરવાળો શોધો.

   (ii) 2 અને 5 બંનેની ગુણિત હોય તેવી 1 થી 500 સુધીની પૂર્ણાંક સંખ્યાઓનો સરવાળો શોધો.

   (iii) 2 અથવા 5 ની ગુણિત હોય તેવી 1 થી 500 સુધીની પૂર્ણાંક સંખ્યાઓનો સરવાળો શોધો.

   [**સૂચન : (iii) :** આ સંખ્યાઓ : 2 ની ગુણિત + 5 ની ગુણિત – 2 અને 5 બંનેની ગુણિત]

3. એક સમાંતર શ્રેણીનું આઠમું પદ તેના બીજા પદ કરતાં અડધું છે અને અગિયારમું પદ તેના ચોથા પદના $\frac{1}{3}$ થી 1 વધારે છે. શ્રેણીનું 15 મું પદ શોધો.

4. એક સમાંતર શ્રેણીમાં 37 પદો છે. બરાબર વચ્ચેનાં ત્રણ પદોનો સરવાળો 225 છે અને છેલ્લાં ત્રણ પદોનો સરવાળો 429 છે. સમાંતર શ્રેણી શોધો.

5. નીચે આપેલી શરતો પરથી, 100 અને 200 વચ્ચેના પૂર્ણાંકોનો સરવાળો શોધો :

   (i) 9 વડે વિભાજ્ય હોય.

   (ii) 9 વડે વિભાજ્ય ન હોય.

   [**સૂચન : (ii) :** આ સંખ્યાઓ : કુલ સંખ્યા – 9 વડે વિભાજ્ય કુલ સંખ્યા]

6. સમાંતર શ્રેણીના 11 મા અને 18 મા પદનો ગુણોત્તર 2 : 3 હોય, તો 5 મા પદ અને 21 મા પદનો ગુણોત્તર શોધો તથા પ્રથમ પાંચ પદોના સરવાળાનો અને પ્રથમ 21 પદોના સરવાળાનો ગુણોત્તર શોધો.

7. જે સમાંતર શ્રેણીનું પ્રથમ પદ a, બીજું પદ b અને છેલ્લું પદ c હોય, તો દર્શાવો કે સરવાળો

   $\dfrac{(a+c)(b+c-2a)}{2(b-a)}$ છે.

8. સમીકરણ $-4 + (-1) + 2 + ... + x = 437$ નો ઉકેલ શોધો.

9. જશપાલ સિંઘ તેમની કુલ લોન ₹ 1,18,000 એવી રીતે ચૂકવે છે કે શરૂઆતના પ્રથમ મહિને પ્રથમ હપતા પેટે ₹ 1000 આપે છે. જો તેઓ પ્રત્યેક મહિને તેમના હપતામાં ₹ 100 નો વધારો કરે, તો 30 માં હપતામાં તેમણે કેટલી રકમ ચૂકવી હશે ? 30 માં હપતા પછી હજુ લોનની કેટલી રકમ ચૂકવવાની બાકી હશે ?

10. શાળાના વિદ્યાર્થીઓ વાર્ષિકોત્સવ નિમિત્તે શાળાના એક સીધા વરંડામાં રંગીન ધજાઓ લગાવીને સુશોભિત કરવા ઇચ્છે છે. એ સર્વે દર બે મીટરના અંતરે કુલ 27 ધજાઓ લગાવવા ઇચ્છે છે. આ ધજાઓમાં વચ્ચેની ધજા જે સ્થાને લગાવવાની છે, તે સ્થાને બધી જ ધજાઓ મૂકેલી છે. ધજાઓ લગાવવાની જવાબદારી રુચિને આપવામાં આવી છે. જે સ્થાને ધજાઓ રાખી છે ત્યાં રુચિએ પોતાનાં પુસ્તકો મૂક્યાં છે. તે એક વખતમાં એક જ ધજા લઈ જાય છે. આ કાર્ય પૂર્ણ કરીને પાછા ફરતી વખતે પુસ્તકો લે છે તે દરમિયાન તેને કેટલું અંતર કાપ્યું હશે ? ધજા સાથે લઈને તેને કેટલું મહત્તમ અંતર કાપ્યું હશે ?