10

सीमा एवं अवकलज
(Limit and Derivatives)

10.01 प्रस्तावना (Introduction)

यहाँ हम सीमा की सहज परिभाषा एवं उसके बीजगणितीय अध्ययनों के आधार पर गणित की उस शाखा का अध्ययन करेंगे जिसमें प्रांत के बिन्दुओं के परिवर्तन से फलन के मान में परिवर्तन होता है। इस प्रविधि को कलन कहते है। इसके अध्ययन हेतु सहजानुभूत बोध का उपयोग करेंगे। अन्त में अवकलज के बीजगणित की सामान्य जानकारी से परिचय करेंगे।

10.02 सीमाएँ, एक दृष्टिकोण (Limits, a view point)

एक नियमित बहुभुज जो एक वृत्त के अन्तर्गत है, के क्षेत्रफल पर विचार करने पर हम देखते हैं कि–

(i) बहुभुज की भुजाओं की संख्या कितनी भी हो उसका क्षेत्रफल वृत्त के क्षेत्रफल से अधिक नहीं होता है।

(ii) जैसे–जैसे बहुभुज की भुजाओं की संख्या बढ़ाते जाते है तो उसका क्षेत्रफल वृत्त के क्षेत्रफल के नजदीक पहुँचता चला जाता है।

(iii) बहुभुज की भुजाओं की संख्याओं को और बढ़ाने पर वृत्त एवं बहुभुज के क्षेत्रफलों का अन्तर बहुत छोटा होता चला जाता है। इसे कलन में सीमा के रूप में परिभाषित किया जाता है।

10.03 $x \to a$ का अर्थ (Meaning of $x \to a$)

माना x एक चर है और a एक अचर है। जब x, a के अत्यन्त निकट से भी निकट मान ग्रहण करता हुआ a की ओर अग्रसर होता है तो हम कहते हैं x, a की ओर प्रवृत्त है किन्तु x, a के बराबर नहीं हैं और इसे लिखते हैं– $x \to a$.

यदि x दायीं ओर से a की ओर प्रवृत्त होता है, अर्थात् x, a से बड़ी संख्याओं से a की ओर प्रवृत्त होता है तो इसे हम लिखते हैं $x \to a^+$

इसी प्रकार यदि x बायीं ओर से a की ओर प्रवृत्त होता है, अर्थात् x, a से छोटी संख्याओं से a की ओर प्रवृत्त होता है तो इसे हम लिखते हैं: $x \to a^-$

अब यदि δ एक धनात्मक संख्या है जो कितनी भी छोटी है तथा x इस प्रकार मान ग्रहण करता है कि $0 < |x-a| < \delta$ तो हम कहते हैं कि x, a की ओर प्रवृत्त है और इसे हम लिखते हैं: $x \to a$.

टिप्पणी: x के a की ओर अग्रसर होने का अर्थ है कि a को छोड़कर उसके सामीप्य (neighbourhood) में प्रत्येक मान x ग्रहण कर सकता है। इस मान को $x = a$ के लिए सीमान्त मान कहते हैं। जैसे, यदि x, 2 के सामीप्य में प्रत्येक मान 1.9, 1.99, 1.999, . . . तथा 2.1, 2.01, 2.001, . . . इत्यादि ग्रहण कर सकता है, किन्तु 2 नहीं।

10.04 फलन की सीमा की परिभाषा (Definition of Limit of a Function)

माना कि फलन $y = f(x)$, $x = a$ पर अपरिभाषित या परिभाषित है, किन्तु $x = a$ के दायें तथा बाएँ लघुसामीप्य में फलन $f(x)$ परिभाषित है, तो वास्तविक संख्या ℓ फलन f की सीमा कहलाती है जब x का मान a की ओर अग्रसर हो, यदि और केवल यदि स्वेच्छतः निर्दिष्ट धनात्मक संख्या ε के लिए एक धनात्मक संख्या δ का अस्तित्व इस प्रकार हो कि $|f(x)-l| < \varepsilon$ जबकि $0 < |x-a| < \delta$ इसे संकेत रूप में निम्न प्रकार से लिख सकते हैं: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$

दायीं सीमा– यदि x दायीं ओर से a की ओर प्रवृत्त होता है तो f की दायीं सीमा को हम लिखते हैं: $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ अथवा $f(a+0)$.

दायीं सीमा ज्ञात करने के लिए हम फलन $f(x)$ में $x = a + h$ प्रतिस्थापित कर $h \to 0$ करते हैं, अतः $f(a+0) = \lim\limits_{h \to 0} f(a+h), (h > 0)$

बायीं सीमा– यदि x बायीं ओर से a की ओर प्रवृत्त होता है तो f की बायीं सीमा को हम लिखते हैं: $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ अथवा $f(a-0)$.

बायीं सीमा ज्ञात करने के लिए हम फलन $f(x)$ में $x = a - h$ प्रतिस्थापित कर $h \to 0$ करते हैं, अतः $f(a-0) = \lim_{h \to 0} f(a-h), (h > 0)$

10.05 सीमा का अस्तित्व (Existence of a limit)

$\lim_{x \to a} f(x)$ का अस्तित्व होता है, यदि और केवल यदि बायीं सीमा अर्थात् $\lim_{x \to a^-} f(x)$ और दायीं सीमा अर्थात् $\lim_{x \to a^+} f(x)$ दोनों का अस्तित्व हो और एक समान हो। अर्थात् $\lim_{x \to a} f(x)$ का अस्तित्व है $\Leftrightarrow f(a-0) = f(a+0)$

यदि किसी फलन की किसी बिन्दु पर सीमा का अस्तित्व हो तो दोनों ओर की सीमा निकालने की आवश्यकता नहीं होती, एक ओर की सीमा से ही काम चल सकता है।

दृष्टान्तीय उदाहरण

उदाहरण 1: जाँच कीजिए कि फलन $f(x) = \dfrac{1}{2+x}$ की $x = 2$ पर सीमा का अस्तित्व है या नहीं?

हल: दायीं सीमा $f(2+0) = \lim_{h \to 0} f(2+h) = \lim_{h \to 0} \dfrac{1}{2+(2+h)} = \lim_{h \to 0} \dfrac{1}{4+h} = \dfrac{1}{4}$

बायीं सीमा $f(2-0) = \lim_{h \to 0} f(2-h) = \lim_{h \to 0} \dfrac{1}{2+(2-h)} = \lim_{h \to 0} \dfrac{1}{4-h} = \dfrac{1}{4}$ $\quad \therefore \quad f(2-0) = f(2+0) = \dfrac{1}{4}$

$\therefore \quad x = 2$ पर फलन की सीमा का अस्तित्व है।

उदाहरण 2: यदि फलन $f(x) = \begin{cases} (1/2) - x, & \text{जब } 0 < x < 1/2 \\ (3/2) - x, & \text{जब } 1/2 < x < 1 \end{cases}$ हो, तो प्रदर्शित कीजिए कि फलन की $x = ½$ पर सीमा अस्तित्व नहीं है।

हल: दायीं सीमा के लिए $f(x) = (3/2) - x$

अतः $\quad f\left(\dfrac{1}{2}+0\right) = \lim_{h \to 0} \left\{\dfrac{3}{2} - \left(\dfrac{1}{2}+h\right)\right\} = \lim_{h \to 0} \left\{\dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2} - h\right\} = \lim_{h \to 0} \{1-h\} = 1$

बायीं सीमा के लिए $f(x) = (1/2) - x$

अतः $\quad f\left(\dfrac{1}{2}-0\right) = \lim_{h \to 0} \left\{\dfrac{1}{2} - \left(\dfrac{1}{2}-h\right)\right\} = \lim_{h \to 0} \left\{\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} + h\right\} = \lim_{h \to 0} \{h\} = 0 \qquad f\left(\dfrac{1}{2}-0\right) \neq f\left(\dfrac{1}{2}+0\right)$

$\therefore \quad x = ½$ पर फलन की सीमा का अस्तित्व नहीं है।

उदाहरण 3: यदि फलन $f(x) = \begin{cases} 5x-4, & 0 < x \le 1 \\ 4x^3 - 3x, & 1 < x < 2 \end{cases}$, तब $x = 1$ पर दायीं सीमा एवं बायीं सीमा का मान ज्ञात कीजिए।

हल': $x = 1$ पर दायीं सीमा के लिए $f(x) = 4x^3 - 3x$

$$f(1+0) = \lim_{h \to 0}\left[4(1+h)^3 - 3(1+h)\right] = \lim_{h \to 0}\left[4(1)^3 - 3(1)\right] = 1$$

$x = 1$ पर बायीं सीमा के लिए $f(x) = 5x - 4$

$$f(1-0) = \lim_{h \to 0}\left[5(1-h) - 4\right] = \lim_{h \to 0}\left[5 - 5h - 4\right] = \lim_{h \to 0}(1-5h) = 1$$

$\because \quad f(1+0) = f(1-0) = 1$

$\therefore \quad x = 1$ पर फलन की सीमा का अस्तित्व है।

प्रश्नमाला 10.1

1. प्रदर्शित कीजिए कि फलन $f(x)=\dfrac{\log_e x}{x-1}$ की $x=1$ पर दायीं सीमा एवं बायीं सीमा समान हैं तथा इनका मान 1 है।

2. क्या $x=0$ पर फलन $f(x)=\dfrac{x+|x|}{x}$ की सीमाएँ अस्तित्व में है?

3. सिद्ध कीजिए कि $x=0$ पर फलन $f(x)=|x|+|x-1|$ की सीमाएँ अस्तित्व में हैं।

4. सिद्ध कीजिए कि $x=2$ पर फलन $f(x)=\begin{cases} x^2+x+1, & \text{जब } x\ge 2 \\ x, & \text{जब } x<2 \end{cases}$ की सीमाएँ अस्तित्व में नहीं हैं।

5. फलन $f(x)=x\cos(1/x)$ की $x=0$ पर दायीं एवं बायीं सीमा ज्ञात कीजिए।

10.06 सीमाओं पर प्रमेय (Theorems on limit)

माना प्रांत D पर दो वास्तविक फलन f तथा g परिभाषित है तो हम प्रांत D पर चार नये फलन $f\pm g,\ fg,\ f/g$ निम्नानुसार परिभाषित कर सकते है:

$$(f\pm g)(x)=f(x)\pm g(x),\ (fg)(x)=f(x).\,g(x),$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)},\ g(x)\ne 0,\ \forall\ \ x\in D$$

इनके प्रयोग से हम निम्न परिणाम प्राप्त कर सकते है।

माना $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$ और $\lim\limits_{x\to a} g(x)=m$. यदि ℓ एवं m विद्यमान है, तो

(i) योग एवं अन्तर नियम $\quad \lim\limits_{x\to a}(f\pm g)(x)=\lim\limits_{x\to a} f(x)\pm\lim\limits_{x\to a} g(x)=\ell\pm m$

(ii) गुणन नियम $\quad \lim\limits_{x\to a}(f\ \ g)(x)=\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a} g(x)=lm$

(iii) भिन्न नियम $\quad \lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}=\dfrac{\ell}{m},m\ne 0$

(iv) अचर नियम $\quad$ यदि $f(x)=k$, जहाँ k अचर है। $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} k=k$

(v) अचर गुणन नियम $\quad \lim\limits_{x\to a} kf(x)=k\lim\limits_{x\to a} f(x)=k\ell$, जहाँ k अचर है।

(vi) मापाँक नियम $\quad \lim\limits_{x\to a}|f(x)|=\left|\lim\limits_{x\to a} f(x)\right|=|\ell|$

(vii) घात नियम $\quad \lim\limits_{x\to a}\left[\{f(x)\}^{g(x)}\right]=\left\{\lim\limits_{x\to a} f(x)\right\}^{\lim\limits_{x\to a} g(x)}=\ell^m$

विशेष स्थिति में (a) $\quad \lim\limits_{x\to a}\log f(x)=\log\left\{\lim\limits_{x\to a} f(x)\right\}=\log\ell$

(b) $\quad \lim\limits_{x\to a} e^{f(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a} f(x)}=e^{\ell}$

(c) $\quad \lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ या $-\infty$, तब $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{f(x)}=0$

10.07 सीमा की परिकलन विधियाँ (Methods of evaluation of limits)

(i) **प्रतिस्थापन विधि–** दिए हुए फलन में सीधे सीमा का मान रखकर यदि वह अनिर्धार्य रूप $\left(\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0\times\infty, \infty-\infty, 0^{\circ}, 1^{\infty}\right.$ तथा ∞°; रूप के फलन$\left.\right)$ प्राप्त नहीं करे तो वही सीमा का मान होगा।

उदाहरण : $\lim_{x\to 2}\left(x^2+3x+2\right)=2^2+3.2+2=12$

(ii) **व्यंजक सरलीकरण विधि–** यदि $f(x)$ एवं $g(x)$ बहुपदीय हो तथा $g(a)\neq 0$ तब

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}=\frac{f(a)}{g(a)}$$

उदाहरणार्थ : $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)=4$

(iii) **परिमेयकरण या द्विपरिमेयकरण विधि–** वर्गमूल निहित गुणनखण्ड का परिमेयीकरण कर सरलीकरण करते हैं तथा x का मान रखते हैं।

उदाहरणार्थः $\lim_{x\to 4}\frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$ का मान ज्ञात कीजिए

हलः
$$\lim_{x\to 4}\frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}=\lim_{x\to 4}\frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}\times\frac{1+\sqrt{5-x}}{1+\sqrt{5-x}}\times\frac{3+\sqrt{5+x}}{3+\sqrt{5+x}}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{4-x}{-4+x}\times\frac{1+\sqrt{5-x}}{3+\sqrt{5+x}}=-\frac{2}{6}=-\frac{1}{3}$$

(iv) **प्रसार विधि–** यदि $x\to 0$ हो तो तथा व्यंजक में कम से कम एक प्रसार योग्य फलन हो तो उस फलन का प्रसार लिख कर व्यंजक को x की बढ़ती घातों में व्यक्त कर लेते हैं। इसके पश्चात् अंश व हर में x की उभयनिष्ठ घात का भाग देकर अनिर्धार्य रूप समाप्त करते हैं। निम्न दिए गए कुछ मानक फलनों के प्रसार हैं–

(a) $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$

(b) $e^{-x}=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\cdots$

(c) $a^x=1+(x\log_e a)+\frac{(x\log_e a)^2}{2!}+\frac{(x\log_e a)^3}{3!}+\cdots$

(d) $\log_e(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots$

(e) $\log_e(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\cdots$

(f) $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots$

(g) $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots$

(h) $\tan x=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\cdots$

(i) $(1\pm x)^n=1\pm nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2\pm\cdots$

(j) $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e\left(1-\frac{x}{2}+\frac{11}{24}x^2+\cdots\right)$

(k) $\Sigma n=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

(l) $\Sigma n^2=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(m) $\Sigma n^3=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{\{n(n+1)\}^2}{4}$

सीमाओं सम्बन्धित कुछ महत्वपूर्ण परिणाम दिए हुए परिणामों से:

(a) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ (b) $\lim_{x\to 0}\cos x=1$

(c) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$ (d) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$

(e) $\lim_{x\to 0}\frac{b^x-1}{x}=\log_e b(b\neq 0)$ (f) $\lim_{x\to 0}\frac{\log_e[1+x]}{x}=1$

(g) $\lim_{x\to 0}[1+x]^{1/x}=e$ (h) $\lim_{x\to\infty}\left[1+\frac{1}{x}\right]^x=e$

(i) $\lim_{x\to a}\frac{x^m-a^m}{x-a}=ma^{m-1}$ (j) $\lim_{x\to a}\frac{x^m-a^m}{x^n-a^n}=\frac{m}{n}a^{m-n}$

उदाहरणार्थ: $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}$, $a\neq 0$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1+(x\log_e a)+(x\log_e a)^2/2!+\cdots-1}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x\log_e a)+(x\log_e a)^2/2!+\cdots}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}(\log_e a)+x(\log_e a)^2/2!+\cdots$$

$$=\log_e a$$

(v) $x\to\infty$ इस प्रकार की स्थितियों में दिए गए फलन की उच्चतम घात को बाहर लेकर अंश एवं हर में अनन्त सीमा लगा दी जाती है।

उदाहरणार्थ: $=\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+bx+c}{dx^2+ex+f}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: $$\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+bx+c}{dx^2+ex+f}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left[a+(b/x)+(c/x^2)\right]}{x^2\left[d+(e/x)+(f/x^2)\right]}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{a+(b/x)+(c/x^2)}{d+(e/x)+(f/x^2)}=\frac{a}{d}$$

(vi) **सरलीकरण** (Simplification)– इस विधि के द्वारा अनिर्धाय रूप वाले फलन का सरलीकरण करने के पश्चात् उसका अनिर्धार्य रूप समाप्त करके हल किया जाता है।

उदाहरणार्थ: $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}=0$$

दृष्टान्तीय उदाहरण

उदाहरण 4: $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1+\sin x}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: यहाँ $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1+\sin x}=\frac{\cos 0}{1+\sin 0}=1$

उदाहरण 5: $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{2x^2-7x+5}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{2x^2-7x+5}$

माना $x = 1 + h$, तो जब $x \to 1$ तब $h \to 0$

अतः $\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)-1}{2(1+h)^2-7(1+h)+5}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{2h^2-3h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{2h-3}=-\frac{1}{3}$

उदाहरण 6: $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-4}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: यहाँ अंश एवं हर के गुणनखण्ड संभव हैं।

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-3)(x-2)}{(x+2)(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-3)}{(x+2)}=\frac{2-3}{2+2}=-\frac{1}{4}$$

उदाहरण 7: $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+x}-1}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+x}-1}$

परिमेयीकरण करने के लिए अंश एवं हर में $\sqrt{1+x}+1$ से गुणा करने पर

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+x}-1}\times\frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{1+x-1}\sqrt{1+x}+1=\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{1+x}+1\right)=1+1=2$$

उदाहरण 8: $\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{\sin ax-\sin bx}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: $\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{\sin ax-\sin bx}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+ax+\frac{a^2x^2}{2!}+\cdots\right)-\left(1+bx+\frac{b^2x^2}{2!}+\cdots\right)}{\left(ax-\frac{a^3x^3}{3!}+\frac{a^5x^5}{5!}-\cdots\right)-\left(bx-\frac{b^3x^3}{3!}+\frac{b^5x^5}{5!}-\cdots\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left((a-b)x+\frac{(a^2-b^2)x^2}{2!}+\cdots\right)}{\left((a-b)x-\frac{(a^3-b^3)x^3}{3!}+\frac{(a^5-b^5)x^5}{5!}-\cdots\right)}$$

अंश तथा हर में x से भाग देने पर

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left((a-b)+\frac{(a^2-b^2)x}{2!}+\cdots\right)}{\left((a-b)-\frac{(a^3-b^3)x^2}{3!}+\frac{(a^5-b^5)x^4}{5!}-\cdots\right)}$$

$$= \frac{(a-b+0+\cdots)}{(a-b-0+0-\cdots)} = \frac{a-b}{a-b} = 1$$

उदाहरण 9: $\lim_{n\to\infty} \frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: $$\lim_{n\to\infty} \frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum n^2}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{6n^3}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(1+1/n)(2+1/n)}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

उदाहरण 10: $\lim_{\theta\to\pi/2} (\sec\theta - \tan\theta)$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: $$\lim_{\theta\to\pi/2} (\sec\theta-\tan\theta) = \lim_{\theta\to\pi/2}\left(\frac{1}{\cos\theta}-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right) = \lim_{\theta\to\pi/2}\left(\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}\right) = \lim_{\theta\to\pi/2}\left(\frac{1-\cos(\pi/2-\theta)}{\sin(\pi/2-\theta)}\right)$$

$$= \lim_{\theta\to\pi/2}\left(\frac{2\sin^2(\pi/4-\theta/2)}{2\sin(\pi/4-\theta/2)\cos(\pi/4-\theta/2)}\right) = \lim_{\theta\to\pi/2} \tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right) = 0$$

उदाहरण 11: सिद्ध कीजिए कि $\lim_{x\to a} \frac{x^n-a^n}{x-a} = na^{n-1}$

हल: यहाँ $\lim_{x\to a} \frac{x^n-a^n}{x-a} = \lim_{x\to a^+} \frac{x^n-a^n}{x-a}$ [$\because$ $\lim_{x\to a} f(x)$ उपस्थित है $\therefore$ $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x)$]

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(a+h)^n-a^n}{a+h-a} = \lim_{x\to 0} \frac{a^n\left\{\left(1+\frac{h}{a}\right)^n-1\right\}}{h}$$

$$= a^n \lim_{h\to 0} \frac{\left[1+n\cdot\frac{h}{a}+\frac{n(n-1)}{\lfloor 2}\frac{h^2}{a^2}+\ldots-1\right]}{h}$$

$$= a^n \lim_{h\to 0}\left(\frac{n}{a}+\frac{n(n-1)}{\lfloor 2}\frac{h}{a^2}+\ldots\right) = a^n\cdot\frac{n}{a} = na^{n-1}$$

प्रश्नमाला 10.2

निम्न सीमाओं के मान ज्ञात कीजिए।

1. (a) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-3x+2}{x^2+x-6}$ (b) $\lim_{x\to 1} \frac{(2x-3)(x-1)}{2x^2+x-3}$

2. (a) $\lim_{\alpha\to \pi/4} \frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\alpha-\pi/4}$ (b) $\lim_{x\to 1} \frac{x^n-1}{x-1}$

3. (a) $\lim_{x\to 0} \frac{2^x-1}{\sqrt{1+x}-1}$ (b) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$

4. (a) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x+e^{-x}-2\cos x}{x\sin x}$ (b) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^{-1}x-\tan^{-1}x}{x^3}$

5. (a) $\lim_{x\to \infty} \sqrt{\frac{x+\sin x}{x-\cos x}}$ (b) $\lim_{n\to \infty} \frac{\sqrt{3n^2-1}-\sqrt{2n^2-1}}{4n+3}$

6. (a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin x}$ (b) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x}-1}{x}$

7. (a) $\lim_{x\to 0} \frac{x(e^x-1)}{1-\cos x}$ (b) $\lim_{x\to a} \frac{(x+2)^{3/2}-(a+2)^{3/2}}{x-a}$

10.08 अवकलजों का सहजानुभूत बोध (Intuitive idea of derivatives)

यदि एक पिण्ड को एक खड़ी चट्टान से गिराने पर निम्न परीक्षण प्राप्त होते हैं।

t सेकण्ड	0	1	1·5	1·8	1·9	1·95	2	2·05	2·1	2·2	2·5	3	4
s मीटर	0	4·9	11·025	15·876	17·689	18·63225	19·6	20·592	21·609	23·716	30·625	44·1	78·4

इन परीक्षणों की सहायता से समय विशेष (माना $t=2$) पर वेग (दूरी में परिवर्तन की दर) ज्ञात करना है तो हमें समस्या को निम्न दो भागों में विभाजित करते हुए अध्ययन करना होगाः

(i) $t=2$ के पूर्ववर्ती विभिन्न समयांतरालो में माध्य वेग

(ii) $t=2$ के पश्चावर्ती विभिन्न समयांतरालो में माध्य वेग

माध्य वेग $=\frac{\text{समयांतराल में तय की गई दूरी}}{\text{समयांतराल}}$ के सूत्र से

$t=2$ के पूर्ववर्ती समयान्तरालों में माध्य वेग निम्न सारणी में दिए गए हैः

सारणी–1

t_1 (सेकण्ड में)	0	1	1·5	1·8	1·9	1·95	1·99
v (मीटर/से.)	9·8	14·7	17·15	18·62	19·11	19·355	19·551

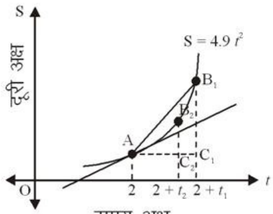
इसी प्रकार $t=2$ के पश्चावर्ती समयांतरालों में माध्य वेग निम्न सारणी में दिए गए है

सारणी–2

t_2 (सेकण्ड में)	4	3	$2\cdot5$	$2\cdot2$	$2\cdot1$	$2\cdot05$	$2\cdot01$
v (मीटर/से. में)	$29\cdot4$	$24\cdot5$	$22\cdot05$	$20\cdot58$	$20\cdot09$	$19\cdot845$	$19\cdot649$

इन अभिकलनों के प्रथम सारणी में हमने $t=2$ पर समाप्त होने वाले बढ़ते समयान्तरालों में माध्य वेग ज्ञात किए गए है इसमें यह माना कि $t=2$ से किंचित पूर्व कुछ अप्रत्याशित घटना नहीं घटी। तथा अभिकलनों के द्वितीय सारणी में $t=2$ पर अंत होने वाले घटते समयांतरालों में माध्य वेग ज्ञात किए गए है तब यह माना कि $t=2$ के किंचित पश्चात् कुछ अप्रत्याशित घटना नहीं घटी।

इन दोनों सारणियों के परीक्षणों का सम्मिलित अध्ययन करने पर यह स्पष्ट हो रहा है कि $t=2$ पर तात्कालिक वेग 19.551 मी./सैं. तथा 19.649 मी./सै. के मध्य है।



चित्र 10.01

इस सीमा की प्रक्रिया की एक विकल्प विधि चित्र 10.01 में दर्शायी गयी है। जो बीते समय (t) और चट्टान के शिखर से पिण्ड की दूरी (S) का आलेख है। जैसे–जैसे समयांतरालों के अनुक्रम $h_1, h_2, \ldots$ की सीमा शून्य की ओर अग्रसर होती है वैसे ही माध्य वेगों के अग्रसर होने की वही सीमा होती है जो

$$\frac{C_1B_1}{AC_1}, \frac{C_2B_2}{AC_2}, \frac{C_3B_3}{AC_3}, \ldots$$

के अनुपातों के अनुक्रम की होती है यहाँ $C_1B_1 = S_1 - S_0$ वह दूरी है जो पिण्ड समयांतरालों $h_1 = AC_1$ में तय करता है, इत्यादि। चित्र 10.01 से यह निष्कर्ष निकलना सुनिश्चित है कि यह बाद की अनुक्रम वक्र के बिन्दु A पर स्पर्श रेखा के ढाल की और अग्रसर होती है। दूसरे शब्दों में $t=2$ समय पर पिण्ड का तात्कालिक वेग वक्र $S=4.9t^2$ के $t=2$ पर स्पर्शी के ढाल के समान है।

10.09 अवकलज (Derivatives)

अनुच्छेद 10.08 में अवकलजों के सहजानुभुत बोध के द्वारा हमें अवकलज का एक प्रारम्भिक बोध हुआ है, इस प्रकार की अनेक स्थितियों में यह जानना अभीष्ट होता है कि एक प्राचल में दूसरे किसी प्राचल के सापेक्ष परिवर्तन किस प्रकार होता है।

अवकलज (Derivatives) – माना कि $y=f(x)$ कोई संतत फलन है। माना x में अल्प वृद्धि δx की जाये तो y के मान में संगत वृद्धि δy होगी, तो भिन्न $\frac{\delta y}{\delta x}$ की सीमा जब $\delta x \to 0$ अर्थात् $\lim_{\delta x \to 0}\left(\frac{\delta y}{\delta x}\right)$ (यदि विद्यमान हो) को y का x के सापेक्ष अवकलज या अवकल गुणांक (Differential co-efficient) कहते है। इसे $\frac{dy}{dx}$ से व्यक्त करते है।

अर्थात्– यदि $\quad y=f(x)$

तो $\quad y+\delta y = f(x+\delta x)$

$\therefore \quad \delta y = f(x+\delta x) - f(x)$

$\Rightarrow \quad \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{f(x+\delta x)-f(x)}{\delta x}$

$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \lim_{\delta x \to 0}\frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0}\frac{f(x+\delta x)-f(x)}{\delta x}$

प्रथम सिद्धान्त से अवकलन (Differentiation by first principle) – परिभाषा से सीधे अवकल गुणांक ज्ञात करने की इस विधि को प्रथम सिद्धान्त से अवकलन करना कहते है। इसको ab-initio method or delta method भी कहते है।

अवकलन (Differentiation) – किसी दिए हुए फलन $f(x)$ का अवकल गुणाँक ज्ञात करने की प्रक्रिया को अवकलन कहते है।

संकेत (Notation) – फलन $f(x)$ का x के सापेक्ष अवकल गुणाँक को साधारणतया $\frac{d}{dx}f(x)$ या $f'(x)$ या $D[f(x)]$, जहाँ $D \equiv \frac{d}{dx}$ द्वारा व्यक्त करते है तथा $x = c$ पर अवकल गुणाँक $f'(c)$ या $\left[\frac{d}{dx}f(x)\right]_{x=c}$ द्वारा व्यक्त करते हैं।

यदि $y = f(x)$ हो, तो y का x के सापेक्ष अवकल गुणाँक को $\frac{dy}{dx}$ या y_1 या y' या Dy द्वारा व्यक्त करते हैं।

टिप्पणीः

1. $\frac{\delta y}{\delta x}$ एक भिन्न है का अर्थ $\delta y \div \delta x$ है।

2. $\frac{dy}{dx}$ एक भिन्न नहीं है, जबकि $\frac{dy}{dx}$ तो केवल $\lim_{\delta x \to 0}\frac{\delta y}{\delta x}$ का संकेत मात्र है।

परिभाषाः माना f एक वास्तविक एक मानीय फलन है और इसकी परिभाषा के प्रांत में एक बिन्दु a है। a पर f का अवकलज

$$\lim_{h \to 0}\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

से परिभाषित है, बशर्त है कि सीमा का अस्तित्व हो। a पर $f(x)$ का अवकलज $f'(a)$ से निरूपित होता है।

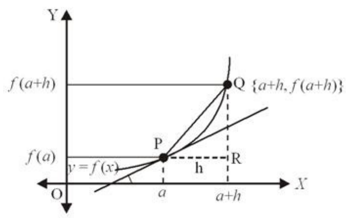
एक बिन्दु पर फलन के अवकलज की ज्यामितीय व्याख्याः

माना $y = f(x)$ एक फलन है और इस फलन के आलेख पर $P(a, f(a))$ और $Q(a+h, f(a+h))$ दो परस्पर निकट बिन्दु हैं। चित्र 10.02 एवं पूर्व अध्ययन के आधार पर हम जानते हैं कि

$$f'(a) = \lim_{h \to 0}\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

त्रिभुज PQR, से यह स्पष्ट है कि वह अनुपात जिसकी सीमा हम ले रहे हैं, यथार्थतः tan (QPR) के बराबर है जो कि जीवा PQ का ढाल है। सीमा लेने की प्रक्रिया में, जब h, 0 की ओर अग्रसर होता है, बिन्दु Q, P की ओर अग्रसर होता है, अर्थात्

$$\lim_{h \to 0}\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{Q \to P}\frac{QR}{PR}$$



चित्र 10.02

यह इस तथ्य के तुल्य है कि जीवा PQ, वक्र $y = f(x)$ के बिन्दु P पर स्पर्शी की ओर अग्रसर होती है। अतः $f'(a) = \tan\psi$.

एक दिए फलन f के लिए हम प्रत्येक बिन्दु पर अवकलज ज्ञात कर सकते हैं। यदि प्रत्येक बिन्दु पर अवकलज का अस्तित्व है तो यह एक नये फलन को परिभाषित करता है जिसे फलन f का अवकलज कहा जाता है।

दृष्टान्तीय उदाहरण

उदाहरण 12: $x = 2$ पर फलन $f(x) = 8x$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।

हलः हम जानते हैं $f'(2) = \lim_{h \to 0}\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0}\frac{8(2+h) - 8(2)}{h}$

$$= \lim_{h \to 0}\frac{16 + 8h - 16}{h} = \lim_{h \to 0}\frac{8h}{h} = \lim_{h \to 0} 8 = 8$$

अतः $x = 2$ पर फलन $8x$ का अवकलज 8 है।

उदाहरण 13: $x=-1$ पर फलन $f(x)=2x^2+3x-5$ का अवकलज ज्ञात कीजिए। यह भी सिद्ध कीजिए कि $f'(0)+3f'(-1)=0$.

हल: हम पहले $x=0$ और $x=-1$ पर $f(x)$ का अवकलज ज्ञात करते हैं। हम जानते हैं कि

$$f'(-1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left[2(-1+h)^2+3(-1+h)-5\right]-\left[2(-1)^2+3(-1)-5\right]}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2h^2-h}{h}=\lim_{h\to 0}(2h-1)=2(0)-1=-1$$

और $$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left[2(0+h)^2+3(0+h)-5\right]-\left[2(0)^2+3(0)-5\right]}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2h^2+3h}{h}=\lim_{h\to 0}(2h+3)=2(0)+3=3$$

स्पष्टतः $f'(0)+3f'(-1)=0$

उदाहरण 14: $f(x)=\dfrac{1}{x}$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल: हम जानते हैं $f'(x)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{\frac{1}{(x+h)}-\frac{1}{x}}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}\right]=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{-h}{x(x+h)}\right]=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{x(x+h)}=-\frac{1}{x^2}$$

10.10 फलनों के अवकलज का बीजगणित (Algebra of derivative of functions)

क्योंकि अवकलज की यथार्थ परिभाषा में सीमा निश्चय ही सीधे रूप में सम्मिलित है, हम अवकलज के नियमों में निकटता से सीमा के नियमों के अनुगमन की आशा करते है इन्हें हम निम्नलिखित प्रमेयों में देखते हैं।

प्रमेय 1: मान लीजिए f और g दो ऐसे फलन हैं कि उनके उभयनिष्ठ प्रांत में उनके अवकलजन परिभाषित हैं, तब

(i) दो फलनों के योग का अवकलज उन फलनों के अवकलजों का योग है।

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)+g(x)\right]=\frac{d}{dx}f(x)+\frac{d}{dx}g(x)$$

(ii) दो फलनों के अंतर का अवकलज उन फलनों के अवकलजों का अंतर है।

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)-g(x)\right]=\frac{d}{dx}f(x)-\frac{d}{dx}g(x)$$

(iii) दो फलनों के गुणन का अवकलज निम्नलिखित गुणन नियम (product rule) से दिया गया है:

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=f(x)\cdot\frac{d}{dx}g(x)+g(x)\cdot\frac{d}{dx}f(x)$$

(iv) दो फलनों के भागफल का अवकलज निम्नलिखित भागफल (quotient rule) से दिया गया है (जहाँ की हर शून्येतर है)

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{g(x)\frac{d}{dx}f(x)-f(x)\frac{d}{dx}g(x)}{\left(g(x)\right)^2}$$

इनकी उपपत्ति सीमाओं की तुल्य रूप प्रमेयों से आवश्यकीय रूप से अनुसरण करती है। हम इन्हें यहाँ सिद्ध नहीं करेंगे। सीमाओं की स्थिति की तरह यह प्रमेय बतलाता है कि विशेष प्रकार के फलनों के अवकलज कैसे परिकलित किए जाते हैं। प्रमेय के अंतिम दो कथनों को निम्नलिखित ढंग से पुनः कहा जा सकता है जिससे उनके पुनर्स्मरण करने में आसानी रहती है।

मान लीजिए $u=f(x)$ और $v=g(x)$ तब

$$(uv)'=u'v+uv'$$

यह फलनों के गुणन के अवकलन के लिए Leibnitz नियम या गुणन नियम उल्लेखित होता है। इसी प्रकार, भागफल नियम है

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{vu'-uv'}{v^2}$$

अब, आइए हम कुछ मानक फलनों के अवकलनों को लें। यह देखना सरल है कि फलन $f(x)=x$ का अवकलज अचर फलन 1 है। क्योंकि

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h}=\lim_{h\to 0}=1$$

हम इसका और उपर्युक्त प्रमेय का प्रयोग $f(x)=10x=x+x+\ldots+x(10 \text{ पद})$ (उपर्युक्त प्रमेय के (i) से) के अवकलज के परिकलन में करते हैं।

$$\frac{df(x)}{dx}=\frac{d}{dx}(x+\ldots+x)\ (10 \text{ पद})=\frac{d}{dx}x+\ldots+\frac{d}{dx}x\ (10 \text{ पद})=1+\ldots+1\ (10 \text{ पद})=10$$

हम ध्यान देते हैं कि इस सीमा का मान गुणन सूत्र के प्रयोग से भी प्राप्त किया जा सकता है। हम लिखते हैं, $f(x)=10x=uv$, जहाँ u लिखते हैं जहाँ u प्रत्येक जगह मान 10 लेकर अचर फलन है और $v(x)=x$, यहाँ हम जानते हैं कि u का अवकलज 0 के बराबर है साथ ही $v(x)=x$ का अवकलज 1 के बराबर है। इस प्रकार गुणन नियम से, हम पाते हैं।

$$f'(x)=(10x)'=(uv)'=u'v+uv'=0\cdot x+10\cdot 1=10$$

इसी आधार पर $f(x)=x^2$ के अवकलज का मान प्राप्त किया जा सकता हैं हम पाते हैं $f(x)=x^2=x,\ x$ और अतः

$$\frac{df}{dx}=\frac{d}{dx}(x\cdot x)=\frac{d}{dx}(x)\cdot x+x\cdot\frac{d}{dx}(x)=1\cdot x+x\cdot 1=2x$$

अधिक व्यापक रूप से हम निम्नलिखित प्रमेय का प्रयोग करते हैं:

प्रमेय 2: किसी धन पूर्णांक n के लिए $f(x)=x^n$ का अवकलज nx^{x-1} है।

प्रमाण: अवकलज फलन की परिभाषा से, हम पाते हैं

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}$$

द्विपद प्रमेय के अनुसार $(x+h)^n=\left({}^nC_0\right)x^n+\left({}^nC_1\right)x^{n-1}h+\ldots+\left({}^nC_n\right)h^n$ और $(x+h)^n-x^n=h\left(nx^{n-1}+\ldots+h^{n-1}\right)$

इस प्रकार

$$\frac{df(x)}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h\left(nx^{n-1}+\ldots+h^{n-1}\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(nx^{n-1}+\ldots+h^{n-1}\right),=nx^{n-1}$$

दृष्टान्तीय उदाहरण

उदाहरण 15: $f(x)=2x$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।

हलः हम जानते हैं कि $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2(x+h)-2(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2h}{h}=2$

उदाहरण 16: $f(x)=x^2$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।

हलः हम जानते हैं कि $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-(x)^2}{h}=\lim_{h\to 0}(h+2x)=2x$

उदाहरण 17: $x=1$ पर $f(x)=1+x+x^2+...+x^{10}$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।

हलः प्रमेय 2 के अनुप्रयोग से

$$f'(x)=1+2x+...+10x^9$$

$x=1$ पर $\quad f'(1)=1+2(1)+...+10(1)^9=\frac{10\times 11}{2}=55$

उदाहरण 18: $\sin x$ के अवकलज का परिकलन कीजिए।

हलः माना $\quad f(x)=\sin x$

$$\frac{df(x)}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2\cos\left(\frac{2x+h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h} \qquad [\sin A-\sin B \text{ के सूत्र से}]$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cos\left(\frac{2x+h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h/2}=\lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\lim_{h\to 0}\frac{\sin h/2}{h/2}=\cos x\cdot 1=\cos x$$

उदाहरण 19: $f(x)=\sin^2 x$ के अवकलज का परिकलन कीजिए।

हलः अवकलज के गुणन सूत्र का प्रयोग से

$$\frac{df(x)}{dx}=\frac{d}{dx}(\sin x\cdot\sin x)=(\sin x)'\sin x+\sin x(\sin x)'$$

$$=\cos x\sin x+\sin x(\cos x)=2\sin x\cos x=\sin 2x$$

प्रश्नमाला 10.3

1. $x=10$ पर x^2-2 का अवकलज ज्ञात कीजिए।
2. $x=50$ पर $49x$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।
3. प्रथम सिद्धांत से निम्नलिखित फलनों के अवकलज ज्ञात कीजिए:

   (i) x^3-16 (ii) $(x-1)(x-2)$ (iii) $\frac{1}{x^2}$ (iv) $\frac{x+1}{x-1}$

4. फलन $f(x)=\frac{x^{100}}{100}+\frac{x^{99}}{99}+...+\frac{x^2}{2}+x+1$ के लिए सिद्ध कीजिए कि $f'(1)=100f'(0)$

5. किसी अचर वास्तविक संख्या a के लिए $x^n+ax^{n-1}+a^2x^{n-2}+...+a^{n-1}x+a^n$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।

6. किन्हीं अचरों a और b, के लिए,

(i) $(x-a)(x-b)$ (ii) $(ax^2+b)^2$ (iii) $\frac{x-a}{x-b}$

के अवकलज ज्ञात कीजिए।

7. किसी अचर a के लिए $\frac{x^n-a^n}{x-a}$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।

8. निम्नलिखित के अवकलज ज्ञात कीजिए:

(i) $2x-\frac{3}{4}$ (ii) $(5x^3+3x-1)(x-1)$ (iii) $x^5(3-6x^{-9})$

(iv) $x^{-4}(3-4x^{-5})$ (v) $\frac{2}{x+1}-\frac{x^2}{3x-1}$

9. प्रथम सिद्धांत से $\cos x$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।

10. निम्नलिखित फलनों के अवकलज ज्ञात कीजिए।

(i) $\sin x\cos x$ (ii) $\sec x$ (iii) $\operatorname{cosec} x$

(iv) $3\cot x+5\operatorname{cosec} x$ (v) $5\sin x-6\cos x+7$

विविध उदाहरण

उदाहरण 20: e^x का प्रथम सिद्धान्त से अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल: माना कि $y=e^x$

पुनः माना कि $y+\delta y=e^{x+\delta x}$

$\therefore$ $\delta y=e^{x+\delta x}-e^x$

या $\delta y=e^x\cdot e^{\delta x}-e^x$

या $$\frac{\delta y}{\delta x}=\frac{e^x}{\delta x}\left[e^{\delta x}-1\right]$$

या $$\frac{\delta y}{\delta x}=\frac{e^x}{\delta x}\left[1+\frac{\delta x}{\underline{|1}}+\frac{(\delta x)^2}{\underline{|2}}+...-1\right]$$

या $$\frac{\delta y}{\delta x}=\frac{e^x\cdot\delta x}{\delta x}\left[1+\frac{\delta x}{\underline{|2}}+...\right]$$

या $$\lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta y}{\delta x}=\lim_{\delta x\to 0}e^x\left[1+\frac{\delta x}{\underline{|2}}+...\right]$$

या $$\frac{dy}{dx}=e^x[1+0+...]=e^x$$

$\therefore$ $$\frac{d}{dx}(e^x)=e^x$$

उदाहरण 21: a^x का प्रथम सिद्धान्त से अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल: माना कि $y = a^x$

पुनः माना कि $y + \delta y = a^{x+\delta x}$

$\therefore \quad \delta y = a^{x+\delta x} - a^x$

या $\quad \delta y = a^x \cdot a^{\delta x} - a^x$

या $$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{a^x}{\delta x}\left[a^{\delta x} - 1\right]$$

या $$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{a^x}{\delta x}\left[1 + \delta x \cdot \log_e a + \frac{(\delta x)^2}{\lfloor 2}(\log_e a)^2 + \ldots - 1\right]$$

या $$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{a^x \cdot \delta x}{\delta x}\left[\log_e a + \frac{\delta x}{\lfloor 2}(\log_e a)^2 + \ldots\right]$$

या $$\lim_{\delta x \to 0}\frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0} a^x\left[\log_e a + \frac{\delta x}{\lfloor 2}(\log_e a)^2 + \ldots\right]$$

या $$\frac{dy}{dx} = a^x\left[\log_e a + 0 + \ldots\right] = a^x \cdot \log_e a$$

$\therefore$ $$\frac{d}{dx}\left(a^x\right) = a^x \cdot \log_e a$$

उदाहरण 22: $\log_e x$ का प्रथम सिद्धान्त से अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल: माना कि $y = \log_e x$

पुनः माना कि $y + \delta y = \log_e(x + \delta x)$

$\therefore$ $$\delta y = \log_e\left(\frac{x + \delta x}{x}\right)$$

या $$\delta y = \log_e\left(1 + \frac{\delta x}{x}\right)$$

या $$\delta y = \frac{\delta x}{x} - \frac{1}{2}\left(\frac{\delta x}{x}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{\delta x}{x}\right)^3 - \ldots$$

या $$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{\delta x}{\delta x}\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\frac{\delta x}{x^2} + \frac{1}{3}\frac{(\delta x)^2}{x^3} - \ldots\right]$$

या $$\lim_{\delta x \to 0}\frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0}\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\frac{\delta x}{x^2} + \frac{1}{3}\frac{(\delta x)^2}{x^3} - \ldots\right]$$

या $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} - 0 + 0 \ldots$$

या $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

अतः $$\frac{d}{dx}(\log_e x) = \frac{1}{x}$$

उदाहरण 23: प्रथम सिद्धान्त से $\sqrt{x}$ का x के सापेक्ष अवकलज ज्ञात कीजिए।

हलः माना कि $y=\sqrt{x}=x^{1/2}$

पुनः माना कि $y+\delta y=(x+\delta x)^{1/2}$

$\therefore \quad \delta y=(x+\delta x)^{1/2}-x^{1/2}$

या $$\frac{\delta y}{\delta x}=\frac{x^{1/2}}{\delta x}\left[\left(1+\frac{\delta x}{x}\right)^{1/2}-1\right]$$

या $$\frac{\delta y}{\delta x}=\frac{x^{1/2}}{\delta x}\left[1+\frac{1}{2}\frac{\delta x}{x}+\frac{1/2(1/2-1)}{\lfloor 2}\cdot\left(\frac{\delta x}{x}\right)^{2}+\ldots-1\right]$$

या $$\frac{\delta y}{\delta x}=x^{1/2}\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}+\frac{1/2(1/2-1)}{\lfloor 2}\cdot\frac{\delta x}{x^{2}}+\ldots\right]$$

या $$\lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta x}{\delta x}=\lim_{\delta x\to 0}x^{1/2}\left[\frac{1}{2x}+\frac{1/2(1/2-1)}{\lfloor 2}\cdot\frac{\delta x}{x^{2}}+\ldots\right]$$

या $$\frac{dy}{dx}=x^{1/2}\left[\frac{1}{2x}+0+\ldots\right]$$

या $$\frac{dy}{dx}=x^{1/2}\left[\frac{1}{2x}+0+\ldots\right]$$

या $$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2x^{1/2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

उदाहरण 24: प्रथम सिद्धान्त से $\sqrt{\tan x}$ का x के सापेक्ष अवकलज ज्ञात कीजिए।

हलः माना कि $y=\sqrt{\tan x}$

$\therefore \quad y^{2}=\tan x$

तब $(y+\delta y)^{2}-y^{2}=\tan(x+\delta x)-\tan x$

या $$2y\delta y+(\delta y)^{2}=\frac{\sin(x+\delta x)}{\cos(x+\delta x)}-\frac{\sin x}{\cos x}$$

या $$2y\delta y+(\delta y)^{2}=\frac{\sin(x+\delta x)\cdot\cos x-\cos(x+\delta x)\cdot\sin x}{\cos(x+\delta x)\cdot\cos x}$$

या $$2y\delta y+(\delta y)^{2}=\frac{\sin(x+\delta x-x)}{\cos(x+\delta x)\cdot\cos x}$$

या $$\frac{\delta y}{\delta x}[2y+\delta y]=\frac{1}{\cos(x+\delta x)\cdot\cos x}\cdot\frac{\sin\delta x}{\delta x}$$

या $\lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta y}{\delta x}[2y+\delta y]=\lim_{\delta x\to 0}\frac{1}{\cos(x+\delta x)\cdot\cos x}\lim_{\delta x\to 0}\frac{\sin\delta x}{\delta x}$

या $\frac{dy}{dx}[2y+0]=\frac{1}{\cos x\cdot\cos x}\cdot 1=\sec^2 x$ $[\because$ जब $\delta x\to 0$ तब $\delta y\to 0]$

या $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2y}\cdot\sec^2 x=\frac{1}{2\sqrt{\tan x}}\sec^2 x$

अतः $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{\tan x}\right)=\frac{\sec^2 x}{2\sqrt{\tan x}}$

विविध प्रश्नमाला–10

1. $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{2x^2-7x+5}$ का मान है–

(A) 1 / 3 (B) –1/3 (C) 1 (D) –1

2. $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$ का मान है

(A) 0 (B) ∞ (C) 1 (D) –1

3. $\lim_{x\to 0}\frac{xe^x-\log_e(1+x)}{x^2}$ का मान है–

(A) 2 / 3 (B) 1/3 (C) 1 / 2 (D) 3 / 2

4. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)$ का मान है–

(A) 3 (B) 2 (C) 1 (D) –1

5. $\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{\pi}{4x}\cos\frac{\pi}{4x}$ का मान है–

(A) π / 4 (B) π / 2 (C) 0 (D) ∞

6. $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x}$ का मान है–

(A) 0 (B) 1 (C) $\log_e$(ab) (D) $\log_e$(a/b)

7. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^0}{x}$ का मान है–

(A) 0 (B) 1 (C) π/180 (D) π

8. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$ का मान है–

(A) 0 (B) 1 / 2 (C) –1 / 2 (D) –1

9. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{\tan x}\right)^4$ का मान है–

(A) 0 (B) 81 (C) 4 (D) 1

10. $\lim_{x\to 0^+}\frac{1+3^{1/x}}{1-3^{1/x}}$ का मान है–

(A) 0 (B) ∞ (C) –1 (D) 1

11. y, x का फलन हो तो y का x के सापेक्ष अवकलज है–

(A) $\dfrac{\delta y}{\delta x}$ (B) $\lim\limits_{\delta y\to 0}\dfrac{\delta y}{\delta x}$ (C) $\lim\limits_{\delta x\to 0}\dfrac{\delta y}{\delta x}$ (D) $\lim\limits_{\delta x\to 0}\dfrac{\delta x}{\delta y}$

12. x^n का अवकलज है–

(A) x^{n-1} (B) $(n-1)x^{n-2}$ (C) nx^{n-1} (D) $x^{n+1}/n+1$

13. $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ का अवकलज है–

(A) $\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$ (B) $-\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$ (C) $2x\sqrt{x}$ (D) $-2x\sqrt{x}$

14. $\dfrac{d}{dx}(5^x)$ बराबर है–

(A) 5^x (B) 10^x (C) $10^x \log_e 5$ (D) $5^x \log_e 5$

15. $\dfrac{d}{dx}(\log_a x)$ बराबर है–

(A) $\dfrac{1}{x\cdot\log_e a}$ (B) $\dfrac{\log_e a}{x}$ (C) $\dfrac{1}{x}$ (D) $\dfrac{x}{\log_e a}$

16. यदि $f(x)=x^3+6x^2-5$ तब $f'(1)$ बराबर है–

(A) 0 (B) 9 (C) 4 (D) 15

17. $\sec x^\circ$ का अवकलज है–

(A) $\sec x^\circ \tan x^\circ$ (B) $\dfrac{\pi}{180}\sec x\tan x$ (C) $\dfrac{\pi}{180}\sec x^\circ \tan x^\circ$ (D) $\sec x\tan x$

18. $\log_x a$ का अवकलज है–

(A) $\dfrac{\log_e a}{x\log_e x}$ (B) $-\dfrac{\log_e a}{x(\log_e x)^2}$ (C) $\dfrac{\log_e a}{x(\log_e x)^2}$ (D) $-\dfrac{\log_e a}{x\log_e x}$

19. यदि $f(x)=\dfrac{2x+c}{x-1}$ तथा $f'(0)=0$ तब c का मान–

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) –2

20. $\log_e\sqrt{x}$ का अवकलज है–

(A) $\dfrac{1}{2x}$ (B) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ (C) $2\sqrt{x}$ (D) $\dfrac{1}{2}\sqrt{x}$

21. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ae^x-b\cos x+ce^{-x}}{x\sin x}=2$ तो a, b, c का मान ज्ञात कीजिए।

22. $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{x+c}-\sqrt{x}\right)$ का मान ज्ञात कीजिए।

23. $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}-1}{\sqrt{x^2-1}}$ का मान ज्ञात कीजिए।

24. $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{3x^2+2x+1}{x^2+x+2}\right)^{\frac{6x+1}{3x-1}}$ का मान ज्ञात कीजिए।

25. $\lim_{x\to\infty} 2^x \sin\left(\frac{a}{2^x}\right)$ का मान ज्ञात कीजिए।

26. $\lim_{x\to 1} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ का मान ज्ञात कीजिए।

27. $\lim_{x\to\pi/2} \frac{1+\cos 2x}{(\pi-2x)^2}$ का मान ज्ञात कीजिए।

28. यदि $y = \frac{x}{x+5}$ तो सिद्ध कीजिए $x\frac{dy}{dx} = y(1-y)$

29. यदि $y = x^3 \cdot e^x \sin x$ हो तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

महत्वपूर्ण बिन्दु

1. **सीमा की परिभाषा** – $y = f(x)$, $x = a$ पर अपरिभाषित है, किन्तु $x = a$ के दायें तथा बायें लघुसामीप्य में फलन $f(x)$ परिभाषित हैं, फलन $f(x)$ का मान किसी वास्तविक संख्या ℓ की ओर अग्रसर है तो वास्तविक संख्या ℓ फलन f की सीमा कहलाती है इसका संकेतात्मक रूप $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$
2. **दायीं सीमा** – यदि x दायीं ओर से a की ओर प्रवृत्त होता है तो f की दायीं सीमा को हम लिखते हैं: $\lim_{x\to a^+} f(x)$ अथवा $f(a+0)$.
3. **बायीं सीमा** – यदि x बायीं ओर से a की ओर प्रवृत्त होता है तो f की बायीं सीमा को हम लिखते हैं $\lim_{x\to a^-} f(x)$ अथवा $f(a-0)$.
4. **सीमा का अस्तित्व** – $\lim_{x\to a} f(x)$ का अस्तित्व होता है $\Leftrightarrow f(a-0) = f(a+0)$
5. **मानक सीमाऐं**–

   (a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (b) $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$ (c) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$ (d) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

   (e) $\lim_{x\to 0} \frac{b^x - 1}{x} = \log\ b (b \neq 0)$ (f) $\lim_{x\to 0} \frac{\log\ [1+x]}{x} = 1$ (g) $\lim_{x\to 0} [1+x]^{1/x} = e$

   (h) $\lim_{x\to\infty} \left[1+\frac{1}{x}\right]^x = e$ (i) $\lim_{x\to a} \frac{x^m - a^m}{x-a} = ma^{m-1}$ (j) $\lim_{x\to a} \frac{x^m - a^m}{x^n - a^n} = \frac{m}{n} a^{m-n}$

6. बिन्दु a पर फलन f का अवकलज $f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ से परिभाषित होता है

7. प्रत्येक बिन्दु पर अवकलज, अवकलज फलन

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$ से परिभाषित होता है

8. यदि $u, v, w, \ldots$, सभी x के फलन हो तो–

$$\frac{d}{dx}(u \pm v \pm w \pm \ldots) = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx} \pm \frac{dw}{dx} \pm \ldots$$

9. $\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$

10. $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$

11. निम्नलिखित कुछ मानक अवकलज हैं

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1},\ \frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x,\ \frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

उत्तरमाला

प्रश्नमाला 10.1

2. नहीं **5.** $f(0+0)=0, f(0-0)=0$

प्रश्नमाला 10.2

1. (a) $\frac{1}{5}$ (b) $-\frac{1}{10}$ **2.** (a) $\sqrt{2}$ (b) n **3.** (a) $2\log_e 2$ (b) 1 **4.** (a) 2 (b) $\frac{1}{2}$

5. (a) 1 (b) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4}$ **6.** (a) 2 (b) 1 **7.** (a) 2 (b) $\frac{3}{2}(a+2)^{\frac{1}{2}}$

प्रश्नमाला 10.3

1. 20 **2.** 49 **3.** (i) $3x^2$ (ii) $2x-3$ (iii) $\frac{-2}{x^3}$ (iv) $\frac{-2}{(x-1)^2}$

5. $nx^{n-1} + a(n-1)x^{n-2} + a^2(n-2)x^{n-3} + \ldots + a^{n-1}$ **6.** (i) $2x-a-b$ (ii) $4ax(ax^2+b)$ (iii) $\frac{a-b}{(x-b)^2}$

7. $\frac{nx^n - anx^{n-1} - x^n + a^n}{(x-a)^2}$ **8.** (i) 2 (ii) $20x^3-15x^2+6x-4$ (iii) $15x^4+\frac{24}{x^5}$ (iv) $\frac{-12}{x^5}+\frac{36}{10^{10}}$

(v) $\frac{-2}{(x+1)^2} - \frac{x(3x-2)}{(3x-1)^2}$ **9.** $-\sin x$ **10.** (i) $\cos 2x$ (ii) $\sec x \tan x$

(iii) $-\text{cosec}\,x \cot x$ (iv) $-3\,\text{cosec}^2 x - 5\,\text{cosec}\,x \cot x$ (v) $5\cos x + 6\sin x$

विविध प्रश्नमाला–10

1. (B) **2.** (A) **3.** (D) **4.** (C) **5.** (A) **6.** (D) **7.** (C)
8. (B) **9.** (B) **10.** (C) **11.** (C) **12.** (C) **13.** (B) **14.** (D)
15. (A) **16.** (D) **17.** (C) **18.** (B) **19.** (D) **20.** (A) **21.** $a=1, b=2, c=1$

22. $c/2$ **23.** $1/\sqrt{2}$ **24.** 9 **25.** a **26.** $\frac{e^2-1}{e^2+1}$ **27.** $1/2$

29. $x^3e^x\cos x + x^3e^x\sin x + 3x^2e^x\sin x$