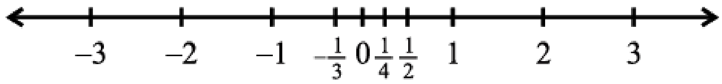
ಅಧ್ಯಾಯ – 1

ಸಂಖ್ಯಾ ಪದ್ಧತಿ

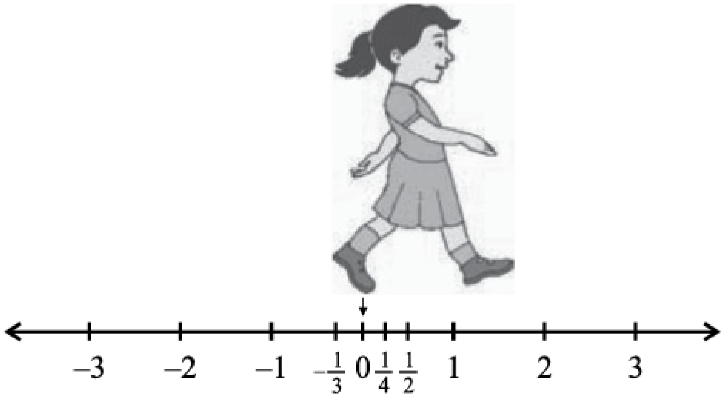
1.1 ಪೀಠಿಕೆ

ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯನ್ನು ಹಾಗೂ ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ವಿವಿಧ ರೀತಿಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವುದನ್ನು ನೀವು ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ಕಲಿತಿರುವಿರಿ. (ಚಿತ್ರ 1.1ನ್ನು ಗಮನಿಸಿ)



ಚಿತ್ರ 1.1 : ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆ

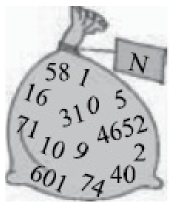
ಸೊನ್ನೆಯಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿ ನೀವು ಈ ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯುದ್ದಕ್ಕೂ ಧನಾತ್ಮಕ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಚಲಿಸುತ್ತಿರುವುದಾಗಿ ಭಾವಿಸಿ. ನಿಮ್ಮ ಕಣ್ಣಿನ ದೃಷ್ಟಿ ಹಾಯ್ದಷ್ಟು ದೂರವೂ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು, ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮತ್ತೂ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು !



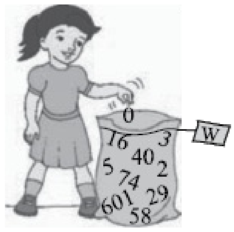
ಚಿತ್ರ 1.2

ಈಗ, ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯುದ್ದಕ್ಕೂ ನೀವು ಚಲಿಸುತ್ತಿರುವುದಾಗಿ ಹಾಗೂ ಕೆಲವು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸಂಗ್ರಹಿಸುತ್ತಿರುವುದಾಗಿ ಊಹಿಸಿ, ಅವುಗಳನ್ನು ತುಂಬಿಸಲು ಒಂದು ಚೀಲವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ.

ನೀವು 1,2,3........... ಈ ರೀತಿಯ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಆಯ್ದುಕೊಳ್ಳುವುದರಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭಿಸಬಹುದು. ಈ ರೀತಿಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಪಟ್ಟಿ ಮುಂದುವರಿಯುತ್ತಲೇ ಹೋಗುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ನೀವು ತಿಳಿದಿದ್ದೀರಿ. (ಇದು ನಿಜ. ಏಕೆ?) ಹೀಗೆ ಈಗ ನಿಮ್ಮ ಚೀಲವು ಅಪರಿಮಿತ (ಅಸಂಖ್ಯಾತ) ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿದೆ! ಈ ಸಂಗ್ರಹವನ್ನು ನಾವು 'N' ಎಂಬ ಸಂಕೇತದಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಸ್ಮರಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ.

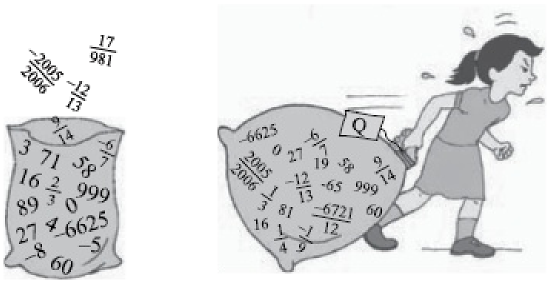


ಈಗ ಬಂದ ದಾರಿಯಲ್ಲೇ ಹಿಂತಿರುಗಿ ಬನ್ನಿ. ಸೊನ್ನೆಯನ್ನು ಆಯ್ದು ಚೀಲದೊಳಕ್ಕೆ ತುಂಬಿಸಿ. ಈಗ ನಿಮ್ಮಲ್ಲಿ **ಪೂರ್ಣಸಂಖ್ಯೆಗಳ** ಸಂಗ್ರಹವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಅದನ್ನು 'W' ಎಂಬ ಸಂಕೇತದಿಂದ ಸೂಚಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.



ಈಗ, ನಿಮ್ಮ ಎದುರು ಅನೇಕಾನೇಕ ಋಣಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಉದ್ದಕ್ಕೂ ಚಾಚಿಕೊಂಡಿವೆ. ಈ ಎಲ್ಲಾ ಋಣಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ನಿಮ್ಮ ಚೀಲದೊಳಕ್ಕೆ ತುಂಬಿಸಿ. ಈಗ ದೊರೆತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಹೊಸ ಸಂಗ್ರಹ ಯಾವುದು? ಇದು ಎಲ್ಲಾ **ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ** ಸಂಗ್ರಹ ಮತ್ತು ಅದನ್ನು 'Z' ಎಂಬ ಸಂಕೇತದಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಸ್ಮರಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ.

ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಉಳಿದಿವೆಯೇ? ಖಂಡಿತವಾಗಿಯೂ ಇವೆ! ಅಲ್ಲಿ $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ ಅಲ್ಲದೇ $-\frac{2005}{2006}$ ಈ ರೀತಿಯ ಕೆಲವು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಕೂಡ ಉಳಿದಿವೆ. ನೀವು ಇವುಗಳನ್ನು ಸಹ ಚೀಲದೊಳಗೆ ತುಂಬಿಸಿದರೆ ಈಗ ಅದು **'ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ'** ಸಂಗ್ರಹವಾಗಿದೆ. ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಂಗ್ರಹವನ್ನು **'Q'** ಎಂಬ ಅಕ್ಷರದಿಂದ ಸೂಚಿಸಲಾಗಿದೆ. **'ಭಾಗಲಬ್ಧ'(Rational)** ಎಂಬ ಪದವು **'ಅನುಪಾತ' (Ratio)** ಎಂಬ ಪದದಿಂದ ಬಂದಿದೆ. 'Q' ಎಂಬ ಸಂಕೇತಾಕ್ಷರವು **'ಭಾಗಲಬ್ಧ' (Quotient)** ಎಂಬ ಪದದಿಂದ ಬಂದಿದೆ.



ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯನ್ನು ನೀವು ಸ್ಮರಿಸಿಕೊಳ್ಳಿರಿ.

ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ r ನ್ನು $\frac{p}{q}$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಬಹುದಾದರೆ (p ಮತ್ತು q ಗಳು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು, $q \neq 0$) ಅದನ್ನು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ($q \neq 0$ ಏಕೆ?)

ಚೀಲದೊಳಗಿರುವ ಎಲ್ಲ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು $\frac{p}{q}$ ರೂಪದಲ್ಲಿ (p ಮತ್ತು q ಗಳು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು, $q \neq 0$) ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, –25ನ್ನು $-\frac{25}{1}$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು; ಇಲ್ಲಿ $p = -25$ ಮತ್ತು $q = 1$. ಆದ್ದರಿಂದ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು, ಪೂರ್ಣಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮತ್ತು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು ಸಹ ಸೇರಿರುತ್ತವೆ.

ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು $\frac{p}{q}$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ($p, q \in Z, q \neq 0$) ಏಕಮಾತ್ರ ಪ್ರಾತಿನಿಧ್ಯ ಹೊಂದಿಲ್ಲವೆಂಬುದನ್ನೂ ಸಹ ನೀವು ತಿಳಿದಿದ್ದೀರಿ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{10}{20} = \frac{25}{50} = \frac{47}{94}$ ......ಇತ್ಯಾದಿ. ಇವು **ಸಮಾನ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು (ಅಥವಾ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳು)**. ಆದಾಗ್ಯೂ, $\frac{p}{q}$ ನ್ನು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ಹೇಳುವಾಗ ಅಥವಾ $\frac{p}{q}$ ನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವಾಗ ನಾವು $q \neq 0$ ಹಾಗೂ p ಮತ್ತು q ಗಳಿಗೆ 1 ನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿ ಬೇರೆ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳಿಲ್ಲ ಎಂದು ಭಾವಿಸುತ್ತೇವೆ. (ಅಂದರೆ p ಮತ್ತು q ಗಳು **ಸಹ ಅವಿಭಾಜ್ಯಗಳು**)

ಹೀಗೆ, $\frac{1}{2}$ ಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾದ ಅಪರಿಮಿತ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವಾಗ ನಾವು $\frac{1}{2}$ ನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ.

ಈಗ, ನೀವು ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ಅಭ್ಯಸಿಸಿದ ವಿವಿಧ ರೀತಿಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣಾ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 1 : ಈ ಕೆಳಗಿನ ಹೇಳಿಕೆಗಳು ಸರಿಯೇ ಅಥವಾ ತಪ್ಪೇ, ಎಂಬುದನ್ನು. ಕಾರಣ ಸಹಿತ ತಿಳಿಸಿ.

(i) ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪೂರ್ಣಸಂಖ್ಯೆಯೂ ಒಂದು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ.

(ii) ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕವೂ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ.

(iii) ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧಸಂಖ್ಯೆಯೂ ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿದೆ.

ಪರಿಹಾರ: (i) ತಪ್ಪು ಯಾಕೆಂದರೆ '0' (ಸೊನ್ನೆ) ಒಂದು ಪೂರ್ಣಸಂಖ್ಯೆ ಆದರೆ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲ.

(ii) ಸರಿ, ಏಕೆಂದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕ 'm'ನ್ನು $\frac{m}{1}$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಅದೊಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗುತ್ತದೆ.

(iii) ತಪ್ಪು, ಏಕೆಂದರೆ $\frac{3}{5}$ ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕವಲ್ಲ.

ಉದಾಹರಣೆ 2 : 1 ಮತ್ತು 2ರ ನಡುವಿನ ಐದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಇದನ್ನು ನಾವು ಕನಿಷ್ಠ ಎರಡು ವಿಧಾನಗಳಲ್ಲಿ ಬಿಡಿಸಬಹುದು.

ಪರಿಹಾರ 1 : r ಮತ್ತು s ಗಳ ನಡುವಿನ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪಡೆಯಲು, ನೀವು r ಮತ್ತು s ನ್ನು ಕೂಡಿಸಿ, ದೊರೆತ ಮೊತ್ತವನ್ನು 2 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಸ್ಮರಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ, ಅಂದರೆ $\frac{r+s}{2}$ ಎಂಬುದು r ಮತ್ತು s ಗಳ ನಡುವೆ ಇದೆ. ಹೀಗೆ $\frac{3}{2}$ ಎಂಬುದು 1 ಮತ್ತು 2 ರ ನಡುವೆ ಇರುವ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿದೆ. ಇದೇ ರೀತಿ ನೀವು ಮುಂದುವರಿಸುತ್ತಾ, 1

ಮತ್ತು 2 ರ ನಡುವಿನ ಉಳಿದ ನಾಲ್ಕು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಈ ನಾಲ್ಕು ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಂದರೆ $\frac{5}{4}, \frac{11}{8}, \frac{13}{8}$ ಮತ್ತು $\frac{7}{4}$.

ಪರಿಹಾರ 2 : ಇನ್ನೊಂದು ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಾ ಐದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಒಂದೇ ಹಂತದಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ನಮಗೆ 5 ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಬೇಕಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ನಾವು 1 ಮತ್ತು 2ನ್ನು ಛೇದವು 5 + 1 ಆಗಿರುವಂತಹ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಅಂದರೆ $1 = \frac{6}{6}$ ಮತ್ತು $2 = \frac{12}{6}$. ಈಗ $\frac{7}{6}, \frac{8}{6}, \frac{9}{6}, \frac{10}{6}$ ಮತ್ತು $\frac{11}{6}$ ಇವೆಲ್ಲವೂ 1 ಮತ್ತು 2 ರ ನಡುವಿನ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರುವುದನ್ನು ನೀವು ಪರಿಶೀಲಿಸಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ 5 ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಂದರೆ $\frac{7}{6}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}$ ಹಾಗೂ $\frac{11}{6}$.

<u>**ಗಮನಿಸಿ:**</u> ಉದಾಹರಣೆ 2ರಲ್ಲಿ 1 ಮತ್ತು 2 ರ ನಡುವಿನ ಐದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ತಿಳಿಸಲಾಗಿತ್ತು. ಆದರೆ 1 ಮತ್ತು 2 ರ ನಡುವೆ ಅಪರಿಮಿತ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿರುವುದು ನಿಮ್ಮ ಅನುಭವಕ್ಕೆ ಬಂದಿರಬಹುದು. ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ, **ಯಾವುದೇ ಎರಡು ದತ್ತ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ನಡುವೆ ಅಪರಿಮಿತ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿರುತ್ತವೆ.**

ಈಗ ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯನ್ನು ಮತ್ತೊಮ್ಮೆ ಗಮನಿಸೋಣ. ನೀವು ಎಲ್ಲಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೂ ಆಯ್ದುಕೊಂಡಿದ್ದೀರಾ? ಇಲ್ಲ, ಇನ್ನೂ ಅಪರಿಮಿತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಬಾಕಿ ಉಳಿದಿವೆ ಎಂಬುದು ಸತ್ಯ. ನೀವು ಆರಿಸಿದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸ್ಥಾನಗಳ ನಡುವೆ ಕೇವಲ ಒಂದೆರಡಲ್ಲ ಅಪರಿಮಿತ ಸ್ಥಳಾವಕಾಶಗಳಿವೆ (gaps). ಆಶ್ಚರ್ಯಕರವಾದ ಸಂಗತಿ ಏನೆಂದರೆ, ಇಂತಹ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಸ್ಥಳಾವಕಾಶಗಳ ನಡುವೆ ಕೂಡಾ ಅಪರಿಮಿತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ ನಮ್ಮೊಂದಿಗೆ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು ಉಳಿದಿವೆ.

1. ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಉಳಿದ ಬಾಕಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಏನೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ?

2. ನಾವು ಅವುಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಗುರುತಿಸುತ್ತೇವೆ? ಅಂದರೆ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ಅವುಗಳ ವಿಭಿನ್ನತೆಯನ್ನು ತಿಳಿಯುವುದು ಹೇಗೆ?

ಮುಂದಿನ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ (section) ಈ ಮೇಲಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಲಾಗುವುದು.

ಅಭ್ಯಾಸ 1.1

1. ಸೊನ್ನೆ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯೇ? ನೀವು ಅದನ್ನು $\frac{p}{q}$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ($p, q \in Z, q \neq 0$.) ಬರೆಯಬಹುದೇ?

2. 3 ಮತ್ತು 4 ರ ನಡುವಿನ ಆರು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3. $\frac{3}{5}$ ಮತ್ತು $\frac{4}{5}$ ಇವುಗಳ ನಡುವಿನ ಐದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಹೇಳಿಕೆಗಳು ಸರಿಯೇ ಅಥವಾ ತಪ್ಪೇ ಎಂಬುದನ್ನು ಕಾರಣ ಸಹಿತ ತಿಳಿಸಿ.

(i) ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯೂ ಒಂದು ಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆ.

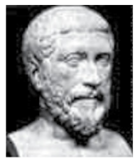
(ii) ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕವೂ ಒಂದು ಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆ.

(iii) ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯೂ ಒಂದು ಪೂರ್ಣಸಂಖ್ಯೆ.

1.2 ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿರಬಹುದೆಂಬುದನ್ನು ಹಿಂದಿನ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ ನಾವು ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. ಅಂತಹ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ನಾವು ಈ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲಿದ್ದೇವೆ. ಈವರೆಗೆ ನಿಮಗೆ ಕಂಡುಬಂದ ಎಲ್ಲಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೂ $\frac{p}{q}$ $(p, q \in Z, q \neq 0)$ ರೂಪದಲ್ಲಿವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ರೂಪದಲ್ಲಿರದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಇವೆಯೇ? ಎಂದು ನೀವು ಪ್ರಶ್ನಿಸಬಹುದು. ಖಂಡಿತವಾಗಿಯೂ ಅಂತಹ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿವೆ.

ಗ್ರೀಸ್ ದೇಶದ ಪ್ರಖ್ಯಾತ ಗಣಿತಜ್ಞ ಮತ್ತು ತತ್ತ್ವಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞನಾದ ಪೈಥಾಗೊರಸ್‌ನ ಅನುಯಾಯಿಗಳಾದ ಪೈಥಾಗೊರಿಯನ್ನರು ಮೊಟ್ಟ ಮೊದಲು ಸುಮಾರು ಕ್ರಿ.ಪೂ. 400ರಲ್ಲಿ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದರು. ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ **ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು** ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಏಕೆಂದರೆ ಇವುಗಳನ್ನು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಅನುಪಾತದ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಪೈಥಾಗೊರಿಯನ್ ಪಂಥಕ್ಕೆ ಸೇರಿದ ಕ್ರೋಟಾನ್‌ನ ಹಿಪ್ಪಾಕಸ್‌ರಿಂದ ಸಂಶೋಧಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬಗ್ಗೆ ತುಂಬಾ ದಂತಕಥೆಗಳಿವೆ. $\sqrt{2}$ ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ಸಂಶೋಧಿಸಿದ್ದಕ್ಕಾಗಿ ಅಥವಾ ಪೈಥಾಗೊರಿಯನ್ ಪಂಥದವರು ರಹಸ್ಯವಾಗಿ ಉಳಿಸಿಕೊಂಡಂತಹ $\sqrt{2}$ ರ ರಹಸ್ಯವನ್ನು ಹೊರಗಿನ ಜನರಿಗೆ ಬಹಿರಂಗಪಡಿಸಿದ್ದಕ್ಕಾಗಿ ಹಿಪ್ಪಾಕಸ್‌ನು ದುರಂತ ಅಂತ್ಯವನ್ನು ಕಂಡನು ಎಂಬುದು ಈ ದಂತಕಥೆಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದಾಗಿದೆ.



ಪೈಥಾಗೊರಸ್

(ಕ್ರಿ.ಪೂ 569 - ಕ್ರಿ.ಪೂ 479)

ಚಿತ್ರ 1.3

ಈಗ ನಾವು ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಔಪಚಾರಿಕವಾಗಿ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸೋಣ.

ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ 's' ನ್ನು $\frac{p}{q}$ ರೂಪದಲ್ಲಿ $(p, q \in Z, q \neq 0)$ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು **ಅಭಾಗಲಬ್ಧ** ಸಂಖ್ಯೆ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

ನೀವು ಈಗಾಗಲೇ ಅಪರಿಮಿತ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿರುವುದನ್ನು ತಿಳಿದಿದ್ದೀರಿ. ಹಾಗೆಯೇ, ಅಪರಿಮಿತ ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೂ ಇವೆ. ಕೆಲವು ಉದಾರಣೆಗಳೆಂದರೆ:

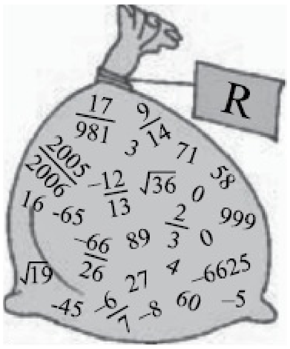
$$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{15}, \neq, 0.10110111011110.......$$

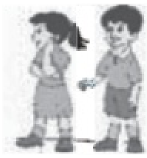
<u>ಗಮನಿಸಿ:</u> $\sqrt{\ }$ ಚಿಹ್ನೆಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದಾಗ, ನಾವು ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಧನಾತ್ಮಕ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸುತ್ತೇವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಸ್ಮರಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ. ಹೀಗೆ 2 ಮತ್ತು –2 ಇವೆರಡೂ 4 ರ ವರ್ಗಮೂಲಗಳಾದರೂ, $\sqrt{4} = 2$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಪಟ್ಟಿ ಮಾಡಿದ ಕೆಲವು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ನಿಮಗೆ ಚಿರಪರಿಚಿತವಾಗಿವೆ. ಮೇಲೆ ಪಟ್ಟಿ ಮಾಡಿದ ಹಲವು

ವರ್ಗಮೂಲಗಳನ್ನೂ ಹಾಗೂ ಸಂಖ್ಯೆ πಯನ್ನು ನೀವು ಈಗಾಗಲೇ ತಿಳಿದಿದ್ದೀರಿ.

ಪೈಥಾಗೊರಿಯನ್ನರು $\sqrt{2}$ ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿದರು. ನಂತರ ಕ್ರಿ.ಪೂ. 425 ರ ಸುಮಾರಿಗೆ ಸಿರೀನ್‌ನ ಥಿಯೊಡೊರಸ್‌ನು $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{10}, \sqrt{11}, \sqrt{12}, \sqrt{13}, \sqrt{14}, \sqrt{15}$ ಮತ್ತು $\sqrt{17}$ ಇವೂ ಸಹ ಅಭಾಗಲಬ್ಧಗಳೆಂದು ತೋರಿಸಿಕೊಟ್ಟನು. $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$........ ಮುಂತಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಅಭಾಗಲಬ್ಧಗಳೆಂದು ಸಾಧಿಸುವುದನ್ನು 10ನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ತಿಳಿಯಲಿದ್ದೀರಿ. ವಿಭಿನ್ನ ಸಾಂಸ್ಕೃತಿಕ ಪ್ರದೇಶಗಳಲ್ಲಿರುವ ಜನರಿಗೆ πಯ ಬೆಲೆಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಮಾಹಿತಿಯು ಸಾವಿರಾರು ವರ್ಷಗಳ ಹಿಂದೆಯೇ ತಿಳಿದಿದ್ದರೂ, 17ನೇ ಶತಮಾನದ ಅಂತ್ಯದಲ್ಲಿ ಲ್ಯಾಂಬರ್ಟ್ ಮತ್ತು ಲೆಜೆಂಡ್ರೆ ಎಂಬುವರು ಅದನ್ನು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿದರು. 0.10110111011110.......ಮತ್ತು π ಇವು ಏಕೆ ಅಭಾಗಲಬ್ಧಗಳೆಂಬುದನ್ನು ಮುಂದಿನ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ ಚರ್ಚಿಸಲಿದ್ದೇವೆ.



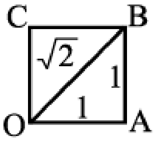


ಹಿಂದಿನ ವಿಭಾಗದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಉದ್ಭವಿಸಿದ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಹಿಂದಿರುಗೋಣ. ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಚೀಲವನ್ನು ಸ್ಮರಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ. ಈಗ ನಾವು ಎಲ್ಲಾ ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಚೀಲದೊಳಗೆ ತುಂಬಿಸಿದರೆ, ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಯಾವುದಾದರೂ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಉಳಿಯುತ್ತವೆಯೇ? ಇಲ್ಲ! ನಾವು ಇಂದು ಕರೆಯುವ **ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ** ಸಂಗ್ರಹವು ಎಲ್ಲ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಮತ್ತು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಒಟ್ಟು ಸೇರಿ ಉಂಟಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಇದನ್ನು R ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಅಥವಾ ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರಲೇಬೇಕು. ಈ ಕಾರಣದಿಂದಾಗಿ, **ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಒಂದು ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ ಎಂದು ನಾವು ಹೇಳಬಹುದು. ಹಾಗೆಯೇ ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಂದುವೂ ಒಂದು ಪ್ರತ್ಯೇಕ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ.** ಈ ಕಾರಣದಿಂದ ನಾವು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯನ್ನು **ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆ** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಆರ್. ಡೆಡೆಕೈಂಡ್ (1831-1916) **ಚಿತ್ರ : 1.4**	ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗೂ, ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಅನುರೂಪವಾದ ಒಂದು ಬಿಂದು ಇರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಂದುವಿಗೂ ಅನುರೂಪವಾದ ಒಂದೇ ಒಂದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ ಇರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಜರ್ಮನಿಯ ಗಣಿತಜ್ಞರಾದ ಕಾಂಟರ್ ಮತ್ತು ಡೆಡೆಕೈಂಡ್ ಎಂಬುವರು ಕ್ರಿ.ಶ. 1870ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿಕೊಟ್ಟರು.	**ಜಿ. ಕಾಂಟರ್** (1845-1918) **ಚಿತ್ರ : 1.5**

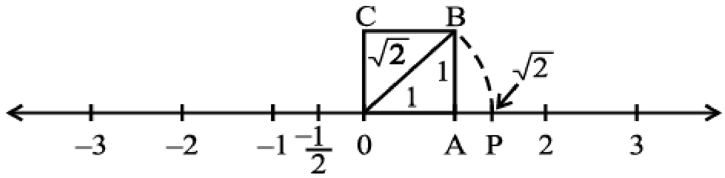
ಕೆಲವು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಹೇಗೆ ಗುರುತಿಸಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಈಗ ನಾವು ತಿಳಿಯೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 3 : $\sqrt{2}$ ನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಗುರುತಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 1.6

ಪರಿಹಾರ : ಗ್ರೀಕರು $\sqrt{2}$ ನ್ನು ಹೇಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿದರು ಎಂಬುದನ್ನು ಬಹಳ ಸುಲಭವಾಗಿ ತಿಳಿಯಬಹುದು. ಪ್ರತಿ ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದ ಏಕಮಾನವಿರುವ ಒಂದು OABC ಚೌಕವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. (ಚಿತ್ರ 1.6 ನ್ನು ಗಮನಿಸಿ). ಪೈಥಾಗೊರಸ್‌ನ ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ OB = $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ ಆಗಿರುವುದನ್ನು ನೀವು ಕಾಣಬಹುದು. ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ $\sqrt{2}$ ನ್ನು ಹೇಗೆ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವುದು? ಇದು ಸುಲಭ. ಶೃಂಗಬಿಂದು 'O' ಇದು ಸೊನ್ನೆಯಲ್ಲಿ ಐಕ್ಯವಾಗುವಂತೆ, ಚಿತ್ರ 1.6ನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ವರ್ಗಾಯಿಸಿ. (ಚಿತ್ರ 1.7ನ್ನು ಗಮನಿಸಿ)

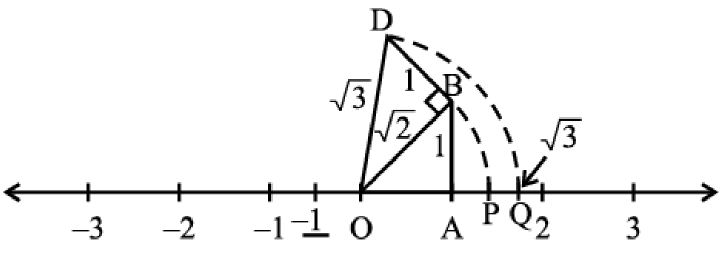


ಚಿತ್ರ 1.7

OB = $\sqrt{2}$ ಎಂದು ಈಗಾಗಲೇ ತಿಳಿದಿದ್ದೇವೆ. 'O' ಬಿಂದುವನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿರಿಸಿ, OB ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿರುವಂತೆ, ಕೈವಾರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯನ್ನು 'P' ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವಂತೆ ಒಂದು ಕಂಸವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಈಗ ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ 'P' ಬಿಂದುವು $\sqrt{2}$ ನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 4 : $\sqrt{3}$ ನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಗುರುತಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ : ಈಗ ಚಿತ್ರ 1.7 ಕ್ಕೆ ಹಿಂದಿರುಗೋಣ.



ಚಿತ್ರ 1.8

OB ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವಂತೆ ಏಕಮಾನ ಉದ್ದದ BD ಯನ್ನು ರಚಿಸಿ (ಚಿತ್ರ 1.8 ರಲ್ಲಿರುವಂತೆ). ಪೈಥಾಗೊರಸ್ ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ, OD = $\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+1^2}=\sqrt{3}$ ಆಗಿರುವುದನ್ನು ನಾವು ಕಾಣುತ್ತೇವೆ. 'O' ಬಿಂದುವನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿರಿಸಿ, OD ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿರುವಂತೆ, ಕೈವಾರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯನ್ನು 'Q' ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವಂತೆ ಒಂದು ಕಂಸವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಈಗ 'Q' ಬಿಂದುವು $\sqrt{3}$ ನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ.

ಇದೇ ರೀತಿ, ಯಾವುದೇ ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕ 'n' ಗೆ, $\sqrt{n-1}$ ನ್ನು ಗುರುತಿಸಿದ ನಂತರ $\sqrt{n}$ ನ್ನು ಗುರುತಿಸಬಹುದು.

ಅಭ್ಯಾಸ 1.2

1. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಹೇಳಿಕೆಗಳು ಸರಿಯೇ ಅಥವಾ ತಪ್ಪೇ ಎಂಬುದನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸಿ.

(i) ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯೂ ಒಂದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ.

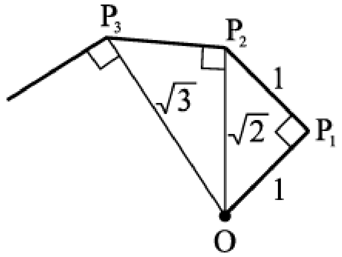
(ii) ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಂದುವೂ $\sqrt{m}$ ರೂಪದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ, ಇಲ್ಲಿ 'm' ಒಂದು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ.

(iii) ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯೂ ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ.

2. ಎಲ್ಲ ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ವರ್ಗಮೂಲಗಳು ಅಭಾಗಲಬ್ಧಗಳೇ? ಅಲ್ಲದಿದ್ದರೆ, ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗಮೂಲವು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುವ ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆ ಕೊಡಿ.

3. $\sqrt{5}$ ನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಹೇಗೆ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಬಹುದು ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

4. **ತರಗತಿ ಕೋಣೆಯ ಚಟುವಟಿಕೆ ('ವರ್ಗಮೂಲ ಸುರುಳಿ'ಯನ್ನು ರಚಿಸುವುದು):** ಒಂದು ದೊಡ್ಡ ಕಾಗದದ ಹಾಳೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. ಈ ಕೆಳಗಿನ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ 'ವರ್ಗಮೂಲ ಸುರುಳಿ'ಯನ್ನು ರಚಿಸಿ. 'O' ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಆರಂಭಿಸಿ ಮತ್ತು ಏಕಮಾನ ಉದ್ದದ OPl ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. OPl ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಏಕಮಾನ ಉದ್ದದ P1 P2 ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. (ಚಿತ್ರ 1.9ನ್ನು ಗಮನಿಸಿ) ಈಗ, OP2 ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಏಕಮಾನ ಉದ್ದದ P2 P3 ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ನಂತರ OP3 ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಏಕಮಾನ ಉದ್ದದ P3 P4 ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.ಇದೇ ರೀತಿ ಮುಂದುವರಿಸುತ್ತಾ OPn-1 ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಏಕಮಾನ ಉದ್ದದ ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ಎಳೆಯುವುದರ ಮೂಲಕ Pn-1 Pn ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು. ಈ ರೀತಿ, ನೀವು P2 , P3 ......Pn......ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ ಮತ್ತು ಅವುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವುದರಿಂದ $\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{4}$,..........ಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಸುಂದರವಾದ ಸುರುಳಿಯನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು.



ಚಿತ್ರ 1.9
ವರ್ಗಮೂಲ ಸುರುಳಿಯ ರಚನೆ

1.3 ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆ

ಈ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ, ನಾವು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಮತ್ತು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ವಿಭಿನ್ನ ದೃಷ್ಟಿಕೋನದಿಂದ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಲಿದ್ದೇವೆ. ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯನ್ನು ನಾವು ತಿಳಿಯಲಿದ್ದೇವೆ ಹಾಗೂ ಈ ವಿಸ್ತರಣೆಯನ್ನು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಮತ್ತು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ತಿಳಿಯಲು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದೇ ಎಂದು ನೋಡೋಣ. ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಅವುಗಳ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಹೇಗೆ ಗುರುತಿಸುವುದು ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ವಿವರಿಸಲಿದ್ದೇವೆ. ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ನಮಗೆ ಚಿರ ಪರಿಚಿತವಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ಅವುಗಳಿಂದಲೇ ಪ್ರಾರಂಭಿಸೋಣ. ಈಗ ಮೂರು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ: $\frac{10}{3},\frac{7}{8},\frac{1}{7}$

ಶೇಷಗಳ ಬಗ್ಗೆ ವಿಶೇಷ ಗಮನ ನೀಡಿ ಮತ್ತು ನೀವು ಯಾವುದಾದರೂ ವಿನ್ಯಾಸವನ್ನು ಕಾಣಬಹುದೇ ನೋಡಿ.

ಉದಾಹರಣೆ 5 : $\frac{10}{3},\frac{7}{8}$ ಮತ್ತು $\frac{1}{7}$ ಇವುಗಳ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ :

```
   3.333...          0.875           0.142857...
3 |10             8 |7.0          7 |1.0
   9                 64               7
   10                 60              30
    9                 56              28
   10                  40              20
    9                  40              14
   10                   0               60
    9                                   56
    1                                    40
                                         35
                                          50
                                          49
                                           1
```

ಶೇಷಗಳು : 1, 1, 1, 1, 1.... ಶೇಷಗಳು : 6, 4, 0 ಶೇಷಗಳು; 3, 2, 6, 4, 5, 1, 3, 2, 6, 4, 5, 1..........

ಭಾಜಕ : 3 ಭಾಜಕ : 8 ಭಾಜಕ : 7

ನೀವು ಏನನ್ನು ಗಮನಿಸಿದಿರಿ? ನೀವು ಕನಿಷ್ಠ ಮೂರು ವಿಷಯಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಬೇಕು.

(i) ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಹಂತಗಳ ನಂತರ ಶೇಷವು ಸೊನ್ನೆಯಾಗುತ್ತದೆ ಅಥವಾ ಪುನರಾವರ್ತನೆಯಾಗಲು ಪ್ರಾರಂಭವಾಗುತ್ತದೆ.

(ii) ಪುನರಾವರ್ತನೆಯಾಗುವ ಶೇಷಗಳ ಸರಣಿಯಲ್ಲಿರುವ ಅಂಶಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಭಾಜಕಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಆಗಿರುತ್ತದೆ ($\frac{1}{3}$ ರಲ್ಲಿ ಒಂದು ಅಂಕೆಯು ಪುನರಾವರ್ತನೆಯಾಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಭಾಜಕವು 3 ಆಗಿದೆ. $\frac{1}{7}$ ರಲ್ಲಿ ಶೇಷಗಳ ಸರಣಿಯಲ್ಲಿ 6 ಅಂಶಗಳು 326451 ಪುನರಾವರ್ತನೆಯಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಭಾಜಕವು 7 ಆಗಿದೆ.)

(iii) ಶೇಷಗಳು ಪುನರಾವರ್ತನೆಯಾದರೆ, ಭಾಗಲಬ್ಧದಲ್ಲಿ ಪುನರಾವರ್ತನೆಯಾಗುವ ಅಂಕೆಗಳ ಸರಣಿಯನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ. ($\frac{1}{3}$ ರ ಭಾಗಲಬ್ಧದಲ್ಲಿ 3 ಪುನರಾವರ್ತನೆಯಾಗಿದೆ ಮತ್ತು $\frac{1}{7}$ ರ ಭಾಗಲಬ್ಧದಲ್ಲಿ 142857 ಅಂಕಿಗಳನ್ನೊಳಗೊಂಡ ಗುಂಪು ಪುನರಾವರ್ತನೆಯಾಗಿದೆ).

ಕೇವಲ ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರ ನಾವು ಈ ವಿನ್ಯಾಸವನ್ನು ಗಮನಿಸಿದರೂ, ಅದು $\frac{p}{q}$ ($q \neq 0$) ರೂಪದ ಎಲ್ಲ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೂ ಅನ್ವಯವಾಗುತ್ತದೆ. p ಯನ್ನು q ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಮುಖ್ಯವಾಗಿ ಎರಡು ಸಾಧ್ಯತೆಗಳಿವೆ. ಶೇಷವು ಸೊನ್ನೆಯಾಗುತ್ತದೆ ಅಥವಾ ಶೇಷವು ಎಂದಿಗೂ ಸೊನ್ನೆಯಾಗುವುದಿಲ್ಲ ಮತ್ತು ಪುನರಾವರ್ತನೆಯಾಗುವ ಶೇಷಗಳ ಸರಣಿಯನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈ ಎರಡೂ ಪ್ರಕರಣಗಳನ್ನು ಈಗ ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿ ನೋಡೋಣ.

ಪ್ರಕರಣ (i): ಶೇಷವು ಸೊನ್ನೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.

$\frac{7}{8}$ ಎಂಬ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಹಂತಗಳ ನಂತರ ಶೇಷವು ಸೊನ್ನೆಯಾಗುವುದನ್ನು ನಾವು ಕಾಣುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು $\frac{7}{8}$ ರ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯು 0.875 ಆಗಿದೆ. ಇತರ ಉದಾಹರಣೆಗಳೆಂದರೆ $\frac{1}{2}=0.5; \frac{639}{250}=2.556$. ಈ ಎಲ್ಲ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಹಂತಗಳ ನಂತರ ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ. ಈ ರೀತಿಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯನ್ನು **ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುವ ದಶಮಾಂಶಗಳು** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಪ್ರಕರಣ (ii): ಶೇಷವು ಎಂದಿಗೂ ಸೊನ್ನೆಯಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ.

$\frac{1}{3}$ ಮತ್ತು $\frac{1}{7}$ ಈ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಹಂತಗಳ ನಂತರ ಶೇಷಗಳು ಪುನರಾವರ್ತನೆಯಾಗುವುದರಿಂದ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯು ನಿರಂತರವಾಗಿ ಮುಂದುವರಿಯುತ್ತಾ ಹೋಗುತ್ತದೆ ಅಥವಾ ಭಾಗಲಬ್ಧದಲ್ಲಿ ಪುನರಾವರ್ತನೆಯಾಗುವ ಅಂಕೆಗಳ ಸರಣಿ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳದ, ಆವರ್ತವಾಗುವ ವಿಸ್ತರಣೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $\frac{1}{3}$ = 0.3333....... ಮತ್ತು $\frac{1}{7}$ = 0.142857142857142857......

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ, $\frac{1}{3}$ ರ ಭಾಗಲಬ್ಧದಲ್ಲಿ 3 ಪುನರಾವರ್ತನೆಯಾಗುವುದನ್ನು $0.\bar{3}$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇದೇ ರೀತಿ $\frac{1}{7}$ ರ ಭಾಗಲಬ್ಧದಲ್ಲಿ 142857 ಈ ಅಂಕೆಗಳ ಗುಂಪು ಪುನರಾವರ್ತನೆಯಾಗುವುದರಿಂದ ನಾವು $\frac{1}{7}$ ನ್ನು $0.\overline{142857}$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇಲ್ಲಿ ಅಂಕೆಗಳ ಮೇಲಿನ ಅಡ್ಡಗೆರೆಯು (bar) ಪುನರಾವರ್ತನೆಯಾಗುವ ಅಂಕೆಗಳ ಸರಣಿಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ಹಾಗೆಯೇ 3.5727272........ ಇದನ್ನು $3.5\overline{72}$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಹೀಗೆ ಈ ಮೇಲಿನ ಎಲ್ಲ ಉದಾಹರಣೆಗಳು ನಮಗೆ **ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳದ, ಆವರ್ತವಾಗುವ (ಪುನರಾವರ್ತನೆಯಾಗುವ)** ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯನ್ನು ನೀಡುತ್ತವೆ.

ಹೀಗೆ, ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯು ಕೇವಲ ಎರಡು ವಿಧಗಳಲ್ಲಿದೆ, ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ ಅಥವಾ ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳದೇ ಆವರ್ತವಾಗುತ್ತದೆ.

ಈಗ, ನೀವು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯುದ್ದಕ್ಕೂ ಚಲಿಸುವಾಗ ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುವ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ 3.142678 ಈ ರೀತಿಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಅಥವಾ ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳದ ಆವರ್ತವಾಗುವ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ 1.272727......... ಅಂದರೆ $1.\overline{27}$ ಈ ರೀತಿಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ದೊರೆತರೆ ಅವುಗಳನ್ನು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಎಂದು ನೀವು ನಿರ್ಧರಿಸುತ್ತೀರಾ? ಇದಕ್ಕೆ ಉತ್ತರ ಹೌದು.

ನಾವು ಇದನ್ನು ಸಾಧಿಸುವುದಿಲ್ಲ. ಆದರೆ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಂದ ಇದನ್ನು ಸಾದೃಷಗೊಳಿಸುತ್ತೇವೆ. ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುವ ಪ್ರಕರಣಗಳು ಸುಲಭವಾಗಿವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 6 : 3.142678 ಇದೊಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ ಅಥವಾ 3.142678 ಇದನ್ನು $\frac{p}{q}$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ($p, q \in Z, q \neq 0$) ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ : 3.142678 = $\frac{3142678}{1000000}$. ಆದ್ದರಿಂದ ಇದೊಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ.

ಈಗ, ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳದ, ಆವರ್ತವಾಗುವ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಪ್ರಕರಣವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 7 : $0.3333..... = 0.\bar{3}$ ಇದನ್ನು $\frac{p}{q}$ ರೂಪದಲ್ಲಿ (p, q ∈ Z, q ≠ 0) ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಬಹುದು ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ : ನಮಗೆ $0.\bar{3}$ ಎಂದರೆ ಏನು ಎಂದು ಗೊತ್ತಿಲ್ಲದಿರುವುದರಿಂದ, $0.\bar{3}$ ನ್ನು x ಎಂದು ಕರೆಯೋಣ.

x = 0.3333....

ಇಲ್ಲಿ ನೋಡಿ. ಈಗೊಂದು ಚಮತ್ಕಾರವಾಗಲಿದೆ.

ಇಲ್ಲಿ ಒಂದು ಅಂಕೆ ಪುನರಾವರ್ತನೆಯಾಗುವುದರಿಂದ x ನ್ನು 10 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ

10x = 10 × (0.333...) = 3.333.....

3.3333.....= 3 + x (∵ x = 0.3333.........)

\10x = 3 + x

9x = 3

$$x = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

ಉದಾಹರಣೆ 8 : 1.272727........ = $1.\overline{27}$ ಇದನ್ನು $\frac{p}{q}$ ರೂಪದಲ್ಲಿ (p, q ∈ Z, q ≠ 0) ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಬಹುದು ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ : x = 1.272727...... ಆಗಿರಲಿ.

ಎರಡು ಅಂಕೆಗಳು ಪುನರಾವರ್ತನೆಯಾಗುವುದರಿಂದ, ಥ ನ್ನು 100 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ,

100 × x = 100 × (1.272727..........)

100 x = 127.2727......

100 x = 126 + 1.2727........

100 x = 126 + x (∵ x = 1.272727 ....)

\ 100 x – x = 126

99 x = 126

$$x = \frac{126}{99} = \frac{14}{11}$$

ವಿಲೋಮವಾಗಿ, $\frac{14}{11} = 1.\overline{27}$ ಆಗಿರುವುದನ್ನು ನೀವು ಪರಿಶೀಲಿಸಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆ 9: 0.2353535 = $0.2\overline{35}$ ಇದನ್ನು $\frac{p}{q}$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ($p, q \in Z, q \neq 0$) ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಬಹುದು ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ : $x = 0.2\overline{35}$ ಆಗಿರಲಿ.

ಇಲ್ಲಿ ಅಂಕೆ 2 ಪುನರಾವರ್ತನೆ ಆಗುವುದಿಲ್ಲ. ಆದರೆ 35ರ ಗುಂಪು ಪುನರಾವರ್ತನೆ ಆಗುತ್ತದೆ. ಎರಡು ಅಂಕೆಗಳು ಪುನರಾವರ್ತನೆ ಆಗುವುದರಿಂದ, xನ್ನು 100ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ,

100 x = 23.53535.....

100 x = 23.3 + 0.23535.......... = 23.3 + x

\ 99 x = 23.3

99 x = $\frac{233}{10}$

x = $\frac{233}{990}$

ವಿಲೋಮವಾಗಿ, $\frac{233}{990} = 0.2\overline{35}$ ಆಗಿರುವುದನ್ನು ನೀವು ಪರಿಶೀಲಿಸಬಹುದು.

ಹೀಗೆ, ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳದೇ, ಆವರ್ತವಾಗುವ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು $\frac{p}{q}$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ($p, q \in Z, q \neq 0$) ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಬಹುದು. ಈಗ ನಮ್ಮ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತಗೊಳಿಸೋಣ.

ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯು ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳಬಹುದು ಅಥವಾ ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳದೇ ಆವರ್ತವಾಗಬಹುದು. ಇದಕ್ಕಿಂತಲೂ ಮಿಗಿಲಾಗಿ, ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯು ಅಂತ್ಯಗೊಂಡಿದ್ದರೆ ಅಥವಾ ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳದೇ ಆವರ್ತವಾಗಿದ್ದರೆ ಅದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಹೀಗೆ, ನಾವು ಈಗ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯು ಹೇಗಿರುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿದಿದ್ದೇವೆ. ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆ ಹೇಗಿರುತ್ತದೆ? ಈ ಮೇಲಿನ ಗುಣಲಕ್ಷಣದಿಂದ ಅವುಗಳ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯು **ಅಂತ್ಯರಹಿತ, ಆವರ್ತರಹಿತ** ರೂಪದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ನಿರ್ಧರಿಸಬಹುದು.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಮೇಲೆ ನಿರೂಪಿಸಿದ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಕ್ಷಣದಂತೆ, ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಕ್ಷಣವು ಹೀಗಿರುತ್ತದೆ.

ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯು ಅಂತ್ಯರಹಿತ, ಆವರ್ತರಹಿತವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಇದಕ್ಕಿಂತಲೂ ಮಿಗಿಲಾಗಿ, ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯು ಅಂತ್ಯರಹಿತ, ಆವರ್ತರಹಿತವಾಗಿದ್ದರೆ ಅದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಹಿಂದಿನ ವಿಭಾಗದ s = 0.10110111011110........... ಎಂಬುದನ್ನು ಸ್ಮರಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ, ಅದು ಅಂತ್ಯರಹಿತ, ಆವರ್ತರಹಿತ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಆದ್ದರಿಂದ ಮೇಲಿನ ಗುಣಲಕ್ಷಣದಿಂದ ಅದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ. ಇದಕ್ಕಿಂತಲೂ ಮಿಗಿಲಾಗಿ, ನೀವು 's'ನ ಹಾಗೆಯೇ ಇರುವ ಅಪರಿಮಿತ ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಪ್ರಸಿದ್ಧ ಅಭಾಗಲಬ್ಧಗಳಾದ $\sqrt{2}$ ಮತ್ತು π ಇವುಗಳ ವಿಸ್ತರಣೆ ಕುರಿತು ಏನು ಹೇಳುವಿರಿ? ಇಲ್ಲಿ ಅವುಗಳ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯನ್ನು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಹಂತದವರೆಗೆ ನೀಡಲಾಗಿದೆ.

$\sqrt{2}$ = 1.41421356237309504880168872420 96.........

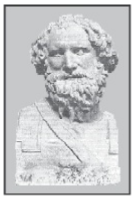
p = 3.14159265358979323846264338327950.............

($\frac{22}{7}$ ನ್ನು p ಯ ಅಂದಾಜು ಬೆಲೆಯನ್ನಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ ಆದರೆ $\neq \uparrow \frac{22}{7}$ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.) ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯಲ್ಲಿನ ಹೆಚ್ಚು ಹೆಚ್ಚು ಅಂಕೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಅನೇಕ ತಂತ್ರಗಳನ್ನು ಗಣಿತಜ್ಞರು ಬಹಳ ವರ್ಷಗಳಿಂದ ಅಭಿವೃದ್ಧಿ ಪಡಿಸಿದ್ದಾರೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ $\sqrt{2}$ ರ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯ ಅಂಕೆಗಳನ್ನು ಭಾಗಾಕಾರ ಕ್ರಮದಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದನ್ನು ನೀವು ಕಲಿತಿರಬಹುದು.ಕುತೂಹಲಕಾರಿಯಾಗಿ, ವೇದಗಳ ಕಾಲದ (ಕ್ರಿ.ಪೂ. 800 – ಕ್ರಿ.ಪೂ. 500) ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ ಗ್ರಂಥದಲ್ಲಿ ಶುಲ್ಬ ಸೂತ್ರಗಳಲ್ಲಿ (ಜ್ಯಾದ ನಿಯಮಗಳು) ನೀವು $\sqrt{2}$ ರ ಅಂದಾಜು ಬೆಲೆಯನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಕಾಣಬಹುದು.

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{34} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3}\right) = 1.4142156$$

ಈ ಬೆಲೆಯು ಮೇಲೆ ನೀಡಿದ ಬೆಲೆಯ ಮೊದಲ ಐದು ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾನಗಳವರೆಗೆ ಸರಿಯಾಗಿರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. π ಯ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯ ಅಂಕೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದ ಇತಿಹಾಸವು ಬಹಳ ಆಸಕ್ತಿದಾಯಕವಾಗಿದೆ.

πಯ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯಲ್ಲಿನ ಅಂಕೆಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸುವುದರಲ್ಲಿ ಗ್ರೀಕ್ ಮೇಧಾವಿ ಆರ್ಕಿಮಿಡೀಸ್‌ನು ಮೊದಲಿಗನಾಗಿದ್ದಾನೆ. ಅವನು 3.140845 < π < 3.142857 ಎಂದು ತೋರಿಸಿದನು. ಭಾರತದ ಶ್ರೇಷ್ಠ ಗಣಿತಜ್ಞ ಮತ್ತು ಖಗೋಳಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞನಾದ ಆರ್ಯಭಟನು (ಕ್ರಿ.ಶ. 476 – ಕ್ರಿ.ಶ. 550) πಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ನಾಲ್ಕು ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾನ(3.1416)ಗಳವರೆಗೆ ಸರಿಯಾಗಿ ಕಂಡುಹಿಡಿದನು. ಶೀಘ್ರಗತಿಯ (ಊಱುಖ್ಯ ಠಜಜಜ) ಗಣಕಯಂತ್ರ ಮತ್ತು ಉನ್ನತೀಕರಿಸಿದ ಅಲ್ಗಾರಿಥಮ್‌ಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ π ಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು 1.24 ಟ್ರಿಲಿಯನ್ ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾನಗಳವರೆಗೆ ಲೆಕ್ಕಿಸಲಾಗಿದೆ! (1 ಟ್ರಿಲಿಯನ್ = 1000000000000)



ಆರ್ಕಿಮಿಡೀಸ್

ಕ್ರಿ.ಪೂ.287 - ಕ್ರಿ.ಪೂ. 212

ಚಿತ್ರ 1.10

ಈಗ, ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವುದು ಹೇಗೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 10 : $\frac{1}{7}$ ಮತ್ತು $\frac{2}{7}$ ಇವುಗಳ ನಡುವಿನ ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ: $\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $\frac{2}{7} = 0.\overline{285714}$ ಎಂದು ನೀವು ಸುಲಭವಾಗಿ ಲೆಕ್ಕಿಸಬಹುದು.

$\frac{1}{7}$ ಮತ್ತು $\frac{2}{7}$ ಇವುಗಳ ನಡುವಿನ ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು, ಇವುಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತ್ಯರಹಿತ, ಆವರ್ತರಹಿತ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುತ್ತೇವೆ. ಖಂಡಿತವಾಗಿಯೂ ನೀವು ಇಂತಹ ಅಪರಿಮಿತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಾಣಬಹುದು. ಅಂತಹ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ

ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆ ಎಂದರೆ 0.150150015000150000.................

ಅಭ್ಯಾಸ 1.3

1. ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ದಶಮಾಂಶ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿಯೊಂದೂ ಯಾವ ರೀತಿಯ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿಸಿ

(i) $\frac{36}{100}$ (ii) $\frac{1}{11}$ (iii) $4\frac{1}{8}$

(iv) $\frac{3}{13}$ (v) $\frac{2}{11}$ (vi) $\frac{329}{400}$

2. $\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$ ಎಂದು ನೀವು ತಿಳಿದಿದ್ದೀರಿ. ದೀರ್ಘ ಭಾಗಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡದೇ $\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}$ ಇವುಗಳ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯನ್ನು ನೀವು ಊಹಿಸಬಹುದೇ? ಹಾಗಿದ್ದರೆ ಹೇಗೆ?.(ಸುಳುಹು : $\frac{1}{7}$ ರ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವಾಗ ದೊರೆಯುವ ಶೇಷಗಳನ್ನು ಜಾಗರೂಕತೆಯಿಂದ ಅಭ್ಯಸಿಸಿ.)

3. ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು $\frac{p}{q}$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ($p, q \in Z, q \neq 0.$) ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿ.

(i) 0.6 (ii) 0.47 (iii) 0.001

4. 0.99999...... ಇದನ್ನು $\frac{p}{q}$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿ. ನಿಮ್ಮ ಉತ್ತರದಿಂದ ನಿಮಗೆ ಆಶ್ಚರ್ಯವಾಯಿತೇ? ನಿಮ್ಮ ಶಿಕ್ಷಕರು ಮತ್ತು ಸ್ನೇಹಿತರೊಂದಿಗೆ ಇದು ಹೇಗೆ ಅರ್ಥಪೂರ್ಣವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಚರ್ಚಿಸಿ.

5. $\frac{1}{17}$ ಇದರ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯ ಆವರ್ತವಾಗುವ ಅಂಕೆಗಳ ಕೂಟದಲ್ಲಿ(Block) ಗರಿಷ್ಠ ಎಷ್ಟು ಅಂಕೆಗಳಿರಬಹುದು? ನಿಮ್ಮ ಉತ್ತರವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಲು ಭಾಗಾಕಾರ ಮಾಡಿ.

6. ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುವ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ $\frac{p}{q}$ ರೂಪದಲ್ಲಿರುವ [$q \neq 0$, p ಮತ್ತು q ಗಳು 1ನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿ ಬೇರೆ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರದ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು] ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಹಲವಾರು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ನೋಡಿ. 'q' ಇದು ಯಾವ ಲಕ್ಷಣವನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ನೀವು ಊಹಿಸಬಹುದೇ?

7. ಅಂತ್ಯರಹಿತ, ಆವರ್ತರಹಿತ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಮೂರು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

8. $\frac{5}{7}$ ಮತ್ತು $\frac{9}{11}$ ಈ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ನಡುವಿನ ಮೂರು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

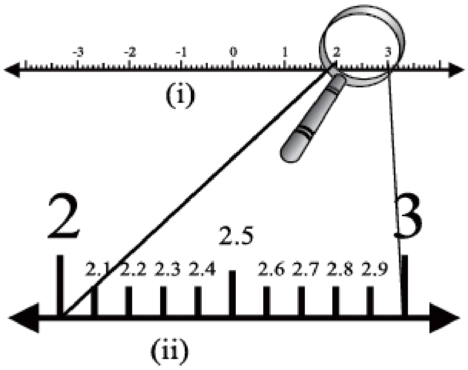
9. ಕೆಳಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಅಥವಾ ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿ ವರ್ಗೀಕರಿಸಿ.

(i) $\sqrt{23}$ (ii) $\sqrt{225}$ (iii) 0.3796

(iv) 7.478478..... (v) 1.101001000100001....

1.4 ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸುವುದು

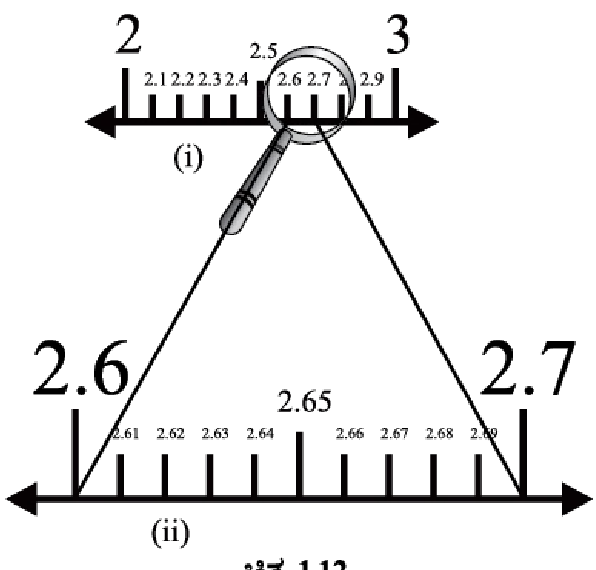
ಯಾವುದೇ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯು ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೀವು ಹಿಂದಿನ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ ನೋಡಿದ್ದೀರಿ. ಇದು ನಮಗೆ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಗುರುತಿಸಲು ಸಹಾಯ ಮಾಡುತ್ತದೆ. ಇದು ಹೇಗೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಈಗ ನೋಡೋಣ.



ಚಿತ್ರ 1.11

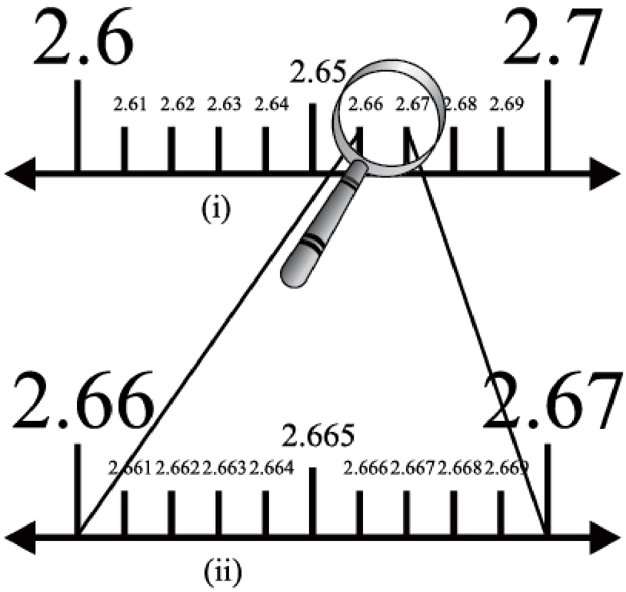
2.665ನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ನಾವು ಗುರುತಿಸಬೇಕೆಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಇದು 2 ಮತ್ತು 3ರ ನಡುವೆ ಇದೆ ಎಂದು ನಾವು ತಿಳಿ ದಿದ್ದೇವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯಲ್ಲಿ 2 ಮತ್ತು 3ರ ನಡುವಿನ ಭಾಗವನ್ನು ಹತ್ತಿರದಿಂದ ನೋಡೋಣ. ಇದನ್ನು ಸಮನಾದ 10 ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸಿ ಮತ್ತು ಚಿತ್ರ 1.11 (i) ರಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಈ ವಿಭಾಗಗಳ ಪ್ರತಿ ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರುತು ಮಾಡಿ. ಆಗ 2ರ ಬಲಭಾಗದಲ್ಲಿನ ಮೊದಲನೆಯ ಗುರುತು 2.1ನ್ನೂ, ಎರಡನೆಯ ಗುರುತು 2.2ನ್ನೂ .... ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. 2 ಮತ್ತು 3ರ ನಡುವಿನ ಈ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಚಿತ್ರ 1.11(i) ರಲ್ಲಿ ವೀಕ್ಷಿಸಲು ನಿಮಗೆ ಸ್ವಲ್ಪ ಕಷ್ಟವಾಗಬಹುದು. ಇದರ ಸ್ಪಷ್ಟವಾದ ಚಿತ್ರಣವನ್ನು ನೋಡಲು ಒಂದು ಪೀನಮಸೂರ (ಭೂತಕನ್ನಡಿ)ವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಅದರ ಮೂಲಕ 2 ಮತ್ತು 3ರ ನಡುವಿನ ಭಾಗವನ್ನು ನೋಡಿ. ಆಗ ಅದು ಚಿತ್ರ 1.11(ii) ರಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಕಾಣುತ್ತದೆ. ಈಗ, 2.665 ಇದು 2.6 ಮತ್ತು 2.7ರ ನಡುವೆ ಇರುತ್ತದೆ. ಈಗ 2.6 ಮತ್ತು 2.7ರ ನಡುವಿನ ಭಾಗವನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ. ಇದನ್ನು ಪುನಃ ಹತ್ತು ಸಮನಾದ ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸಿದಂತೆ ಊಹಿಸೋಣ. ಮೊದಲನೆಯ ಗುರುತು 2.61ನ್ನೂ, ನಂತರದ ಗುರುತು 2.62ನ್ನೂ .... ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ನೋಡಲು ನಾವು ಇದನ್ನು ಚಿತ್ರ 1.12(ii) ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ಹಿಗ್ಗಿಸುತ್ತೇವೆ.



ಚಿತ್ರ 1.12

ಪುನಃ, 2.665 ಇದು 2.66 ಮತ್ತು 2.67ರ ನಡುವೆ ಇದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಈಗ ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಈ ಭಾಗವನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ. [ಚಿತ್ರ 1.13(i) ನ್ನು ಗಮನಿಸಿ] ಮತ್ತು ಇದನ್ನು ಪುನಃ ಹತ್ತು ಸಮನಾದ ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸಿದಂತೆ ಊಹಿಸೋಣ. ಇದನ್ನು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ನೋಡಲು ಚಿತ್ರ 1.13(ii) ರಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಹಿಗ್ಗಿಸಿ. ಮೊದಲನೆಯ ಗುರುತು 2.661ನ್ನೂ ಮುಂದಿನ ಗುರುತು 2.662ನ್ನೂ ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ಹೀಗೆ 2.665 ಎಂಬುದು ಈ ಉಪವಿಭಾಗಗಳಲ್ಲಿ 5ನೆಯ ಗುರುತು ಆಗಿರುತ್ತದೆ.



ಚಿತ್ರ 1.13

ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರುವುದನ್ನು ಪೀನಮಸೂರದ ಮೂಲಕ ವೀಕ್ಷಿಸುವ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಗೆ ನಾವು **ಅನುಕ್ರಮ ವರ್ಧನಾ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆ** (**process of successive magnification**) ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಹೀಗೆ, ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುವ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಒಂದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ವೀಕ್ಷಿಸಲು (ದೃಶ್ಯೀಕರಿಸಲು) ಹಲವಾರು ಅನುಕ್ರಮ ವರ್ಧನೆಗಳಿಂದ ಸಾಧ್ಯ ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ನೋಡಿದ್ದೇವೆ.

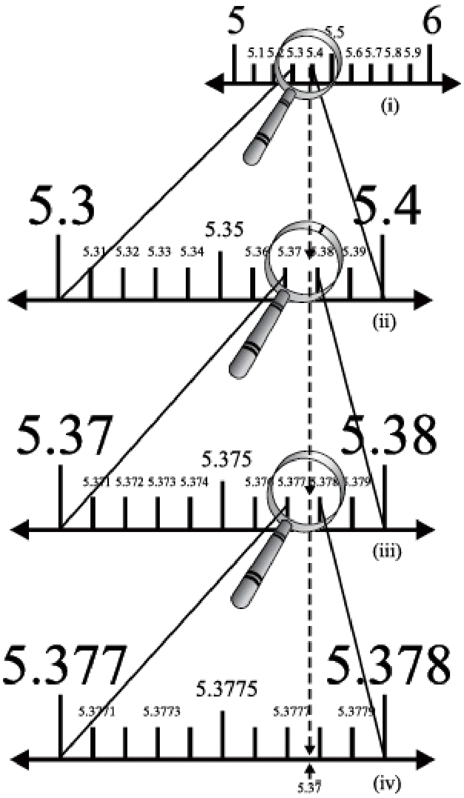
ಈಗ, ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳದ ಮತ್ತು ಆವರ್ತವಾಗುವ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಒಂದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ವೀಕ್ಷಿಸಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸೋಣ. ನಾವು ಪೀನಮಸೂರದ ಮೂಲಕ ಸರಿಯಾದ ಅಂತರಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸುವುದರಿಂದ ಮತ್ತು ಅನುಕ್ರಮ ವರ್ಧನೆಗಳ ಮೂಲಕ ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ವೀಕ್ಷಿಸಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆ 11 : ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ $5.3\overline{7}$ ಇದರ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವಿಕೆಯನ್ನು 5 ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾನಗಳವರೆಗೆ ಎಂದರೆ 5.37777ರವರೆಗೆ ದೃಶ್ಯೀಕರಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ : ಮತ್ತೊಮ್ಮೆ ಅನುಕ್ರಮ ವರ್ಧನೆಯ ಮೂಲಕ ನಾವು ಮುಂದುವರಿಸಿ, ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ $5.3\overline{7}$ ನ್ನು ಗುರುತಿಸಿದ ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಭಾಗದ ಉದ್ದವನ್ನು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಕಡಿಮೆ ಮಾಡೋಣ.

ಆಗ $5.3\overline{7}$ ಸಂಖ್ಯೆಯು 5 ಮತ್ತು 6ರ ನಡುವೆ ಇರುವುದನ್ನು ನಾವು ಮೊದಲು ಕಾಣುತ್ತೇವೆ. ಮುಂದಿನ ಹಂತದಲ್ಲಿ, ನಾವು $5.3\overline{7}$ ನ್ನು 5.3 ಮತ್ತು 5.4ರ ನಡುವೆ ಗುರುತಿಸುತ್ತೇವೆ. ಇನ್ನೂ ಹೆಚ್ಚು ನಿಖರವಾದ ದೃಶ್ಯೀಕರಣವನ್ನು ಪಡೆಯಲು, ನಾವು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಈ ಭಾಗವನ್ನು 10 ಸಮನಾದ ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು $5.3\overline{7}$ ಇದು 5.37 ಮತ್ತು 5.38ರ ನಡುವೆ ಇರುವುದನ್ನು ದೃಶ್ಯೀಕರಿಸಲು. ಒಂದು ಪೀನಮಸೂರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ. $5.3\overline{7}$ ನ್ನು ಇನ್ನೂ ಹೆಚ್ಚು ನಿಖರವಾಗಿ ದೃಶ್ಯೀಕರಿಸಲು, ನಾವು 5.37 ಮತ್ತು 5.38ರ ನಡುವಿನ ಭಾಗವನ್ನು ಪುನಃ 10 ಸಮನಾದ ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು $5.3\overline{7}$ ಇದು 5.377 ಮತ್ತು 5.378ರ ನಡುವೆ ಇರುವುದನ್ನು ದೃಶ್ಯೀಕರಿಸಲು ಒಂದು ಪೀನಮಸೂರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ. ಈಗ, $5.3\overline{7}$ ನ್ನು ಇನ್ನೂ ಹೆಚ್ಚು ನಿಖರವಾಗಿ ದೃಶ್ಯೀಕರಿಸಲು 5.377

ಮತ್ತು 5.378ರ ನಡುವಿನ ಭಾಗವನ್ನು 10 ಸಮನಾದ ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು ಚಿತ್ರ 1.14(iv)ರಲ್ಲಿರುವಂತೆ $5.3\overline{7}$ ರ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವಿಕೆಯನ್ನು ದೃಶ್ಯೀಕರಿಸುತ್ತೇವೆ. $5.3\overline{7}$ ಇದು 5.3777ಕ್ಕಿಂತ 5.3778ಕ್ಕೆ ಹೆಚ್ಚು ಸಮೀಪದಲ್ಲಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. [ಚಿತ್ರ 1.14 (iv) ನ್ನು ಗಮನಿಸಿ].



ಚಿತ್ರ 1.14

ಗಮನಿಸಿ: ಈ ರೀತಿ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಪೀನಮಸೂರದ ಮೂಲಕ ನೋಡುತ್ತಾ ಮತ್ತು ಅದೇ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯಲ್ಲಿ $5.3\overline{7}$ ನ್ನು ಗುರುತಿಸಿದ ಭಾಗದ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಡಿಮೆ ಮಾಡಿದಂತೆ ಊಹಿಸುತ್ತಾ ನಿರಂತರವಾಗಿ ನಾವು ಮುಂದುವರಿಸಬಹುದು. ನಾವು ನಿರ್ದಿಷ್ಟಗೊಳಿಸಿದ ರೇಖೆಯ ಭಾಗದ ಗಾತ್ರವು, ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ದೃಶ್ಯೀಕರಿಸಲು ನಾವು ಬಯಸುವ ನಿಖರತೆಯ ಮಟ್ಟವನ್ನು ಅವಲಂಬಿಸಿದೆ.

ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಅಂತ್ಯರಹಿತ, ಆವರ್ತರಹಿತ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ದೃಶ್ಯೀಕರಿಸಲು ಇದೇ ವಿಧಾನವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು ಎಂದು ನೀವು ಈಗ ಅರ್ಥೈಸಿಕೊಂಡಿರಬಹುದು.

ಮೇಲಿನ ಎಲ್ಲಾ ಚರ್ಚೆಗಳ ಮತ್ತು ವೀಕ್ಷಣೆಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ, **ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯೂ ಒಂದು ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ. ಅಲ್ಲದೇ ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಂದುವೂ ಕೇವಲ ಒಂದೇ ಒಂದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಮಾತ್ರ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ** ಎಂದು ನಾವು ಪುನಃ ಹೇಳಬಹುದು.

ಅಭ್ಯಾಸ 1.4

1. ಅನುಕ್ರಮ ವರ್ಧನೆಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ, ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ 3.765ನ್ನು ದೃಶ್ಯೀಕರಿಸಿ.

2. ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ $4.\overline{26}$ ನ್ನು 4 ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾನಗಳವರೆಗೆ ದೃಶ್ಯೀಕರಿಸಿ.

1.5 ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೇಲಿನ ಕ್ರಿಯೆಗಳು

ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸಂಕಲನ ಮತ್ತು ಗುಣಾಕಾರ ಕ್ರಿಯೆಗಳಿಗೆ ಪರಿವರ್ತನೀಯ, ಸಹವರ್ತನೀಯ ಮತ್ತು ವಿಭಾಜಕ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಪಾಲಿಸುತ್ತವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೀವು ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ತಿಳಿದಿದ್ದೀರಿ. ಇಷ್ಟೇ ಅಲ್ಲದೇ, ಎರಡು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ನಾವು ಕೂಡಿಸಿದರೆ,

ಕಳೆದರೆ, ಗುಣಿಸಿದರೆ ಅಥವಾ ಭಾಗಿಸಿದರೆ (ಸೊನ್ನೆಯಿಂದ ಹೊರತುಪಡಿಸಿ), ಪುನಃ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನೇ ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ. (ಅಂದರೆ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸಂಕಲನ, ವ್ಯವಕಲನ, ಗುಣಾಕಾರ ಮತ್ತು ಭಾಗಾಕಾರ ಕ್ರಿಯೆಗಳಿಗೆ ಆವೃತವಾಗಿದೆ). ಇದರಿಂದ ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೂ ಸಹ ಸಂಕಲನ ಮತ್ತು ಗುಣಾಕಾರ ಕ್ರಿಯೆಗಳಿಗೆ ಪರಿವರ್ತನೀಯ, ಸಹವರ್ತನೀಯ ಮತ್ತು ವಿಭಾಜಕ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಪಾಲಿಸುತ್ತವೆ ಎಂಬುದು ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ. ಆದಾಗ್ಯೂ, ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ, ವ್ಯತ್ಯಾಸ, ಭಾಗಲಬ್ಧ ಮತ್ತು ಗುಣಲಬ್ಧಗಳು ಯಾವಾಗಲೂ ಅಭಾಗಲಬ್ಧಗಳೇ ಆಗಿರಬೇಕಾಗಿಲ್ಲ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $\left(\sqrt{6}\right)+\left(-\sqrt{6}\right),\left(\sqrt{2}\right)-\left(\sqrt{2}\right),\left(\sqrt{3}\right)\times\left(\sqrt{3}\right)$ ಮತ್ತು $\frac{\sqrt{17}}{\sqrt{17}}$ ಇವು ಭಾಗಲಬ್ಧಗಳಾಗಿವೆ.

ಈಗ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಮತ್ತು ಗುಣಿಸಿದರೆ ಏನಾಗುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡೋಣ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $\sqrt{3}$ ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ. ಹಾಗಾದರೆ $2+\sqrt{3}$ ಮತ್ತು $2\sqrt{3}$ ಇವುಗಳು ಏನು? $\sqrt{3}$ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳದ, ಆವರ್ತವಾಗದ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದರಿಂದ, $2+\sqrt{3}$ ಮತ್ತು $2\sqrt{3}$ ಇವುಗಳು ಕೂಡಾ ಇದೇ ರೀತಿ ಇರುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $2+\sqrt{3}$ ಮತ್ತು $2\sqrt{3}$ ಗಳೂ ಸಹ ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು.

ಉದಾಹರಣೆ 12: $7\sqrt{5},\frac{7}{\sqrt{5}},\sqrt{2}+21,\neq-2$ ಇವು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೇ, ಅಲ್ಲವೇ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ: $\sqrt{5}=2.236....$, $\sqrt{2}=1.4142....$, $\neq=3.1415....$

$\therefore 7\sqrt{5}$ = 7 × 2.236.......... = 15.652.............,

$\frac{7}{\sqrt{5}}$ = $\frac{7\sqrt{5}}{\sqrt{5}\sqrt{5}}=\frac{7\sqrt{5}}{5}=3.1304...........$

$\sqrt{2}+21$ = 22.4142............, $\neq-2$ = 1.1415........

ಇವೆಲ್ಲವೂ ಅಂತ್ಯರಹಿತ, ಆವರ್ತರಹಿತ ದಶಮಾಂಶಗಳು. ಆದ್ದರಿಂದ ಇವೆಲ್ಲವೂ ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು.

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ, ಈ ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ನಾವು ಕೂಡಿಸಿದಾಗ, ಕಳೆದಾಗ, ಗುಣಿಸಿದಾಗ, ಭಾಗಿಸಿದಾಗ, ವರ್ಗಮೂಲಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ, n ನೇ ಮೂಲಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ ('n' ಯಾವುದೇ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ) ಏನಾಗುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ಈಗ ನೋಡೋಣ. ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 13: $2\sqrt{2}+5\sqrt{3}$ ಮತ್ತು $\sqrt{2}-3\sqrt{3}$ ಇವುಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ: $\left(2\sqrt{2}+5\sqrt{3}\right)+\left(\sqrt{2}-3\sqrt{3}\right)$ = $\left(2\sqrt{2}+\sqrt{2}\right)+\left(5\sqrt{3}-3\sqrt{3}\right)$

= $(2+1)\sqrt{2}+(5-3)\sqrt{3}$ = $3\sqrt{2}+2\sqrt{3}$

ಉದಾಹರಣೆ 14: $6\sqrt{5}$ ನ್ನು $2\sqrt{5}$ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ: $6\sqrt{5} \times 2\sqrt{5} = 6 \times 2 \times \sqrt{5} \times \sqrt{5}$ $=12 \times 5 = 60$

ಉದಾಹರಣೆ 15 : $8\sqrt{15}$ ನ್ನು $2\sqrt{3}$ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ: $8\sqrt{15} \surd 2\sqrt{3} = \dfrac{8\sqrt{3} \times \sqrt{5}}{2\sqrt{3}} = 4\sqrt{5}$

ಈ ಉದಾಹರಣೆಗಳು ನಿಮ್ಮನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನ **ಸತ್ಯಸಂಗತಿಗಳನ್ನು ನಿರೀಕ್ಷಿಸುವತ್ತ** ಒಯ್ಯಬಹುದು.

(i) ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಮತ್ತು ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ ಅಥವಾ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

(ii) ಸೊನ್ನೆಯಲ್ಲದ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಗುಣಲಬ್ಧ ಅಥವಾ ಭಾಗಲಬ್ಧವು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

(iii) ಎರಡು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದಾಗ, ಕಳೆದಾಗ, ಗುಣಿಸಿದಾಗ ಅಥವಾ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಫಲಿತಾಂಶವು ಭಾಗಲಬ್ಧವೂ ಆಗಿರಬಹುದು ಅಥವಾ ಅಭಾಗಲಬ್ಧವೂ ಆಗಿರಬಹುದು.

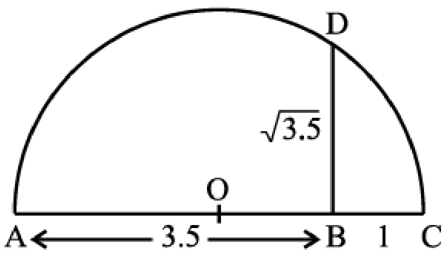
ಈಗ ನಾವು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಕಡೆಗೆ ನಮ್ಮ ಗಮನವನ್ನು ಹರಿಸೋಣ.

'a' ಒಂದು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $\sqrt{a} = b$ ಅಂದರೆ b2 = a ಮತ್ತು b > 0 ಎಂಬುದನ್ನು ಸ್ಮರಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ. ಇದೇ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯನ್ನು ಧನಾತ್ಮಕ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ವಿಸ್ತರಿಸಬಹುದು.

ಈಗ a > 0 ಒಂದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ $\sqrt{a} = b$ ಎಂದರೆ b2 = a ಮತ್ತು
b > 0.

'n' ಯಾವುದೇ ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕವಾದಾಗ, $\sqrt{n}$ ನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಹೇಗೆ ಗುರುತಿಸುವುದು ಎಂಬುದನ್ನು ವಿಭಾಗ 1.2ರಲ್ಲಿ ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. ಈಗ ನಾವು ಯಾವುದೇ ದತ್ತ ಧನವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ 'x'ಗೆ $\sqrt{x}$ ನ್ನು ರೇಖಾಗಣಿತೀಯವಾಗಿ ಹೇಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡೋಣ.

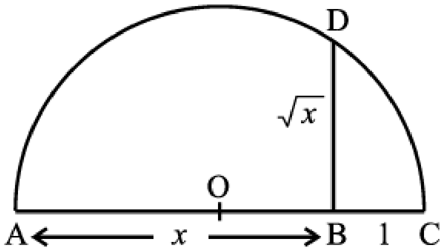
ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $\sqrt{3.5}$ನ್ನು ರೇಖಾಗಣಿತೀಯವಾಗಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.



ಚಿತ್ರ 1.15

ದತ್ತ ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಸ್ಥಿರ (ನಿರ್ದಿಷ್ಟ) ಬಿಂದು 'A'ಯಿಂದ 3.5 ಮೂಲಮಾನ ದೂರದಲ್ಲಿ AB = 3.5 ಮೂಲಮಾನವಾಗುವಂತೆ 'B' ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ. (ಚಿತ್ರ 1.15ನ್ನು ಗಮನಿಸಿ) B ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಏಕಮಾನ ದೂರದಲ್ಲಿ 'C' ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ. ACಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ 'O' ಎಂದು ಹೆಸರಿಸಿ. 'O' ಬಿಂದುವನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿರಿಸಿ, OC ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿರುವಂತೆ ಒಂದು ಅರ್ಧವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. 'B' ಯ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವಂತೆ ಮತ್ತು ಅರ್ಧವೃತ್ತವನ್ನು 'D' ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವಂತೆ ACಗೆ ಒಂದು ಲಂಬರೇಖೆಯ

ನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಆಗ BD = $\sqrt{3.5}$



ಚಿತ್ರ 1.16

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ, ಯಾವುದೇ ಧನವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ 'x'ಗೆ $\sqrt{x}$ ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು,
AB = x ಮೂಲಮಾನ ಆಗುವಂತೆ 'B'ಯನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ ಮತ್ತು
ಚಿತ್ರ 1.16 ರಲ್ಲಿರುವಂತೆ BC = 1 ಮೂಲಮಾನ ಆಗುವಂತೆ

'C'ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ. ನಂತರ ಥ = 3.5ರ ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿ ಮಾಡಿದಂತೆ, BD = $\sqrt{x}$ ಆಗಿರುವುದನ್ನು ನಾವು ಕಾಣುತ್ತೇವೆ. (ಚಿತ್ರ 1.16 ನ್ನು ಗಮನಿಸಿ). ನಾವು ಈ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಪೈಥಾಗೊರಸ್ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಸಾಧಿಸಬಹುದು. ಚಿತ್ರ 1.16ರಲ್ಲಿ Δ OBD ಯು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜವಾಗಿರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವು $\frac{x+1}{2}$ ಮೂಲಮಾನಗಳು.

ಆದ್ದರಿಂದ, OC = OD = OA = $\frac{x+1}{2}$ ಮೂಲಮಾನಗಳು.

ಈಗ OB = $x-\left(\frac{x+1}{2}\right) = \frac{x-1}{2}$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಪೈಥಾಗೊರಸ್ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ,

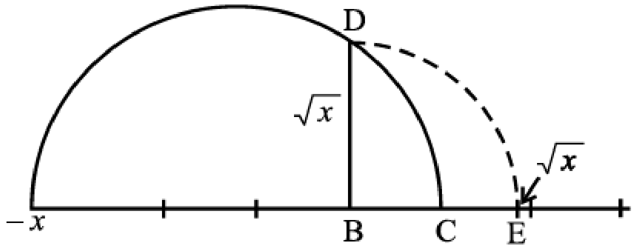
BD2 = OD2 – OB2

BD2 = $\left(\frac{x+1}{2}\right)^2-\left(\frac{x-1}{2}\right)^2=\frac{4x}{4}=x$

ಇದು BD = $\sqrt{x}$ ಎಂದು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ.

ಸೊನ್ನೆಗಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾದ ಯಾವುದೇ ವಾಸ್ತವಸಂಖ್ಯೆ 'x'(x > 0) ಗೆ $\sqrt{x}$ ರೂಪದ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ರೇಖಾಗಣಿತೀಯವಾಗಿ

ತೋರಿಸಬಹುದೆಂಬುದನ್ನು ಈ ರಚನೆಯಿಂದ ತಿಳಿಯಬಹುದು. ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ $\sqrt{x}$ ನ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ನೀವು ತಿಳಿಯಲು ಬಯಸಿದರೆ, 'B'ಯು ಸೊನ್ನೆಯನ್ನು ಹಾಗೂ 'C'ಯು 1 ನ್ನು ಸೂಚಿಸುವಂತೆ BC ಯನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯಾಗಿ ಪರಿಗಣಿಸಿ. 'B' ಬಿಂದುವನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿಸಿ,
BD ಯು ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿರುವಂತೆ ಹಾಗೂ ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯನ್ನು 'E' ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವಂತೆ ಒಂದು ಕಂಸವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. (ಚಿತ್ರ 1.17 ನ್ನು ಗಮನಿಸಿ). ಆಗ 'E'ಯು $\sqrt{x}$ ನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ.



ಚಿತ್ರ 1.17

ವರ್ಗಮೂಲ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಈ ವಿಧಾನವನ್ನು ಘನಮೂಲ, ನಾಲ್ಕನೇ ಮೂಲ ಮತ್ತು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ 'n'ನೇ ಮೂಲಗಳಿಗೂ ('n' ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕ) ವಿಸ್ತರಿಸಬಹುದು. ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿನ ವರ್ಗಮೂಲ ಮತ್ತು ಘನಮೂಲಗಳ ಅರ್ಥವನ್ನು ಸ್ಮರಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ. $\sqrt[3]{8}$ ಎಂದರೇನು? ಅದು ಯಾವುದರ ಘನವು 8 ಆಗುತ್ತದೆಯೋ ಅಂತಹ ಒಂದು ಧನಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ನಾವು ತಿಳಿದಿದ್ದೇವೆ. ಮತ್ತು $\sqrt[3]{8}$ = 2 ಎಂದು ನೀವು ಊಹಿಸಿರಬಹುದು. ಈಗ $\sqrt[5]{243}$ನ್ನು ಪ್ರಯತ್ನಿಸೋಣ. b5 = 243 ಆಗುವಂತಹ ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆ 'b'ಯನ್ನು ನೀವು ತಿಳಿದಿದ್ದೀರಾ? ಇದಕ್ಕೆ ಉತ್ತರ 3. ಆದ್ದರಿಂದ $\sqrt[5]{243}$ =3.

ಈ ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಂದ, 'a' ಯು ಸೊನ್ನೆಗಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾದ ವಾಸ್ತವಸಂಖ್ಯೆ ಆದಾಗ ಮತ್ತು n ಒಂದು ಧನಸಂಖ್ಯೆಯಾದಾಗ ನೀವು $\sqrt[n]{a}$ ಯನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಬಲ್ಲಿರಾ? ಈಗ, a > 0 ಒಂದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರಲಿ ಮತ್ತು n ಒಂದು ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಆಗಿರಲಿ. bಟಿ = a ಮತ್ತು b > 0 ಆದಾಗ $\sqrt[n]{a}$ = b.

$\sqrt{2}, \sqrt[3]{8}, \sqrt[n]{a}$ ಇತ್ಯಾದಿಗಳಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿದ '$\sqrt{\ }$' ಸಂಕೇತಕ್ಕೆ ಕರಣಿ ಚಿಹ್ನೆ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ವರ್ಗಮೂಲಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ, ಹಲವಾರು ಕಡೆಗಳಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸುವ ಕೆಲವು ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ನಾವು ಈಗ ಪಟ್ಟಿ ಮಾಡೋಣ. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಲವನ್ನು ಈ ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ಈಗಾಗಲೇ ನೀವು ತಿಳಿದಿದ್ದೀರಿ. ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಂಕಲನದ ಮೇಲಿನ ಗುಣಾಕಾರದ ವಿಭಾಜಕ ನಿಯಮದಿಂದ ಹಾಗೂ

(x + y)(x – y) = x2 – y2 (x, y∈ R) ಎಂಬ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣದಿಂದ ಉಳಿದವುಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು.

a ಮತ್ತು b ಗಳು ಧನವಾಸ್ತವಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರಲಿ. ಆಗ

(i) $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ (ii) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

(iii) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right) = a-b$ (iv) $\left(a+\sqrt{b}\right)\left(a-\sqrt{b}\right) = a^2-b$

(v) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{c}+\sqrt{d}\right) = \sqrt{ac}+\sqrt{ad}+\sqrt{bc}+\sqrt{bd}$

(vi) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 = a+2\sqrt{ab}+b$

ಈ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣಗಳ ಕೆಲವು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಪ್ರಕರಣಗಳನ್ನು ಈಗ ನೋಡೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 16 : ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಿ.

(i) $\left(5+\sqrt{7}\right)\left(2+\sqrt{5}\right)$ (ii) $\left(5+\sqrt{5}\right)\left(5-\sqrt{5}\right)$

(iii) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)^2$ (iv) $\left(\sqrt{11}-\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{11}+\sqrt{7}\right)$

ಪರಿಹಾರ: (i) $\left(5+\sqrt{7}\right)\left(2+\sqrt{5}\right) = 10+5\sqrt{5}+2\sqrt{7}+\sqrt{35}$

(ii) $\left(5+\sqrt{5}\right)\left(5-\sqrt{5}\right) = 5^2-\left(\sqrt{5}\right)^2 = 25 - 5 = 20$

(iii) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2+2\sqrt{3}\sqrt{7}+\left(\sqrt{7}\right)^2 = 3+2\sqrt{21}+7 = 10+2\sqrt{21}$

(iv) $\left(\sqrt{11}-\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{11}+\sqrt{7}\right) = \left(\sqrt{11}\right)^2-\left(\sqrt{7}\right)^2 = 11 - 7 = 4$

ಗಮನಿಸಿ : ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ 'ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಿ' ಅಂದರೆ, ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಮತ್ತು ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿ ಬರೆಯುವುದು ಎಂದರ್ಥ. ಕೆಳಗಿನ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ ನಾವು ಈ ವಿಭಾಗವನ್ನು ಮುಕ್ತಾಯಗೊಳಿಸುತ್ತೇವೆ. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಇದು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಎಲ್ಲಿರುತ್ತದೆಂದು ನೀವು ಹೇಳಬಹುದೇ? ಅದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧವೆಂದು ನೀವು ತಿಳಿದಿದ್ದೀರಿ. ಛೇದವು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಆದರೆ ಅದು ಇನ್ನೂ ಸುಲಭವಾಗಬಹುದು. ಛೇದವನ್ನು ಅಕರಣೀಕರಿಸಲು ಅಂದರೆ ಛೇದವನ್ನು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವೇ ಎಂದು ಈಗ ನಾವು ನೋಡೋಣ. ಹಾಗೆ ಮಾಡಲು ನಮಗೆ ವರ್ಗಮೂಲಗಳನ್ನೊಳಗೊಂಡ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣಗಳ ಅಗತ್ಯವಿದೆ. ಅದು ಹೇಗೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಈಗ ನೋಡೋಣ

ಉದಾಹರಣೆ 17 : $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ರ ಛೇದವನ್ನು ಅಕರಣೀಕರಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ : ಛೇದವು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುವಂತೆ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ಕ್ಕೆ ಸಮನಾದ ಪದವನ್ನು ನಾವು ಬರೆಯಬೇಕಾಗಿದೆ. $\sqrt{2}\times\sqrt{2}$ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ನಾವು ತಿಳಿದಿದ್ದೇವೆ.

$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ನ್ನು $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ರ ಸಮಾನ ಪದ ಸಿಗುತ್ತದೆ.

ಇವುಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟಾಗಿ

$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

ಈ ರೀತಿ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಗುರುತಿಸಲು ಸುಲಭವಾಗುತ್ತದೆ. ಇದು 0 ಮತ್ತು $\sqrt{2}$ ರ ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 18: $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$ ಇದರ ಛೇದವನ್ನು ಅಕರಣೀಕರಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ : ಈ ಹಿಂದೆ ನೀಡಿದ (iv)ನೇ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ.

$\frac{1}{2+\sqrt{3}}$ ಯನ್ನು $2-\sqrt{3}$ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, ಭಾಗಿಸಿದಾಗ,

$$\frac{1}{2+\sqrt{3}} \times \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{4-3} = 2-\sqrt{3}$$

ಉದಾಹರಣೆ 19: $\frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}$ ಇದರ ಛೇದವನ್ನು ಅಕರಣೀಕರಿಸಿ.

ಇಲ್ಲಿ ಈ ಹಿಂದೆ ನೀಡಿದ (iii) ನೇ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣವನ್ನು ನಾವು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ.

$$\frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} = \frac{5\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)}{3-5} = \left(\frac{-5}{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)$$

ಉದಾಹರಣೆ 20 : $\frac{1}{7+3\sqrt{2}}$ ಇದರ ಛೇದವನ್ನು ಅಕರಣೀಕರಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ : $\frac{1}{7+3\sqrt{2}} = \frac{1}{7+3\sqrt{2}} \times \frac{7-3\sqrt{2}}{7-3\sqrt{2}} = \frac{7-3\sqrt{2}}{49-18} = \frac{7-3\sqrt{2}}{31}$

ಹೀಗೆ ವರ್ಗಮೂಲ ಅಥವಾ ಕರಣಿ ಚಿಹ್ನೆಯನ್ನು ಛೇದವಾಗಿ ಹೊಂದಿರುವ ಒಂದು ಪದದ ಛೇದವನ್ನು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗುವಂತೆ ಸಮಾನ ಪದವನ್ನಾಗಿ ಪರಿವರ್ತಿಸುವ ವಿಧಾನಕ್ಕೆ **ಛೇದವನ್ನು ಅಕರಣೀಕರಿಸುವಿಕೆ** (**Rationalising the denominator**) ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 1.5

1. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಅಥವಾ ಅಭಾಗಲಬ್ಧಗಳಾಗಿ ವರ್ಗೀಕರಿಸಿ.

(i) $2-\sqrt{5}$ (ii) $\left(3+\sqrt{23}\right)-\sqrt{23}$ (iii) $\frac{2\sqrt{7}}{7\sqrt{7}}$

(iv) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (v) 2π

2. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಉಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಿ.

(i) $\left(3+\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{2}\right)$ (ii) $\left(3+\sqrt{3}\right)\left(3-\sqrt{3}\right)$

(iii) $\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)^2$ (iv) $\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)$

3. π ಅಂದರೆ ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಪರಿಧಿ(c) ಮತ್ತು ವ್ಯಾಸ(d)ದ ಅನುಪಾತ ಎಂಬುದನ್ನು ಸ್ಮರಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ, ಎಂದರೆ $\neq = \frac{c}{d}$. ಇದು π ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂಬುದಕ್ಕೆ ವಿರೋಧವಾಗಿರುವಂತೆ ಕಾಣುತ್ತದೆ. ಈ ವಿರೋಧಾಭಾಸವನ್ನು ನೀವು ಹೇಗೆ ಪರಿಹರಿಸುವಿರಿ?

4. $\sqrt{9.3}$ ನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿ.

5. ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳ ಛೇದವನ್ನು ಅಕರಣೀಕರಿಸಿ.

(i) $\frac{1}{\sqrt{7}}$ (ii) $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}$

(iii) $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$ (iv) $\frac{1}{\sqrt{7}-2}$

1.6 ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಘಾತಾಂಕಗಳ ನಿಯಮಗಳು

ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸುವುದು ಎಂಬುದು ನಿಮಗೆ ನೆನಪಿದೆಯೇ?

(i) $17_2 . 17_5 =$ (ii) $(5_2)_7 =$

(iii) $\frac{23^{10}}{23^7}$ = (iv) $7_3 . 9_3 =$

ನಿಮಗೆ ಉತ್ತರಗಳು ದೊರೆಯಿತೇ? ಅವು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತಿವೆ.

(i) $17_2 . 17_5 = 17_7$ (ii) $(5_2)_7 = 5_{14}$

(iii) $\frac{23^{10}}{23^7} = 23^3$ (iv) $7_3 . 9_3 = 63_3$

ಈ ಉತ್ತರಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಲು, ನೀವು ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ಕಲಿತ ಘಾತಾಂಕಗಳ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರಬಹುದು. (ಇಲ್ಲಿ a, n ಮತ್ತು m ಗಳು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು. 'a' ಯನ್ನು ಆಧಾರ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದೂ, m ಮತ್ತು n ಗಳನ್ನು ಘಾತಸೂಚಿಗಳು ಎಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೆನಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ.)

(i) am . an = am + n (ii) (am)n = amn

(iii) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \left(m > n\right)$ (iv) ambm = (ab)m

(a)0 ರ ಬೆಲೆ ಏನು? ಅದರ ಬೆಲೆ 1. ಆದ್ದರಿಂದ ನೀವು (a)0 = 1 ಎಂದು ಕಲಿತಿದ್ದೀರಿ. ಆದ್ದರಿಂದ

ನಿಯಮ (iii) ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ, ನಾವು $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$ ಎಂದು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈಗ ನಾವು ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಋಣ ಘಾತಸೂಚಿಗಳಿಗೂ ವಿಸ್ತರಿಸಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ :

(i) 172.17−5 = 17−3 = $\frac{1}{17^3}$ (ii) (52)−7 = 5−14

(iii) $\frac{23^{-10}}{23^{7}} = 23^{-17}$ (iv) (7)−3.(9)−3 = (63)−3

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು ನಾವು ಬಿಡಿಸಬೇಕೆಂದರೆ,

(i) $2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}}$ (ii) $\left(3^{\frac{1}{5}}\right)^4$ (iii) $\frac{7^{\frac{1}{5}}}{7^{\frac{1}{3}}}$ (iv) $13^{\frac{1}{5}} \cdot 17^{\frac{1}{5}}$

ನಾವು ಅವುಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಬಿಡಿಸಬಹುದು?

ಆಧಾರ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಧನವಾಸ್ತವಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದ್ದು ಹಾಗೂ ಘಾತಸೂಚಿಗಳು ಭಾಗಲಬ್ಧಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಆಗಿದ್ದಾಗ ಕೂಡಾ ನಾವು ಹಿಂದೆ ಕಲಿತ ಘಾತಾಂಕಗಳ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ವಿಸ್ತರಿಸಬಹುದು ಎಂಬುದು ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ.

(ಇನ್ನೂ ಮುಂದುವರೆದು, ಘಾತಸೂಚಿಗಳು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಆಗಿರುವಾಗಲೂ ಈ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ವಿಸ್ತರಿಸಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಮುಂದೆ ತಿಳಿಯಲಿದ್ದೀರಿ.) ಆದರೆ, ಈ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಲು ಮತ್ತು ಅರ್ಥೈಸುವ ಮೊದಲು ನಾವು ಏನನ್ನು ತಿಳಿಯಬೇಕೆಂದು ನೋಡೋಣ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ $4^{\frac{3}{2}}$ ಎಂದರೇನೆಂದು ನಾವು ತಿಳಿಯಬೇಕಿದೆ. ಅದಕ್ಕಾಗಿ ಈ ಮುಂದಿನ ಹಂತದ ಅಗತ್ಯವಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಈಗ ನಾವು ಸ್ವಲ್ಪ ಕೆಲಸವನ್ನು ಮಾಡಬೇಕಾಗಿದೆ. ವಿಭಾಗ 1.4 ರಲ್ಲಿ 'a' ಯು ಸೊನ್ನೆಗಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾದ ವಾಸ್ತವಸಂಖ್ಯೆ ಆದಾಗ $\sqrt[n]{a}$ ಯನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿದ್ದೇವೆ.

a > 0 ಒಂದು ವಾಸ್ತವಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು 'n' ಒಂದು ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ bn = a ಮತ್ತು b > 0 ಆದರೆ, ಆಗ $\sqrt[n]{a}$ = b ಆಗುತ್ತದೆ.

ಘಾತಾಂಕಗಳ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ, $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$ ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸುತ್ತೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿ, $\sqrt[3]{2} = 2^{1/3}$. ಈಗ $4^{3/2}$ ನ್ನು ಎರಡು ರೀತಿಗಳಲ್ಲಿ ನೋಡಬಹುದು.

$$4^{\frac{3}{2}} = \left(4^{\frac{1}{2}}\right)^3 = 2^3 = 8$$

$$4^{\frac{3}{2}} = \left(4^3\right)^{\frac{1}{2}} = (64)^{\frac{1}{2}} = 8$$

ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು.

a > 0 ಒಂದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರಲಿ. m ಮತ್ತು n ಗಳು 1ನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿ ಬೇರೆ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರದ

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

ಈಗ, ಕೆಳಗೆ ನೀಡಿದಂತೆ ವಿಸ್ತರಿಸಿದ ಘಾತಾಂಕಗಳ ನಿಯಮಗಳು ದೊರೆಯುತ್ತವೆ.

a > 0 ಒಂದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರಲಿ ಹಾಗೂ p ಮತ್ತು q ಗಳು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರಲಿ ಆಗ.

(i) ap. aq = qp + q (ii) (ap)q = apq

(iii) $\dfrac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$ (iv) apbp = (ab)p

ನೀವು ಈಗ ಈ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಈ ಹಿಂದೆ ಕೇಳಿದ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಲು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆ 21: ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಿ:

(i) $2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}}$ (ii) $\left(3^{\frac{1}{5}}\right)^4$

(iii) $\dfrac{7^{\frac{1}{5}}}{7^{\frac{1}{3}}}$ (iv) $13^{\frac{1}{5}} \cdot 17^{\frac{1}{5}}$

ಪರಿಹಾರ :

(i) $2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)} = 2^{\frac{3}{3}}$ =21 =2 (ii) $\left(3^{\frac{1}{5}}\right)^4 = 3^{\frac{4}{5}}$

(iii) $\dfrac{7^{\frac{1}{5}}}{7^{\frac{1}{3}}} = 7^{\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right)} = 7^{\frac{3-5}{15}} = 7^{\frac{-2}{15}}$ (iv) $13^{\frac{1}{5}} \cdot 17^{\frac{1}{5}} = \left(13\times17\right)^{\frac{1}{5}} = \left(221\right)^{\frac{1}{5}}$

ಅಭ್ಯಾಸ 1.6

1. ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ : (i) $64^{\frac{1}{2}}$ (ii) $32^{\frac{1}{5}}$ (iii) $125^{\frac{1}{3}}$

2. ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ : (i) $9^{\frac{3}{2}}$ (ii) $32^{\frac{2}{5}}$ (iii) $16^{\frac{3}{4}}$

(iv) $125^{\frac{-1}{3}}$

3. ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಿ : (i) $2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{5}}$ (ii) $\left(\dfrac{1}{3^3}\right)^7$ (iii) $\dfrac{11^{\frac{1}{2}}}{11^{\frac{1}{4}}}$ (iv) $7^{\frac{1}{2}} \cdot 8^{\frac{1}{2}}$

1.7 ಸಾರಾಂಶ

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ನೀವು ಕೆಳಗಿನ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಕಲಿತಿರುವಿರಿ.

1. ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ 'r' ನ್ನು $\dfrac{p}{q}$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಇಲ್ಲಿ p ಮತ್ತು q ಗಳು ಪೂರ್ಣಾಂಕವು ಆಗಿದ್ದು (q ≠ 0) ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದಾದರೆ, ಅದನ್ನು

ಭಾಗಲಬ್ಧಸಂಖ್ಯೆ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

2. ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ 's' ನ್ನು $\frac{p}{q}$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ($p, q \in Z, q \neq 0$) ಬರೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲದಿದ್ದರೆ, ಅದನ್ನು ಅಭಾಗಲಬ್ಧಸಂಖ್ಯೆ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

3. ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯು ಅಂತ್ಯಸಹಿತ ಅಥವಾ ಅಂತ್ಯರಹಿತ ಆವರ್ತವಾಗಬಹುದು. ಅದಕ್ಕಿಂತಲೂ ಮಿಗಿಲಾಗಿ, ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯು ಅಂತ್ಯಸಹಿತ ಅಥವಾ ಅಂತ್ಯರಹಿತ ಆವರ್ತವಾದರೆ ಅದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.

4. ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯು ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುವುದೂ ಇಲ್ಲ, ಆವರ್ತವಾಗುವುದೂ ಇಲ್ಲ. ಅದಕ್ಕಿಂತಲೂ ಮಿಗಿಲಾಗಿ, ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯು ಅಂತ್ಯವೂ ಹೊಂದದೇ, ಆವರ್ತವೂ ಆಗದೇ ಇದ್ದರೆ ಅದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.

5. ಎಲ್ಲಾ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಮತ್ತು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸೇರಿ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗುತ್ತವೆ.

6. ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಂದುವಿಗೂ, ಅದಕ್ಕೆ ಅನುರೂಪವಾದ ಪ್ರತ್ಯೇಕ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ ಇರುತ್ತದೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗೂ, ಅನುರೂಪವಾಗಿ ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಬಿಂದು ಇರುತ್ತದೆ.

7. r ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು s ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಆದರೆ, $r+s$ ಮತ್ತು $r-s$ ಇವು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಹಾಗೂ rs ಮತ್ತು $\frac{r}{s}$ ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ $r \neq 0$.

8. a ಮತ್ತು b ಗಳು ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಧನವಾಸ್ತವಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದಾಗ, ಈ ಕೆಳಗಿನ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣಗಳು ಸರಿಹೊಂದುತ್ತವೆ.

(i) $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ (ii) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

(iii) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right) = a-b$ (iv) $\left(a+\sqrt{b}\right)\left(a-\sqrt{b}\right) = a^2-b$

(v) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 = a+2\sqrt{ab}+b$

9. $\frac{1}{\sqrt{a}+b}$ ಯ ಛೇದವನ್ನು ಅಕರಣೀಕರಣಗೊಳಿಸಲು, ಇದನ್ನು $\frac{\sqrt{a}-b}{\sqrt{a}-b}$ ರಿಂದ ನಾವು ಗುಣಿಸುತ್ತೇವೆ.
($a, b \in Z$)

10. $a > 0$ ಒಂದು ವಾಸ್ತವಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರಲಿ ಹಾಗೂ p ಮತ್ತು q ಗಳು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರಲಿ ಆಗ,

(i) ap . aq = ap+q (ii) (ap)q = apq

(iii) $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$ (iv) apbp = (ab)p