1. **નીચે આપેલ બહુપદીમાંથી કઈ બહુપદીનો અવયવ $(x + 1)$ છે. તે નક્કી કરો : $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$**

➤ $p(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$નો એક અવયવ $x + 1$ હોય તો $x + 1 = 0$ થાય.

$\therefore\ x = -1$

$p(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

$\therefore\ p(-1) = (-1)^4 + (-1)^3 + (-1)^2 + (-1) + 1$

$= (1) + (-1) + (1) + (-1) + 1$

$= 1 - 1 + 1 - 1 + 1$

$\therefore\ p(-1) = 1 \qquad \therefore\ p(-1) \neq 0$

$\therefore\ p(x)$ને $x + 1$ વડે નિઃશેષ ભાગી શકાતી નથી.

તેથી $x + 1$ એ $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ નો અવયવ નથી.

2. **નીચે આપેલ બહુપદીમાંથી કઈ બહુપદીનો અવયવ $(x + 1)$ છે. તે નક્કી કરો : $x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x + 1$**

➤ $p(x) = x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x + 1$ નો એક અવયવ $x + 1$ હોય તો $x + 1 = 0$ થાય.

$\therefore\ x = -1$

$p(x) = x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x + 1$

$\therefore\ p(-1) = (-1)^4 + 3(-1)^3 + 3(-1)^2 + (-1) + 1$

$= (1) + 3(-1) + 3(1) + (-1) + 1$

$= 1 - 3 + 3 - 1 + 1$

$\therefore\ p(-1) = 1$

$\therefore p(-1) \neq 0$

$\therefore\ p(x)$ને $x + 1$ વડે નિઃશેષ ભાગી શકાય નહિ.

તેથી $x + 1$ એ $x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x + 1$ નો અવયવ નથી.

3. **નીચે આપેલ બહુપદીમાંથી કઈ બહુપદીનો અવયવ $(x + 1)$ છે. તે નક્કી કરો : $x^3 - x^2 - \left(2 + \sqrt{2}\right)x + \sqrt{2}$**

➤ $p(x) = x^3 - x^2 - \left(2 + \sqrt{2}\right)x + \sqrt{2}$ નો એક અવયવ $x + 1$ હોય તો $x + 1 = 0$ થાય.

$\therefore\ x = -1$

$p(x) = x^3 - x^2 - \left(2 + \sqrt{2}\right)x + \sqrt{2}$

$\therefore\ p(-1) = (-1)^3 - (-1)^2 - \left(2 + \sqrt{2}\right)(-1) + \sqrt{2}$

$= (-1) - (-1) - (-1)\ \left(2 + \sqrt{2}\right) + \sqrt{2}$

$= -1 - 1 + 1\ \left(2 + \sqrt{2}\right) + \sqrt{2}$

$= -2 + 2 + \sqrt{2} + \sqrt{2}$

$\therefore\ p(-1) = 2\sqrt{2}$

$p(-1) = 2\sqrt{2}$

આમ, $p(-1) \neq 0$

$\therefore\ p(x)$ને $x + 1$ વડે નિઃશેષ ભાગી શકાય નહિ.

તેથી $x + 1$ એ $x^3 - x^2 - \left(2 + \sqrt{2}\right)x + \sqrt{2}$ નો અવયવ નથી.

4. **બહુપદી $g(x)$એ આપેલ બહુપદી $p(x)$નો એક અવયવ છે કે નહિ તે અવયવ પ્રમેય પરથી નક્કી કરો :**
$p(x) = 2x^3 + x^2 - 2x - 1,\ g(x) = x + 1$

➤ $x + 1 = 0 \qquad \therefore\ x = -1$

$p(x) = 2x^3 + x^2 - 2x - 1$

$\therefore p(-1) = 2(-1)^3 + (-1)^2 - 2(-1) - 1$

$= 2(-1) + (1) + 2 - 1$

$= -2 + 1 + 2 - 1$

$\therefore p(-1) = 0$

હા, $g(x)$એ $p(x)$નો અવયવ છે.

5. **બહુપદી $g(x)$એ આપેલ બહુપદી $p(x)$નો એક અવયવ છે કે નહિ તે અવયવ પ્રમેય પરથી નક્કી કરો :**
$p(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1,\ g(x) = x + 2$

➤ $x + 2 = 0 \qquad \therefore x = -2$

$p(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

$\therefore p(-2) = (-2)^3 + 3(-2)^2 + 3(-2) + 1$

$= (-8) + 3(4) + 3(-2) + 1$

$= -8 + 12 - 6 + 1$

$= -14 + 13$

$\therefore p(-2) = -1 \neq 0$

ના. આમ, $g(x)$એ $p(x)$નો અવયવ નથી.

6. **નીચેનાં દરેકમાં $x - 1$ એ $p(x)$ નો એક અવયવ હોય તો k ની કિંમત શોધો : $p(x) = kx^2 - 3x + k$**

➤ $x - 1$ એ $p(x)$નો અવયવ છે. $\qquad \therefore p(1) = 0$ થાય.

$p(x) = kx^2 - 3x + k$

$\therefore p(1) = k(1)^2 - 3(1) + k$

$\therefore 0 = k - 3 + k$

$\therefore 0 = 2k - 3$

$\therefore 3 = 2k$

$\therefore \frac{3}{2} = k$

$\therefore k = \frac{3}{2}$

7. **નીચેનાં દરેકમાં $x - 1$ એ $p(x)$ નો એક અવયવ હોય તો k ની કિંમત શોધો : $p(x) = kx^2 - \sqrt{2}x + 1$**

➤ $x - 1$ એ $p(x)$નો અવયવ છે. $\qquad \therefore p(1) = 0$ થાય.

$p(x) = kx^2 - \sqrt{2}x + 1$

$\therefore p(1) = k(1)^2 - \sqrt{2}(1) + 1$

$\therefore 0 = k(1) - \sqrt{2} + 1$

$\therefore 0 = k - \sqrt{2} + 1$

$\therefore \sqrt{2} - 1 = k$

$\therefore k = \sqrt{2} - 1$

8. **નીચેનાં દરેકમાં $x - 1$ એ $p(x)$ નો એક અવયવ હોય તો k ની કિંમત શોધો : $p(x) = 2x^2 + kx + \sqrt{2}$**

➤ $x - 1$ એ $p(x)$નો અવયવ છે. $\qquad \therefore p(1) = 0$ થાય.

$p(x) = 2x^2 + kx + \sqrt{2}$

$\therefore p(1) = 2(1)^2 + k(1) + \sqrt{2}$

$\therefore 0 = 2(1) + k + \sqrt{2}$

$\therefore 0 = 2 + k + \sqrt{2}$

$\therefore -2 - \sqrt{2} = k$

$\therefore -\left(2 + \sqrt{2}\right) = k$

$\therefore k = -\left(2 + \sqrt{2}\right)$

9. **નીચેનાં દરેકમાં $x - 1$ એ $p(x)$ નો એક અવયવ હોય તો k ની કિંમત શોધો : $p(x) = x^2 + x + k$**

➤ $x - 1$ એ $p(x)$નો અવયવ છે. $\therefore p(1) = 0$ થાય.

$p(x) = x^2 + x + k$

$\therefore p(1) = (1)^2 + (1) + k$

$0 = 1 + 1 + k$

$0 = 2 + k$

$\therefore k = -2$

10. બહુપદી $g(x)$એ આપેલ બહુપદી $p(x)$નો એક અવયવ છે કે નહિ તે અવયવ પ્રમેય પરથી નક્કી કરો :
$p(x) = x^3 - 4x^2 + 4x + 6$, $g(x) = x - 3$

➤ $x - 3 = 0$ $\therefore x = 3$

$p(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$

$\therefore p(3) = (3)^3 - 4(3)^2 + (3) + 6$

$= 27 - 36 + 3 + 6$

$= 36 - 36$

$\therefore p(3) = 0$

હા. આમ, $g(x)$એ $p(x)$નો અવયવ છે.

11. નીચે આપેલ બહુપદીમાંથી કઈ બહુપદીનો અવયવ $(x + 1)$ છે. તે નક્કી કરો : $x^3 + x^2 + x + 1$

➤ $(x + 1)$ એ આપેલ બહુપદી $p(x)$નો એક અવયવ હોય તો $p(x) = 0$ થાય અને $x + 1 = 0$

$\therefore x + 1 = 0$ $\therefore x = -1$

$p(x) = x^3 + x^2 + x + 1$

$\therefore p(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 + (-1) + 1$

$= (-1) + (1) + (-1) + 1$

$= -1 + 1 - 1 + 1$

$= 0$

$\therefore$ એટલે કે, $p(x)$ને $x + 1$ વડે નિ:શેષ ભાગી શકાય છે.

તેથી $x^3 + x^2 + x + 1$ નો અવયવ $x + 1$ છે.

12. અવયવ પાડો : $2x^2 + 7x + 3$

➤ $2x^2 + 7x + 3$ ને $ax^2 + bx + c$ સાથે સરખાવતાં $a = 2$, $b = 7$, $c = 3$

હવે $l + m = b = 7$ અને $lm = ac = 2 \times 3 = 6$

$\therefore 1 + 6 = 7$ અને $1 \times 6 = 6$

$l = 1$ અને $m = 6$

$b = 7 = 1 + 6$

હવે $2x^2 + 7x + 3 = 2x^2 + x + 6x + 3$

$= x(2x + 1) + 3(2x + 1)$

$= (2x + 1)(x + 3)$

આમ, $2x^2 + 7x + 3 = (2x + 1)(x + 3)$

13. અવયવ પાડો : $12x^2 - 7x + 1$

➤ અહીં, x^2નો સહગુણક 12 છે.

xનો સહગુણક 7 છે અને અચળ 1 છે.

$12x^2 - 7x + 1$ ને $ax^2 + bx + c$ સાથે સરખાવતાં $a = 12$, $b = -7$, $c = 1$

હવે $l + m = b = -7$

$lm = ac = 12 \times 1$

$l = (-4)$ અને $m = (-3)$

$b = -7 = -4 - 3$

હવે $12x^2 - 7x + 1 = 12x^2 - 4x - 3x + 1$

$= 4x(3x - 1) - 1(3x - 1)$

$= (3x - 1)(4x - 1)$

આમ, $12x^2 - 7x + 1 = (3x - 1)(4x - 1)$

14. **અવયવ પાડો : $6x^2 + 5x - 6$**

➤ $6x^2 + 5x - 6$ ને $ax^2 + bx + c$ સાથે સરખાવતાં $a = 6,\ b = 5,\ c = -6$

હવે $l + m = b = 5$ અને $lm = ac = 6 \times -6 = -36$

$\therefore\ l + m = 9 + (-4)$

$\therefore\ 9 + (-4) = 5$ અને $9 \times (-4) = -36$

હવે $6x^2 + 5x - 6 = 6x^2 + 9x - 4x - 6$

$= 3x\ (2x + 3) - 2(2x + 3)$

$= (2x + 3)\ (3x - 2)$

આમ, $6x^2 + 5x - 6 = (2x + 3)\ (3x - 2)$

15. **અવયવ પાડો : $3x^2 - x - 4$**

➤ $3x^2 - x - 4$ ને $ax^2 + bx + c$ સાથે સરખાવતાં $a = 3,\ b = -1,\ c = -4$

$l + m = b = -1$ અને $lm = ac = 3 \times -4 = -12$

$\therefore\ l + m = -4 + 3$

હવે $3x^2 - x - 4 = 3x^2 - 4x + 3x - 4$

$= x\ (3x - 4) + 1(3x - 4)$

$= (3x - 4)\ (x + 1)$

આમ, $3x^2 - x - 4 = (3x - 4)\ (x + 1)$

16. **અવયવ પાડો : $x^3 - 2x^2 - x + 2$**

➤ $x^3 - 2x^2 - x + 2 = x^3 - 2x^2 - x + 2$

$= x^3 - x - 2x^2 + 2$

$= x\ (x^2 - 1) - 2(x^2 - 1)$

$= (x^2 - 1)\ (x - 2)$

$= (x - 1)\ (x + 1)\ (x - 2)$

આમ, $x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x - 1)\ (x + 1)\ (x - 2)$

17. **અવયવ પાડો : $2y^3 + y^2 - 2y - 1$**

➤ આપણે પ્રયત્નો દ્વારા જાણીએ કે $p(1) = 0$ કે $p(-1) = 0$ છે.

$p(y) = 2y^3 + y^2 - 2y - 1$

$\therefore\ p(1) = 2(1)^3 + (1)^2 - 2(1) - 1$

$= 2(1) + (1) - 2 - 1$

$= 2 + 1 - 2 - 1$

$\therefore\ p(1) = 0$

$p(y) = 2y^3 + y^2 - 2y - 1$

$\therefore\ p(-1) = 2(-1)^3 + (-1)^2 - 2(-1) - 1$

$= 2(-1) + (1) + 2 - 1$

$= -2 + 1 + 2 - 1$

$\therefore\ p(-1) = 0$

$\therefore$ અવયવ પ્રમેયને આધારે કહી શકાય કે $[y - (-1)]$ અર્થાત્ $y + 1$ એ $p(x)$નો અવયવ છે.

∴ અવયવ પ્રમેયને આધારે કહી શકાય કે $y-1$ એ $p(y)$નો અવયવ છે.

$$\frac{2y^3+y^2-2y-1}{y-1} = 2y^2+3y+1$$

$$\begin{array}{r|l} & \quad 2y^2+3y+1 \\ \hline y-1 & 2y^3+y^2-2y-1 \\ & \underline{\overset{-}{2y^3}\overset{+}{-2y^2}} \\ & \quad 3y^2-2y-1 \\ & \quad \underline{\overset{-}{3y^2}\overset{+}{-3y}} \\ & \qquad\quad y-1 \\ & \qquad\quad \underline{\overset{-}{y}\overset{+}{-1}} \\ & \qquad\qquad 0 \end{array}$$

$\therefore 2y^3+y^2-2y-1 = (y-1)(2y^2+3y+1)$

$= (y-1)[2y^2+2y+y+1)]$

$= (y-1)[2y(y+1)+1\ (y+1)]$

$2y^3+y^2-2y-1 = (y-1)(y+1)(2y+1)$

$$\frac{2y^3+y^2-2y-1}{y+1} = 2y^2-y-1$$

➤ આપણે પ્રયત્નો દ્વારા જાણીએ કે $p(1)=0$ કે $p(-1)=0$ છે.

$p(y) = 2y^3+y^2-2y-1$

$\therefore p(1) = 2(1)^3+(1)^2-2(1)-1$

$= 2(1)+(1)-2-1$

$= 2+1-2-1$

$\therefore p(1) = 0$

$p(y) = 2y^3+y^2-2y-1$

$\therefore p(-1) = 2(-1)^3+(-1)^2-2(-1)-1$

$= 2(-1)+(1)+2-1$

$= -2+1+2-1$

$\therefore p(-1) = 0$

∴ અવયવ પ્રમેયને આધારે કહી શકાય કે $[y-(-1)]$ અર્થાત્ $y+1$ એ $p(x)$નો અવયવ છે.

∴ અવયવ પ્રમેયને આધારે કહી શકાય કે $y-1$ એ $p(y)$નો અવયવ છે.

$$\frac{2y^3+y^2-2y-1}{y-1} = 2y^2+3y+1$$

$$\begin{array}{r|l} & \quad 2y^2+3y+1 \\ \hline y-1 & 2y^3+y^2-2y-1 \\ & \underline{\overset{-}{2y^3}\overset{+}{-2y^2}} \\ & \quad 3y^2-2y-1 \\ & \quad \underline{\overset{-}{3y^2}\overset{+}{-3y}} \\ & \qquad\quad y-1 \\ & \qquad\quad \underline{\overset{-}{y}\overset{+}{-1}} \\ & \qquad\qquad 0 \end{array}$$

$\therefore 2y^3+y^2-2y-1 = (y-1)(2y^2+3y+1)$

$= (y-1)[2y^2+2y+y+1)]$

$$= (y-1)\,[2y\,(y+1) + 1\ \ (y+1)]$$

$$2y^3 + y^2 - 2y - 1 = (y-1)\,(y+1)(2y+1)$$

$$\frac{2y^3 + y^2 - 2y - 1}{y+1} = 2y^2 - y - 1$$

18. અવયવ પાડો : $x^3 - 3x^2 - 9x - 5$

➤ આપણે પ્રયત્નો દ્વારા જાણીએ કે $p(1) = 0$ છે કે $p(-1) = 0$ છે.

$p(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 5$

$\therefore\ p(1) = (1)^3 - 3(1)^2 - 9(1) - 5$

$= (1) - 3(1) - 9 - 5$

$= 1 - 3 - 9 - 5$

$= 1 - 17$

$\therefore\ p(1) = -16 \neq 0$ તેથી $p(1) \neq 0$.

$p(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 5$

$\therefore\ p(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) - 5$

$= (-1) - 3(1) + 9 - 5$

$= -1 - 3 + 9 - 5$

$\therefore\ p(-1) = 0$

અહીં, $p(-1) = 0$ શૂન્ય છે તેથી અવયવ પ્રમેયને આધારે $[x - (-1)]$ એટલે $x + 1$ એ $p(x)$નો અવયવ થાય.

$$\frac{x^3 - 3x^2 - 9x - 5}{x+1} = x^2 - 4x - 5$$

$$x^2 - 4x - 5$$

$$x+1 \,\big)\, x^3 - 3x^2 - 9x - 5$$

$$\underline{\underset{-}{x^3} \underset{-}{+ x^2}}$$

$$-4x^2 - 9x$$

$$\underline{\underset{+}{-4x^2} \underset{+}{- 4x}}$$

$$-5x - 5$$

$$\underline{\underset{+}{-5x} \underset{+}{- 5}}$$

$$0$$

$\therefore\ x^3 - 3x^2 - 9x - 5 = (x+1)\,(x^2 - 4x - 5)$

$= (x+1)\,[x^2 - 5x + x - 5]$

$= (x+1)\,[x\,(x-5) + 1\ \ (x-5)]$

$= (x+1)\,[(x-5)\,(x+1)]$

$\therefore\ x^3 - 3x^2 - 9x - 5 = (x+1)\,(x-5)\,(x+1)$

19. અવયવ પાડો : $x^3 + 13x^2 + 32x + 20$

➤ આપણે પ્રયત્નો દ્વારા જાણીએ કે $p(1) = 0$ છે કે $p(-1) = 0$ છે.

$p(x) = x^3 + 13x^2 + 32x + 20$

$\therefore\ p(1) = (1)^3 + 13(1)^2 + 32(1) + 20$

$= (1) + 13(1) + 32(1) + 20$

$= 1 + 13 + 32 + 20$

$\therefore\ p(1) = 66 \neq 0$

$p(x) = x^3 + 13x^2 + 32x + 20$

$\therefore\ p(-1) = (-1)^3 + 13(-1)^2 + 32(-1) + 20$

$= (-1) + 13(-1) + 32(-1) + 20$

$= (-1) + 13 - 32 + 20$

$= -33 + 33$

$\therefore\ p(-1) = 0$

અહીં, $p(-1) = 0$ શૂન્ય છે તેથી અવયવ પ્રમેયને આધારે $[x - (-1)]$ એટલે $x + 1$ એ $p(x)$નો અવયવ છે.

$$\frac{x^3 + 13x^2 + 32x + 20}{x+1} = x^2 + 12x + 20$$

$$\begin{array}{r|l} & x^2 + 12x + 20 \\ \hline x + 1 & x^3 + 13x^2 + 32x + 20 \\ & \underline{\overset{-}{x^3} + \overset{-}{x^2}} \\ & \quad 12x^2 + 32x \\ & \quad \underline{\overset{-}{12x^2} + \overset{-}{12x}} \\ & \qquad 20x + 20 \\ & \qquad \underline{\overset{-}{20x} + \overset{-}{20}} \\ & \qquad\qquad 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \therefore\ x^3 + 13x^2 + 32x + 20 &= (x + 1)\ (x^2 + 12x + 20) \\ &= (x + 1)\ [x^2 + 2x + 10x + 20] \\ &= (x + 1)\ [x\ (x + 2) + 10\ \ (x + 2)] \\ &= (x + 1)\ (x + 2)\ (x + 10) \end{aligned}$$