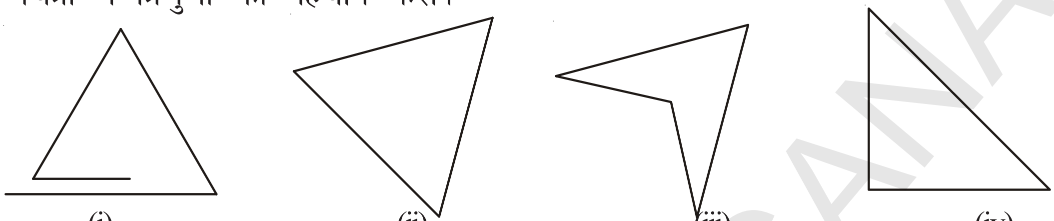
त्रिभुज और उसके गुण

(TRAINGLES AND ITS PROPERTIES)

5

5.0 **परिचय :** पिछली कक्षा में आपने त्रिभुजों के बारे में जानकारी प्राप्त की है। नीचे दिये गये चित्रों में त्रिभुजों की पहचान करो।

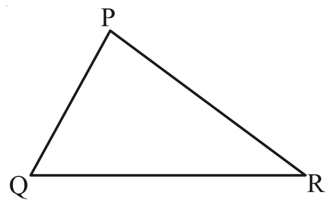


(i) (ii) (iii) (iv)

आपके द्वारा चुने हुए त्रिभुजों की जानकारी अपने मित्र को दीजिए और उत्तर का स्पष्टीकरण दीजिए।

तीन रेखा खंडों से निर्मित बंद (संवृत) आकृति को 'त्रिभुज' कहते हैं।

ΔPQR, में



(i) तीन भुजाएँ $\overline{PQ}, \overline{QR}, \overline{RP}$

(ii) तीन कोण $\angle PQR$, $\angle QRP$, $\angle RPQ$

(iii) शीर्ष P, Q, R

शीर्ष P भुजा $\overline{QR}$ के सम्मुख है। इसी प्रकार शीर्ष Q और R के सम्मुख भुजाओं के नाम लिखिए। इसी प्रकार भुजा $\overline{QR}$ के सम्मुख $\angle QPR$ है। क्या आप उस भुजा को बता सकते हैं जो $\angle PQR$के सम्मुख है।

प्रयास कीजिए:-

उमा के अनुसार त्रिभुज का निर्माण तीन **संरेखीय** बिन्दु के द्वारा होता है। क्या आप **मानते** हो? अपने स्पष्टीकरण **को** आप चित्र द्वारा दर्शाइए।

(जब तीन बिन्दु एक ही रेखा पर स्थित हों तो उन्हें **संरेखीय** बिन्दु कहते हैं।

नोट:- LM = रेखाखण्ड़LM की लम्बाई; $\overline{LM}$ = रेखाखण्ड़ LM

$\overrightarrow{LM}$ = किरण LM; $\overleftrightarrow{LM}$ = रेखा LM

5.1 त्रिभुजों का वर्गीकरण

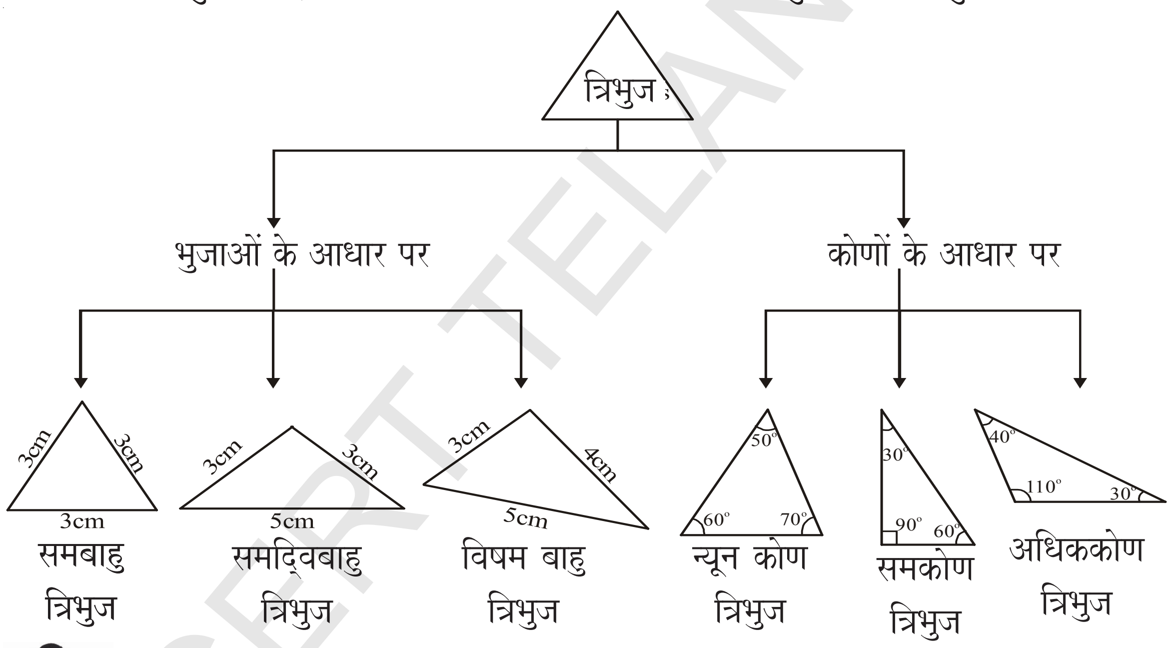
त्रिभुजों को उनकी भुजाओं के और कोणों के आधार पर वर्गीकृत किया जा सकता है।

भुजाओं के आधार पर त्रिभुजों को 3 प्रकार में वर्गीकृत किया जा सकता है।

- वह त्रिभुज जिसकी तीनों भुजाओं की लम्बाई समान है, समबाहु त्रिभुज कहलाता है।
- वह त्रिभुज जिसकी किन्हीं दो भुजाओं के माप समान होते हैं, उसे समद्विबाहु त्रिभुज कहते हैं।
- वह त्रिभुज जिसके किन्हीं दो भुजाओं के माप समान नहीं हैं, विषम बाहु त्रिभुज कहते हैं।

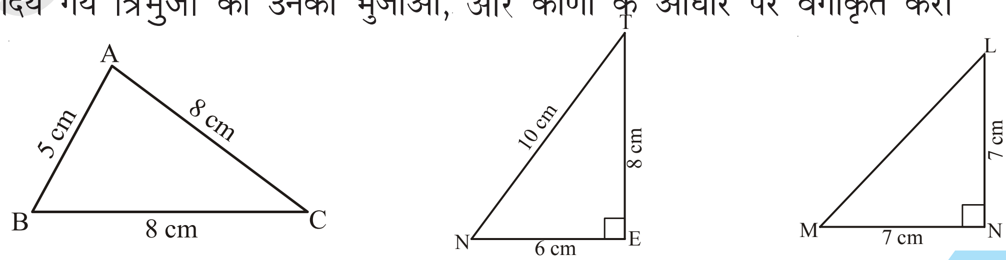
- कोणों के आधार पर भी त्रिभुजों को तीन प्रकारों में वर्गीकृत किया जा सकता है।

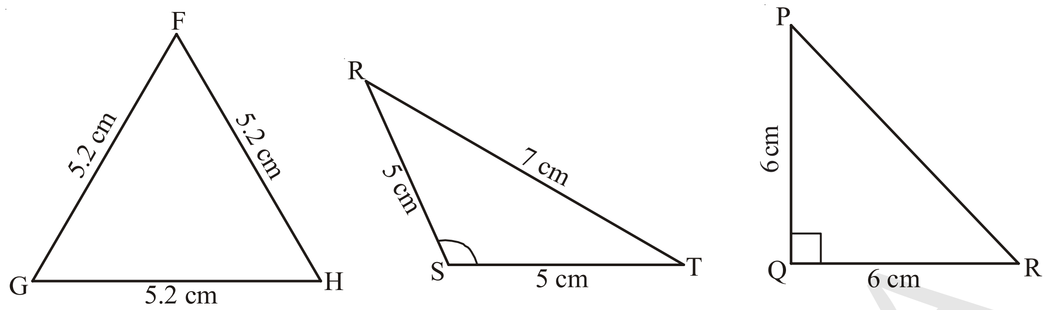
- यदि एक त्रिभुज का प्रत्येक कोण न्यून कोण हो, तो वह न्यूनकोण त्रिभुज कहलाता है।
- यदि किसी त्रिभुज का एक कोण अधिक कोण है तो वह अधिक कोण त्रिभुज कहलाता है।
- यदि किसी त्रिभुज का एक कोण समकोण हो तो उसे समकोण त्रिभुज या समत्रिभुज कहते हैं।



प्रयत्न कीजिए

1. नीचे दिये गये त्रिभुजों को उनकी भुजाओं, और कोणों के आधार पर वर्गीकृत करो





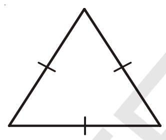
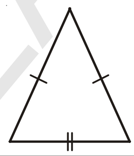
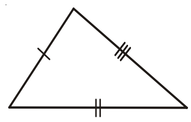
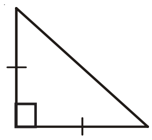
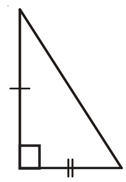
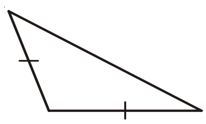
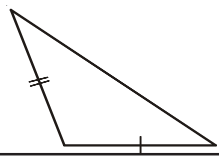
(2) ΔABC की तीनों भुजाओं एंव तीनों कोणों के नाम लिखिए।

(3) ΔPQR. में शीर्ष Q के सम्मुख भुजा लिखिए।

(4) Δ LMN में भुजा $\overline{LM}$ के सम्मुख कोण लिखिए।

(5) ΔRST में भुजा $\overline{RT}$ के सम्मुख का शीर्ष लिखिए।

यदि हम त्रिभुजों को उनकी भुजाओं एंव कोणों के संदर्भ में देखे तो हम निम्न प्रकार के त्रिभुज दर्शा सकते हैं।

त्रिभुज का प्रकार	सम बाहु	समद्विबाहु	विषम बाहु
न्यून कोण का			
समकोण का			
अधिक कोण का			

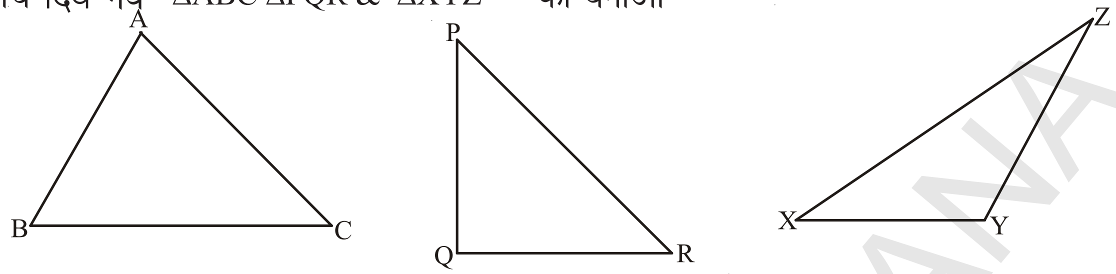
यह कीजिए

1. कार्डबोर्ड को काट कर विभिन्न प्रकार की त्रिभुजाकार आकृतियाँ बना लो। अपने कोई मित्र के साथ इन आकृतियों पर विचार करो।
2. रश्मि के अनुसार किसी भी त्रिभुज में दो समकोण नहीं हो सकते। क्या आप इस पर सहमत हैं? क्यों?
3. कमल के अनुसार किसी भी त्रिभुज में दो से अधिक न्यून कोण नहीं हो सकते। क्या आप सहमत हैं? क्यों?

5. त्रिभुज की भुजाओं में सम्बन्ध

5.2.1 त्रिभुज की दो भुजाओं की लम्बाई का योग

नीचे दिये गये ΔABC ΔPQR & ΔXYZ को बनाओ



पटरी की सहायता से ऊपर दिये त्रिभुजों की लम्बाई मापो और नीचे दी गई तालिका भरो।

त्रिभुज	Δ की भुजा	दो भुजाओं का योग	क्या यह सही है।	हाँ या नहीं
ΔABC	$AB =$	$AB + BC =$	$AB + BC > CA$	
	$BC =$	$BC + CA =$	$BC + CA > AB$	
	$CA =$	$CA + AB =$	$CA + AB > BC$	
ΔPQR	$PQ =$	$PQ + QR =$	$PQ + QR > RP$	
	$QR =$	$QR + RP =$	$QR + RP > PQ$	
	$RP =$	$RP + PQ =$	$RP + PQ > QR$	
ΔXYZ	$XY =$	$XY + YZ =$	$XY + YZ > ZX$	
	$YZ =$	$YZ + ZX =$	$YZ + ZX > XY$	
	ZX	$ZX + XY =$	$ZX + XY > YZ$	

उपरोक्त तालिका देखकर हम यह निष्कर्ष निकालते हैं कि किसी भी त्रिभुज में दो भुजाओं की लंबाई का योग तीसरी भुजा की लंबाई से अधिक होती है।

उदा- के लिए - Δ ABC में $AB + BC > CA$

$BC + CA > AB$

$CA + AB > BC$

5.2.2 त्रिभुज की किन्ही दो भुजाओं की लम्बाई में अंतर

पिछली तालिका के आधार पर **समान त्रिभुज लेते हुए अपने उत्तर को बताओ।**

त्रिभुज	भुजा की लम्बाई	दो भुजाओं का अंतर	क्या यह सही है?	हाँ या नहीं
ΔABC	AB =	BC–CA =	BC – AB < AC	
	BC =	CA–AB =	CA – AB < BC	
	CA=	AB–BC =	AB – BC < CA	
ΔPQR	PQ =	QR–RP =	QR – RP < PQ	
	QR =	RP–PQ =	RP – PQ < QR	
	RP =	PQ–QR =	PQ – QR < RP	
ΔXYZ	XY=	YZ–ZX =	YZ – ZX < XY	
	YZ =	ZX–XY =	ZX – XY < YZ	
	ZX =	XY–YZ =	XY – YZ < ZX	

उपरोक्त तालिका से यह निष्कर्ष निकलता है कि त्रिभुज की कोई दो भुजाओं का अंतर तीसरी भुजा से कम होता है।

उदाहरण ΔABC, में $AB - BC < CA$; $BC - AB < CA$

$BC - CA < AB$; $CA - BC < AB$

$CA - AB < BC$; $AB - CA < BC$

प्रयत्न करोः-

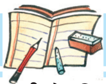
एक त्रिभुज की भुजाएँ 6 से.मी. व 9 से.मी. है तो तीसरी भुजा की संभावित लंबाई ज्ञात कीजिए।

उदा 1: क्या 6 सें.मी. 5 से.मी. और 8 से.मी. लंबाई वाली भुजाओं से त्रिभुज बनाना संभव है?

हलः- मानलो त्रिभुज की भुजाएँ
AB = 6 cm
BC = 5 cm
CA = 8 cm

त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं की लम्बाई
$AB + BC = 6 + 5 = 11 > 8$
$BC + CA = 5 + 8 = 13 > 6$
$CA + AB = 8 + 6 = 14 > 5$

क्योंकि त्रिभुज की भुजाओं की लम्बाई तीसरी भुजा की लम्बाई से अधिक है। इसलिए दी गई भुजाएँ त्रिभुज की भुजाएँ हैं अर्थात त्रिभुज संभव है।



अभ्यास - 1

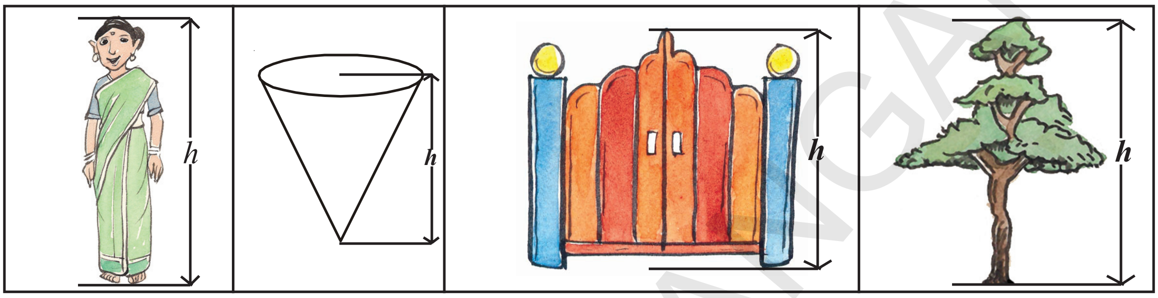
1.क्या नीचे दिये गये मापों के आधार पर त्रिभुज संभव है?

(i) 3 से.मी., 4 से.मी और 5 से.मी. (ii) 6 से.मी., 6 से.मी. और 6 से.मी.

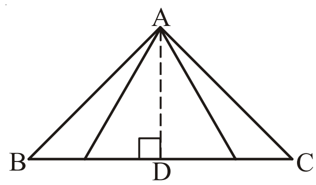
(iii) 4 से.मी., 4 से.मी. और 8 से.मी. (iv) 3 से.मी., 5 से.मी. और 7 से.मी.

5.3 त्रिभुज की ऊँचाई (Altitudes of Triangles)

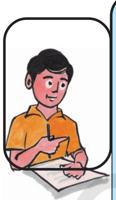
दैनिक जीवन में विभिन्न स्थितियों में आपने "ऊँचाई" का नाम सुना होगा। चित्रों में आप ऊँचाई किस प्रकार ज्ञात करोगे?



इन चित्रों में आप ऊँचाई ज्ञात करने के लिए वस्तुओं के शिखर से उसके आधार तक की लम्बाई को मापेंगे। आइए देखें कि त्रिभुज में ऊँचाई को किस प्रकार मापा जाता है।

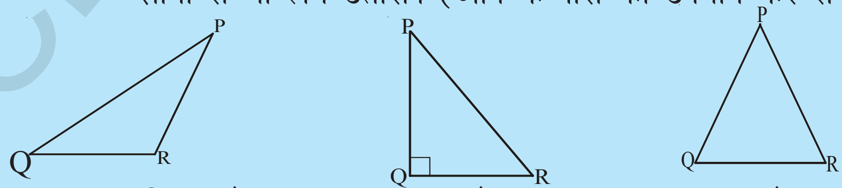


सामने दिये हुये चित्र में ΔABC में शीर्ष A से भुजा $\overline{BC}$ तक की दूरी को ऊचाई कहते हैं। परन्तु $\overline{A}$ से BC.पर कई रेखाखण्ड़ बना सकते हैं। इसमें से कौनसी रेखाखण्ड ऊँचाई दर्शायेगी। **त्रिभुज की ऊँचाई वह रेखा AD है जो BC पर लम्ब है।** इसलिए त्रिभुज के शीर्षों से उसके सामने की भुजाओं पर डाला गया लम्ब त्रिभुज का 'लंब' या 'ऊँचाई' कहलाता है।



प्रयत्न करो

(i) **निम्न** त्रिभुजों **पर** शीर्ष P से रेखा QR पर लंब बनाओ। इसी प्रकार अन्य दो शीर्षों से भी लंब उतारो। (आप कम्पास का उपयोग कर सकते हो)

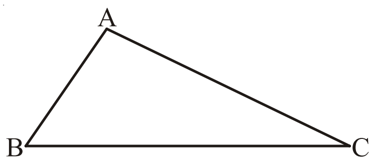


अधिक कोण समकोण न्यून कोण

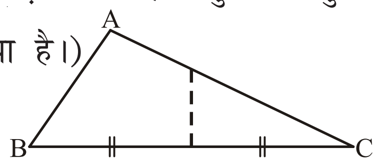
(ii) क्या लंब हमेशा त्रिभुज के अंदर ही स्थित रहता है?

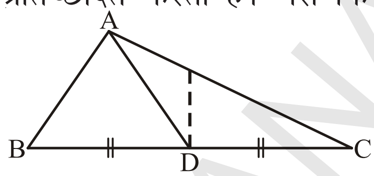
(iii) क्या आप उस त्रिभुज के बारे में सोच सकते **हो** जिसमें दो लंब उस त्रिभुज की दो भुजाएँ हों।

5.4 त्रिभुज की मध्यिकाएँ (Medians)

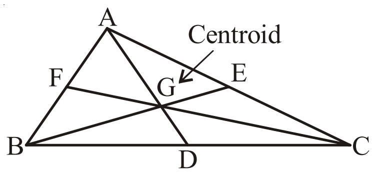


ΔABC को पेपर पर बनाकर उसे काट लो। अब त्रिभुज को इस प्रकार मोड़ों की शीर्ष B और C आपस में मिलें। जिस रेखा पर त्रिभुज को मोड़ा गया वह त्रिभुज की भुजा $\overline{BC}$ को प्रतिच्छेदित करती हैं। जैसे कि चित्र (i) में दिखाया गया है।)





$\overline{BC}$ के मध्य बिन्दु को D से दर्शाया गया है। (चित्र ii) इसी प्रकार शीर्ष A और C को मिलाओ। जिस रेखा पर त्रिभुज को मोड़ा गया वह त्रिभुज की भुजा $\overline{AC}$ को प्रतिच्छेदित करती हैं। $\overline{AC}$ का प्रतिच्छेदित बिन्दु इस रेखा का मध्य बिन्दु होगा। शीर्ष B से इस बिन्दु को मिलाओ और उसे E से दर्शाओ। अन्त में त्रिभुज को इस प्रकार मोड़ो कि A शीर्ष B शीर्ष से मिले। जिस रेखा पर त्रिभुज को मोड़ा गया वह उसे $\overline{AB}$ पर प्रतिच्छेदित करती है। इसका कटान बिन्दु $\overline{AB}$ का मध्य बिन्दु होगा। मान लो इसे F द्वारा दर्शाया गया। रेखाखण्ड $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ $\overline{CF}$ त्रिभुज के शीर्षों के सम्मुख भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को जोड़ते हैं और इन्हें हम त्रिभुज की मध्यिकाएँ कहते हैं।



चित्र से हम निष्कर्ष पर पहुंचते हैं कि तीन माध्यिकाएं त्रिभुज के अन्तःभाग पर प्रतिच्छेदित होती हैं और इस प्रतिच्छेदित बिन्दु को त्रिभुज का 'गुरुत्वकेन्द्र' (Centroid) कहते हैं।

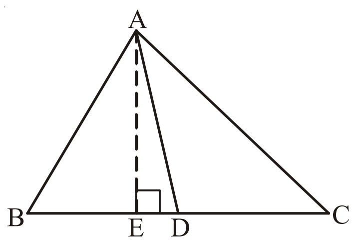
इस प्रकार त्रिभुज के किसी शीर्ष से उसके सामने की भुजा के मध्य बिन्दु को मिलाने वाले रेखाखंड को माध्यिका कहते हैं। माध्यिकाओं के कटान बिन्दु को गुरुत्वकेन्द्र कहते हैं।

प्रयत्न करो:-

एक पेपर को समकोण त्रिभुज और अधिक कोणीय त्रिभुज को काट कर उनके गुरुत्वकेन्द्र ज्ञात करो

अभ्यास - 2

1. ΔABC, में $\overline{BC}$ का मध्य बिन्दु D है



(i) $\overline{AD}$ को ____________________ कहते हैं।

(ii) $\overline{AE}$ को ____________________ कहते हैं।

2. एक ऐसे त्रिभुज **का नाम** बताइए जिसके दो लंब उसकी दो भुजाएं हों।

3. क्या माध्यिका हमेशा त्रिभुज के अन्तःभाग में होती है?

4. क्या लंब हमेशा त्रिभुज के अन्तःभाग में होता है।

5. (i) ΔXYZ में शीर्ष Y की सम्मुख भुजा लिखिए

   (ii) ΔPQR में भुजा $\overline{PQ}$ के सम्मुख कोण को लिखिए

   (iii) ΔABC. में भुजा $\overline{AC}$ के सम्मुख शीर्ष को लिखिए

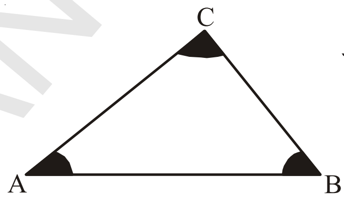
5.5 त्रिभुज के गुण

5.5.1 त्रिभुज के कोण-योग का गुण

आइये हम इस गुण को निम्न चार कार्यकलापों द्वारा समझेंगे ।

कार्यकलाप 1

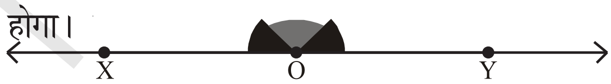
1. एक सफेद पेपर शीट पर त्रिभुज ABC उतारिए। रंगीन पेंसिल से त्रिभुज के कोण अंकित कीजिए। (जैसे चित्र दिखाया गया है।)



2. एक कैंची द्वारा तीनों कोणीय क्षेत्रों को काटिए।

3. रेखा XY खींचो और बिन्दु '0' को अंकित करो

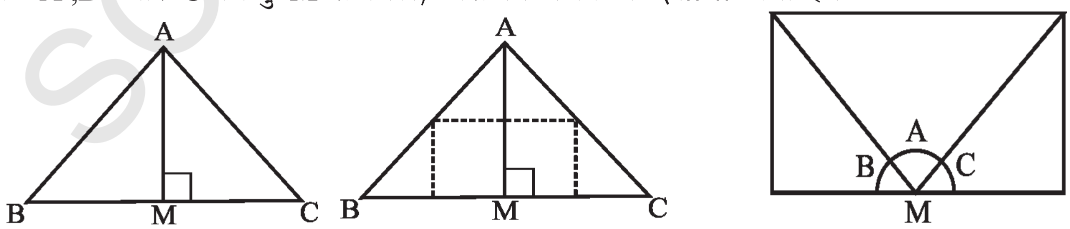
4. इन टुकड़ों को (कोणीय) को '0' पर इस प्रकार व्यवस्थित करो कि वे 0 पर कोण बनायें। इन तीन कोणों का योग 180^0 होगा।



कार्यकलाप 2

एक पेपर के टुकड़े को त्रिभुज आकार में काटो और इसके सिरों पर ABC अंकित करो।

अब ΔABC. को मोड़कर लंब $\overline{AM}$ बनाओ ΔABC के 3 सिरों को इस प्रकार मोड़ों के तीनों शीर्ष A ,B और C बिन्दु M से मिलें, जैसे कि चित्र में दर्शाया गया है।

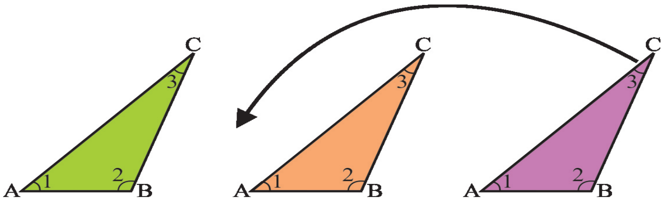


(i) (ii) (iii)

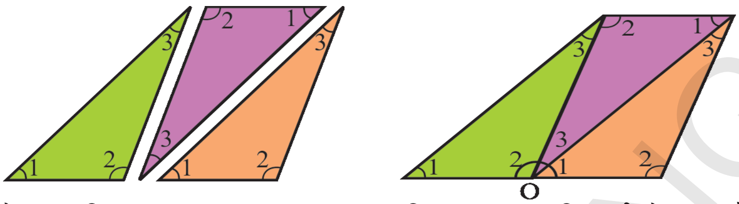
आप देखेंगे कि ΔABC. के तीनों कोण एक सरल रेखा बनाते हैं। अतः $\angle A + \angle B + \angle C = 180^o$.

कार्यकलाप 3

त्रिभुज ABC के कोई तीन आकार चित्र में दिखाए अनुसार लीजिए। **नीचे दिखाये गये अनुसार कोणों को** 1, 2 **और** 3 **से संकित कीजिए।**



अब त्रिकोणीय त्रिभुजों को चित्र में दिखाये अनुसार व्यवस्थित कीजिए।



आपको '0' बिन्दु पर $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3$ किस प्रकार दिखाई दे रहा है?

आप देखेंगे कि तीन कोण एक सरल रेखा बनायेंगे और इन कोणों का योग 180^0 होगा।

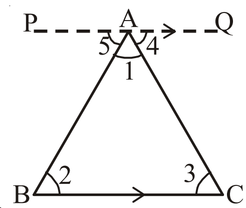
कार्यकलाप 4

एक कागज पर ΔABC, ΔPQR तथा ΔXYZ को उतारो और **चाँदे की सहायता से** प्रत्येक कोण मापों-

त्रिभुज का नाम	कोणों का मापन	कोणों के मापन का योग
ΔABC	$\angle A$ =....., $\angle B$ =....., $\angle C$ =.....,	$\angle A + \angle B + \angle C =$
ΔPQR	$\angle P$ =....., $\angle Q$ =....., $\angle R$ =.....,	$\angle P + \angle Q + \angle R =$
ΔXYZ	$\angle X$ =....., $\angle Y$ =....., $\angle Z$ =.....,	$\angle X + \angle Y + \angle Z =$

कोण मापन में यदि छोटी त्रुटियों को छोड़ दिया जाये तो आप पायेंगे कि त्रिभुज के तीन कोणों का योग 180^0 होगा। इस प्रकार औपचारिक तौर पर आप कह सकते हैं कि त्रिभुज के तीन कोणों का योग 180^0 है। **तर्क-वितर्क द्वारा अब आप औपचारिक रूप से यह कने के लिए तैयार है कि त्रिभुज के तीनों कोणों का योग** 180^0**है।**

त्रिभुज के कोण-योग गुण की उपपत्ति



कथन : त्रिभुज के तीन कोणों का योग 180^0 होता है।

दिया गया है : त्रिभुज ABC

सिद्ध करने के लिए : $\angle A + \angle B + \angle C = 180^o$.

रचना : ΔABC के शीर्ष A से $\overleftrightarrow{PQ}$ एक रेखा खंड $\overline{BC}$ के समानांतर खींचो।

सिद्ध करो :

चित्र में दर्शाये अनुसार

$\angle 2 = \angle 5$ (एकान्तर के कोण) - 1

$\angle 3 = \angle 4$ (एकान्तर के कोण) -2

$\angle 2 + \angle 3 = \angle 5 + \angle 4$ (1 और 2 को जोड़ने पर)

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = \angle 1 + \angle 5 + \angle 4$ दोनों ओर $\angle 1$ को जोड़ने पर)

लेकिन $\angle 1 + \angle 5 + \angle 4 = 180^{\circ}$ (रेखीय कोणों का योग)

इसलिए, $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^{\circ}$

$\therefore \angle A + \angle B + \angle C = 180^{\circ}$.

अर्थात त्रिभुज के तीन कोणों का योग 180° होता है।

उदाहरण 1: यदि ΔABC, में $\angle A = 30^{\circ}$, $\angle B = 45^{\circ}$, तो $\angle C$. ज्ञात कीजिए

हलः- ΔABC, में $\angle A + \angle B + \angle C = 180^{\circ}$ (Δ के तीन कोणों का योग 180° होता है)

$30^{\circ} + 45^{\circ} + \angle C = 180^{\circ}$ ($\angle A$ तथा $\angle B$ का मान रखने पर)

$75^{\circ} + \angle C = 180^{\circ}$

$\angle C = 180^{\circ} - 75^{\circ}$

इसलिए $\angle C = 105^{\circ}$

उदाहरण 2 : ΔABC, में यदि $\angle A = 3\angle B$ और $\angle C = 2\angle B$. तो तीनों कोणों को ज्ञात करो

हलः- $\angle A + \angle B + \angle C = 180^{\circ}$ (Δके तीन कोणों का योग)

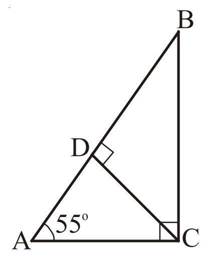
$3\angle B + \angle B + 2\angle B = 180^{\circ}$ [$\angle A = 3\angle B, \angle c = 2\angle B$]

$6\angle B = 180^{\circ}$

इसलिए $\angle B = 30^{\circ}$

इसलिए $\angle A = 3\angle B = 3 \times 30^{\circ} = 90^{\circ}$

अतः $\angle C = 2\angle B = 2 \times 30^{\circ} = 60^{\circ}$



उदाहरण 3 : ΔABC समकोण हैं और $CD \perp AB$, $\angle A = 55^{\circ}$ तो

(i) $\angle ACD$ (ii) $\angle BCD$ (iii) $\angle ABC$ ज्ञात करो .

हलः- In ΔACD में

$\angle CAD + \angle ADC + \angle ACD = 180^{\circ}$ (Δ के तीन कोणों का योग 180° होता है)

$55^o + 90^o + \angle ACD = 180^o$ ($\angle A$ तथा $\angle D$ का मान रखने पर)

$145^o + \angle ACD = 180^o$

$\angle ACD = 180^o - 145^o = 35^o$

इसलिए $\angle ACD = 35^o$

(ii) ΔABC में

$\angle ACB = 90^o$

इसलिए $\angle ACD + \angle BCD = 90^o$ (**चित्र से** $\angle ACB = \angle ACD + \angle BCD$)

$35^o + \angle BCD = 90^o$ ($\angle ACD = 35^o$ --1 से)

$\angle BCD = 90^o - 35^o = 55^o$

(iii) ΔABC में

$\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 180^o$ (त्रिभुज के तीन कोणों का योग 180^o होता है)

$\angle ABC + 90^o + 55^o = 180^o$ (दिया गया है)

$\angle ABC + 145^o = 180^o$

$\angle ABC = 180^o - 145^o$

इसलिए $\angle ABC = 35^o$

उदाहरण 4 : एक त्रिभुज के कोणों का अनुपात 2:3:4 है तो कोणों को ज्ञात कीजिए

हल:- कोणों क अनुपात = 2:3:4

अनुपातों का योग 2+3+4=9

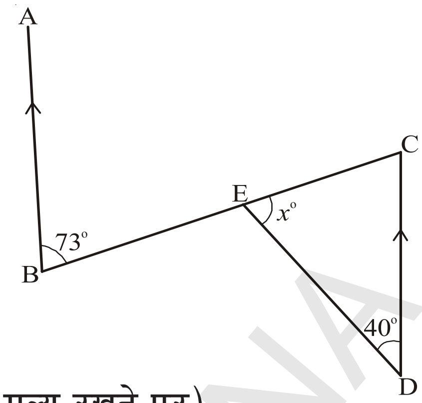
इसलिए पहला कोण $= \frac{2}{9} \times 180^o = 40^o$

दूसरा कोण $= \frac{3}{9} \times 180^o = 60^o$

तीसरा कोण $= \frac{4}{9} \times 180^o = 80^o$

इसलिए 40^o, 60^o and 80^o. त्रिभुज के कोण हैं।

उदाहरण 5 : दिये हुए चित्र में 'x' ज्ञात कीजिए।



हलः- : $\angle ECD = \angle ABC = 73^o$

(**क्योंकि** AB || CD **ये दोनों कोण** एकान्तर कोण हैं)

ΔECD में

$\angle CED + \angle EDC + \angle DCE = 180^o$

(त्रिभुज के तीन कोणों का योग)

$x^o + 40^o + 73^o = 180^o$ **(दिये गये मूल्य रखने पर)**

$x^o + 113^o = 180^o$

$x^o = 180^o - 113^o$

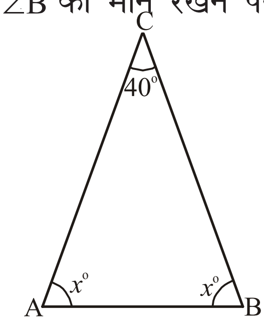
$x^o = 67^o$

उदाहरण 6 : ΔABC में एक कोण 40^o है और अन्य दो कोण समान हैं तो प्रत्येक **समान** कोण **का मूल्य** ज्ञात कीजिए

हलः- मान लो $\angle C = 40^o$ और $\angle A = \angle B = x^o$

$\angle A + \angle B + \angle C = 180^o$ (त्रिभुज के तीन कोणों का योग 180^o होता है)

$x^o + x^o + 40^o = 180^o$ ($\angle A$ तथा $\angle B$ का मान रखने पर)



$2x^o + 40^o = 180^o$

$2x = 180^o - 40^o$

$2x = 140^o$

$x^o = 70^o$

इसलिए प्रत्येक समान कोण $= 70^o$

उदाहरण 7 : नीचे दिये चित्र में ΔABC की AB तथा AC भुजाओं पर D और E बिन्दु हैं।

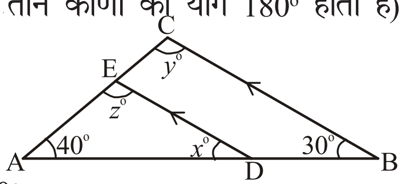
DE || BC. यदि $\angle B = 30^o$ and $\angle A = 40^o$, तो (i) x (ii) y (iii) z ज्ञात कीजिए

हलः- (i) $\angle ADE = \angle ABC$ (चूंकि DE || BC और $\angle D$ एंव $\angle B$ संगत कोण है)

इसलिए $x^o = 30^o$

(ii) ΔABC में

$\angle A + \angle B + \angle C = 180^o$ (त्रिभुज के तीन कोणों का योग 180^o होता है)



$40^o + 30^o + y^o = 180^o$

$70^o + y^o = 180^o$

इसलिए $y^o = 180^o - 70^o = 110^o$

(iii) Δ ADE में

$\angle D + \angle A + \angle E = 180^o$ (त्रिभुज के तीन कोणों का योग 180^o होता है)

$30^o + 40^o + z^o = 180^o$

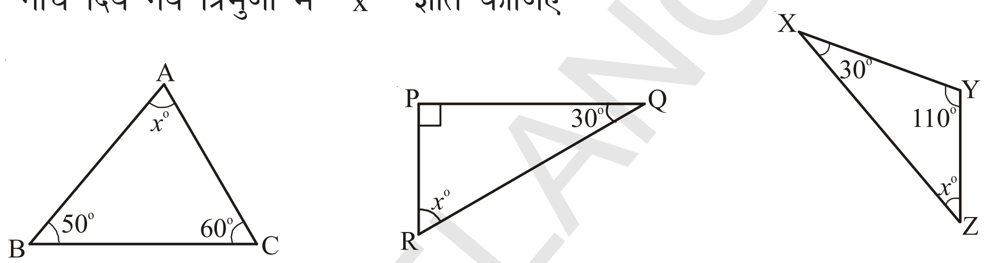
$70^o + z^o = 180^o$

$z^o = 180^o - 70^o$

$z^o = 110^o$

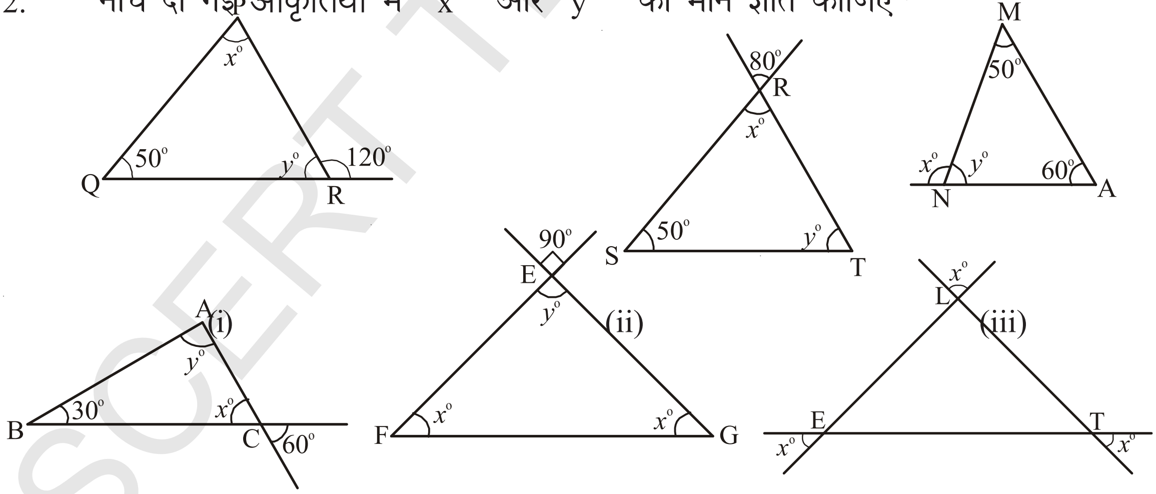
अभ्यास - 3

1. नीचे दिये गये त्रिभुजों में 'x' ज्ञात कीजिए



(i) (ii) (iii)

2. नीचे दी गई आकृतियों में 'x' और 'y' का मान ज्ञात कीजिए



(iv) (v) (vi)

3. नीचे त्रिभुज के दो कोण दिये गये हैं। तीसरा कोण ज्ञात कीजिए।

(i) $38^o, 102^o$ (ii) $116^o, 30^o$ (iii) $40^o, 80^o$

4. एक समकोणीय त्रिभुज का एक कोण 30^0 हो तो अन्य न्यून कोण ज्ञात कीजिए।

5. नीचे दिये हुए कथनों का सत्य या असत्य लिखिए।

   (i) एक त्रिभुज में दो सम कोण होते हैं। ( )

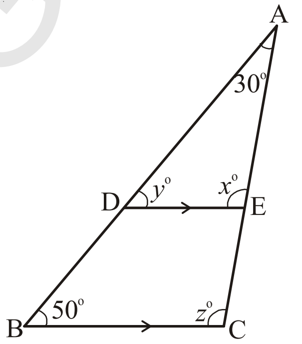
   (ii) एक त्रिभुज में दो न्यून कोण होते हैं। ( )

   (iii) एक त्रिभुज में दो अधिक कोण होते हैं। ( )

   (iv) त्रिभुज का प्रत्येक कोण से कम होता है। ( )

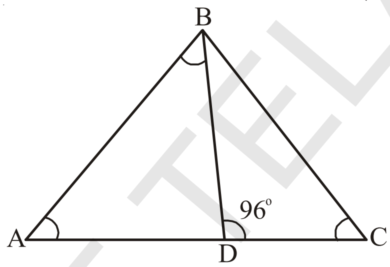
6. एक त्रिभुज के कोणों का अनुपात 1:2:3 हो तो कोण ज्ञात कीजिए।

7. सामने दिये हुए चित्र में $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$, $\angle A = 30^o$ और $\angle B = 50^o$ तो x, y तथा z. का मान ज्ञात कीजिए।



8. नीचे दिये हुए चित्र में $\angle ABD = 3 \angle DAB$

   और $\angle BDC = 96^o$. तो $\angle ABC$ को ज्ञात कीजिए।

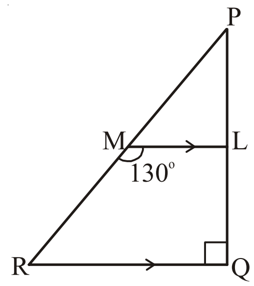


9. ΔPQR में $\angle P= 2 \angle Q$ और $2 \angle R = 3 \angle Q$ तो ΔPQR के कोण ज्ञात कीजिए।

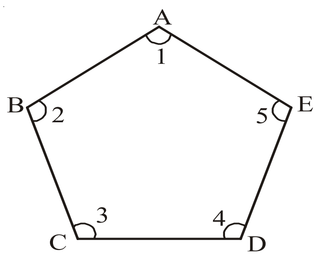
10. एक त्रिभुज के कोण 1 : 4 : 5 के अनुपात में हैं तो कोणों को ज्ञात करो।

11. एक समकोणीय त्रिभुज के न्यून कोण 2:3 के अनुपात में हों तो कोणों ज्ञात करो।

12. ΔPQR में Q समकोण है, $\overline{ML} \parallel \overline{RQ}$ और $\angle LMR = 130^o$. तो $\angle LPM$, $\angle PML$ और $\angle PRQ$ ज्ञात कीजिए



13. चित्र ABCDE, में $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5$ को ज्ञात कीजिए।



5.5.2 त्रिभुज का बाह्य कोण (Exterior Angle of Triangle)

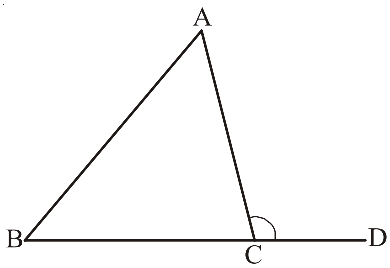


Figure 1

5.5.2 त्रिभुज का बाह्य कोण

ΔABC का चित्र उतारो और चित्र में दिखाये अनुसार $\overline{BC}$ को D तक बढ़ाओ शीर्ष C पर $\angle ACD$ बनाया गया जो कि ΔABC के बाह्य ओर स्थित है। इस कोण को हम ΔABC का बाह्य कोण कहते हैं।

$\angle ACD$ का संगत कोण $\angle BCA$ है और $\angle A$ तथा $\angle B$ त्रिभुज के अन्तःकोण हैं। जो कि बाह्य कोण के सम्मुख कोण हैं। अब $\angle A$ तथा कोण B को नीचे दिखाये गये चित्र के अनुसार व्यवस्थित करो।

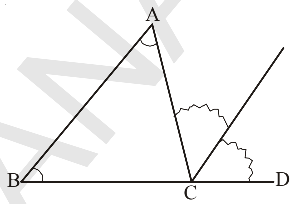


Figure 2

क्या ये चिपकाये गये कोण $\angle ACD$ को पूरी तरह ढक लेंगे?

क्या $\angle ACD = \angle A + \angle B$?

उपरोक्त क्रिया से यह सिद्ध होता है कि त्रिभुज का बाह्य कोण त्रिभुज के सम्मुख एकान्तर कोणों के योग के बराबर होता है।

इसे कीजिए -

ΔABC बनाओ और बाह्य कोण $\angle ACD$ की रचना करो। अब कंपास के चांदे द्वारा $\angle ACD$, $\angle AC$ तथा $\angle B$ को मापो। $\angle A + \angle B$ को ज्ञात करो और इसकी तुलना $\angle ACD$ से करो

क्या आपने पाया कि $\angle ACD = \angle A + \angle B$?

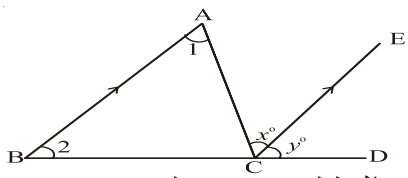
इस प्रकार चरणबद्ध यह सिद्ध हुआ कि त्रिभुज के बाह्य कोण त्रिभुज के सम्मुख अंतःकोणों के योग के बराबर होता है।

कथन : त्रिभुज के बाह्य कोण उसके सम्मुख के दो अन्तःकोणों के योग के बराबर होता है।

दिया गया है : ΔABC का बाह्य कोण $\angle ACD$ है।

सिद्ध करना है : $\angle ACD = \angle A + \angle B$

रचना : शीर्ष C से $\overline{BA}$ के समानांतर रेखा $\overline{CE}$ को खींचो



तर्क $\angle 1 = \angle x$ ($\overline{BA} \parallel \overline{CE}$ और $\overline{AC}$ तिर्यक रेखा है।)(इसलिए एकन्तर कोण समान होते हैं।)

$\angle 2 = \angle y$ ($\overline{BA} \parallel \overline{CE}$ और $\overline{BD}$ तिर्यक रेखा है। इसलिए संगत कोण समान होते हैं।)

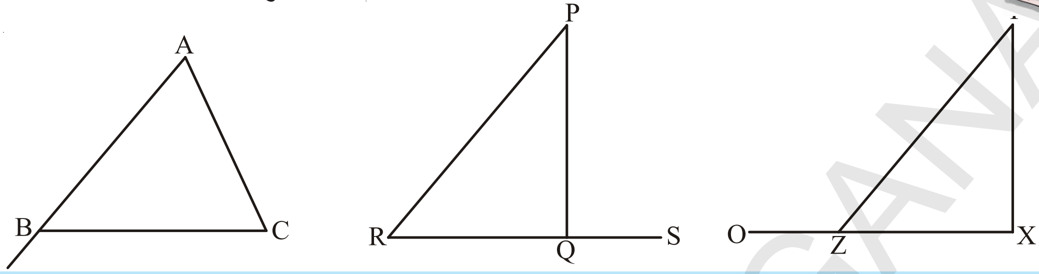
$\angle 1 + \angle 2 = \angle x + \angle y$

इसलिए, $\angle ACD = \angle 1 + \angle 2$ (जैसे चित्र में दिखाया गया है $\angle x + \angle y = \angle ACD$)

इसलिए किसी त्रिभुज का बाह्य कोण उसके सम्मुख अन्तःकोणों के योग के बराबर होता है। इस नियम को बाह्य कोण का नियम कहते हैं।

इसे कीजिए :

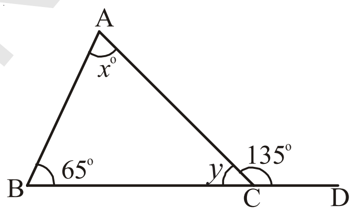
नीचे दिये हुए त्रिभुजों को उतारो। प्रत्येक मामले में जांच करो कि त्रिभुज को बाह्य कोण उसके सम्मुख अन्तःकोणों के योग के बराबर हैं–



उदाहरण 8 : नीचे दिये चित्र में x और y का मान ज्ञात करो

हलः- $\angle ACD = \angle ABC + \angle BAC$

(बाह्य कोण के नियम)



$$135^\circ = 65^\circ + x^\circ$$

$$135^\circ - 65^\circ = x^\circ$$

इसलिए $x^\circ = 70^\circ$

$\angle ABC + \angle BAC + \angle BCA = 180^\circ$ (त्रिभुज के कोणों का नियम))

$$65^\circ + 70^\circ + y^\circ = 180^\circ$$

$$135^\circ + y^\circ = 180^\circ$$

$$y^\circ = 180^\circ - 135^\circ$$

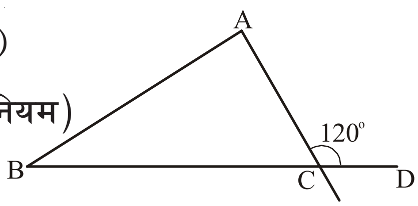
इसलिए $y^\circ = 45^\circ$

उदाहरण 9 : :- एक त्रिभुज का बाह्य कोण 120° है और त्रिभुज के सम्मुख अन्तःकोण 1:5 के अनुपात में हैं तो त्रिभुज के कोण ज्ञात कीजिए

हल : $\angle ACD = 120^\circ$ (चित्र के अनुसार)

$\angle ACD = \angle A + \angle B$ (**बाह्यकोण नियम**)

$\angle A + \angle B = 120^\circ$



$\angle B : \angle A = 1:5$

$$\angle B = \frac{1}{6} \times 120^\circ = 20^\circ$$

$$\angle A = \frac{5}{6} \times 120^\circ = 100^\circ$$

$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ (Δ के **कोण-योग-नियम**)

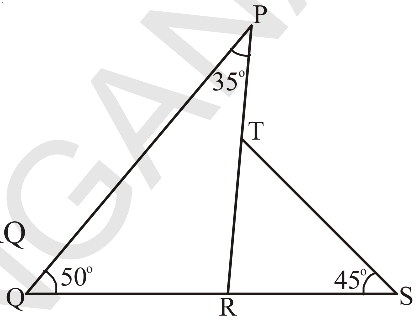
$100^\circ + 20^\circ + \angle C = 180^\circ$

इसलिए $\angle C = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$

उदाहरण 10 : नीचे दिये हुए चित्र में

(i) $\angle PRS$ (ii) $\angle PTS$ (iii) $\angle STR$ (iv) $\angle PRQ$

ज्ञात करो



हलः- (i) ΔPQR में $\angle PRS$ बाह्य कोण है और $\angle RQP$ तथा $\angle QPR$ त्रिभुज के सम्मुख अन्तःकोण हैं।

$\therefore \angle PRS = \angle RQP + \angle QPR$ (बाह्य कोण)

$\angle PRS = 50^\circ + 35^\circ = 85^\circ$

(ii) ΔRST में $\angle PTS$ बाह्य कोण है तथा $\angle SRT$ और $\angle RST$ त्रिभुज के सम्मुख अन्तःकोण हैं।

इसलिए $\angle PTS = \angle SRT + \angle RST$

$\angle PTS = 85^\circ + 45^\circ$ (चूंकि $\angle SRT = \angle PRS = 85^\circ$)

$\angle PTS = 130^\circ$

(iii) ΔRST में

$\angle STR + \angle RST + \angle SRT = 180^\circ$ (Δ कोणों का नियम)

$\angle STR + 45^\circ + 85^\circ = 180^\circ$

$\angle STR + 130^\circ = 180^\circ$

इसलिए $\angle STR = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$

(iv) $\angle PRQ + \angle PRS = 180^\circ$ (समरेखीय नियम)

$\angle PRQ + 85^\circ = 180^\circ$

$\angle PRQ = 180^\circ - 85^\circ$

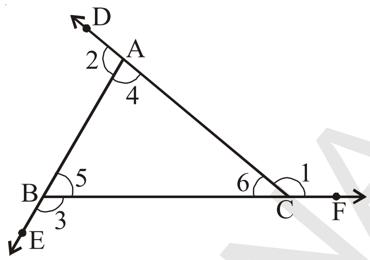
$\angle PRQ = 95^\circ$

उदाहरण 11 : सिद्ध करो कि त्रिभुज के बाह्य कोणों का योग 360^0 होता है।

हलः- $\angle 2 + \angle 4 = 180^o$ (रेखीय युग्म)

$\angle 3 + \angle 5 = 180^o$ (रेखीय युग्म)

$\angle 6 + \angle 1 = 180^o$ (रेखीय युग्म)



(1) (2) तथा (3) को जोड़ने पर

(1) (2) तथा (3) को जोड़ने पर

$\angle 2 + \angle 4 + \angle 3 + \angle 5 + \angle 6 + \angle 1 = 180^o + 180^o + 180^o$

$(\angle 4 + \angle 5 + \angle 6) + (\angle 1 + \angle 2 + \angle 3) = 540^o$

हम जानते हैं कि $\angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = 180^o$ (त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180 होता है।)

इसलिए $180^o + \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 540^o$

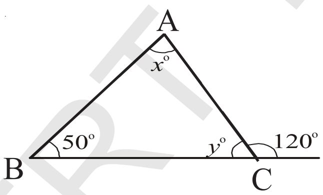
$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 540^o - 180^o$

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 360^o$

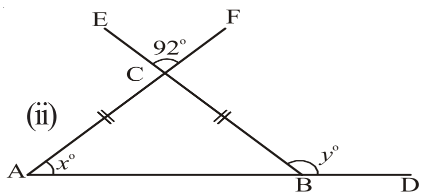
इसलिए त्रिभुज के बाह्य कोणों के योग 360^0 होता है।

उदाहरण 12 : निम्न चित्र में x और y का मान ज्ञात करो

(i)



(ii)



हलः- : (i) $\angle BAC + \angle ABC = \angle ACD$ (बाह्य कोण का नियम)

$x^o + 50^o$ D $= 120^o$

$x^o = 120^o - 50^o = 70^o$

$\angle ACB + \angle ACD = 180^o$ (रेखीय युग्म)

$y^o + 120^o = 180^o$

$y^o = 180^o - 120^o = 60^o$

(ii) $\angle ACB = \angle ECF = 92^o$ (एकान्तर के कोण)

$\angle CAB = \angle CBA$ (एक ओर के एकान्तर कोण)

ΔABC, $\angle BAC + \angle CBA + \angle ACB = 180^o$ (त्रिभुज के कोणों का नियम)

$x^o + x^o + 92^o = 180^o$

$2x = 180^o - 92^o = 88^o$

इसलिए $x^o = \frac{88}{2} = 44^o$

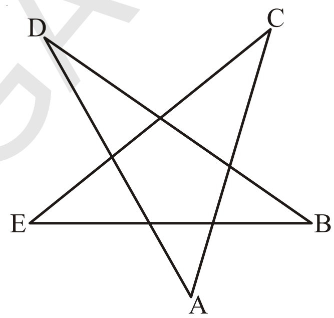
उसी प्रकार $\angle ABC + y^o = 180^o$ (रेखीय युग्म)

$y^o = 180^o - x^o$

इसलिए $y^o = 180^o - 44^o = 136^o$

उदाहरण13 : नीचे दिये गये चित्र में $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E$ का मान ज्ञात कीजिए

हलः- : इस चित्र को नामांकित करते पर



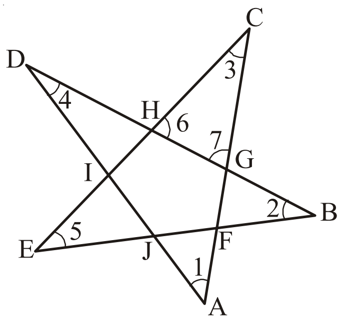
ΔGHC में $\angle 3 + \angle 6 + \angle 7 = 180^o$ ....(1)

(त्रिभुज के कोणों का नियम)

ΔEHB में $\angle 6 = \angle 5 + \angle 2$ ....(2)

ΔAGD में $\angle 7 = \angle 1 + \angle 4$ ....(3)

(बाह्य कोण का नियम)

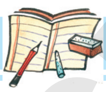


समीकरण (2)और (3) का मान (1) में रखने पर

$\Rightarrow \angle 3 + \angle 5 + \angle 1 + \angle 2 + \angle 4 = 180^o$

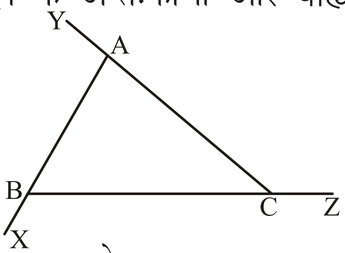
$\Rightarrow \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 = 180^o$

इसलिए , $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E = 180^o$

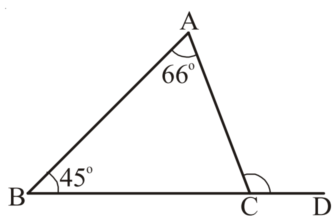


अभ्यास - 4

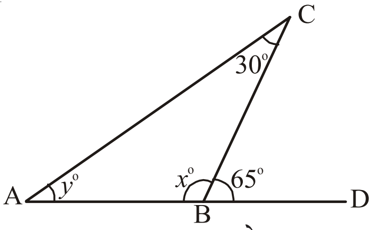
1. नीचे दिये गये त्रिभुज के अन्तःकोणों और बाह्य कोणों के नाम लिखिए।



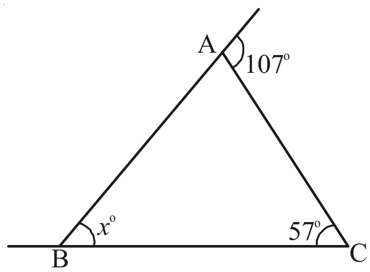
2. ΔABC, में $\angle ACD$.ज्ञात करो

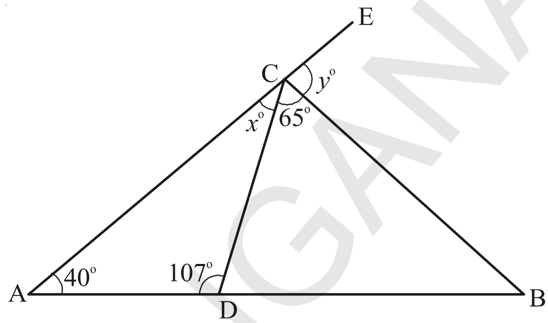


3. निम्न चित्र में x और y का मान ज्ञात करो

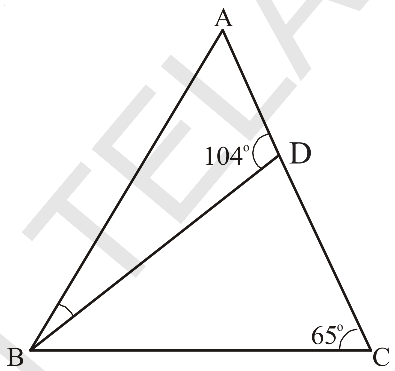


4. निम्न चित्रों में x और y का मान ज्ञात करो

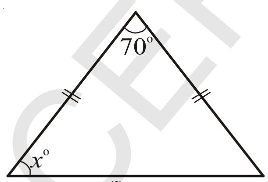




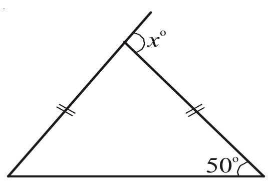
5. चित्र में $\angle BAD = 3\angle DBA$ तो $\angle CDB$, $\angle DBC$ और $\angle ABC$ ज्ञात करो



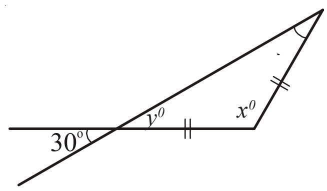
6. नीचे दिए हुये निम्न चित्रों में x और y का मान ज्ञात कीजिए।



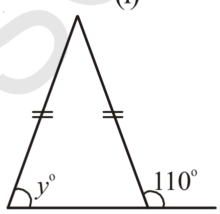
(i)



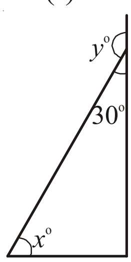
(ii)



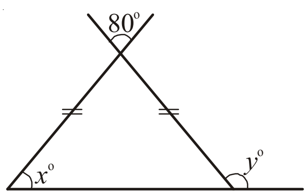
(iii)



(iv)



(v)



(vi)

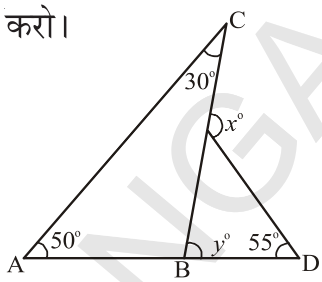
7. एक त्रिभुज का बाह्य कोण 125^0 है तथा अन्तः सम्मुख कोण 2:3 के अनुपात में हैं तो त्रिभुज के कोण ज्ञात कीजिए।

8. एक ΔPQR का बाह्य कोण $\angle PRS$ का मान 105^o है यदि $Q = 70^o$, तो $\angle P$ ज्ञात करो। क्या $\angle PRS > \angle P$ के?

9. एक त्रिभुज के बाह्य कोण का मान 130^0 है। इसके अन्तःसम्मुख कोणों में **से** एक कोण 60^0 हो तो इसका **दूसरा** अन्तःसम्मुख कोण ज्ञात करो।

10. एक त्रिभुज का बाह्य कोण 105^0 हैं। इसके अन्तःसम्मुख कोण 2:5 के अनुपात में हों तो त्रिभुज के कोण ज्ञात कीजिए।

11. निम्न चित्र में x और y का मान ज्ञात करो।



मुख्यांश

1 (i) त्रिभुज तीन रेखाखण्डों का बंद चित्र है।

(ii) भुजाओं के आधार पर त्रिभुज के तीन प्रकार होते हैं।

- त्रिभुज की तीन भुजाओं की लम्बाई समान हो, तो समबाहु त्रिभुज कहलाता है।
- त्रिभुज की दो भुजाओं की लंबाई समान हो, उसे समद्विबाहु त्रिभुज कहते हैं।
- वह त्रिभुज जिसकी तीनों भुजाएँ असमान होती हैं, विषमबाहु त्रिभुज कहलाता है।

(iii) कोणों के आधार पर त्रिभुज के तीन प्रकार होते हैं।

- वह त्रिभुज जिसके सभी कोण न्यूनकोण होते हैं उसे न्यून कोण त्रिभुज कहते हैं।
- वह त्रिभुज जिसका कोई एक कोण अधिक कोण हो उसे अधिक कोण त्रिभुज कहते हैं।
- वह त्रिभुज जिसका एक कोण समकोण हो (90^0) उसे समकोण त्रिभुज कहते हैं।

2. त्रिभुज में तीनकोण और तीन भुजाएँ होती हैं।

3. त्रिभुज की भुजाओं के गुण

(i) किसी भी त्रिभुज की दो भुजाओं का योगफल तीसरी भुजा की लम्बाई से अधिक होता है।

(ii) किसी भी त्रिभुज के दो भुजओं का अन्तर तीसरी भुजा से कम होता है।

4. किसी त्रिभुज के एक शीर्ष से खींची गई रेखा जो शीर्ष के सम्मुख भुजा को समद्विभाजित करती है, उसे **त्रिभुज की** माध्यिका कहते हैं।

5. किसी भी त्रिभुज के शीर्ष से डाली गयी **लम्ब** रेखा त्रिभुज की लम्बवत रेखा या त्रिभुज की ऊँचाई कहलाती है।

6. त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180^0 इसे त्रिभुज **का कोण-योग**-नियम कहते हैं।

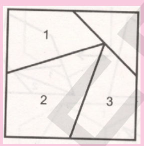
7. त्रिभुज के बाह्य कोण त्रिभुज के अन्तः सम्मुख कोणों के योग के बराबर होता है। इसे त्रिभुज का बाह्य कोण नियम कहते हैं।

8. रेखा, रेखा खण्ड और किरण **को दर्शाना**

LM = रेखा LM की लम्बाई; $\overline{LM}$ = रेखा खण्ड LM

$\overrightarrow{LM}$ = किरण LM ; $\overleftrightarrow{LM}$ = रेखा LM

कार्ड बोर्ड आकार द्वारा खेल



एक वर्गाकार कार्ड बोर्ड शीट लीजिए
भुजा की मध्य बिन्दु अंकित करो और
दर्शाये अनुसार रेखा बनाओ।
वर्ग को रेखाओं से चार भागों में
काटो और उन्हें **जमाकर त्रिभुज बनाओ।**