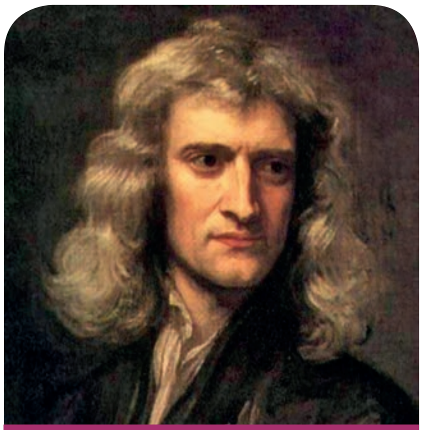
அத்தியாயம் 5

# வகை நுண்கணிதம்

## கற்றல் நோக்கங்கள்

இந்த அத்தியாயத்தை படித்தபின்பு பின்வரும் பாடக் கருத்துகளை மாணவர்கள் புரிந்து கொள்ள இயலும்

- எல்லை மற்றும் தொடர்ச்சி பற்றிய கருத்துரு
- எல்லைக்கான சூத்திரம் மற்றும் தொடர்ச்சி சார்புகளின் வரையறைகள்
- வகையீடுகளின் அடிப்படைக் கருத்துரு
- முதன்மைக் கோட்பாட்டு கொள்கையின் மூலம் வகையீடு காணும் முறை
- சார்புகளின் வகையீடுகளை சில நேரடி சூத்திரங்களின் வழியாக காணுதல் மற்றும் அதன் பயன்பாடு
- உயர் வரிசை வகையீடு காணும் முறை



சர். ஐசக் நியூட்டன்

G.W. லீப்னிட்ஸ்

## அறிமுகம்

கணக்கிடுவதற்காக பயன்படுத்தப்படும் கூழாங்கல் அல்லது ஒரு சிறிய கல் என்பதன் பொருளமைந்த லத்தீன் வார்த்தை நுண்கணிதம் ஆகும். மேலும், கணக்கிடுதல் என்ற வார்த்தை லத்தின் வார்த்தையிலிருந்து வருவிக்கப்பட்டதாகும். நுண்கணிதமென்பது மாற்றங்களுடன் தொடர்புடைய ஒரு முதன்மையான கணிதவியல் கருவியாகும். வகையிடலின் கருத்துருவாக்கம் என்பது நுண்கணித அறிவியலின் அடிப்படைக் கருவியாகும். நுண்கணிதம் என்பது தனித்த மாறியைப் பொறுத்து சார்ந்த மாறியில் ஏற்படும் மாற்றத்தின் வீதத்தை கணக்கிடக் கூடிய ஒரு முக்கியமான பகுதியாகும். சர். ஐசக் நியூட்டன் (1642 – 1727 பொ.ஆ.) மற்றும் ஜெர்மனியின் கணிதமேதை G.W. லீப்னிட்ஸ் (1646 – 1716 பொ.ஆ.) ஆகிய இருவரும் தனித்தனியாக மற்றும் ஏறத்தாழ ஒரே நேரத்தில் இப்பாடத்தைக் கண்டுபிடித்து மேம்படுத்தினார்கள்.

இந்த அத்தியாயத்தில் நாம் சார்புகள் மற்றும் அதன் வரைபடங்கள், எல்லை, வகையிடல் மற்றும் வகையிடல் உத்திகள் ஆகியவற்றைப் பற்றி அறிவோம்.



05_11th_BM-STAT_Ch-5-TM.indd 102 13-12-2021 11:29:27

## 5.1 சார்புகள் மற்றும் அதன் வரைபடங்கள் (Functions and their graphs)

### சில அடிப்படை கருத்துருக்கள்

### 5.1.1 அளவு (Quantity)

கூட்டல், கழித்தல், பெருக்கல் மற்றும் வகுத்தல் போன்ற அடிப்படை கணித செயல்முறைகள் கொண்டு பயன்படுத்தக் கூடிய அனைத்தும் அளவு எனப்படும்.

### 5.1.2 மாறிலி (Constant)

ஒரு அளவு, கணக்கீடுகளின் போது ஒரே மதிப்பை தக்க வைத்துக் கொண்டு இருந்தால் அவ்வளவை மாறிலி எனப்படும்.

அடிப்படையில் மாறிலி அளவைகள் இரு வகைப்படும்.

(i) **முழுமையான மாறிலிகள்:** முழுமையான மாறிலிகள் என்பது எந்வொரு கணித ஆய்வின் போதும் அதனுடைய மதிப்புகள் மாறாமல் இருக்கும். அதாவது, இவைகள் எப்பொழுதும் நிலையானவை. **உதாரணமாக:** $3, \sqrt{3}, \pi, \ldots$

(ii) **தன்னிச்சை மாறிலிகள்:** தன்னிச்சை மாறிலிகள் என்பது ஒரு கணக்கிடுதலில் முழுவதுமாக ஒரே மதிப்பைப் பெற்றிருக்கும். ஆனால் வெவ்வேறு தீர்வுகளைப் பெறுவதற்கு வெவ்வேறுவிதமான மதிப்புகளை வழங்கலாம். தன்னிச்சை மாறிலிகள் $a, b, c, \ldots$ போன்ற எழுத்துக்களால் குறிக்கப்படும்.

**உதாரணமாக:** $y = mx + 4$, என்ற சமன்பாட்டில் $m$ என்பது தன்னிச்சை மாறிலியாகும்.

### 5.1.3 மாறி (Variable)

ஒரு குறிப்பிட்ட கணக்கீட்டின் போது (எந்த ஒன்று பன்மதிப்பு கொண்டதாக அமைகிறதோ) வெவ்வேறான மதிப்புகளை பெறக்கூடிய ஒரு அளவானது மாறி ஆகும். மாறிகள் பொதுவாக $x, y, z$ என்ற ஆங்கில எழுத்துக்களால் குறிக்கப்படுகிறது.

**உதாரணமாக:** $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ என்ற நேர்கோட்டுச் சமன்பாட்டில் $x$ மற்றும் $y$ ஆகியவை மாறிகள். ஏனெனில் அவைகள் ஒரு நேர்கோட்டில் நகரும் புள்ளியின் அச்சு தொலைத்தூரங்களை நிர்ணயிக்கிறது. இங்கு $a$ மற்றும் $b$ என்பன, அச்சுக்களின் வெட்டு துண்டு மதிப்புகள் ஆகும். அவைகள் தன்னிச்சையானவை.

**மாறிகளின் இருவகைகள்:**

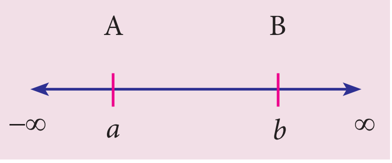
(i) **சாரா மாறி:** ஒரு மாறி என்பது தன்னிச்சையான மதிப்புகளைப் பெற்றிருக்கும் போது அம்மாறி சாரா மாறி எனப்படும்.

(ii) **சார்ந்த மாறி:** ஒரு மாறி மற்றொரு மாறியின் மதிப்புகளைச் சார்ந்து இருக்கும் போது அம்மாறி சார்ந்த மாறி எனப்படும்.

**உதாரணமாக:** $y = 5x^2 - 2x + 3$ என்ற சமன்பாட்டில் $x$ என்பது சாரா மாறி, $y$ என்பது சார்ந்த மாறி மற்றும் 3 என்பது மாறிலி

### 5.1.4 இடைவெளிகள் (Intervals)

மெய்யெண்களை, வடிவக் கணிதத்தில் ஒரு எண்கோட்டின் மீது உள்ள புள்ளிகளாக குறிப்பிடும் கோடு, மெய்கோடு (real line) என்றழைக்கப்படும்.




படம். 5.1

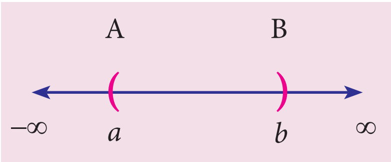
$R$ என்ற குறியீடு மெய்யெண்களின் தொகுதி அல்லது மெய்க்கோட்டினைக் குறிக்கும். ஒரு மெய்க்கோட்டின் உட்கணமானது இடைவெளி எனப்படும். இது குறைந்தது இரண்டு எண்களுக்கு இடையேயுள்ள அனைத்து மெய்யெண்களையும் பெற்றிருக்கும்.

#### (i) திறந்த இடைவெளி (Open interval)

$\{x : a < x < b\}$ என்ற கணம் திறந்த இடைவெளியாகும். இதனை $(a, b)$ எனக் குறிக்கலாம்.



05_11th_BM-STAT_Ch-5-TM.indd 103 13-12-2021 11:29:27




படம். 5.2

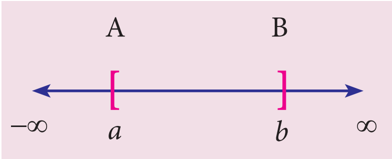
இந்த இடைவெளியில், $a$ மற்றும் $b$ ஆகிய எல்லைப் புள்ளிகள் உள்ளடங்காது.

உதாரணத்திற்கு, $(4, 7)$ என்ற திறந்த இடைவெளியில், 4 –ம் மற்றும் 7 -ம் இந்த இடைவெளியின் உறுப்புகள் அல்ல. ஆனால் 4.001 -ம் மற்றும் 6.99 -ம் இந்த இடைவெளியின் உறுப்புகள் ஆகும்.

### (ii) மூடிய இடைவெளி (Closed interval)

$\{x : a \leq x \leq b\}$ என்ற கணம் மூடிய இடைவெளியாகும்.

இதனை $[a, b]$ எனக் குறிக்கலாம்.




படம். 5.3

இந்த இடைவெளியில், $a$ மற்றும் $b$ ஆகிய எல்லைப் புள்ளிகளும் உள்ளடங்கும்.

உதாரணத்திற்கு, $[4, 7]$ என்ற மூடிய இடைவெளியில், 4 -ம் மற்றும் 7 -ம் இந்த இடைவெளியின் உறுப்புகளாகும்.

மேலும் பாதி மூடிய, பாதி திறந்த இடைவெளிகளைப் பற்றி நாம் இங்கு குறிப்பிட வேண்டியுள்ளது.

$(a, b]= \{x : a < x \leq b\}$ என்பது இடப்புறம் திறந்த இடைவெளி என அழைக்கப்படுகிறது

$[a, b)= \{x : a \leq x < b\}$ என்பது வலப்புறம் திறந்த இடைவெளி என அழைக்கப்படுகிறது.

சீராக அனைத்து நிலைகளிலும் $b - a = h$ என்பது இடைவெளியின் நீளம் என அழைக்கப்படுகிறது.

## 5.1.5 ஒரு புள்ளியின் அண்மையகம் (Neighbourhood of a point)

'$a$' என்பது ஏதேனும் ஒரு மெய்யெண் மற்றும் $\varepsilon > 0$ என்பது ஒரு மிக மிகச் சிறிய மெய்யெண் என எடுத்துக்கொள்வோம். $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ என்ற திறந்த இடைவெளி, புள்ளி '$a$' யின் $\varepsilon$–அண்மையகம் என அழைக்கப்படும். இதனை $N_{a,\varepsilon}$ என்ற குறியீட்டால் குறிக்கலாம்.

உதாரணமாக,

$$N_{5,\frac{1}{4}} = \left(5-\frac{1}{4}, 5+\frac{1}{4}\right) = \left\{x: \frac{19}{4} < x < \frac{21}{4}\right\}$$

$$N_{2,\frac{1}{7}} = \left(2-\frac{1}{7}, 2+\frac{1}{7}\right) = \left\{x: \frac{13}{7} < x < \frac{15}{7}\right\}$$

## 5.1.6 சார்பு (Function)

$X$ மற்றும் $Y$ என்பன மெய் எண்களைக் கொண்ட இரண்டு வெற்றற்ற கணங்கள் என்க. $X$ –ல் உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பையும் $Y$ –ல் உள்ள ஓரேயொரு உறுப்புடன் மட்டும் தொடர்பு படுத்தும் $f$ என்ற விதியானது கணம் $X$ லிருந்து $Y$ க்கான சார்பு ஆகும். இதனை $f : X \longrightarrow Y$ என எழுதலாம்.

கணம் $X$ –னை, சார்பு $f$ –ன் சார்பகம் என்றும், கணம் $Y$ –னை $f$ –ன் துணைச் சார்பகம் என்றும் கூறுவோம். மேலும், $f(X) = \{f(x) \,/\, x \in X\}$ என்பது $f$ –ன் வீச்சகம் எனப்படும். இங்கு $f(X) \subseteq Y$ என்பது தெளிவு.

$x$ இன் சார்பு என்பது பொதுவாக $f(x)$, என்ற குறியீட்டால் குறிக்கப்படுகிறது.

உங்களுக்கு தெரியுமா?

*1734 - 1735* ஆம் ஆண்டில் லியோனார்ட் ஆய்லரால் முதன் முதலில் சார்பின் குறியீடாக $y = f(x)$ பயன்படுத்தப்பட்டது.

## 5.1.7 சார்புகளின் வகைப்பாடு (Classification of functions)

சார்புகளை இருவகைப்படுத்தலாம் அவை,

### (i) இயற்கணிதச் சார்பு (Algebric function)

நான்கு அடிப்படை கணக்கீட்டு செயலிகள், மாறிலிகள் மற்றும் $x$ என்ற மாறியில் வெவ்வேறு அடுக்குகளைக் கொண்டு அமையும் தொகுப்பு இயற்கணிதச் சார்பாகும்.



05_11th_BM-STAT_Ch-5-TM.indd 104 13-12-2021 11:29:29

**உதாரணமாக** : $y = 3x^4 - x^3 + 5x^2 - 7$, $y = \frac{2x^3+7x-3}{x^3+x^2+1}$, $y = \sqrt{3x^2+6x-1}$ ஆகியன இயற்கணித சார்புகள் ஆகும்.

(a) $y = 3x^4 - x^3 + 5x^2 - 7$ என்ற சார்பு பல்லுறுப்புக் கோவை (அல்லது) விகிதமுறுமுழுவெண் சார்பு ஆகும்

(b) $y = \frac{2x^3+7x-3}{x^3+x^2+1}$ ஆனது ஒரு விகிதமுறுச் சார்பாகும்.

(c) $y = \sqrt{3x^2+6x-1}$ ஆனது ஒரு விகிதமுறாச் சார்பு ஆகும்.

(ii) **விஞ்சிய சார்பு (Transcendental function)**

இயற்கணிதமற்ற சார்பானது விஞ்சிய சார்பு எனப்படும்.

**உதாரணமாக:** $\sin x, \sin^{-1}x, e^x, \log_a x$ ஆகியன விஞ்சிய சார்புகள் ஆகும்.

(a) $\sin x$, $\tan 2x$, ... போன்ற சார்புகள் திரிகோணமிதி சார்புகள் எனப்படும்.

(b) $\sin^{-1} x$, $\cos^{-1} x$, ... போன்ற சார்புகள் நேர்மாறு திரிகோணமிதி சார்புகள் எனப்படும்

(c) $e^x, 2^x, x^x$, ... போன்ற சார்புகள் அடுக்குச் சார்புகள் எனப்படும்.

(d) $\log_a x$, $\log_e (\sin x)$, ... போன்ற சார்புகள் மடக்கைச் சார்புகள் எனப்படும்.

### 5.1.8 இரட்டைச் சார்புகள் மற்றும் ஒற்றைச் சார்புகள் (Even and odd functions)

$f(-x) = f(x)$ எனில், $f(x)$ ஆனது **இரட்டைச் சார்பு** என்று அழைக்கப்படும்

$f(-x) = -f(x)$ எனில் $f(x)$ ஆனது **ஒற்றைச் சார்பு** என்று அழைக்கப்படும்.

**உதாரணங்கள்:** $f(x) = x^2$ மற்றும் $f(x) = \cos x$ என்பன இரட்டைச் சார்புகளாகும்.

$f(x) = x^3$ மற்றும் $f(x) = \sin x$ என்பன ஒற்றைச் சார்புகளாகும்

**குறிப்பு**

$f(x) = x^3 + 5$ என்பது இரட்டைச் சார்பும் அல்ல, ஒற்றைச்சார்பும் அல்ல.

### 5.1.9 வெளிபடு மற்றும் உட்படு சார்புகள் (Explicit and implicit functions)

ஒரு சார்பில் சார்ந்த மாறியானது சில சாரா மாறிகளைக் கொண்டு வெளிப்படையாக வடிவமைக்கப்பட்டிருந்தால், அச்சார்பு **வெளிபடுச் சார்பு** எனப்படும்.

**உதாரணமாக:** $y = x^2 + 3$ மற்றும் $y = e^x + e^{-x}$ என்பன $x$-ல் அமைந்த வெளிப்படு சார்புகள் ஆகும்.

$x$ மற்றும் $y$ என்ற மாறிகள், $f(x,y) = 0$ என்ற சார்பில் தொடர்பு படுத்தப்பட்டு எந்த ஒரு மாறியும் நேரிடையாக மீதமுள்ள மாறிகளால் வடிவமைக்கப்படாமல் இருந்தால், சார்பு **உட்படு சார்பு** எனப்படும்

**உதாரணமாக:** $x^3 + y^3 - xy = 0$ என்பது உட்படு சார்பு ஆகும்.

### 5.1.10 மாறிலிச் சார்பு (Constant function)

$k$ என்பது ஒரு நிலையான மெய் எண் எனில் அனைத்து $x \in R$ க்கும், $f(x) = k$ என வரையறுக்கப்பட்டால் அச்சார்பானது மாறிலிச்சார்பு என அழைக்கப்படும்.

**உதாரணமாக:** $y = 3$, $f(x) = -5$ என்பன மாறிலிச் சார்புகள் ஆகும்.

**உங்களுக்கு தெரியுமா?**

$y = f(x)$ என்ற மாறிலிச் சார்பின் வரைபடம் $x$–அச்சுக்கு இணையான நேர்க்கோடு ஆகும்

### 5.1.11 சமனிச் சார்பு (Identity function)

ஒரு சார்பில் அதன் ஒவ்வொரு மெய்யெண்ணும் அதே மெய்யெண்ணுடன் தொடர்பு கொண்டிருந்தால் அது சமனிச்சார்பு என்போம். இது $I$ என்ற குறியீட்டால் குறிக்கப்படுகிறது.

அதாவது, அனைத்து $x \in R$ க்கு $f(x)=x$, எனுமாறு வரையறுக்கப்படின் $f$–ஐ சமனிச் சார்பு என்போம்.

**உதாரணமாக:** $A=\{1, 2, 3\}$ மற்றும் $f : A \to A$ இன் வரிசைப் படுத்தப்பட்ட ஜோடிகளின் கணம் $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ ஓர் சமனிச் சார்பு ஆகும்.

**உங்களுக்கு தெரியுமா?**

மெய்யெண்களின் மீதான சமனிச் சார்பின் வரைப்படமானது, ஆதியின் வழிச் செல்லும் ஒரு நேர்கோடு ஆகும். இது $x$-அச்சின் மிகை திசையுடன் $45^\circ$ கோணத்தை ஏற்படுத்தும்.

### 5.1.12 மட்டுச் சார்பு (Modulus function)

$f(x) = |x|$ இங்கு,

$$|x| = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases}$$ என்று

வரையறுக்கப்படின், $f(x)$ ஆனது மட்டுச்சார்பு எனப்படும். இதனை எண்ணளவைச் சார்பு என்றும் அழைக்கலாம்.

**குறிப்பு**

$|5| = 5,\ |-5| = -(-5) = 5$

| மேற்குறிப்பு | இதன் சார்பகம் $R$ மற்றும் வீச்சகம் $[0, \infty)$ ஆகும். |
|---|---|

### 5.1.13 குறிச் சார்பு (Signum function)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

என வரையறுக்கப்படின் $f(x)$ ஆனது குறிச் சார்பு எனப்படும்.

| மேற்குறிப்பு | இதன் சார்பகம் $R$ மற்றும் வீச்சகம் $\{-1, 0, 1\}$ ஆகும் |
|---|---|

### 5.1.14 படிச் சார்பு (Step function)

#### (i) மீப்பெரு முழுக்கள் சார்பு (Greatest integer function)

ஒரு மெய்யெண் $x$ இடத்து $x$ –ஐ விட மிகைப்படாத மீப்பெரு மெய் முழு எண் மதிப்பைப் பெறும் சார்பு, மீப்பெரு முழுக்கள் சார்பு எனப்படுகிறது. இதனை $\lfloor x \rfloor$ என குறிப்போம்.

அதாவது $f : R \longrightarrow R$ என்ற சார்பு

$f(x) = \lfloor x \rfloor$ என வரையறுக்கப்படுமாயின் அது மீப்பெரு முழுக்கள் சார்பு எனப்படும்.

**குறிப்பு**

$\lfloor 2.5 \rfloor = 2,\ \lfloor -2.1 \rfloor = -3,$
$\lfloor 0.74 \rfloor = 0,\ \lfloor -0.3 \rfloor = -1, \lfloor 4 \rfloor = 4.$

#### (ii) மீச்சிறு முழுக்கள் சார்பு (Least integer function)

ஒரு மெய்யெண் $x$ இடத்து $x$ –ஐ விட குறையாத மீச்சிறு மெய் முழு எண் மதிப்பைப் பெறும் சார்பு, மீச்சிறு முழுக்கள் சார்பு எனப்படுகிறது. இதனை $\lceil x \rceil$ என குறிப்போம்.

அதாவது $f : R \longrightarrow R$ என்ற சார்பு $f(x) = \lceil x \rceil$ என வரையறுக்கப்படுமாயின் அது மீச்சிறு முழுக்கள் சார்பு எனப்படும்.

**குறிப்பு**

$\lceil 4.7 \rceil = 5, \lceil -7.2 \rceil = -7,$
$\lceil 5 \rceil = 5, \lceil 0.75 \rceil = 1.$

| மேற்குறிப்பு | இச்சார்பின் சார்பகம் $R$ மற்றும் வீச்சகம் $Z$ [முழுக்களின் கணம்] ஆகும். |
|---|---|

### 5.1.15 விகிதமுறுச்சார்பு (Rational function)

சார்பு $f(x)$ ஆனது $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)},\ q(x) \neq 0$ என வரையறுக்கப்பட்டால் அதனை ஒரு விகிதமுறுச் சார்பு எனலாம்.



05_11th_BM-STAT_Ch-5-TM.indd 106 13-12-2021 11:29:30

**உதாரணமாக:** $f(x) = \frac{x^2+1}{x-3}, x \neq 3$ ஒரு விகிதமுறு சார்பு ஆகும்.

### 5.1.16 பல்லுறுப்புக் கோவைச் சார்பு (Polynomial function)

$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_n$ என வரையறுப்பின் $f$–ஐ ஒரு $n$–படியுள்ள பல்லுறுப்புக் கோவைச் சார்பு எனலாம். இங்கு $a_0, a_1, a_2, ..., a_n ; a_0 \neq 0$ என்பன மெய்யெண்கள், மற்றும் $n$ ஒரு குறைவிலா முழு எண்.

**உதாரணமாக:** $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 2x - 7$ ஆனது முப்படிகொண்ட பல்லுறுப்புக்கோவைச் சார்பாகும்.

### 5.1.17 நேர்கோட்டுச் சார்பு (Linear function)

$a \neq 0$ மற்றும் $a, b$ இவையிரண்டும் மெய்யெண்களாயின் $f(x) = ax + b$ –ஐ நேரியல் சார்பு என்போம்.

**உதாரணமாக:** $y = 2x + 3$ ஒரு நேரியல் சார்பு ஆகும்.

### 5.1.18 இருபடிச் சார்பு (Quadratic function)

$f(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c$ மற்றும் $a \neq 0$ என வரையறுக்கப்பட்டால் அச்சார்பு இருபடிச்சார்பு எனப்படும்.

**உதாரணமாக:** $f(x) = 3x^2 + 2x - 7$ ஓர் இருபடிச் சார்பாகும்.

### 5.1.19 அடுக்குச் சார்பு (Exponential function)

அனைத்து $x \in R$ க்கு $f(x) = a^x$, $a \neq 1$ மற்றும் $a > 0$ என வரையறுக்கப்பட்டால் அச்சார்பு அடுக்குச் சார்பு எனப்படும்.

**உதாரணமாக:**

$e^{2x}, e^{x^2+1}, 2^x$ ஆகியவை அடுக்குச் சார்புகள் ஆகும்.

| மேற்குறிப்பு | சார்பகம் $R$ மற்றும் வீச்சகம் $(0, \infty)$. மேலும் $(0, 1)$ ஆனது அச்சார்பின் வளைவரையின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளி. |
|---|---|

### 5.1.20 மடக்கைச் சார்பு (Logarithmic function)

$x > 0$, $a > 0$ மற்றும் $a \neq 1$ எனும்போது $f(x) = \log_a x$ –ஐ மடக்கைச் சார்பு என்போம்.

**உதாரணமாக:** $f(x) = \log_e(x+2)$, $f(x) = \log_e(\sin x)$ என்பன மடக்கைச் சார்புகள் ஆகும்.

| மேற்குறிப்பு | சார்பகம் $(0, \infty)$ மற்றும் வீச்சகம் $R$. மேலும் $(1, 0)$ ஆனது அச்சார்பின் வளைவரையின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளி. |
|---|---|

### 5.1.21 இரு சார்புகளின் கூடுதல், கழித்தல், பெருக்கல் மற்றும் வகுத்தல்

$f(x)$ மற்றும் $g(x)$ என்ற சார்புகளின் சார்பகங்கள், மற்றும் துணைச் சார்பகங்கள் முறையே சமமாக இருப்பின்

(i) $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$

(ii) $(fg)(x) = f(x)\, g(x)$

(iii) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ , $g(x) \neq 0$

(iv) $(cf)(x) = cf(x)$, $c$ ஒரு மாறிலி.

### 5.1.22 சார்பின் வரைபடம் (Graph of a function)

$(x, f(x))$ என்ற புள்ளிகளின் தொகுப்பு சார்பின் வரைபடமாகும். இங்கு $x$ என்பது சார்பின் சார்பகத்தின் மதிப்புகளாகவும், $f(x)$ என்பது சார்பின் வீச்சகத்தின் மதிப்புகளாகவும் இருக்கும்.

சார்பின் வரைபடம் வரையும்போது, தேவையான அளவுக்கு $(x, f(x))$ என்ற வரிசைச்ஜோடிகளை சார்பின் மீது கணக்கிட்டு, அதனை படத்தில் குறித்து மென்மையான வளைவரையால் (smooth curve) இணைக்கவும்.

**குறிப்பு**

ஒரு சார்பின் வரைபடத்திற்கான வரைபடத்தை வெள்ளைத் தாளில் வரைந்தால் போதுமானது.

### எடுத்துக்காட்டு 5.1

$f(x) = 2x^2-1$ மற்றும் $g(x) = 1-3x$ என்ற சார்புகள் சமம் எனில், அதன் சார்பகத்தைக் காண்க.

**தீர்வு**

$f(x) = g(x)$ (கொடுக்கப்பட்டது)

$\Rightarrow \quad 2x^2 - 1 = 1-3x$

$2x^2 + 3x - 2 = 0$

$(x+2)(2x-1) = 0$

$\therefore \quad x = -2, x = \frac{1}{2}$

சார்பகம் $\left\{-2, \frac{1}{2}\right\}$

### எடுத்துக்காட்டு 5.2

$f(x) = ax+b$ என்ற சார்பில் $f = \{(1, 1), (2, 3)\}$ என அமைந்தால் $a$ மற்றும் $b$ யின் மதிப்பினைக் காண்க

**தீர்வு**

$f(x) = ax + b$, $f(1) = 1$ மற்றும் $f(2) = 3$ (கொடுக்கப்பட்டுள்ளபடி)

$\therefore \quad a + b = 1$ மற்றும் $2a + b = 3$

$\Rightarrow \quad a = 2$ மற்றும் $b = -1$

### எடுத்துக்காட்டு 5.3

$f(x) = x + \frac{1}{x}, x > 0$ எனில்,

$[f(x)]^3 = f(x^3) + 3f\left(\frac{1}{x}\right)$ என நிறுவுக

**தீர்வு**

$f(x) = x + \frac{1}{x}$, $f(x^3) = x^3 + \frac{1}{x^3}$ மற்றும்

$f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$

இப்போது,

$$LHS = [f(x)]^3$$
$$= \left[x + \frac{1}{x}\right]^3$$
$$= x^3 + \frac{1}{x^3} + 3\left(x + \frac{1}{x}\right)$$
$$= f(x^3) + 3f(x) = f(x^3) + 3f\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$= RHS$$

### எடுத்துக்காட்டு 5.4

$f(x) = x - 5$ மற்றும்

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-25}{x+5} & \text{if } x \neq -5 \\ \lambda & \text{if } x = -5 \end{cases}$$ எனுமாறு

$f, g$ வரையறுக்கப்படுகிறது. மேலும் $f(x) = g(x)$, $\forall\ x \in R$ எனில் $\lambda$ வின் மதிப்பை காண்க.

**தீர்வு**

$f(x) = g(x), \forall x \in R$ (கொடுக்கப்பட்டது)

$\therefore f(-5) = g(-5)$

$-5 - 5 = \lambda$

$\therefore \lambda = -10$

### எடுத்துக்காட்டு 5.5

$f(x) = 2^x$ எனில், $f(x)\cdot f(y) = f(x+y)$ என நிறுவுக

**தீர்வு**

$f(x) = 2^x$ (கொடுக்கப்பட்டது)

$\therefore \quad f(x+y) = 2^{x+y}$

$= 2^x \cdot 2^y$

$= f(x)\cdot f(y)$

### எடுத்துக்காட்டு 5.6

$f(x) = \frac{x-1}{x+1}$, $x > 0$ எனில்,

$f[f(x)] = -\frac{1}{x}$ என நிறுவுக.



05_11th_BM-STAT_Ch-5-TM.indd 108 13-12-2021 11:29:35

**தீர்வு**

$$f(x)=\frac{x-1}{x+1} \text{ (கொடுக்கப்பட்டது)}$$

$$\therefore\ f\left[f(x)\right] = \frac{f(x)-1}{f(x)+1} = \frac{\frac{x-1}{x+1}-1}{\frac{x-1}{x+1}+1}$$

$$=\frac{x-1-x-1}{x-1+x+1} = -\frac{2}{2x} = -\frac{1}{x}$$

**எடுத்துக்காட்டு 5.7**

$f(x)=\log\frac{1+x}{1-x}$, $0 < x < 1$ எனில்,

$f\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)=2f(x)$. என நிறுவுக

**தீர்வு**

$$f(x)=\log\frac{1+x}{1-x} \text{ (கொடுக்கப்பட்டது)}$$

$$\therefore\ f\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \log\frac{1+\frac{2x}{1+x^2}}{1-\frac{2x}{1+x^2}}$$

$$=\log\frac{1+x^2+2x}{1+x^2-2x}$$

$$=\log\frac{(1+x)^2}{(1-x)^2} = 2\log\frac{1+x}{1-x} = 2f(x).$$

**எடுத்துக்காட்டு 5.8**

$f(x) = x$ மற்றும் $g(x) = |x|$ எனில் ,

(i) $(f+g)(x)$ (ii) $(f-g)(x)$ (iii) $(fg)(x)$ ஐக் காண்க.

**தீர்வு**

(i) $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = x + |x|$

$$=\begin{cases} x+x & ,x\geq 0 \\ x-x & ,x<0 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} 2x & ,x\geq 0 \\ 0 & ,x<0 \end{cases}$$

(ii) $(f-g)(x) = f(x) - g(x) = x - |x|$

$$=\begin{cases} x-x & ,x\geq 0 \\ x-(-x) & ,x<0 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} 0 & ,x\geq 0 \\ 2x & ,x<0 \end{cases}$$

(iii) $(fg)(x)=f(x)g(x)=x|x|=\begin{cases} x^2 & ,x\geq 0 \\ -x^2 & ,x<0 \end{cases}$

**எடுத்துக்காட்டு 5.9**

ஐம்பது பேர்கள் அமரக்கூடிய பேருந்து ஒன்றை மாணவர்கள் குழு ஒரு கல்வி சுற்றுலாவிற்காக வாடகைக்கு அமர்த்த விரும்பியது. பேருந்து நிறுவனம் குறைந்தது 35 மாணவர்களாவது விருப்பம் தெரிவித்தால்தான் பேருந்தை வாடகைக்கு விடும். மாணவர்களின் எண்ணிக்கை 45 பேர்கள் வரை என்றால் ஒரு மாணவனுக்கு ₹ 200 எனவும், 45 பேர்களுக்கு மேற்படின் ₹200 லிருந்து 45 க்கு மேற்பட்ட எண்ணிக்கையில் $\frac{1}{5}$ பாகத்தை கழித்து கட்டணமாக வசூலிக்கும். மொத்த செலவை சுற்றுலாச் செல்லும் மாணவர்களின் எண்ணிக்கை வாயிலாக ஒரு சார்பாக காணவும். மேலும், இதன் மதிப்பகத்தை காண்க.

**தீர்வு**

சுற்றுலாச் செல்லும் மாணவர்களின் எண்ணிக்கையை '$x$' எனக் கொள்க.

$\therefore\ 35\leq x\leq 50$ , $x$ ஒரு மிகை முழு ஆகும்

**சூத்திரம்:** மொத்தச் செலவு = ( ஒரு மாணவனுக்கான கட்டணம்) x (மாணவர்களின்எண்ணிக்கை)

(i) மாணவர்களின் எண்ணிக்கை 35 மற்றும் 45 க்கு இடையில்,

ஒரு மாணவனுக்கான கட்டணம் ₹200

$\therefore$ மொத்தச் செலவு $y = 200x$.

(ii) மாணவர்களின் எண்ணிக்கை 46 மற்றும் 50 க்கு இடையில்,

ஒரு மாணவனுக்கான கட்டணம்

₹ $\left\{200-\frac{1}{5}(x-45)\right\} = 209-\frac{x}{5}$

$\therefore$ மொத்தச் செலவு $y = \left(209-\frac{x}{5}\right)x$

$$=209x-\frac{x^2}{5}$$

$$\therefore\quad y=\begin{cases} 200x & ;\ 35\leq x\leq 45 \\ 209x-\frac{x^2}{5} & ;\ 46\leq x\leq 50 \end{cases}$$

சார்பகம் = {35, 36, 37, ..., 50}.

## எடுத்துக்காட்டு 5.10

$f(x) = |x|$ என்ற சார்பின் வரைபடம் வரைக

### தீர்வு

$$y = f(x) = |x|$$

$$= \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases}$$

$x$ க்கு சில உகந்த மதிப்புகளை தெரிவு செய்து $y$ இன் மதிப்புகளை கணக்கிடுக.

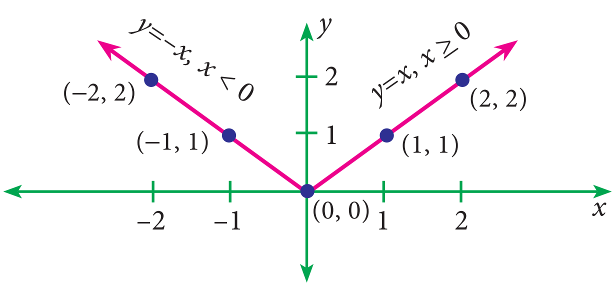
இவ்வாறாககீழ்கண்டஅட்டவணையை நாம் பெறுகிறோம்.

| $x$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $2$ | $1$ | $0$ | $1$ | $2$ |

அட்டவணை 5.1

$(-2, 2), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 2)$ ஆகிய புள்ளிகளை வரைபடத்தில் குறித்து மென்மையான வளைவரையால் இணைக்கவும்.

$f(x)$ இன் வரைபடமானது படம் 5.4 இல் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.




படம். 5.4

## எடுத்துக்காட்டு 5.11

$f(x) = x^2 - 5$ என்ற சார்பின் வரைபடம் வரைக.

### தீர்வு

$y = f(x) = x^2 - 5$ என்க.

$x$ க்கு சில உகந்த மதிப்புகளை தெரிவு செய்து $y$ இன் மதிப்புகளை கணக்கிடுக.

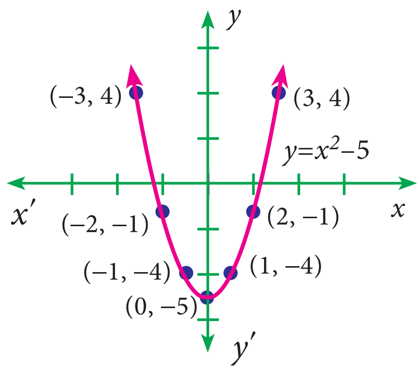
இவ்வாறாககீழ்கண்டஅட்டவணையை நாம் பெறுகிறோம்.

| $x$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $4$ | $-1$ | $-4$ | $-5$ | $-4$ | $-1$ | $4$ |

அட்டவணை : 5.2

$(-3, 4), (-2, -1), (-1, -4), (0, -5), (1, -4), (2, -1), (3, 4)$ ஆகிய புள்ளிகளை வரைபடத்தில் குறித்து மென்மையான வளைவரையால் இணைக்கவும்

$\therefore$ $f(x)$ இன் வரைபடமானது படம் 5.5 இல் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.




படம் 5.5

## எடுத்துக்காட்டு 5.12

$f(x) = a^x, a \neq 1$ மற்றும் $a > 0$ க்கு வரைபடம் வரைக

### தீர்வு

$f(x)$ இன் சார்பகம் R மற்றும் வீச்சகம் $(0, \infty)$ மேலும் இதன் வளைவரையானது $(0, 1)$ இன் வழிச் செல்லும் என்பதை நாம் அறிவோம்.

**வகை (i)** $a > 1$ எனில்,

$$y = f(x) = a^x$$

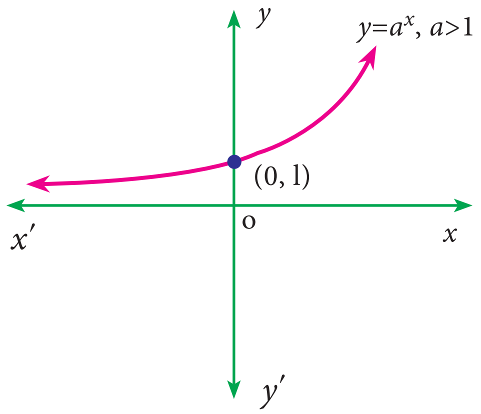
$$= \begin{cases} < 1 & , x < 0 \\ = 1 & , x = 0 \\ > 1 & , x > 0 \end{cases}$$

இங்கு $x$ இன் மதிப்பு அதிகரிக்கும் போது, $y$ இன் மதிப்பு அதிகரிக்கிறது. மற்றும் $y > 0$ ஆகும்.

$\therefore$ இதன் வரைபடமானது படம் 5.6 இல் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.



05_11th_BM-STAT_Ch-5-TM.indd 110 13-12-2021 11:29:39



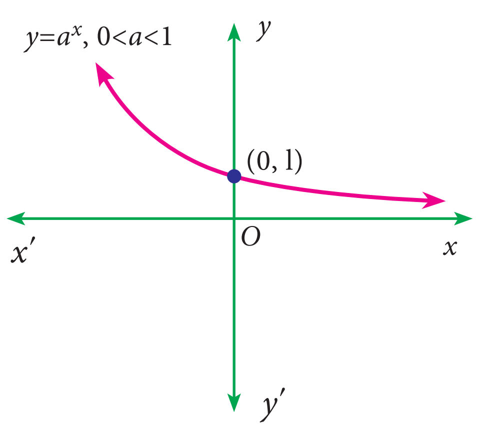

படம் 5.6

**வகை (ii)** $0 < a < 1$ எனில்

$$y = f(x) = a^x = \begin{cases} > 1 & , x < 0 \\ = 1 & , x = 0 \\ < 1 & , x > 0 \end{cases}$$

இங்கு $x$ ன் மதிப்பு அதிகரிக்கும்போது $y$ ன் மதிப்பு குறைகிறது. மற்றும் $y > 0$ ஆகும்.

$\therefore$ இதன் வரைபடமானது படம் 5.6 இல் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.




படம் 5.7

**குறிப்பு**

(i) $e$-ன் மதிப்பானது 2 க்கும், 3 க்கும் இடையில் அமையும் *i.e.* $2 < e < 3$

(ii) $f(x) = e^x$ இன் வரைபடமானது, $f(x) = a^x$ , $a > 1$ இன் வரைபடத்திற்கு ஒத்திருக்கும். மேலும், $f(x) = e^{-x}$ இன் வரைபடமானது, $f(x) = a^x$ , $0 < a < 1$ இன் வரைபடத்திற்கு ஒத்திருக்கும்.

### எடுத்துக்காட்டு 5.13

$x > 0$, $a > 0$ மற்றும் $a \neq 1$ எனும்போது $f(x) = \log_a x$ இன் வரைபடம் வரைக.

### தீர்வு

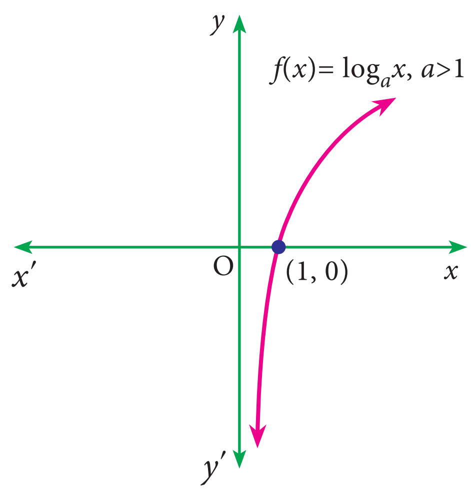
$f(x)$ இன் சார்பகம் $(0, \infty)$ மற்றும் வீச்சகம் $R$ மேலும் இதன் வளைவரையானது $(1, 0)$ இன் வழிச் செல்லும் என்பதை நாம் அறிவோம்.

**வகை (i)** $a > 1$ மற்றும் $x > 0$ எனில்,

$$f(x) = \log_a x = \begin{cases} < 0 & , 0 < x < 1 \\ = 0 & , x = 1 \\ > 0 & , x > 1 \end{cases}$$

இங்கு $x$–ன் மதிப்பு அதிகரிக்கும்போது, $f(x)$ இன் மதிப்பு அதிகரிக்கிறது.

$\therefore$ இதன் வரைபடமானது படம் 5.8 இல் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.




படம் 5.8

**வகை (ii)** $0 < a < 1$ மற்றும் $x > 0$ எனில்

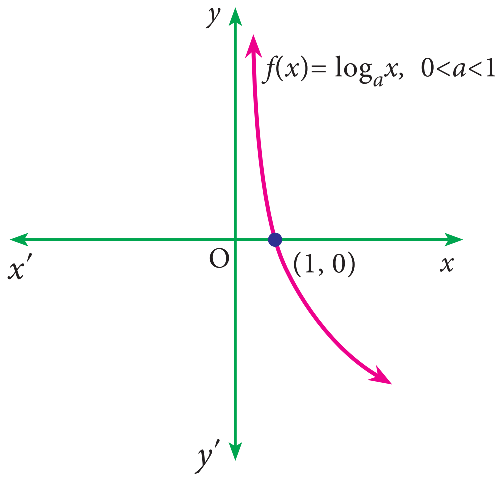
$$f(x) = \log_a x = \begin{cases} > 0 & , 0 < x < 1 \\ = 0 & , x = 1 \\ < 0 & , x > 1 \end{cases}$$

இங்கு $x$ இன் மதிப்பு அதிகரிக்கும்போது , $f(x)$ இன் மதிப்பு குறைகிறது.

$\therefore$ இதன் வரைபடமானது படம் 5.9 இல் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.



05_11th_BM-STAT_Ch-5-TM.indd 111 13-12-2021 11:29:40




படம் 5.9

**பயிற்சி 5.1**

1. பின்வரும் சார்புகள் ஒற்றைச் சார்பா? அல்லது இரட்டை சார்பா? எனக் காண்க

   (i) $f(x) = \left(\dfrac{a^x - 1}{a^x + 1}\right)$

   (ii) $f(x) = \log\left(x^2 + \sqrt{x^2+1}\right)$

   (iii) $f(x) = \sin x + \cos x$

   (iv) $f(x) = x^2 - |x|$

   (v) $f(x) = x + x^2$

2. $f(x) = x^3 - kx^2 + 2x,\ x \in R$. என்ற சார்பு ஒற்றை சார்பு எனில் $k$ இன் மதிப்பு யாது ?

3. $f(x) = x^3 - \dfrac{1}{x^3},\ x \neq 0$ எனில்,

   $f(x) + f\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$ எனக் காட்டுக.

4. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1},\ x \neq 1$ எனில், $f(f(x)) = x$ என நிறுவுக.

5. $f(x) = \dfrac{x-1}{3x+1},\ x > 1$ எனில், $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ மற்றும் $\dfrac{1}{f(x)}$ இன் சார்பை எழுதுக.

6. $f(x) = e^x$ மற்றும் $g(x) = \log_e x$ எனில்,

   (i) $(f+g)(1)$ (ii) $(fg)(1)$

   (iii) $(3f)(1)$ (iv) $(5g)(1)$ ஐக் காண்க.

7. பின்வருவனவற்றிற்கு வரைபடம் வரைக:

   (i) $f(x) = 16 - x^2$ (ii) $f(x) = |x-2|$

   (iii) $f(x) = x|x|$ (iv) $f(x) = e^{2x}$

   (v) $f(x) = e^{-2x}$ (vi) $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$

## 5.2 எல்லைகள் மற்றும் வகைக்கெழுக்கள் (Limits and derivatives)

இப்பகுதியில் நாம் சார்பின் எல்லை, சார்பின் தொடர்ச்சி, வகைக்கெழு குறித்தும் மற்றும் முதன்மைக் கோட்பாடு முறை கொள்கைகளிலிருந்து வகைக் கெழுவைக் காணும் முறை குறித்தும் பயில்வோம். எல்லை என்பது ஒரு மாறுகின்ற அளவையில் கொடுக்கப்பட்ட ஒரு நிலையான மதிப்பிற்கு மிகவும் அருகாமையில் அளவையின் மதிப்பினைக் காண பயன்படுகிறது.

**வரையறை 5.1**

$f$ என்பது மெய் மதிப்புகளை கொண்ட $x$ இல் அமைந்த சார்பு என்க. $l$ மற்றும் $a$ என்பன இரு நிலை எண்கள் என்க. $x$ ஆனது $a$ எனும் நிலையெண்ணை நெருங்கும் போது $f(x)$ ஆனது $l$ –ஐ நெருங்குமானால், $l$ –ஐ $f(x)$ –ன் எல்லை என்போம்.

இதனை $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ என எழுதுவோம்

**குறியீடுகள்:**

(i) $L[f(x)]_{x=a} = \lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ என்பது $x=a$ இல் $f(x)$ இன் இடக்கை எல்லை என்போம்.

(ii) $R[f(x)]_{x=a} = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ என்பது $x=a$ இல் $f(x)$ இன் வலக்கை எல்லை என்போம்.

### 5.2.1 எல்லையின் உள்ளமைத்தன்மை (Existence of limit)

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$ காணத்தக்கது $\Leftrightarrow$ $L[f(x)]_{x=a}$ மற்றும் $R[f(x)]_{x=a}$ ஆகியவை காணத் தக்கதாகவும் சமமாகவும் இருக்க வேண்டும்.

i.e., $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l \Leftrightarrow L[f(x)]_{x=a} = R[f(x)]_{x=a}$ .



05_11th_BM-STAT_Ch-5-TM.indd 112 13-12-2021 11:29:46

### குறிப்பு

$L[f(x)]_{x=a}$ மற்றும் $R[f(x)]_{x=a}$ ஆகியவற்றை $L[f(a)]$ மற்றும் $R[f(a)]$ எனவும் குறியிடலாம்.

## 5.2.2 இடமிருந்து எல்லை காணும் வழிமுறை : $L[f(x)]_{x=a}$

(i) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ –ஐ எழுதுக.

(ii) $x=a-h,\ h>0$ எனக் கொண்டு $x\to a^-$ க்கு பதிலாக $h\to 0$ என மாற்றுக.

(iii) $\lim\limits_{h\to 0} f(a-h)$ இன் மதிப்பை காண்க.

(iv) நிலை (iii) இல் பெறப்பட்ட மதிப்பு, $x=a$ இல் $f(x)$ என்ற சார்புக்கான இடக்கை எல்லை மதிப்பு ஆகும்.

## 5.2.3 வலமிருந்து எல்லை காணும் வழிமுறை : $R[f(x)]_{x=a}$

(i) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ –ஐ எழுதுக.

(ii) $x=a+h,\ h>0$ எனக் கொண்டு $x\to a^+$ க்கு பதிலாக $h\to 0$ என மாற்றுக.

(iii) $\lim\limits_{h\to 0} f(a+h)$ இன் மதிப்பை காண்க.

(iv) நிலை (iii) இல் பெறப்பட்ட மதிப்பு, $x=a$ இல் $f(x)$ என்ற சார்புக்கான வலக்கை எல்லை மதிப்பு ஆகும்.

**எடுத்துக்காட்டு 5.14**

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x-3|}{x-3} & ,x\neq 3\\ 0 & ,x=3\end{cases}$$ எனும் சார்புக்கு $x=3$ இல் இடக்கை மற்றும் வலக்கை எல்லை மதிப்புக்களை காண்க.

**தீர்வு**

$$L[f(x)]_{x=3}=\lim_{x\to 3^-} f(x)$$
$$=\lim_{h\to 0} f(3-h),\ x=3-h$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{|(3-h)-3|}{(3-h)-3}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{|-h|}{-h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{h}{-h}$$
$$=\lim_{h\to 0} -1=-1$$

$$R[f(x)]_{x=3}=\lim_{x\to 3^+} f(x)$$
$$=\lim_{h\to 0} f(3+h),\ x=3+h$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{|(3+h)-3|}{(3+h)-3}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}1$$
$$=1$$

### குறிப்பு

இங்கு, $L[f(3)]\neq R[f(3)]$ எனவே, கொடுக்கப்பட்ட சார்பிற்கு எல்லை மதிப்பு இல்லை. அதாவது $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ இன் மதிப்பு காணத்தக்கதல்ல.

**எடுத்துக்காட்டு 5.15**

$$f(x)=\begin{cases}5x-4 & if\ 0<x\leq 1\\ 4x^3-3x & if\ 1<x<2\end{cases}$$ க்கு $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ மதிப்பு காணத் தக்கதா என ஆராய்க.

**தீர்வு**

$$L[f(x)]_{x=1}=\lim_{x\to 1^-} f(x)$$
$$=\lim_{h\to 0} f(1-h),\ x=1-h$$
$$=\lim_{h\to 0}[5(1-h)-4]$$
$$=\lim_{h\to 0}(1-5h)=1$$

$$R[f(x)]_{x=1}=\lim_{x\to 1^+} f(x)$$
$$=\lim_{h\to 0} f(1+h),\ x=1+h$$
$$=\lim_{h\to 0}[4(1+h)^3-3(1+h)]$$
$$=4(1)^3-3(1)=1$$

தெளிவாக, $L[f(1)]=R[f(1)]$

$\therefore\ \lim\limits_{x\to 1} f(x)$ ஆனது மதிப்பு காணத் தக்கது மற்றும் இதனுடைய மதிப்பு 1 ஆகும்.



05_11th_BM-STAT_Ch-5-TM.indd 113 13-12-2021 11:29:55

## குறிப்பு

$f(x)$ என்ற சார்புக்கு $a$ என்ற புள்ளியில் சார்பின் எல்லை மதிப்பு மற்றும் சார்பின் மதிப்பு காணும் போது பின் வரும் நிலைகள் ஏற்படலாம்.

(i) $\lim_{x\to a} f(x)$ –ஐ காண இயலும் ஆனால் $f(a)$ –ஐ காண இயலாது.

(ii) $\lim_{x\to a} f(x)$ –ஐ காண இயலாது ஆனால் $f(a)$ –ஐ காண இயலும்.

(iii) $\lim_{x\to a} f(x)$ மற்றும் $f(a)$ –ஐ காண இயலும் ஆனால் அவை சமமற்றவையாக இருக்கும்.

(iv) $\lim_{x\to a} f(x)$ மற்றும் $f(a)$ –ஐ காண இயலும் மற்றும் அவை சமமாக இருக்கும்.

### 5.2.4 எல்லைகளின் சில முடிவுகள்

$\lim_{x\to a} f(x)$ மற்றும் $\lim_{x\to a} g(x)$ –ஐ காண இயலுமாயின்

(i) $\lim_{x\to a}(f\pm g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$

(ii) $\lim_{x\to a}(fg)(x) = \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} g(x)$

(iii) $\lim_{x\to a}\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}, \quad \lim_{x\to a} g(x) \neq 0$

(iv) $\lim_{x\to a} k\,f(x) = k \lim_{x\to a} f(x)$, இங்கு $k$ ஒரு மாறிலி.

### 5.2.5 மதிப்பிடமுடியாத வடிவங்கள் மற்றும் எல்லை மதிப்புக் காணல் (Indeterminate forms and evaluation of limits)

$f(x)$ மற்றும் $g(x)$ என்பன எல்லை மதிப்புகள் காணத்தக்க இரு சார்புகள் என்க.

$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ எனில், $\dfrac{f(a)}{g(a)}$ ஆனது $\dfrac{0}{0}$ என்ற வடிவத்தில் அமைவதால் அது அர்த்தமற்றதாகிறது. ஆனால் $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ என்பது அர்த்தமற்றது எனக் கூற இயலாது.

பல நேரங்களில் இம்மாதிரியான மதிப்பிட முடியாத வடிவங்களுக்கு நிலையான ஒரு எல்லை மதிப்பினை காண இயலும். இந்த மாதிரி வடிவங்களுக்கு எல்லை மதிப்பிடுதல் முறையில் மதிப்பிட முடியாத வடிவங்களின் மதிப்பிடல் என்போம்.

$\dfrac{0}{0}, \dfrac{\infty}{\infty}, 0\times\infty, \infty-\infty, 0^0, \infty^0$ மற்றும் $1^\infty$ இல் அமைந்த வடிவங்கள் மதிப்பிட முடியாத வடிவங்கள் ஆகும். இவற்றுள் $\dfrac{0}{0}$ என்ற வடிவம் ஆனது மதிப்பிட முடியாத வடிவங்களில் அடிப்படை வடிவம் ஆகும்.

### 5.2.6 இயற்கணித எல்லையின் வரம்புகளை (மதிப்பை) மதிப்பிடும் முறைகள்

(i) நேரடி பிரதியிடல்

(ii) காரணிப்படுத்தல்

(iii) விகிதமாக்கல் முறை

(iv) சில எல்லைகளின் திட்ட வாய்ப்பாடுகளைக் கொண்டு காணல்

### 5.2.7 சில திட்ட எல்லை வாய்பாடுகள்

(i) $\lim_{x\to a}\dfrac{x^n - a^n}{x-a} = na^{n-1}, n\in Q$

(ii) $\lim_{\theta\to 0}\dfrac{\sin\theta}{\theta} = \lim_{\theta\to 0}\dfrac{\tan\theta}{\theta} = 1$, θ ரேடியனில்.

(iii) $\lim_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x} = \log_e a, \quad a>0$

(iv) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\log(1+x)}{x} = 1$

(v) $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

(vi) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$

(vii) $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x} = 1$

**எடுத்துக்காட்டு 5.16**

மதிப்பிடுக: $\lim_{x\to 1}(3x^2+4x-5)$.

**தீர்வு**

$\lim_{x\to 1}(3x^2+4x-5)$

$= 3(1)^2 + 4(1) - 5 = 2$



05_11th_BM-STAT_Ch-5-TM.indd 114 13-12-2021 11:30:04

**எடுத்துக்காட்டு 5.17**

மதிப்பிடுக: $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4x + 6}{x + 2}$.

**தீர்வு**

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4x + 6}{x + 2} = \frac{\lim_{x \to 2}(x^2 - 4x + 6)}{\lim_{x \to 2}(x + 2)}$$

$$= \frac{(2)^2 - 4(2) + 6}{2 + 2} = \frac{1}{2}$$

**எடுத்துக்காட்டு 5.18**

மதிப்பிடுக : $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{5 \sin 2x - 2 \cos 2x}{3 \cos 2x + 2 \sin 2x}$.

**தீர்வு**

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{5 \sin 2x - 2 \cos 2x}{3 \cos 2x + 2 \sin 2x}$$

$$= \frac{\lim_{x \to \frac{\pi}{4}}(5 \sin 2x - 2 \cos 2x)}{\lim_{x \to \frac{\pi}{4}}(3 \cos 2x + 2 \sin 2x)}$$

$$= \frac{5 \sin \frac{\pi}{2} - 2 \cos \frac{\pi}{2}}{3 \cos \frac{\pi}{2} + 2 \sin \frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{5(1) - 2(0)}{3(0) + 2(1)} = \frac{5}{2}.$$

**எடுத்துக்காட்டு 5.19**

மதிப்பிடுக: $\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$.

**தீர்வு**

$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$ என்பது $\frac{0}{0}$ என்ற அமைப்பில் உள்ளது

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{(x - 1)}$$

$$= \lim_{x \to 1}(x^2 + x + 1)$$

$$= (1)^2 + 1 + 1 = 3$$

**எடுத்துக்காட்டு 5.20**

மதிப்பிடுக: $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{2 + x} - \sqrt{2}}{x}$.

**தீர்வு**

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{2 + x} - \sqrt{2}}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(\sqrt{2 + x} - \sqrt{2})(\sqrt{2 + x} + \sqrt{2})}{x(\sqrt{2 + x} + \sqrt{2})}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2 + x - 2}{x(\sqrt{2 + x} + \sqrt{2})}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{(\sqrt{2 + x} + \sqrt{2})}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

**எடுத்துக்காட்டு 5.21**

மதிப்பிடுக: $\lim_{x \to a} \frac{x^{\frac{3}{5}} - a^{\frac{3}{5}}}{x^{\frac{1}{5}} - a^{\frac{1}{5}}}$.

**தீர்வு**

$$\lim_{x \to a} \frac{x^{\frac{3}{5}} - a^{\frac{3}{5}}}{x^{\frac{1}{5}} - a^{\frac{1}{5}}} = \lim_{x \to a} \frac{\frac{x^{\frac{3}{5}} - a^{\frac{3}{5}}}{x - a}}{\frac{x^{\frac{1}{5}} - a^{\frac{1}{5}}}{x - a}}$$

$$= \frac{\frac{3}{5}(a)^{-\frac{2}{5}}}{\frac{1}{5}(a)^{-\frac{4}{5}}} = 3a^{\frac{-2}{5} + \frac{4}{5}} = 3a^{\frac{2}{5}}$$

**எடுத்துக்காட்டு 5.22**

மதிப்பிடுக: $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x}$.

**தீர்வு**

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x} = \lim_{x \to 0} \left\{ \frac{3x \times \frac{\sin 3x}{3x}}{5x \times \frac{\sin 5x}{5x}} \right\}$$

$$= \frac{3}{5} \frac{\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{3x}}{\lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{5x}} = \frac{3}{5}\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{3}{5}$$

**எடுத்துக்காட்டு 5.23**

மதிப்பிடுக: $\lim_{x \to \infty} \frac{6 - 5x^2}{4x + 15x^2}$.

**தீர்வு**

$$\lim_{x \to \infty} \frac{6 - 5x^2}{4x + 15x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{6}{x^2} - 5}{\frac{4}{x} + 15}$$

$$= \frac{0 - 5}{0 + 15} = -\frac{1}{3}$$



05_11th_BM-STAT_Ch-5-TM.indd 115 13-12-2021 11:30:10

### எடுத்துக்காட்டு 5.24

மதிப்பிடுக: $\lim_{x\to\infty} x\tan\left(\frac{1}{x}\right)$.

**தீர்வு**

$y = \frac{1}{x}$ என்க. $x\to\infty$ எனும்பொழுது $y\to 0$ ஆகும்.

$$\lim_{x\to\infty} x\tan\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{y\to 0}\frac{\tan y}{y} = 1.$$

### எடுத்துக்காட்டு 5.25

மதிப்பிடுக: $\lim_{n\to\infty}\frac{\sum n^2}{n^3}$.

**தீர்வு**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum n^2}{n^3} = \lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left\{\left(\frac{n}{n}\right)\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{2n+1}{n}\right)\right\}$$
$$= \frac{1}{6}\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)\right\}$$
$$= \frac{1}{6}(1)(2) = \frac{1}{3}$$

### எடுத்துக்காட்டு 5.26

மதிப்பிடுக $\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x^3)}{\sin^3 x} = 1.$

**தீர்வு**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x^3)}{\sin^3 x}$$
$$= \lim_{x\to 0}\left\{\frac{\log(1+x^3)}{x^3}\times\frac{x^3}{\sin^3 x}\right\}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x^3)}{x^3}\times\frac{1}{\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3}$$
$$= 1\times\frac{1}{1} = 1$$

### பயிற்சி 5.2

1. கீழ்வருவனவற்றை மதிப்பிடுக :

(i) $\lim_{x\to 2}\frac{x^3+2}{x+1}$ (ii) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x+5}{x^2+3x+9}$

(iii) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sum n}{n^2}$

(iv) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

(v) $\lim_{x\to a}\frac{x^{\frac{5}{8}}-a^{\frac{5}{8}}}{x^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{2}{3}}}$ (vi) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{x^2}$

2. $\lim_{x\to -a}\frac{x^9+a^9}{x+a} = \lim_{x\to 3}(x+6)$ எனில் , $a$–ன் மதிப்பை காண்க.

3. $\lim_{x\to 2}\frac{x^n-2^n}{x-2} = 448$ எனில், $n$–ன் மீச்சிறு மிகை முழு எண்ணை காண்க.

4. $f(x) = \frac{x^7-128}{x^5-32}$ எனில், $\lim_{x\to 2} f(x)$ –ஐ காண்க.

5. $f(x) = \frac{ax+b}{x+1}$ , $\lim_{x\to 0} f(x) = 2$ மற்றும் $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$ எனில், $f(-2) = 0$ என நிறுவுக.

### வகைக்கெழு (Dserivative)

இப்பகுதியை பற்றி தெரிந்து கொள்வதற்கு முன் நாம் ஒரு சார்பின் தொடர்ச்சித் தன்மையை பற்றி இங்கு விரிவாக தெரிந்து கொள்வோம். சார்பு $f(x)$ ஆனது $x = a$ என்ற புள்ளியில் தொடர்ச்சியுடையது எனில் அதன் வளைவரை $x = a$ இல் முறிவு ஏதும் கிடையாது என்பதாகும்.

மேலும், $x = a$ இல் வளவரை முறிவை பெறுமாயின் சார்பு அப்புள்ளியில் தொடர்ச்சியற்ற தன்மை கொண்டது எனலாம்.

சார்பு $f(x)$ ஆனது ஒரு இடைவெளியில் உள்ள அனைத்துப் புள்ளிகளிலும் தொடர்ச்சித் தன்மையை பெற்றிருந்தால் அந்த குறிப்பிட்ட இடைவெளியில் $f(x)$ ஆனது தொடர்ச்சித் தன்மையை கொண்டதாகும்.

## 5.2.8 தொடர்ச்சி சார்பு (Continuous function)

சார்பு $f(x)$ ஆனது $x = a$ இல் தொடர்ச்சித்தன்மை கொண்டது எனில், பின்வரும் நிபந்தனைகளை நிறைவு செய்ய வேண்டும்.



05_11th_BM-STAT_Ch-5-TM.indd 116 13-12-2021 11:30:15

(i) $f(a)$ காணத்தக்கது.

(ii) $\lim_{x \to a} f(x)$ காணத்தக்கது.

(iii) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

**கூர்நோக்கு**

மேற்கூறியவரையறையின் நிபந்தனைகளில் ஏதேனும் ஒன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட நிபந்தனைகள் $x = a$–ல் பொருந்தவில்லை எனில் சார்பு $f(x)$, தொடர்ச்சி தன்மை அற்றது எனலாம்

## 5.2.9 தொடர் சார்புகளின் சில பண்புகள்

$f(x)$ மற்றும் $g(x)$ என்ற மெய் மதிப்புகளை கொண்ட சார்புகள் $x = a$ இல் தொடர்ச்சித் தன்மை கொண்டதாக இருக்கும்போது,

(i) $f(x) \pm g(x)$ என்பதும் $x = a$ இல் தொடர்ச்சியானது.

(ii) $f(x)\, g(x)$ என்பதும் $x = a$ இல் தொடர்ச்சியானது.

(iii) $kf(x)$ என்பதும் $x = a$ இல் தொடர்ச்சியானது, $k$ ஓர் மெய்யெண்.

(iv) $f(a) \neq 0$ எனில், $\frac{1}{f(x)}$ என்பதும் $x = a$ இல் தொடர்ச்சியானது.

(v) $g(a) \neq 0$ எனில், $\frac{f(x)}{g(x)}$ என்பதும் $x = a$ இல் தொடர்ச்சியானது.

(vi) $|f(x)|$ என்பதும் $x = a$ இல் தொடர்ச்சியானது.

**எடுத்துக்காட்டு 5.27**

$$f(x) = \begin{cases} 5x - 4, & 0 < x \le 1 \\ 4x^3 - 3x, & 1 < x < 2 \end{cases}$$ என்று வரையறுக்கப்பட்ட சார்பு, $x = 1$ இல் தொடர்ச்சியானது என நிறுவுக.

**தீர்வு**

$$L[f(x)]_{x=1} = \lim_{x \to 1^-} f(x)$$
$$= \lim_{h \to 0} f(1-h),\ x = 1-h$$
$$= \lim_{h \to 0} [5(1-h) - 4]$$
$$= 5(1) - 4 = 1$$

$$R[f(x)]_{x=1} = \lim_{x \to 1^+} f(x)$$
$$= \lim_{h \to 0} f(1+h),\ x = 1+h$$
$$= \lim_{h \to 0} [4(1+h)^3 - 3(1+h)]$$
$$= 4(1)^3 - 3(1)$$
$$= 4 - 3 = 1$$

இப்போது, $f(1) = 5(1) - 4 = 5-4 = 1$

$$\therefore \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1)$$

$\Rightarrow x = 1$ –ல் சார்பு $f(x)$ தொடர்ச்சியானது.

**எடுத்துக்காட்டு 5.28**

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x, & x < 2 \\ 2 + x, & x \ge 2 \end{cases}$$ என்று வரையறுக்கப்பட்ட சார்பு $f$ இன் தொடர்ச்சித் தன்மையை $x = 2$ ல் ஆராய்க.

**தீர்வு**

$$L[f(x)]_{x=2} = \lim_{x \to 2^-} f(x)$$
$$= \lim_{h \to 0} f(2-h),\ x = 2-h$$
$$= \lim_{h \to 0} \{2 - (2-h)\}$$
$$= \lim_{h \to 0} h = 0$$

$$R[f(x)]_{x=2} = \lim_{x \to 2^+} f(x)$$
$$= \lim_{h \to 0} f(2+h),\ x = 2+h$$
$$= \lim_{h \to 0} \{2 + (2+h)\}$$
$$= \lim_{h \to 0} (4+h) = 4$$

மேலும், $f(2) = 2+2 = 4$.

இங்கு $\lim_{x \to 2^-} f(x) \neq \lim_{x \to 2^+} f(x)$

$\therefore f(x)$ என்ற சார்பானாது $x = 2$ இல் தொடர்ச்சித் தன்மை அற்றது ஆகும்.



05_11th_BM-STAT_Ch-5-TM.indd 117 13-12-2021 11:30:22

**கூர்நோக்கு**

(i) மாறிலிச் சார்பு எங்கும் தொடர்ச்சியுடையது.

(ii) சமனிச் சார்பு எங்கும் தொடர்ச்சியுடையது.

(iii) பல்லுறுப்புக் கோவை சார்பு எங்கும் தொடர்ச்சியுடையது.

(iv) மட்டுச்சார்புஎங்கும்தொடர்ச்சியுடையது.

(v) அடுக்குக் குறிச் சார்பு $a^x$, $a>0$ எங்கும் தொடர்ச்சியுடையது.

(vi) மடக்கைச் சார்பு அதன் அரங்கத்தில் தொடர்ச்சித் தன்மை கொண்டது.

(vii) அனைத்து விகிதமுறுச் சார்புகளும் அதன் அரங்கத்தில் உள்ள அனைத்து புள்ளிகளிடத்தும் தொடர்ச்சித் தன்மை கொண்டது.

**உங்களுக்கு தெரியுமா?**

$$f(x) = \begin{cases} \alpha(x) & , \ x < a \\ k & , \ x = a \\ \beta(x) & , \ x > a \end{cases}$$ எனில்

$$\mathrm{L}[f(x)]_{x=a} = \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a} \alpha(x)$$

$$\mathrm{R}[f(x)]_{x=a} = \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a} \beta(x)$$

$x = a$ என்ற புள்ளியின் இரு பக்கங்களிலும் சார்புக்கு வெவ்வேறு வரையறைகள் இருக்கும் போது மட்டுமே இது பொருந்தும்

## பயிற்சி 5.3

1. கீழ்வரும் சார்புகளுக்கு சுட்டிக் காட்டப்பட்டுள்ள புள்ளியில் சார்புகளின் தொடர்ச்சித் தன்மையை ஆராய்க

(a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2}, & , \ x \neq 2 \\ 0, & , x = 2 \end{cases}$ எனில் $x = 2$–ல்

(b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3}, & , \ x \neq 3 \\ 6, & , x = 3 \end{cases}$ எனில் $x = 3$–ல்

2. $f(x) = |\,x\,|$ என்ற சார்பானது $x = 0$ இல் தொடர்ச்சித் தன்மை கொண்டது என நிறுவுக.

### 5.2.10 ஒரு புள்ளியில் வகையீடு காணல் (Differentiability at a point)

$(a,\ b)$ என்ற திறந்த இடைவெளியில் $f(x)$ என்பது மெய்மதிப்புளை கொண்ட சார்பு மற்றும் $c \in (a, b)$ எனக் கொள்க.

$\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}$ காணத்தக்கதாக இருந்தால் $f(x)$ ஆனது $x = c$ –ல், வகையிடத்தக்கதாகும்.

இவ்வாறாக காணப்படும் எல்லை மதிப்பை, சார்பு $f(x)$க்கு $x = c$–ல் வகைக்கெழு மதிப்பு என்போம். இதனை $f'(c)$ அல்லது $Df(c)$ அல்லது $\left[\dfrac{d}{dx}(f(x))\right]_{x=c}$ என குறிப்பிடுவோம்.

$$\text{ஆதலால், } f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}.$$

### 5.2.11 இடக்கை மற்றும் வலக்கை வகையீடு

**(i)** $\lim\limits_{x \to c^-} \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}$ அல்லது

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(c-h)-f(c)}{-h}$ என்பது $x = c$–ல் சார்பு $f(x)$ இன் இடக்கை வகையீடு எனக் கூறுவோம். இதனை $f'(c^-)$ அல்லது $L[f'(c)]$ எனக் குறிப்போம்.

(ii) $\lim\limits_{x \to c^+} \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}$ அல்லது

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(c+h)-f(c)}{h}$ என்பது $x = c$–ல் சார்பு $f(x)$ இன் வலக்கை வகையீடு எனக் கூறுவோம். இதனை $f'(c^+)$ அல்லது $R[f'(c)]$ எனக் குறிப்போம்.

| முடிவு | $x = c$ இல் சார்பு $f(x)$ வகையிடத்தக்கது $\iff L[f'(c)] = R[f'(c)]$ |
|---|---|



05_11th_BM-STAT_Ch-5-TM.indd 118 13-12-2021 11:30:27

உங்களுக்கு தெரியுமா?

ஒரு புள்ளியிடத்து தொடர்ச்சித்தன்மை கொண்ட சார்பு, அப்புள்ளியிடத்து வகையிடத்தக்கதாக இல்லாமலும் இருக்கலாம்.

**மேற்குறிப்பு:**

(i) $L\left[f'(c)\right] \neq R\left[f'(c)\right]$ எனில், $f(x)$ ஆனது $x=c$ இல் வகையிடத்தக்கது அல்ல.

(ii) $x=c$ இல் சார்பு $f(x)$ ஆனது வகையிடத்தக்கது எனில், அப்புள்ளியில் சார்பு $f(x)$ ஆனது தொடர்ச்சித் தன்மை கொண்டது.

**எடுத்துக்காட்டு 5.29**

$f(x) = |x|$ என்ற சார்பு $x = 0$ இல் வகையிடத் தக்கது அல்ல என நிறுவுக.

**தீர்வு**

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & if \ x \geq 0 \\ -x & if \ x < 0 \end{cases}$$

$$L[f'(0)] = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0},$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(0-h)-f(0)}{0-h-0}, \quad x = 0-h$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(-h)-f(0)}{-h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{|-h|-|0|}{-h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{|-h|}{-h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h}{-h}$$

$$= \lim_{h\to 0} (-1) = -1$$

$$R[f'(0)] = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{0+h-0}, \quad x = 0+h$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{|h|-|0|}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} 1 = 1$$

இங்கு, $L[f'(0)] \neq R[f'(0)]$

$\therefore$ $f(x)$ ஆனது $x = 0$ இல் வகையிடத்தக்கதல்ல

**எடுத்துக்காட்டு 5.30**

$x = 1$ இல் $f(x) = x^2$ ஆனது வகையிடத்தக்கது எனக் காட்டுக, மேலும் $f'(1)$ –ஐ காண்க.

**தீர்வு**

$$f(x) = x^2$$

$$L[f'(1)] = \lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(1-h)-f(1)}{1-h-1}, \quad x=1-h$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(1-h)^2-1}{-h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1+h^2-2h-1}{-h}$$

$$= \lim_{h\to 0} (-h+2) = 2$$

$$R[f'(1)] = \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{1+h-1}, \quad x = 1+h$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^2-1}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1+h^2+2h-1}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} (h+2) = 2$$

இங்கு, $L[f'(1)] = R[f'(1)]$

$\therefore$ $x = 1$ இல் சார்பு $f(x)$ ஆனது வகையிடத்தக்கது ஆகும். மேலும் $f'(1) = 2$



05_11th_BM-STAT_Ch-5-TM.indd 119 13-12-2021 11:30:34

### 5.2.12 முதன்மைக் கொள்கையிலிருந்து வகைக்கெழு காணல் (Differentiation from first principle)

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

என்பதனை அடிப்படையாகக் கொண்டு சார்புகளுக்கு வகைக்கெழு காணும் முறையை முதன்மைக் கொள்கையிலிருந்து வகையீடு காணல் எனலாம். $f'(x)$ என்பதனை $\frac{dy}{dx}$ எனக் குறிக்கலாம்

### 5.2.13 சில சார்புகளுக்கான வகைக்கெழுவை முதன்மைக் கொள்கையிலிருந்து காணல்

1. $x \in R$ க்கு $\frac{d}{dx}(x^n) = n\,x^{n-1}$

**நிரூபணம்:**

$f(x) = x^n$ என்க

$\therefore \quad f(x+h) = (x+h)^n$

$$\frac{d}{dx}\big(f(x)\big) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n-(x)^n}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n-(x)^n}{(x+h)-x}$$

$$= \lim_{z \to x} \frac{z^n-x^n}{z-x}$$

இங்கு, $z = x + h$ மற்றும் $h \to 0$ எனும்போது $z \to x$ ஆகும்.

$$= nx^{n-1} \left[\because \lim_{x \to a} \frac{x^n-a^n}{x-a} = na^{n-1}\right]$$

i.e., $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$

2. $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$

**நிரூபணம்:**

$f(x) = e^x$ என்க

$\therefore f(x+h) = e^{x+h}$

$$\frac{d}{dx}\big(f(x)\big) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h}-e^x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{e^x e^h-e^x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} e^x\left[\frac{e^h-1}{h}\right]$$

$$= e^x \lim_{h \to 0}\left[\frac{e^h-1}{h}\right]$$

$$= e^x \times 1 \quad \left[\because \lim_{x \to 0}\left[\frac{e^x-1}{x}\right] = 1\right]$$

$$= e^x$$

i.e., $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$ .

3. $\frac{d}{dx}(\log_e x) = \frac{1}{x}$

**நிரூபணம்:**

$f(x) = \log_e x$ என்க

$\therefore f(x+h) = \log_e(x+h)$

$$\frac{d}{dx}\big(f(x)\big) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\log_e(x+h)-\log_e x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\log_e\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\log_e\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}} \frac{1}{x}$$

$$= \frac{1}{x} \lim_{h \to 0} \frac{\log_e\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}}$$

$$= \frac{1}{x} \times 1$$

$$\left[\because \lim_{x \to 0} \frac{\log_e(1+x)}{x} = 1\right]$$

$$\frac{d}{dx}(\log_e x) = \frac{1}{x}$$



05_11th_BM-STAT_Ch-5-TM.indd 120 13-12-2021 11:30:42

**எடுத்துக்காட்டு 5.31**

முதன்மைக் கொள்கையிலிருந்து $\frac{d}{dx}(x^3)$ –ஐ காண்க.

**தீர்வு**

$f(x) = x^3$ என்க

$\therefore\ f(x+h) = (x+h)^3$

$$\frac{d}{dx}(f(x)) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}(3x^2+3xh+h^2)$$

$$= 3x^2+3x(0)+(0)^2$$

$$= 3x^2$$

$$\frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2$$

**எடுத்துக்காட்டு 5.32**

முதன்மைக் கொள்கையிலிருந்து $\frac{d}{dx}(e^{3x})$ –ஐ காண்க.

**தீர்வு**

$f(x) = e^{3x}$ எனில்

$\therefore\ f(x+h) = e^{3(x+h)}$

$$\frac{d}{dx}(f(x)) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{e^{3(x+h)}-e^{3x}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{e^{3x}\cdot e^{3h}-e^{3x}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{e^{3x}(e^{3h}-1)}{h}$$

$$= 3e^{3x}\lim_{h\to 0}\frac{e^{3h}-1}{3h}$$

$$= 3e^{3x}\times 1 \qquad [\because \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1]$$

$$= 3e^{3x}$$

**பயிற்சி 5.4**

1. பின்வரும் சார்புகளுக்கு முதன்மைக் கொள்கையிலிருந்து $x$ –ஐ பொறுத்த வகைக் கெழுவை காண்க.

(i) $x^2$ (ii) $e^{-x}$ (iii) $\log(x+1)$

## 5.3 வகையிடல் உத்திகள் (Differentiation techniques)

இப்பகுதியில் கொடுக்கப்பட்ட சார்புகளின் வகைக் கெழுக்களை காண பயன்படுத்தப்படும் வெவ்வேறு முறைகளை பற்றி விவாதிப்போம்.

### 5.3.1 சில திட்டமான முடிவுகள் (வாய்பாடுகள்)

1. $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$
2. $\frac{d}{dx}(x) = 1$
3. $\frac{d}{dx}(k) = 0$, $k$ ஒரு மாறிலி
4. $\frac{d}{dx}(kx) = k$, $k$ ஒரு மாறிலி
5. $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}$
6. $\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
7. $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$
8. $\frac{d}{dx}(e^{ax}) = ae^{ax}$
9. $\frac{d}{dx}(e^{ax+b}) = ae^{ax+b}$
10. $\frac{d}{dx}(e^{-x^2}) = -2x\,e^{-x^2}$
11. $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x\log_e a$, $a>0$
12. $\frac{d}{dx}(\log_e x) = \frac{1}{x}$



05_11th_BM-STAT_Ch-5-TM.indd 121 13-12-2021 11:30:49

13. $\frac{d}{dx}\log_e(x+a) = \frac{1}{x+a}$

14. $\frac{d}{dx}\left(\log_e(ax+b)\right) = \frac{a}{(ax+b)}$

15. $\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x\log_e a}$, a > 0 மற்றும் a ≠ 1

16. $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$

17. $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$

18. $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$

19. $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\text{cosec}^2 x$

20. $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$

21. $\frac{d}{dx}(\text{cosec } x) = -\text{cosec}x \cot x$

## 5.3.2 வகைக்கெழுக்களுக்கான பொது விதிகள்

(i) **கூட்டல் விதி**

$$\frac{d}{dx}[f(x)+g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)] + \frac{d}{dx}[g(x)]$$

(ii) **கழித்தல் விதி**

$$\frac{d}{dx}[f(x)-g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)] - \frac{d}{dx}[g(x)]$$

(iii) **பெருக்கல் விதி**

$$\frac{d}{dx}[f(x)\cdot g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)]g(x) + f(x)\frac{d}{dx}[g(x)]$$

(அல்லது) $u = f(x)$ மற்றும் $v = g(x)$ எனில்,

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{d}{dx}(v) + v\frac{d}{dx}(u)$$

(iv) **வகுத்தல் விதி**

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\frac{d}{dx}[f(x)] - f(x)\frac{d}{dx}[g(x)]}{[g(x)]^2},$$

$g(x) \neq 0$

(அல்லது) $u = f(x)$ மற்றும் $v = g(x)$ எனில்,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{d}{dx}(u) - u\frac{d}{dx}(v)}{v^2}$$

(v) **பெருக்கு சார்பலனின் வகைக் கெழு**

$\frac{d}{dx}[c\,f(x)] = c\,\frac{d}{dx}[f(x)]$ இதில், $c$ ஒரு மாறிலி

(vi) **சங்கிலி விதி:**

$\frac{d}{dx}[f(g(x))] = f'(g(x))\cdot g'(x)$ (அல்லது)

$y = f(t)$ மற்றும் $t = g(x)$ எனில், $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}$

இங்கு, வகைக்கெழுவின் சில திட்டமான முடிவுகளைக் கொண்டும், பொது விதிகளைக் கொண்டும் பின் வரும் வெளிப்படு சார்புகளுக்கு வகைகெழுக்களை காண்போம்.

### எடுத்துக்காட்டு 5.33

பின் வரும் சார்புகளை $x$ –ஐ பொறுத்து வகையிடுக.

(i) $x^{\frac{3}{2}}$ (ii) $7e^x$ (iii) $\frac{1-3x}{1+3x}$

(iv) $x^2 \sin x$ (v) $\sin^3 x$

(vi) $\sqrt{x^2+x+1}$

### தீர்வு

(i) $\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1}$

$= \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$

(ii) $\frac{d}{dx}(7e^x) = 7\frac{d}{dx}(e^x) = 7e^x$

(iii) $y = \frac{1-3x}{1+3x}$ என்ற சார்பை $x$ –ஐ பொறுத்து வகையிட, நாம் பெறுவது

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1+3x)\frac{d}{dx}(1-3x) - (1-3x)\frac{d}{dx}(1+3x)}{(1+3x)^2}$$

$$= \frac{(1+3x)(-3) - (1-3x)(3)}{(1+3x)^2}$$

$$= \frac{-6}{(1+3x)^2}$$



05_11th_BM-STAT_Ch-5-TM.indd 122 13-12-2021 11:30:56

(iv) $y = x^2 \sin x$ என்ற சார்பை $x$ –ஐ பொறுத்து வகையிட, நாம் பெறுவது

$$\frac{dy}{dx} = x^2\frac{d}{dx}(\sin x) + \sin x\frac{d}{dx}(x^2)$$
$$= x^2\cos x + 2x\sin x$$
$$= x(x\cos x + 2\sin x)$$

(v) $y = \sin^3 x$ (or) $(\sin x)^3$

$u = \sin x$ எனில் $y = u^3$ ஆகும்.

$u = \sin x$ என்ற சார்பை $x$ –ஐ பொறுத்து வகையிட நாம்பெறுவது, $\frac{du}{dx} = \cos x$

$y = u^3$ என்ற சார்பை $u$ -ஐ பொறுத்து வகையிட நாம்பெறுவது,

$$\frac{dy}{du} = 3u^2 = 3\sin^2 x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = 3\sin^2 x\cdot\cos x$$

(vi) $y = \sqrt{x^2 + x + 1}$

$u = x^2 + x + 1$ எனில் $y = \sqrt{u}$ ஆகும்.

$u = x^2 + x + 1$ என்ற சார்பை $x$ -ஐ பொறுத்து வகையிட நாம் பெறுவது,

$$\frac{du}{dx} = 2x + 1$$

$y = \sqrt{u}$ என்ற சார்பை $u$ -ஐ பொறுத்து வகையிட நாம் பெறுவது, $\frac{dy}{du} = \frac{1}{2\sqrt{u}}$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x^2 + x + 1}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + x + 1}}\cdot(2x + 1)$$

$$= \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x + 1}}$$

**உங்களுக்கு தெரியுமா?**

★ $\frac{d}{dx}(\sin(\log x)) = \frac{d}{d(\log x)}(\sin(\log x))\frac{d}{dx}(\log x)$

★ $\frac{d}{dx}(x^2 + 3x + 1)^5 = \frac{d}{d(x^2 + 3x + 1)}(x^2 + 3x + 1)^5\frac{d}{dx}(x^2 + 3x + 1)$

★ $\frac{d}{dx}(e^{(x^3+3)}) = \frac{d}{d(x^3 + 3)}(e^{(x^3+3)})\frac{d}{dx}(x^3 + 3)$

## எடுத்துக்காட்டு 5.34

$f(x) = x^n$ மற்றும் $f'(1) = 5$ எனில், $n$ இன் மதிப்பு காண்க.

### தீர்வு

$$f(x) = x^n$$
$$\therefore\ f'(x) = nx^{n-1}$$
$$f'(1) = n(1)^{n-1}$$
$$f'(1) = n$$
$$f'(1) = 5 \text{ (கணக்கின்படி)}$$
$$\Longrightarrow n = 5$$

## எடுத்துக்காட்டு 5.35

$y = \frac{1}{u^2}$ மற்றும் $u = x^2 - 9$ எனில், $\frac{dy}{dx}$ –ஐ காண்க.

### தீர்வு

$$y = \frac{1}{u^2} = u^{-2}$$
$$\frac{dy}{du} = -\frac{2}{u^3}$$
$$\frac{dy}{du} = -\frac{2}{(x^2 - 9)^3} \quad (\because u = x^2 - 9)$$
$$u = x^2 - 9$$
$$\frac{du}{dx} = 2x$$

இப்போது, $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$

$$= -\frac{2}{(x^2 - 9)^3}\cdot 2x$$
$$= -\frac{4x}{(x^2 - 9)^3}.$$



05_11th_BM-STAT_Ch-5-TM.indd 123 13-12-2021 11:31:03

## பயிற்சி 5.5

1. பின்வரும் சார்புகளை $x$ –ஐ பொறுத்து வகையிடுக.

   (i) $3x^4 - 2x^3 + x + 8$

   (ii) $\frac{5}{x^4} - \frac{2}{x^3} + \frac{5}{x}$

   (iii) $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + e^x$

   (iv) $\frac{3 + 2x - x^2}{x}$

   (v) $x^3 e^x$

   (vi) $(x^2 - 3x + 2)(x + 1)$

   (vii) $x^4 - 3\sin x + \cos x$

   (viii) $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$

2. பின்வரும் சார்புகளை $x$ –ஐ பொறுத்து வகையிடுக.

   (i) $\frac{e^x}{1+x}$ (ii) $\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$ (iii) $\frac{e^x}{1+e^x}$

3. பின்வரும் சார்புகளுக்கு $x$ –ஐ பொறுத்து வகைக்கெழு காண்க.

   (i) $x \sin x$ (ii) $e^x \sin x$

   (iii) $e^x(x + \log x)$ (iv) $\sin x \cos x$

   (v) $x^3 e^x$

4. பின்வரும் சார்புகளுக்கு $x$ –ஐ பொறுத்து வகைக்கெழு காண்க.

   (i) $\sin^2 x$ (ii) $\cos^2 x$ (iii) $\cos^3 x$

   (iv) $\sqrt{1+x^2}$ (v) $(ax^2 + bx + c)^n$

   (vi) $\sin(x^2)$ (vii) $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

### 5.3.3 உட்படு சார்புகளுக்கான வகையீடு (Derivative of implicit functions)

$f(x, y) = 0$ என்ற உட்படு சார்பில் உள்ள $y$ யை $x$ இல் அமையும் சார்பாக கருதி $x$ க்கு வகையீடு கண்டு, அதில் $\frac{dy}{dx}$ அடங்கிய பகுதிகளை இடப்புறமும், மீதமுள்ள பகுதிகளை வலப்புறமும் இடம்பெறுமாறு மாற்றி எழுதியபின் $\frac{dy}{dx}$ காண்க.

**குறிப்பு**

$f(x, y) = 0$ என்ற சார்பு உட்படு சார்பாக இருக்கும் போது $\frac{dy}{dx}$ ஆனது $x$ மற்றும் $y$ உறுப்புகளைக் கொண்டு இருக்கும்.

**எடுத்துக்காட்டு 5.36**

$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ எனில், $\frac{dy}{dx}$ –ஐ காண்க.

**தீர்வு**

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

இருபுறமும் $x$ –ஐ பொறுத்து வகையீடு காண,

$$2ax + 2h\left(x\frac{dy}{dx} + y\right) + 2by\frac{dy}{dx} + 2g + 2f\frac{dy}{dx} = 0$$

$$(2ax + 2hy + 2g) + (2hx + 2by + 2f)\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{(ax + hy + g)}{(hx + by + f)}.$$

**எடுத்துக்காட்டு 5.37**

$x^3 + y^3 = 3axy$ எனில், $\frac{dy}{dx}$ –ஐ காண்க.

**தீர்வு**

$$x^3 + y^3 = 3axy$$

இருபுறமும் $x$ –ஐ பொறுத்து வகைக்கெழு காண,

$$\frac{d}{dx}(x^3 + y^3) = \frac{d}{dx}(3axy)$$

$$3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} = 3a\left[x\frac{dy}{dx} + y\right]$$

$$x^2 + y^2\frac{dy}{dx} = ax\frac{dy}{dx} + ay$$

$$(y^2 - ax)\frac{dy}{dx} = (ay - x^2)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}$$

**எடுத்துக்காட்டு 5.38**

$2x^2 + 3xy + 5y^2 = 10$ என்ற வளைவரைக்கு $(1,1)$ –ல், $\frac{dy}{dx}$ இன் மதிப்பு காண்.



05_11th_BM-STAT_Ch-5-TM.indd 124 13-12-2021 11:31:10

**தீர்வு**

$$2x^2 + 3xy + 5y^2 = 10$$

இருபுறமும் $x$ –ஐ பொறுத்து வகையிட,

$$\frac{d}{dx}\left[2x^2 + 3xy + 5y^2\right] = \frac{d}{dx}[10]$$

$$4x + 3x\frac{dy}{dx} + 3y + 10y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$(3x+10y)\frac{dy}{dx} = -3y - 4x$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{(3y+4x)}{(3x+10y)}$$

$\therefore$ (1, 1) இல் $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{3+4}{3+10}$

$$= -\frac{7}{13}$$

### எடுத்துக்காட்டு 5.39

$\sin y = x \sin (a+y)$ எனில், $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sin^2(a+y)}{\sin a}$ என நிறுவுக.

**தீர்வு**

$$\sin y = x \sin (a+y)$$

$$x = \frac{\sin y}{\sin(a+y)}$$

$y$ –ஐ பொறுத்து வகையிட,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\sin(a+y)\cos y - \sin y \cdot \cos(a+y)}{\sin^2(a+y)}$$

$$= \frac{\sin(a+y-y)}{\sin^2(a+y)}$$

$$= \frac{\sin a}{\sin^2(a+y)}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\sin^2(a+y)}{\sin a}$$

### பயிற்சி 5.6

1. பின்வரும் சார்புகளுக்கு $\dfrac{dy}{dx}$ ஐ காண்க

   (i) $xy = \tan(xy)$

   (ii) $x^2 - xy + y^2 = 7$

   (iii) $x^3 + y^3 + 3axy = 1$

2. $x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x} = 0$, $x \neq y$ எனில், $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{(x+1)^2}$ என நிறுவுக

3. $4x + 3y = \log(4x - 3y)$ எனில், $\dfrac{dy}{dx}$ –ஐ காண்க.

## 5.3.4 மடக்கையை பயன்படுத்தி வகைக்கெழு காணல் (Logarithmic differentiation)

சில சமயங்களில் சார்புகளானது, பெருக்கல், வகுத்தல் மற்றும் அடுக்குகள் கொண்டும், மற்றும் சார்புகளின் அடுக்குகளில் மாறிகள் கொண்டும் அமையலாம். இவ்வகையான சார்புகளை மடக்கையை பயன்படுத்தி எளிய முறையில் மாற்றி வகையீடு காணலாம்.

### எடுத்துக்காட்டு 5.40

பின்வருவனவற்றை $x$ –ஐ பொறுத்து வகையீடு காண்க.

(i) $x^x$ (ii) $(\log x)^{\cos x}$

**தீர்வு**

(i) $y = x^x$ என்க

இருபுறமும் மடக்கை எடுக்க

$$\log y = x \log x$$

$x$ –ஐ பொறுத்து வகையிட,

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = x\cdot\frac{1}{x} + \log x \cdot 1$$

$$\frac{dy}{dx} = y[1 + \log x]$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = x^x[1 + \log x]$$

(ii) $y = (\log x)^{\cos x}$ என்க

இருபுறமும் மடக்கை எடுக்க

$$\therefore \log y = \cos x \log(\log x)$$

$x$ –ஐ பொறுத்து வகையிட,

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = \cos x\frac{1}{\log x}\cdot\frac{1}{x} + [\log(\log x)](-\sin x)$$

$$\frac{dy}{dx} = y\left[\frac{\cos x}{x\log x} - \sin x \log(\log x)\right]$$



05_11th_BM-STAT_Ch-5-TM.indd 125 13-12-2021 11:31:19

$$\therefore \frac{dy}{dx} = (\log x)^{\cos x}\left[\frac{\cos x}{x\log x} - \sin x \log(\log x)\right]$$

**எடுத்துக்காட்டு 5.41**

$x^y = e^{x-y}$ எனில், $\frac{dy}{dx} = \frac{\log x}{(1+\log x)^2}$ என நிறுவுக.

**தீர்வு**

$x^y = e^{x-y}$

இருபுறமும் மடக்கை எடுக்க,

$y \log x = (x-y)$

$y(1+\log x) = x$

$y = \frac{x}{1+\log x}$

$x$ –ஐ பொறுத்து வகையிட,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1+\log x)(1) - x\left(0+\frac{1}{x}\right)}{(1+\log x)^2}$$

$$= \frac{\log x}{(1+\log x)^2}$$

**எடுத்துக்காட்டு 5.42**

வகைக் கெழு காண் : $\sqrt{\frac{(x-3)(x^2+4)}{3x^2+4x+5}}$

**தீர்வு**

$$y = \sqrt{\frac{(x-3)(x^2+4)}{3x^2+4x+5}} = \left[\frac{(x-3)(x^2+4)}{3x^2+4x+5}\right]^{\frac{1}{2}}$$

என்க

இருபுறமும் மடக்கை எடுக்க,

$$\log y = \frac{1}{2}\left[\log(x-3) + \log(x^2+4) - \log(3x^2+4x+5)\right]$$

$\left[\because \log ab = \log a + \log b\right.$ மற்றும் $\left.\log\frac{a}{b} = \log a - \log b\right]$

$x$ –ஐ பொறுத்து வகையிட,

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{x-3} + \frac{2x}{x^2+4} - \frac{6x+4}{3x^2+4x+5}\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(x-3)(x^2+4)}{3x^2+4x+5}}\left[\frac{1}{x-3} + \frac{2x}{x^2+4} - \frac{6x+4}{3x^2+4x+5}\right]$$

**பயிற்சி 5.7**

1. பின்வரும் சார்புகளுக்கு $x$ –ஐ பொறுத்து வகைகெழு காண்.

   (i) $x^{\sin x}$ (ii) $(\sin x)^x$

   (iii) $(\sin x)^{\tan x}$ (iv) $\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x^2+x+1)}}$

2. $x^m \cdot y^n = (x+y)^{m+n}$ எனில், $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ எனக் காட்டுக.

## 5.3.5 துணையலகு சார்புகளின் வகையீடு (Differentiation of paramatric functions)

$x$ மற்றும் $y$ எனும் மாறிகள் மூன்றாவது மாறி $t$ –ன் சார்புகளாக இருப்பின் அவை துணையலகுச் சார்புகள் எனப்படும். $t$ என்பது சார்பின் துணையலகு எனப்படும்.

$x = f(t)$ மற்றும் $y = g(t)$ எனில்

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$

## 5.3.6 ஒரு சார்பை மற்றொரு சார்பை பொறுத்து வகையிடல் காணல் (Differentiation of a function with respect to an another function)

$u = f(x)$ மற்றும் $v = g(x)$ என்பன $x$ –ன் மீதான இரு சார்புகள் எனில் $g(x)$ –ஐ பொறுத்து $f(x)$ –ன் வகைக்கெழுவானது,

$$\frac{d(f(x))}{d(g(x))} = \frac{du/dx}{dv/dx}$$

**எடுத்துக்காட்டு 5.43**

பின்வரும் துணையலகு சார்புகளுக்கு $\frac{dy}{dx}$ –ஐ காண்க

(i) $x = at^2$ , $y = 2at$

(ii) $x = a\cos\theta$, $y = a\sin\theta$

**தீர்வு**

| | |
|---|---|
| (i) $x = at^2$ | $y = 2at$ |
| $\frac{dx}{dt} = 2at$ | $\frac{dy}{dt} = 2a$ |



05_11th_BM-STAT_Ch-5-TM.indd 126 13-12-2021 11:31:24

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2a}{2at} = \frac{1}{t}$$

(ii) $x = a\cos\theta,\ y = a\sin\theta$

$$\frac{dx}{d\theta} = -a\sin\theta \qquad \Bigg| \qquad \frac{dy}{d\theta} = a\cos\theta$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{a\cos\theta}{-a\sin\theta} = -\cot\theta$$

**எடுத்துக்காட்டு 5.44**

$x = a\theta$ மற்றும் $y = \frac{a}{\theta}$ எனில், $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 0$ என நிறுவுக.

**தீர்வு**

$$x = a\theta \qquad \Bigg| \qquad y = \frac{a}{\theta}$$

$$\frac{dx}{d\theta} = a \qquad \Bigg| \qquad \frac{dy}{d\theta} = \frac{-a}{\theta^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{\left(\frac{-a}{\theta^2}\right)}{a} = -\frac{1}{\theta^2} = -\frac{y}{x}$$

i.e. $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 0$

**மாற்றுமுறை :**

$xy = a\theta \cdot \frac{a}{\theta}$ என எடுக்க,

$xy = a^2$

$x$ –ஐ பொறுத்து வகையிட,

$$x\frac{dy}{dx} + y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 0$$

**எடுத்துக்காட்டு 5.45**

$\frac{x^2}{1+x^2}$ என்ற சார்பிற்கு $x^2$–ஐ பொறுத்து வகைக்கெழு காண்க.

**தீர்வு**

$$u = \frac{x^2}{1+x^2} \qquad \Bigg| \qquad v = x^2$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{(1+x^2)(2x) - x^2(2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{2x}{(1+x^2)^2} \qquad \Bigg| \qquad \therefore \frac{dv}{dx} = 2x$$

$$\frac{du}{dv} = \frac{\left(\frac{du}{dx}\right)}{\left(\frac{dv}{dx}\right)} = \frac{\left[\frac{2x}{(1+x^2)^2}\right]}{2x} = \frac{1}{(1+x^2)^2}$$

**பயிற்சி 5.8**

1. பின்வரும் சார்புகளுக்கு $\frac{dy}{dx}$ –ஐ காண்க.

   (i) $x = ct,\ y = \frac{c}{t}$

   (ii) $x = \log t,\ y = \sin t$

   (iii) $x = a\cos^3\theta,\ y = a\sin^3\theta$

   (iv) $x = a(\theta - \sin\theta),\ \ y = a(1-\cos\theta)$

2. $\sin^3 x$ என்ற சார்பை $\cos^3 x$ –ஐ பொறுத்து வகையிடுக.

3. $\sin^2 x$ என்ற சார்பை $x^2$ –ஐ பொறுத்து வகையிடுக.

## 5.3.7 தொடர் வகையிடல் (Successive differentiation)

ஒரு சார்பை மீண்டும் மீண்டும் வகைப்படுத்தி அதன் வகையீடுகளை காணும் முறையை தொடர் வகையிடல் என்போம்.



05_11th_BM-STAT_Ch-5-TM.indd 127 13-12-2021 11:31:32

(i) $y$ என்ற சார்பின் $x$ –ஐ பொறுத்த வகையீட்டை முதலாம் வரிசை வகையிடல் என்போம். இதனை $\frac{dy}{dx}$ (அல்லது) $y_1$ (அல்லது) $f'(x)$ எனக் குறிப்போம்.

(ii) $f'(x)$ என்பதும் வகையிடத்தக்கது எனில் $x$ –ஐ பொறுத்து $f'(x)$ –ன் வகையீட்டை இரண்டாம் வரிசை வகையிடல் என்போம் இதனை $\frac{d^2y}{dx^2}$ (அல்லது) $y_2$ (அல்லது) $f''(x)$ எனக் குறிப்போம்.

(iii) மேலும் $\frac{d^n y}{dx^n}$ (அல்லது) $y_n$ (அல்லது) $f^{(n)}(x)$ என்பது $y = f(x)$ ன் $n$ வது வரிசை வகைக்கெழு ஆகும்.

| மேற்குறிப்பு | (i) $y = f(x)$ எனில், $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$. (ii) $x = f(t)$ மற்றும், $y = g(t)$ எனில், $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{dt}{dx}$ $= \frac{d}{dt}\left\{\frac{g'(t)}{f'(t)}\right\}\cdot\frac{dt}{dx}$ |
|---|---|

### எடுத்துக்காட்டு 5.46

பின்வரும் சார்புகளுக்கு $x$ –ஐ பொறுத்து இரண்டாம் வகைக் கெழுவை காண்க,

(i) $3\cos x + 4\sin x$

(ii) $x = at^2, \quad y = 2at$

(iii) $x\sin x$

**தீர்வு**

(i)
$$y = 3\cos x + 4\sin x$$
$$y_1 = -3\sin x + 4\cos x$$
$$y_2 = -3\cos x - 4\sin x$$
$$y_2 = -(3\cos x + 4\sin x)$$
$y_2 = -y$ (அல்லது) $y_2 + y = 0$

(ii) $x = at^2$, $\frac{dx}{dt} = 2at$ | $y = 2at$, $\frac{dy}{dt} = 2a$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(\frac{dy}{dt}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)} = \frac{1}{t}$$

இப்பொழுது,
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\frac{1}{2at} = -\frac{1}{t^2}\cdot\frac{1}{2at} = -\frac{1}{2at^3}$$

(iii)
$$y = x\sin x$$
$$\frac{dy}{dx} = x\cos x + \sin x$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = -x\sin x + \cos x + \cos x = 2\cos x - x\sin x$$

### எடுத்துக்காட்டு 5.47

$y = A\sin x + B\cos x$ எனில், $y_2 + y = 0$ என நிறுவுக,

**தீர்வு**

$$y = A\sin x + B\cos x$$
$$y_1 = A\cos x - B\sin x$$
$$y_2 = -A\sin x - B\cos x$$
$$y_2 = -y$$
$$y_2 + y = 0$$

## பயிற்சி 5.9

1. பின்வரும் சார்புகளுக்கு $y_2$ –ஐ காண்க

(i) $y = e^{3x+2}$

(ii) $y = \log x + a^x$

(iii) $x = a\cos\theta, \quad y = a\sin\theta$



05_11th_BM-STAT_Ch-5-TM.indd 128 13-12-2021 11:31:39

2. $y = 500e^{7x} + 600e^{-7x}$ எனில், $y_2 - 49y = 0$ எனக் காட்டுக.

3. $y = 2 + \log x$ எனில், $xy_2 + y_1 = 0$ எனக் காட்டுக.

4. $y = a\cos mx + b\sin mx$ எனில், $y_2 + m^2 y = 0$ எனக் காட்டுக.

5. $y = (x + \sqrt{1+x^2})^m$ எனில், $(1+x^2)y_2 + xy_1 - m^2 y = 0$ எனக் காட்டுக.

6. $y = \sin(\log x)$ எனில், $x^2 y_2 + xy_1 + y = 0$ எனக் காட்டுக.

## பயிற்சி 5.10

### சரியான விடையைத் தேர்ந்தெடுத்து எழுதுக

1. $f(x) = x^2 - x + 1$ எனில், $f(x+1)$ ஆனது

   (a) $x^2$ (b) $x$
   (c) 1 (d) $x^2 + x + 1$

2. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x & , x \geq 2 \\ x + 2 & , x < 2 \end{cases}$ எனில், $f(5)$ இன் மதிப்பு

   (a) –1 (b) 2 (c) 5 (d) 7

3. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x & , x \geq 2 \\ x + 2 & , x < 2 \end{cases}$ எனில், $f(0)$ இன் மதிப்பு

   (a) 2 (b) 5 (c) –1 (d) 0

4. $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}, x > 1$ எனில், $f(-x) =$

   (a ) $-f(x)$ (b) $\dfrac{1}{f(x)}$
   (c) $-\dfrac{1}{f(x)}$ (d) $f(x)$

5. $y = 3$ இன் வரைபடமானது

   (a) $x$-அச்சுக்கு இணை
   (b) $y$-அச்சுக்கு இணை
   (c) ஆதியின் வழிச் செல்லும்
   (d) $x$-அச்சை வெட்டிச் செல்லும்

6. $y = 2x^2$ என்ற வரைபடம் எந்தப்புள்ளி வழியாக செல்லும்?

   (a) (0,0) (b) (2,1)
   (c) (2,0) (d) (0,2)

7. $y = e^x$ என்ற வரைபடமும் $y$ அச்சும் வெட்டும் புள்ளி

   (a) (0, 0) (b) (1, 0)
   (c) (0, 1) (d) (1, 1)

8. $f(x)=|x|$ என்ற சார்பின் மீச்சிறு மதிப்பு

   (a) 0 (b) –1 (c) +1 (d) $-\infty$

9. $x \neq 0$ என்ற நிலையில் கீழ்வரும் சார்புகளில் எந்த சார்பு $f(x) = f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ என்ற வகையில் அமையும்

   (a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x}$
   (b) $f(x) = \dfrac{1 - x^2}{x}$
   (c) $f(x) = x$
   (d) $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x}$

10. $f(x) = 2^x$ மற்றும் $g(x) = \dfrac{1}{2^x}$ எனில், $(fg)(x)$ இன் மதிப்பு

    (a) 1 (b) 0 (c) $4^x$ (d) $\dfrac{1}{4^x}$

11. கீழ்காணும் சார்புகளில் எது ஒற்றை சார்பாகவும் மற்றும் இரட்டை சார்பாகவும் இருக்காது?

    (a) $f(x) = x^3 + 5$ (b) $f(x) = x^5$
    (c) $f(x) = x^{10}$ (d) $f(x) = x^2$

12. அனைத்து $x \in R$ க்கு $f(x) = -5$ என்பது

    (a) ஒரு சமனிச் சார்பு
    (b) மட்டுச் சார்பு
    (c) அடுக்குச் சார்பு
    (d) மாறிலிச் சார்பு



05_11th_BM-STAT_Ch-5-TM.indd 129 13-12-2021 11:31:47

13. அனைத்து $x \in R$ க்கு $f(x)=|x|$ –ன் வீச்சகமானது

(a) $(0, \infty)$  (b) $[0, \infty)$

(c) $(-\infty, \infty)$  (d) $[1, \infty)$

14. $f(x) = e^x$ இன் வரைபடத்தை போல் ஒத்த வரைபடத்தைக் கொண்ட சார்பு

(a) $f(x)=a^x, a>1$

(b) $f(x)=a^x, a<1$

(c) $f(x)=a^x, 0<a<1$

(d) $y=ax+b, a\neq 0$

15. $f(x)=x^2$ மற்றும் $g(x) = 2x+1$ எனில், $(fg)(0)$ இன் மதிப்பு

(a) 0  (b) 2  (c) 1  (d) 4

16. $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\tan\theta}{\theta} =$

(a) 1  (b) $\infty$  (c) $-\infty$  (d) $\theta$

17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x} =$

(a) $e$  (b) $nx^{n-1}$

(c) 1  (d) 0

18. $x$ இன் எம்மதிப்புக்கு, $f(x)=\dfrac{x+2}{x-1}$ தொடர்ச்சி அற்றது?

(a) –2  (b) 1  (c) 2  (d) –1

19. சார்பு $f(x)$ ஆனது $x = a$ இல் தொடர்ச்சித்தன்மை கொண்டது எனில் $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ ன் மதிப்பு

(a) $f(-a)$  (b) $f\left(\frac{1}{a}\right)$

(c) $2f(a)$  (d) $f(a)$

20. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{x}\right) =$

(a) $-\dfrac{1}{x^2}$  (b) $-\dfrac{1}{x}$

(c) $\log x$  (d) $\dfrac{1}{x^2}$

21. $\dfrac{d}{dx}(5e^x-2\log x) =$

(a) $5e^x-\dfrac{2}{x}$  (b) $5e^x-2x$

(c) $5e^x-\dfrac{1}{x}$  (d) $2\log x$

22. $y = x$ மற்றும் $z = \dfrac{1}{x}$ எனில் $\dfrac{dy}{dz} =$

(a) $x^2$  (b) 1  (c) $-x^2$  (d) $-\dfrac{1}{x^2}$

23. $y = e^{2x}$ எனில், $x = 0$ இல் $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ இன் மதிப்பு

(a) 4  (b) 9  (c) 2  (d) 0

24. $y = \log x$ எனில், $y_2 =$

(a) $\dfrac{1}{x}$  (b) $-\dfrac{1}{x^2}$

(c) $-\dfrac{2}{x^2}$  (d) $e^2$

25. $\dfrac{d}{dx}(a^x) =$

(a) $\dfrac{1}{x\log_e a}$  (b) $a^a$

(c) $x\log_e a$  (d) $a^x\log_e a$

## இதர கணக்குகள்

1. $f(x)=\dfrac{1}{2x+1}, x>-\dfrac{1}{2}$ எனில், $f(f(x)) = \dfrac{2x+1}{2x+3}$ என நிறுவுக.

2. $y = 9-x^2$ இன் வரைபடம் வரைக.

3. $f(x)=\begin{cases}\frac{x-|x|}{x} & , x\neq 0\\ 2 & , x=0\end{cases}$ எனில், $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ காணத்தக்கது அல்ல எனக் காண்பி.

4. மதிப்பிடுக: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(2x-3)(\sqrt{x}-1)}{2x^2+x-3}$

5. $f(x) = 2x-|x|$ என்ற சார்பு $x=0$ இல் தொடர்ச்சியுடைய சார்பு எனக் காட்டுக

6. $f(x) = \begin{cases}1-x & , x<1\\ (1-x)(2-x) & , 1\leq x\leq 2\\ 3-x & , x>2\end{cases}$ எனும் சார்புக்கு $x=1$ மற்றும் $x=2$ இல் அதன் தொடர்ச்சித் தன்மை மற்றும் வகையீட்டுத் தன்மையை ஆராய்க.

7. $x^y=y^x$ எனில், $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}\left(\dfrac{x\log y-y}{y\log x-x}\right)$ என நிறுவுக.



05_11th_BM-STAT_Ch-5-TM.indd 130  13-12-2021 11:31:56

8. $xy^2 = 1$ எனில், $2\frac{dy}{dx} + y^3 = 0$ என நிறுவுக.

9. $y = \tan x$ எனில், $y_2 - 2yy_1 = 0$ என நிறுவுக.

10. $y = 2\sin x + 3\cos x$ எனில், $y_2 + y = 0$ என நிறுவுக.

## தொகுப்புரை

- $A$ மற்றும் $B$ என்பன மெய் எண்களைக் கொண்ட இரு வெற்றற்ற கணங்கள் என்க. $A$ இல் உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பையும் $B$ இல் உள்ள ஒரேயொரு உறுப்புடன் மட்டும் தொடர்பு படுத்தும் $f$ என்ற விதியானது கணம் $A$லிருந்து $B$ க்கான சார்பு ஆகும்.
- $\lim_{x \to a} f(x)$ காணத்தக்கது $\Leftrightarrow \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$.
- மெய்யெண் $a$ மற்றும் $f(x)$ என்ற சார்புக்கு , $\lim_{x \to a} f(x)$ மற்றும் $f(a)$ இன் மதிப்புகள் சமமாக இருக்க வேண்டிய அவசியமில்லை.
- $x = a$ இல் சார்பு $f(x)$ ஒரு தொடர்ச்சியான சார்பு ஆவதற்கு தேவையான மற்றும் போதுமான நிபந்தனை $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.
- சார்பு $f(x)$ ஒரு அரங்கத்தின் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் தொடர்ச்சியுடைய சார்பாக இருந்தால் அது தொடர்ச்சியான சார்பு எனப்படும்.
- $f(x)$, $g(x)$ என்ற இரு சார்புகள் அதன் பொதுவான அரங்கத்தில் தொடர்ச்சியுடைய சார்புகள் எனில் $f \pm g,\ f \cdot g,\ kf$ ($k$ ஒரு மாறிலி) என்ற சார்புகளும் தொடர்ச்சியுடைய சார்புகள் மற்றும் $g \neq 0$ எனில் $\frac{f}{g}$ ம் தொடர்ச்சியான சார்பு ஆகும்.
- $L[f'(c)] = \lim_{h \to 0} \frac{f(c-h) - f(c)}{-h}$ மற்றும் $R[f'(c)] = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$
- $f(x)$ என்ற சார்பு $x = c$ இல் வகையிட தேவையான மற்றும் போதுமான நிபந்தனை $L[f'(c)] = R[f'(c)]$ ஆகும்.
- சார்பு $f(x)$ ஆனது $x=c$ இல் வகையிட தேவையான மற்றும் போதுமான நிபந்தனை $\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$ முடிவுறு எண்ணாகவும், காணத்தக்கதாகவும் அமைய வேண்டும். இதனை $f'(c)$ எனக் குறிப்போம்.
- அனைத்து வகையிடத்தக்க சார்புகளும், தொடர்ச்சியுடைய சார்புகள் ஆகும். ஆனால் இதன் மறுதலை மெய்யாக இருக்க வேண்டும் என்ற அவசியமில்லை.
- $y = f(x)$ எனில், $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$ என்பது $y$ –ஐ பொறுத்து $x$ –ன் இரண்டாம் வரிசை வகைக்கெழு ஆகும்.
- $x = f(t)$ மற்றும் $y = g(t)$ எனில் $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left\{\frac{g'(t)}{f'(t)}\right\}$ அல்லது $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left\{\frac{g'(t)}{f'(t)}\right\} \cdot \frac{dt}{dx}$

| கலைச் சொற்கள் (GLOSSARY) | |
|---|---|
| அடுக்கு | Exponential |
| அண்மையகம் | Neighbourhood |
| இடக்கை எல்லை | Left limit |
| இடைவெளி | Interval |
| இயற்கணித சார்புகள் | Algebric functions |
| உட்படு | Implict |
| எல்லை | Limit |
| குறிச் சார்பு | Signum function |
| சங்கிலி விதி | Chain rule |
| சமனி | Identity |
| சாரா மாறி | Independent variable |
| சார்ந்த மாறி | Dependent variable |
| சார்பகம் / அரங்கம் | Domain |
| சார்பு | Function |
| தன்னிச்சை மாறிலிகள் | Arbitrary constants |
| திறந்த இடைவெளி | Open interval |
| துணையலகு சார்புகள் | Parametric functions |
| தொடர் வகையிடல் | Successive differentiation |
| தொடர்ச்சி | Continuous |
| மடக்கை | Logarithmic |
| மட்டு | Modulus |
| மாறி | Variable |
| மாறிலி | Constant |
| முழுமையான மாறிலிகள் | Absolute constants |
| மூடிய இடைவெளி | Closed interval |
| வகையீடு | Derivative |
| வலக்கை எல்லை | Right limit |
| விஞ்சிய சார்புகள் | Transcendental functions |
| வீச்சகம் | Range |
| வெளிபடு | Explict |



05_11th_BM-STAT_Ch-5-TM.indd 132 13-12-2021 11:32:01