দশম অধ্যায়

বৃত্ত (Circle)

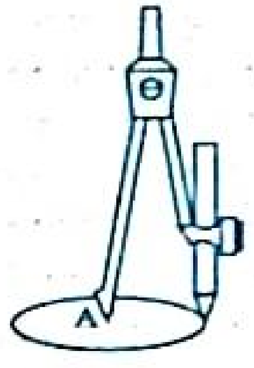
10.1 অৱতৰণা (Introduction) :

তোমালোকে দৈনন্দিন জীৱনত বহুতো ঘূৰণীয়া আকৃতিৰ বস্তু নিশ্চয় দেখিছাইঁক যেনে— যানবাহনৰ চকা, খাৰু, বহুতো ঘড়ীৰ মুখৰ চাক, 50 পইচা, 1 টকা আৰু 5 টকাৰ মুদ্ৰা, চাবিৰ ৰিং, চোলাৰ বুটাম, আদি (চিত্ৰ 10.1)। ঘড়ী এটাত তোমালোকে নিশ্চয় লক্ষ্য কৰিছা যে চেকেণ্ডৰ কাঁটাডাল ঘড়ীটোৰ চাকত (dial) খৰকৈ ঘূৰি থাকে আৰু ইয়াৰ আগটোৱে ঘূৰণীয়া পথত গতি কৰি থাকে। চেকেণ্ডৰ কাঁটাৰ আগটোৱে অংকন কৰা এই পথটোক বৃত্ত বোলে। এই অধ্যায়ত তোমালোকে বৃত্ত, আন কেতবোৰ বৃত্ত সম্পৰ্কীয় পদ আৰু বৃত্তৰ কিছুমান ধৰ্মৰ সম্পৰ্কে অধ্যয়ন কৰিবলৈ পাবা।

চিত্ৰ 10.1

10.2 বৃত্ত আৰু ইয়াৰ সম্পৰ্কীয় পদ : এক পুনৰালোচনা (Circles and Its Related Terms : A Review) :

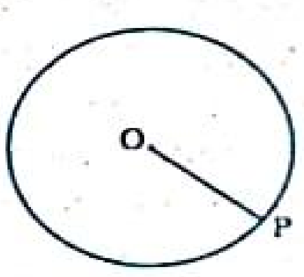
এডাল কম্পাচ লোৱা আৰু ইয়াত পেঞ্চিল লগোৱা। ইয়াৰ জোঙা খুৰাটো কাগজৰ এটা বিন্দুত স্থাপন কৰা। আনটো খুৰা কিছুদূৰলৈ মেলি দিয়া। জোঙা খুৰাটো একেটা বিন্দুত ৰাখি আনটো খুৰা এপাক ঘূৰাই দিয়া। কাগজত পেঞ্চিলডালে অংকন কৰা বদ্ধ ছবিটো কি? তোমালোকে জানা— এইটো এটা বৃত্ত (চিত্ৰ 10.2) তোমালোকে কেনেকৈ বৃত্তটো পালা? তোমালোকে এটা বিন্দু স্থিৰ কৰিলা (চিত্ৰ 10.2 ত A) আৰু A ৰ পৰা সমান দূৰত্বত থকা বাকী সকলো বিন্দু অংকন কৰিলা। এইটোৱে আমাক তলৰ সংজ্ঞাটো দিয়ে :



চিত্ৰ 10.2

এখন সমতলত এটা স্থিৰ বিন্দুৰ পৰা নিৰ্দিষ্ট দূৰত্বত থকা সমতলখনৰ বিন্দুসমূহৰ সমষ্টি বা থুপটোকেই বৃত্ত বোলা হয়।

স্থিৰ বিন্দুটোক বৃত্তটোৰ কেন্দ্ৰ আৰু নিৰ্দিষ্ট দূৰত্বটোক বৃত্তটোৰ ব্যাসাৰ্ধ বোলে। চিত্ৰ 10.3 ত 'O' বৃত্তটোৰ কেন্দ্ৰ আৰু দৈৰ্ঘ্য 'OP' বৃত্তটোৰ ব্যাসাৰ্ধ।



চিত্ৰ 10.3

মন্তব্য : মন কৰিব যে, বৃত্তৰ কেন্দ্ৰ আৰু ইয়াৰ যিকোনো বিন্দু সংযোগী ৰেখাখণ্ডকো বৃত্তটোৰ ব্যাসাৰ্ধ বোলা হয়। অৰ্থাৎ ব্যাসাৰ্ধক দুটা অৰ্থত ব্যৱহাৰ কৰা হয়— এডাল ৰেখাখণ্ডৰ অৰ্থত আৰু ইয়াৰ দৈৰ্ঘ্যৰ অৰ্থত।

ষষ্ঠ শ্ৰেণীৰ পৰা তোমালোকে তলৰ কিছুমান ধাৰণাৰ লগত পৰিচয় হৈ আহিছা। আমি সেয়া মাথো ৰোমন্থনহে কৰিছোঁ।

এটা বৃত্তই তাৰ সমতলখনক তিনিটা অংশত বিভক্ত কৰে। সেয়া হ'ল (i) বৃত্তটোৰ ভিতৰভাগ যাক বৃত্তটোৰ অন্তঃৰৱতী অংশও বোলা হয়। (ii) বৃত্তটো আৰু (iii) বৃত্তৰ বাহিৰভাগ যাক বৃত্তটোৰ বহিঃ অংশও বোলা হয় (চিত্ৰ 10.4 চোৱা)। বৃত্তটো আৰু ইয়াৰ অন্তঃভাগে বৃত্তাকাৰ ক্ষেত্ৰখন গঠন কৰে।

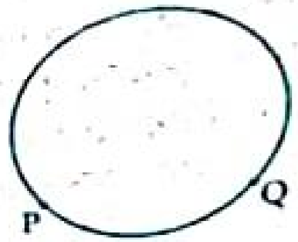
চিত্ৰ 10.4

যদি তুমি বৃত্তৰ দুটা বিন্দু P আৰু Q লোৱা তেন্তে PQ ৰেখাখণ্ডক বৃত্তটোৰ এডাল জ্যা বোলা হয়। (চিত্ৰ 10.5 চোৱা) বৃত্তৰ কেন্দ্ৰৰ মাজেৰে যোৱা জ্যাক বৃত্তটোৰ ব্যাস বোলে। ব্যাসাৰ্ধৰ নিচিনাকৈ বৃত্তৰ ব্যাসও দুটা অৰ্থত ব্যৱহৃত হয় সেয়া হ'ল এডাল ৰেখাখণ্ড আৰু ইয়াৰ দৈৰ্ঘ্য। তোমালোকে ব্যাসতকৈ দীঘল আন কোনো জ্যা পোৱানে? নাই, তোমালোকে দেখিছা যে এডাল

ব্যাসেই বৃত্তৰ বৃহত্তম জ্যা। আৰু সকলো ব্যাসৰ দৈৰ্ঘ্য সমান, যি ব্যাসাৰ্ধৰ দৈৰ্ঘ্যৰ দুগুণ। চিত্ৰ 10.5 ত AOB বৃত্তটোৰ এডাল ব্যাস। এটা বৃত্তৰ ব্যাসৰ সংখ্যা কিমান? এটা বৃত্ত আঁকা আৰু চোঁৱা ইয়াৰ ব্যাসৰ সংখ্যা কিমান পোৱা।

চিত্ৰ 10.5

দুটা বিন্দুৰ মাজৰ বৃত্তৰ একোটা অংশক এডাল চাপ বোলে। চিত্ৰ 10.6 ত বৃত্তৰ P আৰু Q বিন্দুৰ মাজৰ অংশবোৰ চোঁৱা। তোমালোকে তাত দুটা অংশ পাবা, এটা অংশ দীঘল আৰু আনটো চুটি। (চিত্ৰ 10.7 চোঁৱা)। দীঘল অংশক অধি চাপ PQ আৰু চুটি অংশটোক উপচাপ PQ বোলা হয়। উপচাপটোক $\overset{\frown}{PQ}$ ৰে বুজোৱা হয় আৰু অধিচাপ PQ ক $\overset{\frown}{PRQ}$ ৰে বুজোৱা হয়, য'ত R, P আৰু Q চাপৰ মধ্যবৰ্তী বিন্দু। অন্যভাবে নোকোৱালৈকে PQ চাপ বা $\overset{\frown}{PQ}$ এ উপচাপ PQ ক নিৰ্দেশ কৰিব। যেতিয়া P আৰু Q এডাল ব্যাসৰ প্ৰান্তবিন্দু হ'ব তেতিয়া দুয়োটা চাপ সমান হ'ব আৰু প্ৰত্যেকটোকে অৰ্ধবৃত্ত বোলা হয়।



চিত্ৰ 10.6

চিত্ৰ 10.7

বৃত্তটোৰ সম্পূৰ্ণ দৈৰ্ঘ্যক বৃত্তটোৰ *পৰিধি* বোলা হয়। এডাল জ্যা আৰু ইয়াৰ যিকোনো এটা চাপৰ মাজৰ অংশক বৃত্তাকাৰ ক্ষেত্ৰটোৰ খণ্ড বা সাধাৰণভাবে বৃত্ত খণ্ড বোলা হয়। তোমালোকে দুই প্ৰকাৰৰ বৃত্তখণ্ড পাবা, সেয়া হ'ল— মুখ্য (অধি) বৃত্তখণ্ড আৰু গৌণ (উপ) বৃত্তখণ্ড (চিত্ৰ 10.8)। এটা চাপ আৰু ইয়াৰ ব্যাসাৰ্ধ দুডালৰ মাজৰ অংশটোক বৃত্তাংশ বোলা হয়। বৃত্তখণ্ডৰ নিচিনাকৈ, তোমালোকে পাবা যে উপচাপে উপ বৃত্তাংশ আৰু মুখ্য চাপে মুখ্য বৃত্তাংশৰ লগত সম্পৰ্ক ৰাখে। চিত্ৰ 10.9 ত OPQ ক্ষেত্ৰটো উপ বৃত্তাংশ আৰু বাকী বৃত্তাকাৰ ক্ষেত্ৰ মুখ্য বা অধি বৃত্তাংশ। যেতিয়া দুটা চাপ সমান হয়, অৰ্থাৎ প্ৰত্যেকটোৱেই অৰ্ধবৃত্ত, তেতিয়া দুয়োটা বৃত্তাংশ একে হ'ব আৰু প্ৰত্যেককে এটা *অৰ্ধবৃত্তাকাৰ ক্ষেত্ৰ* বোলে।

চিত্ৰ 10.8

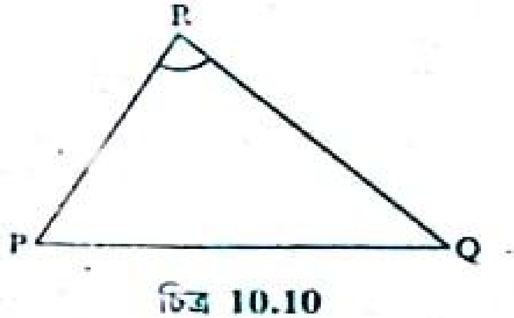
চিত্ৰ 10.9

অনুশীলনী 10.1

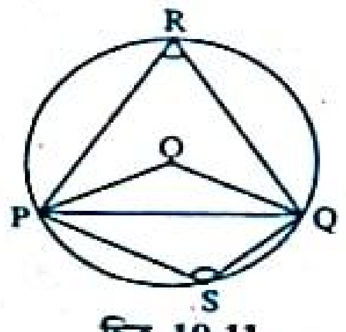
1. খালী ঠাই পূৰণ কৰা :
   (i) বৃত্তৰ কেন্দ্ৰ বৃত্তটোৰ .... ত অৱস্থিত (বহিঃভাগ/অন্তঃভাগ)
   (ii) এটা বৃত্তৰ কেন্দ্ৰৰ পৰা এটা বিন্দুৰ দূৰত্ব ইয়াৰ ব্যাসাৰ্ধতকৈ বেছি হ'লে ই বৃত্তটোৰ .... ত অৱস্থিত (বহিঃভাগ/অন্তঃভাগ)
   (iii) এটা বৃত্তৰ বৃহত্তম জ্যাডাল বৃত্তটোৰ ....।
   (iv) এটা চাপৰ প্ৰান্তবিন্দু এডাল ব্যাসৰ প্ৰান্তবিন্দু হ'লে চাপটো এটা ....।
   (v) এটা বৃত্তৰ বৃত্তখণ্ড বৃত্তটোৰ এটা চাপ আৰু .... মধ্যৱৰ্তীক্ষেত্ৰ।
   (vi) এটা বৃত্তই বৃত্তটো থকা সমতলখনক .... ভাগত ভাগ কৰে।
2. সঁচা বা মিছা লিখা : তোমাৰ উত্তৰৰ যুক্তি দিয়া।
   (i) কেন্দ্ৰ আৰু বৃত্তৰ যিকোনো এটা বিন্দু সংযোগী ৰেখাখণ্ড বৃত্তটোৰ এডাল ব্যাসাৰ্ধ।
   (ii) এটা বৃত্তৰ সীমিতসংখ্যকহে সমান জ্যা থাকে।
   (iii) এটা বৃত্তক তিনিটা সমান চাপত বিভক্ত কৰিলে প্ৰত্যেকেই এটা অধি চাপ হ'ব।
   (iv) এডাল জ্যা, যি বৃত্তৰ ব্যাসাৰ্ধৰ দুগুণ সেয়া বৃত্তটোৰ এডাল ব্যাস।
   (v) এটা বৃত্তাংশ বৃত্তৰ জ্যা আৰু ইয়াৰ অনুৰূপ চাপৰ মাজৰ ক্ষেত্ৰ।
   (vi) এটা বৃত্ত সামতলিক আকাৰ।

10.3 এডাল জ্যাই এটা বিন্দুত উৎপন্ন কৰা কোণ (Angle Subtended by a Chord at a Point) :

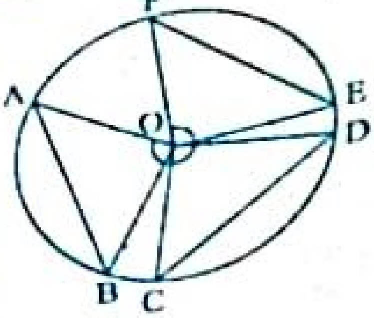
এডাল ৰেখাখণ্ড PQ লোৱা আৰু PQ ৰ ওপৰত নথকা R এটা বিন্দু লোৱা। PQ আৰু QR সংযোগ কৰা (চিত্ৰ 10.10 চোৱা)। তেতিয়া $\angle PRQ$ কোণটোক PQ ৰেখাখণ্ডই R বিন্দুত উৎপন্ন কৰা কোণ বোলা হয়। চিত্ৰ 10.11 ত POQ, PRQ আৰু PSQ কোণবোৰক কি বোলা হয়? $\angle POQ$ কোণক O কেন্দ্ৰত PQ জ্যাই উৎপন্ন কৰা কোণ বোলে, $\angle PRQ$ আৰু $\angle PSQ$ কোণক যথাক্ৰমে PQ এ R আৰু S বিন্দুত অধি আৰু উপ চাপ PQ ত উৎপন্ন কৰা কোণ বোলে।



চিত্ৰ 10.10



চিত্ৰ 10.11



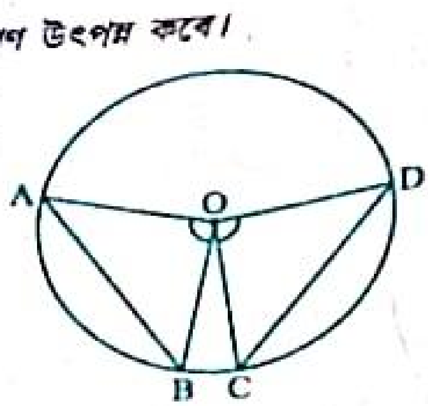
চিত্র 10.12

এডাল জ্যাৰ দৈৰ্ঘ্য আৰু ই কেন্দ্ৰত উৎপন্ন কৰা কোণৰ মাজৰ সম্বন্ধৰ বিষয়ে পৰীক্ষা কৰি চোৱা হওঁক। তোমালোকে এটা বৃত্তৰ বিভিন্ন জ্যা আৰু সিহঁতে কেন্দ্ৰত কৰা কোণবোৰ অংকন কৰি দেখিবা যে দীঘল জ্যাই কেন্দ্ৰত উৎপন্ন কৰা কোণ চুটি জ্যাই কেন্দ্ৰত উৎপন্ন কৰা কোণতকৈ ডাঙৰ। তোমালোকে বৃত্ত এটাৰ দুডাল সমান জ্যা ললে কি হ'ব? কেন্দ্ৰত উৎপন্ন কৰা কোণবোৰ একে হয়নে নহয়?

দুই বা ততোধিক একে সমান জ্যা এটা বৃত্তত অংকন কৰা আৰু সিহঁতে কেন্দ্ৰত উৎপন্ন কৰ কোণবোৰৰ জোখ লোৱা (চিত্ৰ 10.12 চোঁৱা)। তোমালোকে পাবা যে, সিহঁতে কেন্দ্ৰত উৎপন্ন কৰা কোণবোৰ পৰস্পৰ সমান। এই কথাষাৰৰ এটা প্ৰমাণ দিওঁ আহাঁ।

উপপাদ্য 10.1 : *এটা বৃত্তৰ সমান জ্যাবোৰে কেন্দ্ৰত সমান কোণ উৎপন্ন কৰে।*

প্ৰমাণ : তোমালোকক O কেন্দ্ৰবিশিষ্ট বৃত্ত এটাৰ দুডাল সমান জ্যা AB আৰু CD দিয়া হ'ল (চিত্ৰ 10.13 চোঁৱা)। তোমালোকে প্ৰমাণ কৰিব লাগে যে, $\angle AOB = \angle COD$।



চিত্ৰ 10.13

AOB আৰু COD ত্ৰিভুজত,

$OA = OC$ (এটা বৃত্তৰ ব্যাসাৰ্ধ)

$OB = OD$ (এটা বৃত্তৰ ব্যাসাৰ্ধ)

$AB = CD$ (দিয়া আছে)

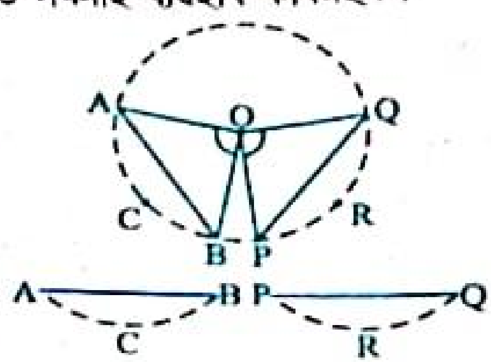
গতিকে $\Delta AOB \cong \Delta COD$ (বাহু-বাহু-বাহু বিধি)

ইয়াৰ পৰা পাওঁ, $\angle AOB = \angle COD$

(সৰ্বাংগসম ত্ৰিভুজৰ অনুৰূপ অংশ)

মন্তব্য : সুবিধাৰ বাবে, 'সৰ্বাংগসম ত্ৰিভুজৰ অনুৰূপ অংশ' ক সংক্ষেপে CPCT বুলি ব্যৱহাৰ কৰিম কাৰণ তোমালোকে দেখা পাবা যে, এইটো আমি অতি সঘনাই ব্যৱহাৰ কৰিমইঁক।

এতিয়া, যদি এটা বৃত্তৰ দুডাল জ্যাই কেন্দ্ৰত সমান কোণ উৎপন্ন কৰে তেন্তে জ্যা দুডালৰ বিষয়ে তোমালোকে কি ক'বা? সিহঁত সমান নে নহয়? তলৰ কাৰ্যটোৰ জৰিয়তে এইটো পৰীক্ষা কৰি চোৱা হওক।



চিত্ৰ 10.14

এখন নক্সা অকাঁ কাগজ লোৱা আৰু এটা বৃত্ত ইয়াত অংকিত কৰা। বৃত্তটোৰ ওপৰে ওপৰে কাঁটিলে এখন কাঁহী পাবা। ইয়াৰ কেন্দ্ৰ 'O' ত AOB কোণ আঁকা য'ত A আৰু B বৃত্তটোৰ বিন্দু। $\angle AOB$ ৰ সমানকৈ আন এটা কোণ POQ কেন্দ্ৰত

আঁকা। কাঁইচীখন AB আৰু PQ ৰ ওপৰেৰে কাটা (চিত্ৰ 10.14 ত চোৱা)। তোমালোকে ACB আৰু PQR দুটা বৃত্তখণ্ড পাবা। যদি তোমালোকে এটা আনটোৰ ওপৰত প্ৰতিষ্ঠা কৰা তেন্তে কি দেখিবা? সিহঁতে এটাক আনটোৱে আবৰি পেলাব অৰ্থাৎ সিহঁত সৰ্বসম। গতিকে AB = PQ.

যদিও তোমালোকে ইয়াক এই নিৰ্দিষ্ট কাৰ্যটোতহে দেখিলা অন্যান্য সমান কোণৰ ক্ষেত্ৰতও চেষ্টা কৰি চোৱা। তলৰ উপপাদ্যটোৰ কাৰণে জ্যাবোৰ সদায় সমানেই ওলাব।

উপপাদ্য 10.2 : *যদি এটা বৃত্তৰ জ্যাই কেন্দ্ৰত উৎপন্ন কৰা কোণবোৰ সমান, তেন্তে জ্যাবোৰ পৰস্পৰ সমান।*

ওপৰৰ উপপাদ্যটো, উপপাদ্য 10.1 ৰ বিপৰীত। মন কৰা যে চিত্ৰ 10.13 ত তোমালোকে যদি $\angle AOB = \angle COD$ লোৱা তেন্তে

$$\Delta AOB \cong \Delta COD \text{ (কিয়?)}$$

তোমালোকে এতিয়া পাবানে যে, AB = CD?

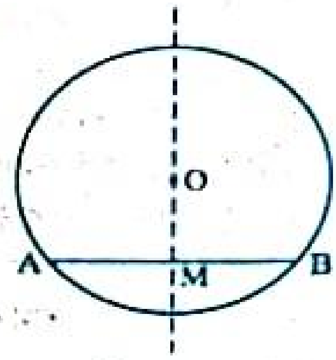
অনুশীলনী 10.2

1. মনত পেলোৱা যে দুটা বৃত্ত সৰ্বসম হ'ব যদি সিহঁতৰ ব্যাসাৰ্ধ একে হয়। প্ৰমাণ কৰা যে, সৰ্বসম বৃত্তৰ সমান জ্যাই কেন্দ্ৰত সমান কোণ উৎপন্ন কৰে।
2. প্ৰমাণ কৰা যে, যদি সৰ্বসম বৃত্তৰ জ্যাই কেন্দ্ৰত সমান কোণ উৎপন্ন কৰে তেন্তে জ্যাবোৰ সমান।

10.4 কেন্দ্ৰৰ পৰা এডাল জ্যালৈ টনা লম্ব (Perpendicular from the Centre to a Chord) :

কাৰ্য : এখন নক্সা অঁকা কাগজত এটা বৃত্ত আঁকা। ধৰাহ'ল 'O' ইয়াৰ কেন্দ্ৰ। এডাল জ্যা AB আঁকা। 'O' ৰ মাজেৰে যোৱা এডাল ৰেখাইদি কাগজখন ভাঁজ কৰা যাতে জ্যাডালৰ এটা অংশ আনটো অংশৰ ওপৰত পৰে। ধৰা ভাঁজটোৱে AB ক M বিন্দুত কাটিছে। তেন্তে

$\angle OMA = \angle OMB = 90°$ বা OM, AB ৰ ওপৰত লম্ব। B বিন্দুটো A ৰ ওপৰত মিলি যায়নে (চিত্ৰ 10.15 চোৱা)? হয়, ই মিলি যায়। সেয়ে MA = MB।



চিত্ৰ 10.15

তোমালোকে নিজে প্ৰমাণ কৰা যে OA আৰু OB সংযোগ কৰিলে সমকোণী ত্ৰিভুজ OMA আৰু OMB সৰ্বসম হ'ব। এই উদাহৰণটো তলৰ ফলাফলটোৰ এটা বিশেষ দৃষ্টান্তহে।

উপপাদ্য 10.3 : *এটা বৃত্তৰ কেন্দ্ৰ পৰা এডাল জ্যালৈ টনা লম্বই জ্যাডালক সমদ্বিখণ্ডিত কৰে।*

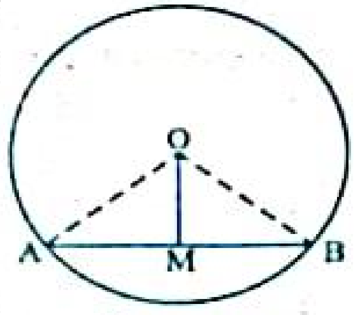
এই উপপাদ্যটোৰ বিপৰীত কি? এইটো লিখিবলৈ, প্ৰথমে উপপাদ্য 10.3 ত কি ধৰা হৈছে আৰু ইয়াৰ প্ৰমাণ কি তাক বুজিব লাগিব। দিয়া আছে যে, এটা বৃত্তৰ কেন্দ্ৰ পৰা এডাল জ্যালৈ

টনা লম্ব অঁকা হ'ল আৰু প্ৰমাণ কৰিব লাগে যে ই জ্যাডালক সমদ্বিখণ্ডিত কৰে। সেইবাবে, বিপৰীত ক্ৰমে, পূৰ্ব অনুমান হ'ব— 'যদি এটা বৃত্তৰ কেন্দ্ৰৰ পৰা টনা ৰেখাই এডাল জ্যাক সমদ্বিখণ্ডিত কৰে' আৰু প্ৰমাণ কৰিব লগাটো হ'ব— 'ৰেখাডাল জ্যাডালৰ লম্ব'। সেইবাবে বিপৰীত উপপাদ্যটো হ'ব।

উপপাদ্য 10.4 : *এটা বৃত্তৰ কেন্দ্ৰৰ মাজেৰে টনা ৰেখাই এডাল জ্যাক সমদ্বিখণ্ডিত কৰিলে ৰেখাডাল জ্যাডালৰ ওপৰত লম্ব।*

এইটো সত্যনে? কেইটামান অৱস্থালৈ চেষ্টা কৰা আৰু চোঁৱা। তোমালোকে দেখিবা যে আটাইকেইটা অৱস্থাতে এইটো সত্য। তলৰ অনুশীলনীটো কৰি চোৱা যে ই সাধাৰণভাৱে সত্য হয়নে নহয়। আমি ঢাপকেইটা লিখিম আৰু তোমালোকে কাৰণবোৰ দৰ্শোৱা।

ধৰোঁ, O কেন্দ্ৰ বিশিষ্ট বৃত্তৰ AB এডাল জ্যা আৰু O ক AB ৰ মধ্যবিন্দু m ৰ সৈতে সংযোগ কৰা হ'ল। তোমালোকে প্ৰমাণ কৰিব লাগে যে $OM \perp AB$, OA আৰু OB সংযোগ কৰা (চিত্ৰ 10.16 চোঁৱা)



চিত্ৰ 10.16

OAM আৰু OBM ত্ৰিভুজত,

$OA = OB$ (কিয়?)

$AM = BM$ (কিয়?)

$OM = OM$ (সাধাৰণ বাহু)

গতিকে, $\Delta OAM = \Delta OBM$ (কেনেকৈ?)

ইয়াৰ পৰা পাওঁ, $\angle OMA = \angle OMB = 90^\circ$ (কিয়?)

10.5 তিনিটা বিন্দুৰ মাজেৰে বৃত্ত (Circle through Three Points) :

তোমালোকে ষষ্ঠ অধ্যায়ত শিকি আহিছা যে এডাল ৰেখা পাবলৈ হ'লে দুটা বিন্দুয়েই যথেষ্ট। অৰ্থাৎ, দুটা বিন্দুৰ মাজেৰে এডাল আৰু মাথোন এডালহে ৰেখা পাব পাৰি। স্বাভাৱিকতে এটা প্ৰশ্ন উঠে। এটা বৃত্ত নিৰ্ণয়ৰ ক্ষেত্ৰত কিমানটা বিন্দু যথেষ্ট (বা পৰ্য্যাপ্ত)

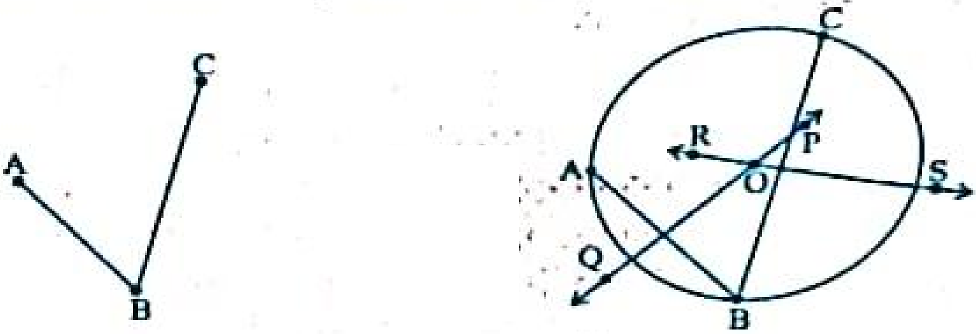
এটা বিন্দু P লোৱা। এই বিন্দুৰ মাজেৰে কিমান বৃত্ত আঁকিব পাৰি? তোমালোকে দেখিবা যে, এই বিন্দুৰ মাজেৰে তোমালোকে যিমান বিচাৰা সিমান বৃত্ত আঁকিব পাৰিবা [চিত্ৰ 10.17 (i) চোৱা]।

চিত্ৰ 10.17

এতিয়া দুটা বিন্দু P আৰু Q লোৱা। তোমালোকে আকৌ দেখিবা যে P আৰু Q ৰ মাজেৰে অসীম সংখ্যক বৃত্ত আঁকিব পাৰি [চিত্ৰ 10.17 (ii) চোৱা]। যেতিয়া তোমালোকে তিনিটা বিন্দু A, B আৰু C লোৱা তেতিয়া কি হ'ব? তিনিটা একেৰেখাত থকা বিন্দুৰ মাজেৰে এটা বৃত্ত আঁকিব পাৰিবানে? নোৱাৰা। যদি বিন্দুকেইটা একে ৰেখাত থাকে তেন্তে তৃতীয়টো বিন্দু দুটা বিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা বৃত্তৰ ভিতৰত বা বাহিৰত থাকিব (চিত্ৰ 10.18 চোঁৱা)।

চিত্ৰ 10.18

গতিকে, তিনিটা একে ৰেখাত নথকা বিন্দু বা অন্য অৰ্থত তিনিটা একেৰেখীয় নোহোৱা বিন্দু A, B আৰু C লোৱা হওঁক। [চিত্ৰ 10.19 (i) চোৱা]। AB আৰু BC ৰ লম্ব সমদ্বিখণ্ডক ধৰোঁ ক্ৰমে PQ আৰু RS টানা। ধৰোঁ, এই লম্ব সমদ্বিখণ্ডক দুডালে পৰস্পৰ O বিন্দুত কাটিছে। (মন কৰা, PQ আৰু RS এ পৰস্পৰক ছেদ কৰিব কাৰণ সিহঁত সমান্তৰাল নহয়।) [চিত্ৰ 10.19 (ii) চোৱা]।



(i) (ii)

চিত্ৰ 10.19

এতিয়া O বিন্দুটো AB ৰ লম্ব সমদ্বিখণ্ডক PQ ত আছে, গতিকে তুমি পাবা OA=OB কাৰণ লম্ব সমদ্বিখণ্ডকৰ সকলো বিন্দু ৰেখাখণ্ডৰ প্ৰান্তবিন্দুৰ পৰা সমদূৰবৰ্তী যাৰ প্ৰমাণ সপ্তম অধ্যায়ত দিয়া আছে।

একেদৰে, BC ৰ লম্ব সমদ্বিখণ্ডক RS ত O বিন্দুটো আছে গতিকে তুমি পাবা—

$$OB = OC$$

গতিকে OA = OB = OC, যি সূচায় যে, A, B আৰু C বিন্দু তিনিটা O বিন্দুৰ পৰা সমদূৰত অৱস্থিত। গতিকে তুমি O ক কেন্দ্ৰ কৰি OA ব্যাসাৰ্ধ লৈ যদি এটা বৃত্ত আঁকা, ই B আৰু C ৰ মাজেৰেও যাব। তোমালোকে জানা যে, দুডাল ৰেখাই (লম্বসমদ্বিখণ্ডকে) মাথো এটা বিন্দুত কাটিব পাৰে। সেয়ে OA ব্যাসাৰ্ধ লৈ এটা বৃত্তহে পাব পাৰি। অন্য অৰ্থত A, B আৰু C ৰ মাজেৰে যোৱা এটা একক বৃত্ত পাব পাৰি। তোমালোকে এতিয়া তলৰ উপপাদ্যটো প্ৰমাণ কৰিবা।

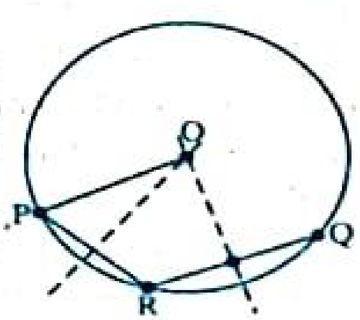
উপপাদ্য 10.5 : *প্ৰদত্ত তিনিটা একেৰেখীয় নোহোৱা বিন্দুৰ মাজেৰে এটা আৰু মাত্ৰ এটাহে বৃত্ত আঁকিব পাৰি।*

মন্তব্য : যদি ABC এটা ত্ৰিভুজ, তেন্তে উপপাদ্য 10.5 ৰ মতে, ত্ৰিভুজটোৰ শীৰ্ষবিন্দু A, B আৰু C ৰ মাজেৰে এটা একক বৃত্ত আঁকিব পাৰি। এই বৃত্তটোক ΔABC ৰ পৰিবৃত্ত বোলে। ইয়াৰ কেন্দ্ৰ আৰু ব্যাসাৰ্ধক ক্ৰমে পৰিকেন্দ্ৰ আৰু পৰিব্যাসাৰ্ধ বোলে।

উদাহৰণ 1 : এটা বৃত্তৰ এটা চাপ দিয়া আছে, বৃত্তটো সম্পূৰ্ণ কৰা।

সমাধান : ধৰোঁ, এটা বৃত্তৰ PQ চাপ দিয়া আছে। আমি বৃত্তটো সম্পূৰ্ণ কৰিব লাগে, অৰ্থাৎ আমি ইয়াৰ কেন্দ্ৰ আৰু ব্যাসাৰ্ধ নিৰ্ণয় কৰিব লাগে। চাপটোৰ ওপৰত এটা বিন্দু R লোৱা। PR আৰু QR সংযোগ কৰা। উপপাদ্য 10.5 ৰ প্ৰমাণত কৰা অংকন প্ৰণালী ব্যৱহাৰ কৰা আৰু কেন্দ্ৰ আৰু ব্যাসাৰ্ধ নিৰ্ণয় কৰা।

এনেকৈ পোৱা কেন্দ্ৰ আৰু ব্যাসাৰ্ধ লৈ আমি বৃত্তটো সম্পূৰ্ণ কৰিব পাৰিম (চিত্ৰ 10.20 চোৱা)



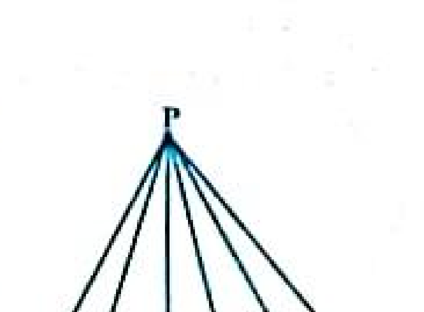
চিত্ৰ 10.20

অনুশীলনী 10.3

1. পৰস্পৰক ছেদ কৰাকৈ আৰু নকৰাকৈ বিভিন্ন বৃত্তৰ যোৰ অংকন কৰা। প্ৰত্যেক যোৰ বৃত্তৰ কিমান সাধাৰণ বিন্দু আছে? সাধাৰণ বিন্দুৰ সৰ্বোচ্চ সংখ্যা কি?
2. ধৰাহ'ল, তোমালোকক এটা বৃত্ত দিয়া আছে। বৃত্তটোৰ কেন্দ্ৰ নিৰ্ণয় কৰিবলৈ অংকন প্ৰণালী দিয়া।
3. যদি দুটা বৃত্তই দুটা বিন্দুত কটাকটি কৰে, প্ৰমাণ কৰা যে সিহঁতৰ কেন্দ্ৰ সাধাৰণ জ্যাৰ লম্বদ্বিখণ্ডকৰ ওপৰত অৱস্থিত।

10.6 সমান জ্যা আৰু কেন্দ্ৰৰ পৰা সিহঁতৰ দূৰত্ব (Equal Chords and Their Distances from the Centre) :

ধৰোঁ, AB এডাল ৰেখা আৰু P যিকোনো এটা বিন্দু। যিহেতু এডাল ৰেখাত অসীম সংখ্যক বিন্দু থাকে, যদি তোমালোকে এই অসীম সংখ্যক বিন্দুবোৰ P ৰ লগত সংযোগ কৰা তেন্তে তোমালোকে অসীমসংখ্যক ৰেখাখণ্ড PL_1, PL_2, PL_3, PL_4, আদি পাবা। ইয়াৰ কোনটো P ৰ পৰা AB লৈ দূৰত্ব হ'ব? তোমালোকে কিছুসময় ভাবিলেই উত্তৰটো পাবা। এই



চিত্ৰ 10.21

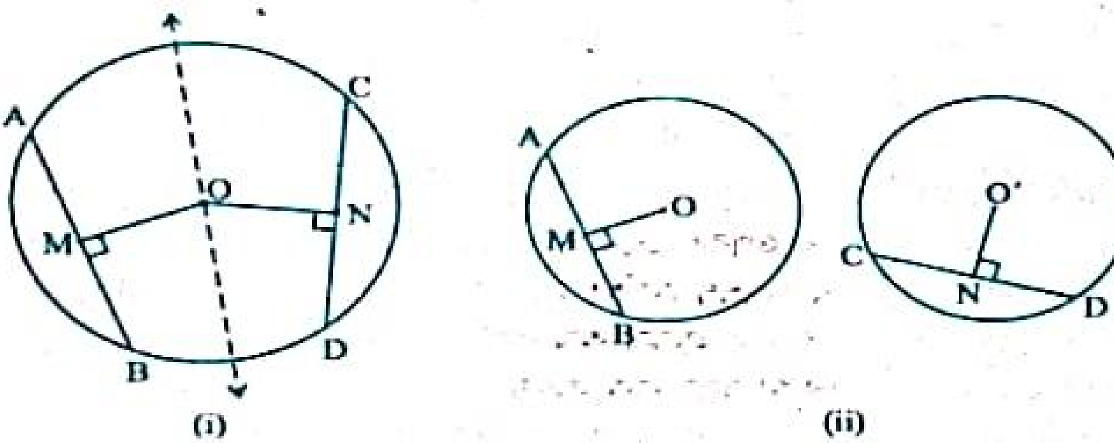
ৰেখাখণ্ডসমূহৰ ভিতৰত P ৰ পৰা AB লৈ টনা লম্ব অৰ্থাৎ PM (চিত্ৰ 10.21) ডালেই আটাইতকৈ চুটি। গণিতত আমি, এই নূন্যতম দৈৰ্ঘ্য PM একেই P ৰ পৰা AB লৈ দূৰত্ব বুলি সংজ্ঞা দিছোঁ।

সেইবাবে তোমালোকে ক'ব পাৰা যে,

কোনো বিন্দুৰ পৰা এডাল ৰেখালৈ টনা লম্বৰ দৈৰ্ঘ্যই হ'ল বিন্দুটোৰ পৰা ৰেখাডাললৈ দূৰত্ব।

মন কৰা যে, বিন্দুটো ৰেখাডালৰ ওপৰত অৱস্থিত হ'লে বিন্দুটোৰ পৰা ৰেখাডাললৈ দূৰত্ব শূন্য।

এটা বৃত্তত অসীম সংখ্যক জ্যা থাকিব পাৰে। এটা বৃত্তত কিছুমান জ্যা অংকন কৰি পৰ্যবেক্ষণ কৰিলে দেখিবা যে দীঘল জ্যাডাল চুটি জ্যাতকৈ কেন্দ্ৰৰ বেছি ওচৰত থাকে। তোমালোকে এটা বৃত্তৰ বিভিন্ন দৈৰ্ঘ্যৰ জ্যা অংকন কৰি কেন্দ্ৰৰ পৰা সিহঁতৰ দূৰত্বৰ জোখ লৈ এইটো পৰ্যবেক্ষণ কৰিব পাৰা। দীৰ্ঘতম জ্যা অৰ্থাৎ ব্যাসৰ দূৰত্ব কেন্দ্ৰ পৰা কিমান? যিহেতু কেন্দ্ৰ ইয়াৰ ওপৰত থাকে, সেয়ে দূৰত্ব শূণ্য। তোমালোকে ভাবিছা নেকি যে, কেন্দ্ৰৰ পৰা দূৰত্ব আৰু জ্যাৰ দৈৰ্ঘ্যৰ মাজত কিবা সম্পৰ্ক আছে? যদি সেয়ে হয় চোৱা যাওঁক—

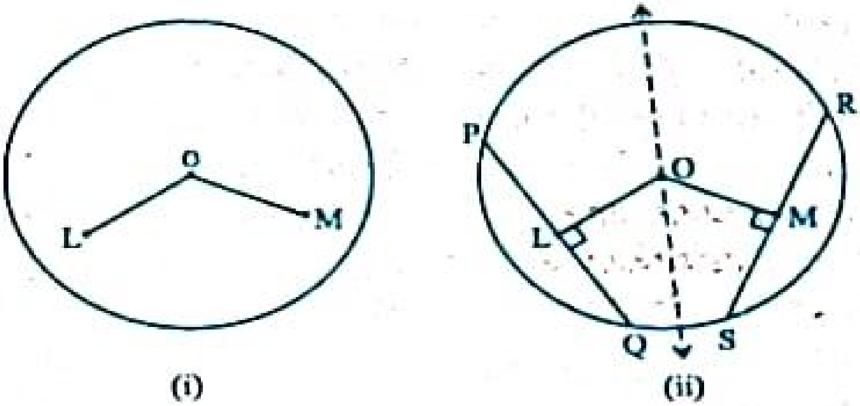


চিত্ৰ 10.22

কাৰ্য : এখন নক্সা অঁকা কাগজত যিকোনো ব্যাসাৰ্ধৰ এটা বৃত্ত আঁকা। AB আৰু CD দুডাল সমান জ্যা আঁকা আৰু কেন্দ্ৰ O ৰ পৰা সিহঁতৰ ওপৰত ক্ৰমে OM আৰু ON লম্বও আঁকা। চিত্ৰটো এনেদৰে ভাঁজ কৰা যাতে D, B ৰ ওপৰত আৰু C, A ৰ ওপৰত পৰে [(চিত্ৰ 10.22 (i)]। তোমালোকে লক্ষ্য কৰিবা যে, O ভাঁজটোত আৰু N, M ৰ ওপৰত পৰিছে। গতিকে OM = ON কাৰ্যটো দুটা সৰ্বসম বৃত্ত যাৰ কেন্দ্ৰ O আৰু O' আৰু প্ৰতি বৃত্ততে এডালকৈ দুডাল সমান জ্যা AB আৰু CD অংকন কৰি পুনৰাবৃত্তি কৰা। OM আৰু O'N সিহঁতৰ ওপৰত লম্ব আঁকা [(চিত্ৰ 10.22 (ii)]। এখন বৃত্তাকাৰ কাঁহী কাটি আনখনৰ ওপৰত স্থাপন কৰা যাতে AB, CD ৰ সৈতে মিলি যায়। তেতিয়া তোমালোকে পাবা যে O, O' ৰ সৈতে মিলি গৈছে আৰু M, N ৰ সৈতে মিলি গৈছে। এনেদৰেই তোমালাকে তলৰ কথাখিনি সত্যাপন কৰিলা।

উপপাদ্য 10.6 : *এটা বৃত্তৰ (বা সৰ্বসম বৃত্তৰ) সমান জ্যাবোৰ কেন্দ্ৰৰ (বা কেন্দ্ৰবোৰৰ) পৰা সমান দূৰত থাকে।*

ইয়াৰ পাছত এইটো দেখা যাব যে এই উপপাদ্যৰ বিপৰীত ভাষ্য সচাঁনে মিছা। এইক্ষেত্ৰত, O ক কেন্দ্ৰ কৰি এটা বৃত্ত আঁকা। কেন্দ্ৰ O ৰ পৰা দুডাল সমান ৰেখাখণ্ড OL আৰু OM আঁকা



চিত্ৰ 10.23

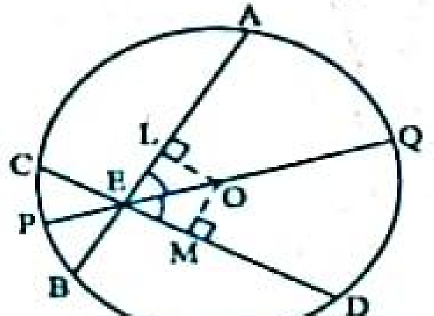
যাতে ইহঁত বৃত্তৰ অন্তঃভাগত থাকে [(চিত্ৰ 10.23 (i)]। তাৰপাছত বৃত্তটোৰ PQ আৰু RS জ্যা আঁকা যাতে OL আৰু OM ৰ ওপৰত ক্ৰমে লম্ব হয় [(চিত্ৰ 10.23 (ii)]। PQ আৰু RS ৰ দৈৰ্ঘ্যৰ জোখ লোৱা। এইবোৰ বেলেগ নেকি? নহয়, দুয়োটা একে। আৰু বেছি সংখ্যক সমান ৰেখাখণ্ড লৈ আৰু সিহঁতৰ লম্ব জ্যা অংকন কৰি কাৰ্যটোৰ পুনৰাবৃত্তি কৰা। এইটোৱে উপপাদ্য 10.6 ৰ বিপৰীত ভাষ্যৰ সত্যাপন কৰে যাক তলত দিয়াধৰণে কোৱা হয়—

উপপাদ্য 10.7 : *এটা বৃত্তৰ কেন্দ্ৰৰ পৰা সমদূৰত থকা জ্যাবোৰ পৰস্পৰ সমান।*

ওপৰৰ ফলাফলসমূহ ব্যৱহাৰ ব্যাখ্যা কৰিবলৈ আমি এটা উদাহৰণ লওঁ—

উদাহৰণ 2 : এটা বৃত্তৰ দুডাল কটাকটি কৰা জ্যাই সিহঁতৰ ছেদবিন্দুৰ মাজেদি যোৱা ব্যাসৰ লগত সমান কোণ উৎপন্ন কৰিলে প্ৰমাণ কৰা যে জ্যা দুডাল সমান।

সমাধান : দিয়া আছে, AB আৰু CD এটা বৃত্তৰ জ্যা যাৰ কেন্দ্ৰ O আৰু সিহঁতে E বিন্দুত কটাকটি কৰিছে। PQ, E ৰ মাজেদি যোৱা ব্যাস যাতে, $\angle AEQ = \angle DEQ$ (চিত্ৰ 10.24 চোৱা)। তোমালোকে প্ৰমাণ কৰিব লাগে যে, AB = CD



চিত্ৰ 10.24

AB আৰু CD জ্যাৰ ওপৰত ক্ৰমে OL আৰু OM লম্ব আঁকা। এতিয়া

$\angle LOE = 180^\circ - 90^\circ - \angle LEO = 90^\circ - \angle LEO$

(ত্ৰিভুজৰ কোণৰ সমষ্টি ধৰ্ম)

$= 90^\circ - \angle AEQ = 90^\circ - \angle DEQ$

$= 90^\circ - \angle MEO = \angle MOE$

OLE আৰু OME ত্ৰিভুজত,

$\angle LEO = \angle MEO$ (কিয় ?)

$\angle LOE = \angle MOE$ (ওপৰত প্ৰমাণিত)

$EO = EO$ (সাধাৰণ বাহু)

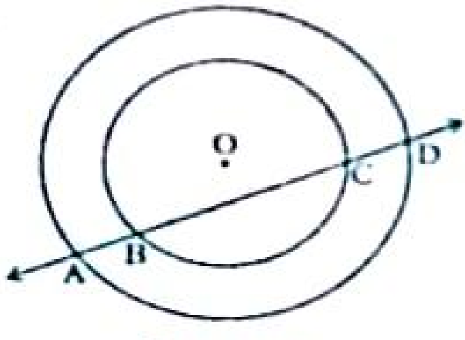
গতিকে, $\Delta OLE \cong \Delta OME$ (কিয় ?)

ইয়াৰপৰা পাওঁ, $OL = OM$ (CPCT)

গতিকে, $AB = CD$ (কিয়)

অনুশীলনী 10.4

1. 5 চে.মি. আৰু 3 ছে:মি ব্যাসাৰ্ধৰ বৃত্ত দুটাই দুটা বিন্দুত কটাকটি কৰিছে আৰু সিহঁতৰ কেন্দ্ৰৰ দূৰত্ব 4 চে.মি.। সাধাৰণ জ্যাডালৰ দৈৰ্ঘ্য নিৰ্ণয় কৰা।
2. যদি এটা বৃত্তৰ দুডাল সমান জ্যাই বৃত্তটোৰ ভিতৰত কটাকটি কৰে তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে, এডাল জ্যাৰ ৰেখাখণ্ড দুটা আনডালৰ অনুৰূপ ৰেখাখণ্ড দুটাৰ লগত সমান।
3. যদি এটা বৃত্তৰ দুডাল সমান জ্যাই বৃত্তটোৰ ভিতৰত কটাকটি কৰে তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে, কেন্দ্ৰ আৰু ছেদবিন্দু সংযোগী ৰেখাই জ্যা দুডালৰ লগত সমান কোণ কৰে।
4. যদি এডাল ৰেখাই দুটা ঐককেন্দ্ৰিক বৃত্ত (একে কেন্দ্ৰবিন্দুবিশিষ্ট বৃত্ত), যাৰ কেন্দ্ৰ O ক A, B, C আৰু D বিন্দুত কটাকটি কৰে তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে, AB = CD [চিত্ৰ 10.25 চোৱা]।



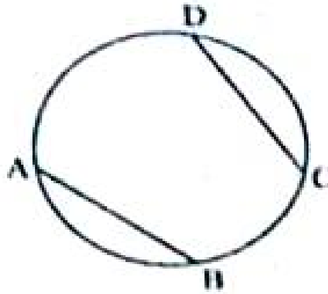
চিত্ৰ 10.25

5. এখন উদ্যানত থকা 5 মি. ব্যাসাৰ্ধৰ বৃত্ত এটাত তিনিজনী ছোৱালী ৰেছ্‌মা, চাল্‌মা আৰু মন্‌দিপে থিয় হৈ এটা খেল খেলিছে। ৰেছ্‌মাই এটা বল চাল্‌মালৈ, চাল্‌মাই মন্‌দিপলৈ আৰু মন্‌দিপে ৰেছ্‌মালৈ দলিয়াইছে। যদি ৰেছ্‌মা আৰু চাল্‌মাৰ মাজৰ দূৰত্ব আৰু চাল্‌মা আৰু মন্‌দিপৰ মাজৰ দূৰত্ব 6 মি. কৈ হয়, মন্‌দিপ আৰু ৰেছ্‌মাৰ মাজৰ দূৰত্ব কিমান ?
6. এখন বসতিস্থলত 20 মি. ব্যাসাৰ্ধৰ এখন বৃত্তাকাৰ উদ্যান আছে। তিনিটা ল'ৰা অংকুৰ, ছৈয়দ আৰু ডেভিদে হাতত তাঁৰযুক্ত পুতলাফোন লৈ ইয়াৰ সীমাত সমদূৰত্বত বহি আছে ইজনে-সিজনৰ লগত কথা পাতিবলৈ। প্ৰতিটো ফোনৰ তাঁৰৰ দৈৰ্ঘ্য নিৰ্ণয় কৰা।

10.7 এটা বৃত্তৰ চাপে উৎপন্ন কৰা কোণ (Angle Subtended by an Arc of a Circle) :

তোমালোকে দেখা পালা যে, ব্যাসৰ বাহিৰে আন জ্যাৰ প্ৰান্ত বিন্দু দুটাই বৃত্তক দুটা চাপত ভাগ কৰে— এটা অধি চাপ আৰু আনটো উপ চাপ। যদি তোমালোকে দুডাল সমান জ্যা লোৱা, তেন্তে চাপসমূহৰ জোখ সম্পৰ্কে তোমালোকে কি ক'ব পাৰা? এডাল জ্যাই সৃষ্টি কৰা এটা চাপ অন্যডাল জ্যাই সৃষ্টি কৰা অনুৰূপ চাপৰ সমাননে? মূঠতে, সিহঁত কেৱল দৈৰ্ঘ্যত সমান হোৱাতকৈও অধিক। সিহঁত সৰ্বসম কাৰণ সিহঁতক বেঁকা বা ভাঁজ নকৰাকৈ এডাল আনডালৰ ওপৰত পেলাই দিলে দুয়োডাল সম্পূৰ্ণৰূপে মিলি যাব।

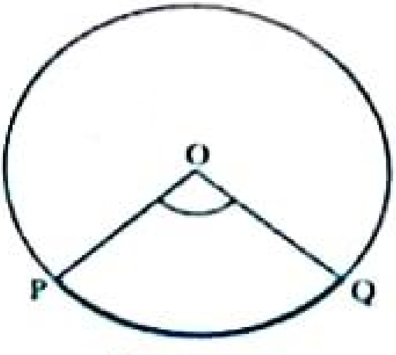
তোমালোকে বৃত্ত এটাৰ পৰা CD জ্যাৰ অনুৰূপ চাপটো CD যেনি কাটি তাৰ সমান জ্যা AB ৰ অনুৰূপ চাপৰ ওপৰত ৰাখি কথাষাৰৰ সত্যাপন কৰিব পাৰা। তোমালোকে পাবা যে CD চাপ সম্পূৰ্ণৰূপে AB চাপৰ লগত মিলি গৈছে। [চিত্ৰ 10.26 চোৱা]। ইয়াৰ পৰা দেখা যায় যে সমান জ্যাবোৰে সৰ্বসম চাপ সৃষ্টি কৰে আৰু বিপৰীতক্ৰমে সৰ্বসম চাপে বৃত্তত সমান জ্যাৰ সৃষ্টি কৰে। তোমালোকে ইয়াক তলত নিম্নৰূপে ক'ব পাৰা—



চিত্ৰ 10.26

যদি এটা বৃত্তৰ দুডাল জ্যা সমান, তেন্তে সিহঁতৰ অনুৰূপ চাপবোৰ সৰ্বসম আৰু বিপৰীতে, যদি দুটা চাপ সৰ্বসম হয় তেন্তে সিহঁতৰ অনুৰূপ জ্যাবোৰ সমান।

আকৌ, এটা চাপে বৃত্তৰ কেন্দ্ৰত উৎপন্ন কৰা কোণৰ সংজ্ঞা হ'ল— চাপটোৰ অনুৰূপ জ্যাই কেন্দ্ৰত উৎপন্ন কৰা কোণ য'ত উপ চাপে কেন্দ্ৰত কোণটো আৰু অধি চাপে কেন্দ্ৰত তাৰ প্ৰবৃদ্ধ কোণটো উৎপন্ন কৰে। সেইবাবে চিত্ৰ 10.27 ত উপ চাপ PQ এ কেন্দ্ৰত কৰা কোণ হ'ল ∠POQ আৰু অধি চাপ PQ এ O ত কৰা প্ৰবৃদ্ধ কোণ POQ।



চিত্ৰ 10.27

ওপৰৰ ধৰ্ম আৰু উপপাদ্য 10.1 অনুসৰি তলৰ ফলাফলটো সত্য—

এটা বৃত্তৰ সৰ্বসম চাপে (বা সমান চাপে) বৃত্তৰ কেন্দ্ৰত সমান কোণ উৎপন্ন কৰে।

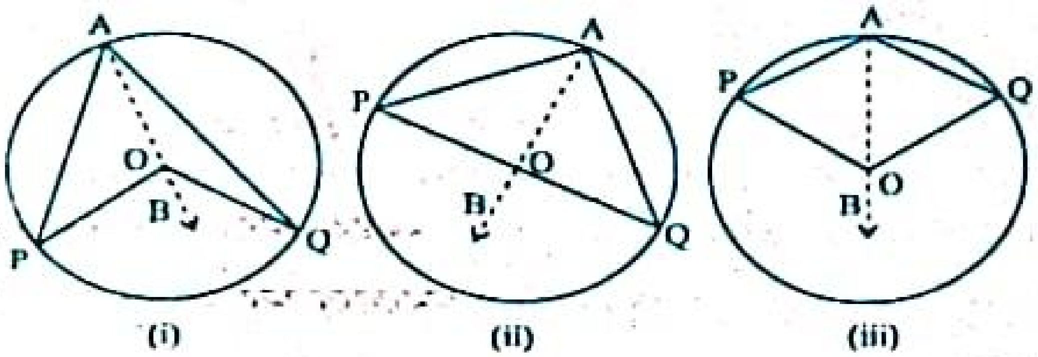
সেইবাবে, বৃত্তৰ জ্যাই কেন্দ্ৰত উৎপন্ন কৰা কোণ অনুৰূপ উপ চাপে কেন্দ্ৰত উৎপন্ন কৰা কোণৰ সমান। তলৰ উপপাদ্যটোৱে এটা চাপে কেন্দ্ৰত উৎপন্ন কৰা কোণ আৰু বৃত্তটোৰ এটা বিন্দুত উৎপন্ন কৰা কোণৰ মাজৰ সম্বন্ধ নিৰূপণ কৰে।

উপপাদ্য 10.8 : *বৃত্তৰ চাপে কেন্দ্ৰত উৎপন্ন কৰা কোণ, ই বৃত্তটোৰ আনটো অংশৰ যিকোনো বিন্দুত উৎপন্ন কৰা কোণৰ দুগুণ।*

প্ৰমাণ : প্ৰদত্ত যে এটা বৃত্তৰ চাপ PQ এ কেন্দ্ৰ O ত ∠POQ উৎপন্ন কৰিছে আৰু বৃত্তটোৰ

আনটো অংশৰ A বিন্দুত PAQ কোণ উৎপন্ন কৰিছে। আমি প্ৰমাণ কৰিব লাগে যে

$$\angle POQ = 2\angle PAQ$$



চিত্ৰ 10.28

চিত্ৰ 10.28 ত দেখুওৱা ধৰণে তিনিটা বিভিন্ন অৱস্থা বিবেচনা কৰা। (i) ত PQ উপ চাপ, (ii) ত PQ চাপ অৰ্দ্ধবৃত্ত আৰু (iii) ত PQ অধি চাপ।

AO সংযোগ কৰি আৰু ইয়াক B বিন্দুলৈ বৰ্দ্ধিত কৰি আটাইকেইটা অৱস্থাতে,

$$\angle BOQ = \angle OAQ + \angle AQO$$

কাৰণ এটা ত্ৰিভূজৰ এটা বহিঃকোণ অন্তঃৱৰ্তী বিপৰীত কোণ দুটাৰ সমষ্টিৰ সমান। ইয়াৰোপৰি ΔOAQ ত,

	$OA = OQ$	(এটা বৃত্তৰ ব্যাসাৰ্ধ)
সেইবাবে,	$\angle OAQ = \angle OQA$	(উপপাদ্য 7.5)
ইয়াৰ পৰা পাওঁ,	$\angle BOQ = 2\angle OAQ$	.....(1)
একেদৰে,	$\angle BOP = 2\angle OAP$	.....(2)

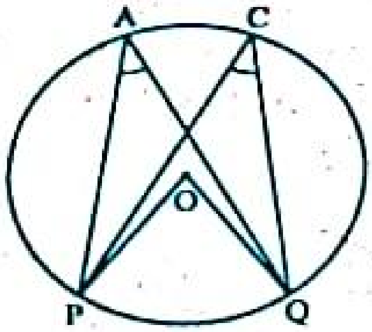
(1) আৰু (2) ৰ পৰা, $\angle BOP + \angle BOQ = 2(\angle OAP + \angle OAQ)$

এইটো, $\angle POQ = 2\angle PAQ$ সৈতে একে। .....(3)

(iii) নং অৱস্থাটোৰ ক্ষেত্ৰত, য'ত PQ অধি চাপ (3) ক প্ৰবৃদ্ধ কোণ $POQ = 2\angle PAQ$ ৰে সলোৱা হ'ল।

মন্তব্য : ধৰাহ'ল, আমি P আৰু Q বিন্দু সংযোগ কৰিলো আৰু ওপৰৰ চিত্ৰত PQ জ্যা পালো। তেন্তে $\angle PAQ$ কোণক PAQP বৃত্তাংশত সৃষ্টি হোৱা কোণও বোলা হয়।

উপপাদ্য 10.8 ত, A বিন্দুটো বৃত্তটোৰ আনটো অংশৰ যিকোনো বিন্দু হ'ব পাৰে। গতিকে, যদি তোমালোকে অন্য এটা বিন্দু C বৃত্তটোৰ আনটো অংশত লোৱা (চিত্ৰ 10.29 চোৱা) তেন্তে



চিত্ৰ 10.29

তোমালোকে পাবা যে,

$$\angle POQ = 2\angle PCQ = 2\angle PAQ$$

গতিকে, $\angle PCQ = \angle PAQ$

এইটোৱে তলৰ উক্তিটো প্ৰমাণ কৰে—

উপপাদ্য 10.9 : *এটা বৃত্তৰ একে বৃত্তাংশত অৱস্থিত কোণবোৰ সমান।*

আকৌ, উপপাদ্য 10.8 ৰ (ii) অৱস্থাটো বেলেগকৈ আলোচনা কৰা হওঁক।

ইয়াত $\angle PAQ$ এটা বৃত্তাংশ যিটো এটা অৰ্ধবৃত্তত অৱস্থিত কোণ। ইয়াৰোপৰি, $\angle PAQ = \frac{1}{2}\angle POQ = \frac{1}{2}\times 180^\circ = 90^\circ$ যদি অৰ্দ্ধবৃত্তটোত তোমালোকে অন্য এটা বিন্দু C লোৱা তেন্তে তোমালোকে পাবা যে,

$$\angle PCQ = 90^\circ$$

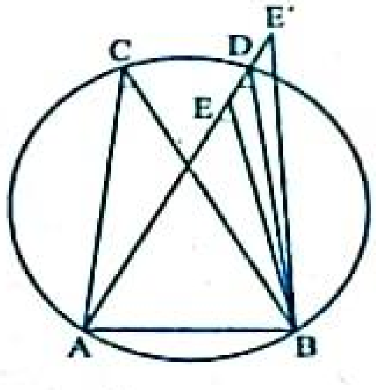
সেয়েহে, তোমালোকে বৃত্তৰ অন্য এটা ধৰ্ম পালা যে

এটা অৰ্ধবৃত্তত অৱস্থিত কোণবোৰ সমকোণ।

উপপাদ্য 10.9 ৰ বিপৰীতটোও সত্য। ইয়াক তলত দিয়াধৰণেৰে ক'ব পাৰি—

উপপাদ্য 10.10 : *যদি দুটা বিন্দু সংযোগী ৰেখাখণ্ডই ইয়াৰ একেফালে থকা আন দুটা বিন্দুত সমান কোণ উৎপন্ন কৰে, বিন্দু চাৰিটা এটা বৃত্তৰ ওপৰত অৱস্থিত হ'ব। (অৰ্থাৎ সিহঁত একচক্ৰীয়)।*

তোমালোকে এই ফলাফলৰ সত্যতা তলৰ কথাৰ পৰা দেখিবা—



চিত্ৰ 10.30

চিত্ৰ 10.30 ত, AB এডাল ৰেখাখণ্ড যি C আৰু D দুটা বিন্দুত সমান কোণ উৎপন্ন কৰে। অৰ্থাৎ, $\angle ACB = \angle ADB$

A, B, C আৰু D বিন্দুকেইটা এটা বৃত্তত অৱস্থিত বুলি দেখুৱাবলৈ A, C আৰু B বিন্দুৰ মাজেৰে এটা বৃত্ত অঁকা হ'ল। ধৰাহ'ল ই D বিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা নাই। তেন্তে ই AD (বা বৰ্দ্ধিত AD) ক, ধৰোঁ E (বা E′) বিন্দুত ছেদ কৰিব।

যদি A, C, E আৰু B বিন্দুকেইটা একে বৃত্তত থাকে,

$$\angle ACB = \angle AEB \text{ (কিয়?)}$$

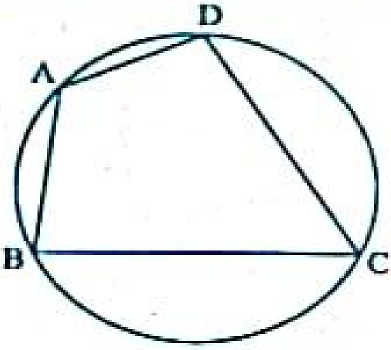
কিন্তু দিয়া আছে যে, $\angle ACB = \angle ADB$

সেয়েহে, $\angle AEB = \angle ADB$

এইটো সম্ভৱ নহয়, যেতিয়ালৈ E আৰু D সম্পূৰ্ণৰূপেৰ মিলি নাযায় (কিয়?) একেদৰে, E′ ও D ৰ সৈতে সম্পূৰ্ণৰূপে মিলি যাব লাগিব।

10.8 চক্ৰীয় চতুৰ্ভূজ (Cyclic Quadrilaterals) :

এটা চতুৰ্ভূজ ABCD ক চক্ৰীয় চতুৰ্ভুজ বোলা হয় যদি ইয়াৰ শীৰ্ষবিন্দু চাৰিটা এটা বৃত্তত অৱস্থিত হয় (চিত্ৰ 10.31 চোঁৱা)। তোমালোকে এইধৰণৰ চতুৰ্ভুজৰ এটা বিশেষ ধৰ্ম পাবা। বিভিন্ন আকাৰৰ বাহুবিশিষ্ট বহুতো চক্ৰীয় চতুৰ্ভুজ অংকন কৰা আৰু ইহঁতক ABCD ৰূপত নাম দিয়া (এইটো বিভিন্ন ব্যাসাৰ্ধৰ বহুতো বৃত্ত আঁকি তাত চাৰিটাকৈ বিন্দু লৈ কৰিব পাৰি)। বিপৰীত কোণবোৰ জোখা আৰু তোমাৰ পৰ্যবেক্ষণ তলৰ তালিকাত লিখা।



চিত্ৰ 10.31

চতুৰ্ভুজৰ ক্ৰম. সংখ্যা	∠A	∠B	∠C	∠D	∠A+∠C	∠B+∠D
1.						
2.						
3.						
4.						
5.						
6.						

তালিকাখনৰ পৰা তোমালোকে কি ধাৰণা কৰিলা?

জোখমাখৰ সৰু-সুৰা ভুল আওকাণ কৰি তোমালোকে পালা যে,

$\angle A + \angle C = 180^\circ$ আৰু $\angle B + \angle D = 180^\circ$।

এইটোৱে তলৰ কথাখিনি সত্যাপন কৰে—

উপপাদ্য 10.11 : *চক্ৰীয় চতুৰ্ভুজৰ প্ৰতিযোৰ বিপৰীত কোণৰ সমষ্টি 180°।*

আচলতে, এই উপপাদ্যৰ বিপৰতটোও সত্য, যাক তলত দিয়াধৰণেৰে ক'ব পাৰি—

উপপাদ্য 10.12 : *এটা চতুৰ্ভুজৰ এযোৰ বিপৰীত কোণৰ সমষ্টি 180° হ'লে, চতুৰ্ভুজটো চক্ৰীয় হ'ব।*

তোমালোকে উপপাদ্য 10.10 ত খটোৱা নিয়মৰ নিচিনা নিয়ম অনুকৰণ কৰি এই উপপাদ্যৰ সত্যতা চাব পাৰা—

উদাহৰণ 3 : চিত্ৰ 10.32 ত, AB এটা বৃত্তৰ এডাল ব্যাস, CD বৃত্তৰ ব্যাসাৰ্ধৰ সমান দীঘৰ এডাল জ্যা। AC আৰু BD ক বৰ্দ্ধিত কৰিলে এটা বিন্দু E ত কটাকটি কৰে। প্ৰমাণ কৰা যে, $\angle AEB = 60^\circ$

সমাধান ঃ OC, OD আৰু BC সংযোগ কৰা।

ত্ৰিভুজ ODC সমবাহু (কিয়?)

সেয়েহে, $\angle COD = 60^\circ$

এতিয়া, $\angle CBD = \frac{1}{2}\angle COD$ (উপপাদ্য 10.8)

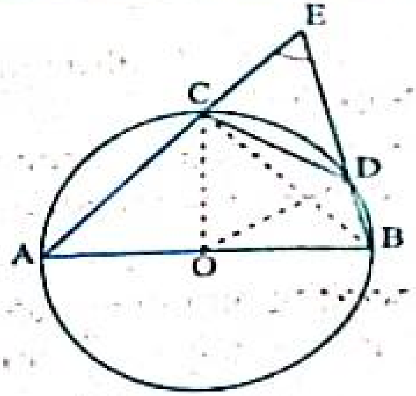
ইয়াৰ পৰা $\angle CBD = 30^\circ$

আকৌ $\angle ACB = 90^\circ$ (কিয়?)

সেয়েহে, $\angle BCE = 180^\circ - \angle ACB = 90^\circ$

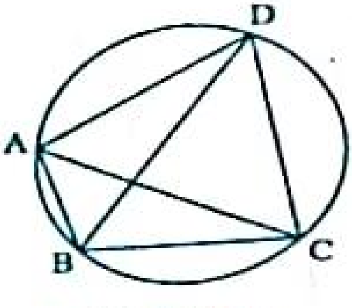
যিটোৰ পৰা পাওঁ, $\angle CEB = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$

অৰ্থাৎ $\angle AEB = 60^\circ$



চিত্ৰ 10.32

উদাহৰণ 4 ঃ চিত্ৰ 10.33 ত, ABCD এটা চক্ৰীয় চতুৰ্ভুজ য'ত AC আৰু BD ইয়াৰ কৰ্ণ। যদি $\angle DBC = 55^\circ$ আৰু $\angle BAC = 45^\circ$, $\angle BCD$ নিৰ্ণয় কৰা।



চিত্ৰ 10.33

সমাধান ঃ $\angle CAD = \angle DBC = 55^\circ$ (একে বৃত্তাংশৰ কোণ)

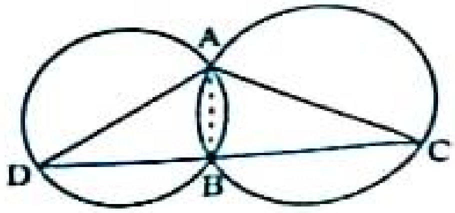
সেইবাবে $\angle DAB = \angle CAD + \angle BAC = 55^\circ + 45^\circ = 100^\circ$

কিন্তু, $\angle DAB + \angle BCD = 180^\circ$

(চক্ৰীয় চতুৰ্ভুজৰ বিপৰীত কোণ)

গতিকে, $\angle BCD = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$

উদাহৰণ 5 ঃ দুটা বৃত্তই A আৰু B দুটা বিন্দুত কটাকটি কৰিছে। AD আৰু AC বৃত্ত দুটাৰ ব্যাস। (চিত্ৰ 10.34 চোৱা) প্ৰমাণ কৰা যে, B, DC ৰেখাখণ্ডৰ ওপৰত অৱস্থিত।



চিত্ৰ 10.34

সমাধান ঃ AB সংযোগ কৰা হ'ল।

$\angle ABD = 90^\circ$ (অৰ্ধবৃত্তস্থ কোণ)

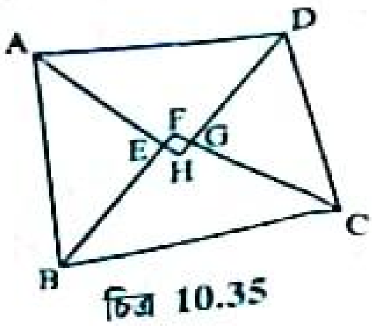
$\angle ABC = 90^\circ$ (অৰ্ধবৃত্তস্থ কোণ)

গতিকে, $\angle ABD + \angle ABC = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

সেইবাবে, DBC এডাল ৰেখা। অৰ্থাৎ B, DC ৰেখাখণ্ডৰ ওপৰত অৱস্থিত।

উদাহৰণ 6 ঃ প্ৰমাণ কৰা যে চতুৰ্ভুজৰ অন্তঃকোণৰ সমদ্বিখণ্ডকে সৃষ্টি কৰা চতুৰ্ভুজটো (যদি সম্ভৱ হয়) চক্ৰীয়।

সমাধান ঃ চিত্ৰ 10.35 ত, ABCD এটা চতুৰ্ভুজ যাৰ অন্তঃকোণ A, B, C আৰু Dৰ সমদ্বিখণ্ডক ক্ৰমে AH, BF, CF আৰু DH এ EFGH চতুৰ্ভুজ গঠন কৰে।



চিত্ৰ 10.35

এতিয়া,

$\angle FEH = \angle AEB = 180^\circ - \angle EAB - \angle EBA$ (কিয়?)

$= 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B)$

আৰু $\angle FGH = \angle CGD = 180^\circ - \angle GCD - \angle GDC$ (কিয়?)

$= 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle C + \angle D)$

সেইবাবে, $\angle FEH + \angle FGH$

$= 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B) + 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle C + \angle D)$

$= 360^\circ - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B + \angle C + \angle D)$

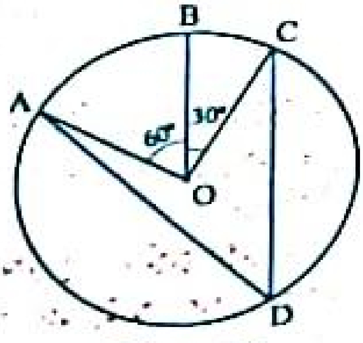
$= 360^\circ - \frac{1}{2} \times 360^\circ = 360^\circ - 180^\circ$

$= 180^\circ$

গতিকে, উপপাদ্য 10.12 ৰ মতে, EFGH চতুৰ্ভুজটো চক্ৰীয়।

অনুশীলনী 10.5

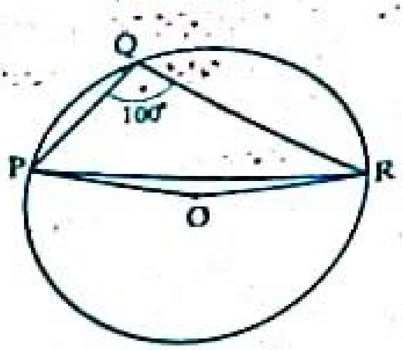
1. চিত্ৰ 10.36 ত, A, B আৰু C তিনিটা বিন্দু O কেন্দ্ৰবিশিষ্ট বৃত্তত অৱস্থিত যাতে $\angle BOC = 30^\circ$ আৰু $\angle AOB = 60^\circ$। যদি বৃত্তটোৰ ABC চাপত নথকা D এটা বিন্দু তেন্তে $\angle ADC$ নিৰ্ণয় কৰা।



চিত্ৰ-10.36

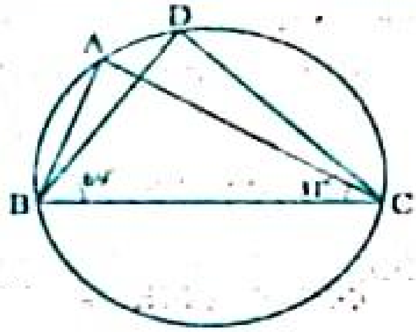
2. এটা বৃত্তৰ এডাল জ্যা বৃত্তৰ ব্যাসাৰ্ধৰ সমান। জ্যাডালে উপ চাপটোৰ কোনো বিন্দুত আৰু অধি চাপটোৰ কোনো বিন্দুত উৎপন্ন কৰা কোণ নিৰ্ণয় কৰা।

3. চিত্ৰ 10.37 ত $\angle PQR = 100^\circ$ য'ত P, Q আৰু R, 'O' কেন্দ্ৰবিশিষ্ট বৃত্তৰ বিন্দু। $\angle OPR$ নিৰ্ণয় কৰা।



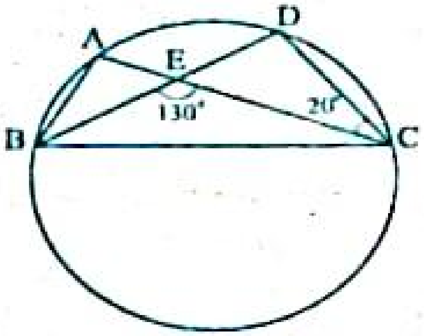
চিত্ৰ 10.37

4. চিত্ৰ 10.38 ত $\angle ABC = 69°$, $\angle ACB = 31°$, $\angle BDC$ নিৰ্ণয় কৰা।



চিত্ৰ 10.38

5. চিত্ৰ 10.39 ত A, B, C আৰু D এটা বৃত্তৰ চাৰিটা বিন্দু। AC আৰু BD এ E বিন্দুত কটাকটি কৰিছে যাতে $\angle BEC = 130°$ আৰু $\angle ECD = 20°$। $\angle BAC$ নিৰ্ণয় কৰা।



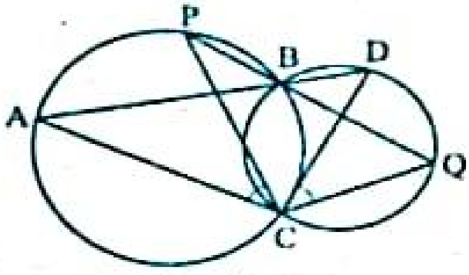
চিত্ৰ 10.39

6. ABCD এটা চক্ৰীয় চতুৰ্ভুজ যাৰ কৰ্ণকেইডালে E বিন্দুত কটাকটি কৰে। যদি $\angle DBC = 70°$, $\angle BAC = 30°$, $\angle BCD$ নিৰ্ণয় কৰা। ইয়াৰোপৰি, যদি AB = BC, $\angle ECD$ উলিওৱা।

7. যদি এটা চক্ৰীয় চতুৰ্ভুজৰ কৰ্ণ দুডাল ইয়াৰ শীৰ্ষবিন্দুবোৰেদি যোৱা বৃত্তৰ ব্যাস হয়, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে ই এটা আয়ত।

8. যদি এটা ট্ৰেপিজিয়ামৰ অসমান্তৰাল বাহুযোৰ সমান তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে, ই চক্ৰীয়।

9. দুটা বৃত্তই দুটা বিন্দু B আৰু C ত কটাকটি কৰিছে। Bৰ মাজেৰে দুডাল ৰেখাখণ্ড ABD আৰু PBQ টনা হ'ল যাতে, ইহঁতে ক্ৰমে A, D আৰু P, Q বিন্দুত বৃত্তদুটাক কাটিছে (চিত্ৰ 10.40 চোৱা)। প্ৰমাণ কৰা যে $\angle ACP = \angle QCD$



চিত্ৰ 10.40

10. যদি এটা ত্ৰিভুজৰ দুটা বাহুক ব্যাস হিচাপে লৈ বৃত্ত দুটা আঁকা হয়, প্ৰমাণ কৰা যে বৃত্ত দুটাই কটাকটি কৰা বিন্দু তৃতীয় বাহুত থাকিব।

11. ABC আৰু ADC সমকোণী ত্ৰিভুজ দুটাৰ সাধাৰণ অতিভুজ AC, প্ৰমাণ কৰা যে,

$$\angle CAD = \angle CBD$$

12. প্ৰমাণ কৰা যে এটা চক্ৰীয় সামান্তৰিক এটা আয়ত।

অনুশীলনী 10.6 (ঐচ্ছিক)*

1. প্ৰমাণ কৰা যে দুটা কটাকটি কৰা বৃত্তৰ কেন্দ্ৰ সংযোগী ৰেখাই ছেদবিন্দু দুটাত সমান কোণ উৎপন্ন কৰে।
2. 5 চে.মি. আৰু 11 চে.মি. দৈৰ্ঘ্যৰ জ্যা দুডাল ক্ৰমে AB আৰু CD পৰস্পৰ সমান্তৰাল আৰু কেন্দ্ৰৰ বিপৰীত ফালে অৱস্থিত। যদি AB আৰু CD ৰ মাজৰ দূৰত্ব 6 চে.মি. হয়, তেন্তে বৃত্তটোৰ ব্যাসাৰ্ধ নিৰ্ণয় কৰা।
3. এটা বৃত্তৰ দুডাল পৰস্পৰ সমান্তৰাল জ্যাৰ দৈৰ্ঘ্য ক্ৰমে 6 চে.মি. আৰু 8 চে.মি.। যদি চুটি জ্যাডাল কেন্দ্ৰৰ পৰা 4 চে.মি. দূৰত্বত থাকে তেন্তে কেন্দ্ৰৰ পৰা আনডালৰ দূৰত্ব কিমান?
4. এটা কোণ ABC ৰ শীৰ্ষবিন্দু এটা বৃত্তৰ বাহিৰত অৱস্থিত আৰু ধৰোঁ কোণৰ বাহু দুটাই বৃত্তটোত AD আৰু CE দুডাল সমান জ্যা কাটে। প্ৰমাণ কৰা যে, $\angle ABC$, AC আৰু DE জ্যাই কেন্দ্ৰত উৎপন্ন কৰা কোণৰ পাৰ্থক্যৰ আধা।
5. প্ৰমাণ কৰা যে ৰম্বাচৰ যিকোনো বাহুক ব্যাস হিচাপে লৈ অংকন কৰা বৃত্ত ইয়াৰ কৰ্ণ দুডালৰ ছেদবিন্দুৰেদি যায়।
6. ABCD এটা সামন্তৰিক। A, B আৰু C ৰ মাজেৰে যোৱা বৃত্তই CD (যদি প্ৰয়োজন হয় বৰ্ধিত অংশ)ক E বিন্দুত কাটে। প্ৰমাণ কৰা যে, AE = AD।
7. এটা বৃত্তৰ AC আৰু BD জ্যা দুডালে পৰস্পৰ সমদ্বিখণ্ডিত কৰে। প্ৰমাণ কৰা যে, (i) AC আৰু BD ব্যাস, (ii) ABCD এটা আয়ত।
8. ABC ত্ৰিভুজৰ A, B আৰু C কোণৰ সমদ্বিখণ্ডকবোৰে ইয়াৰ পৰিবৃত্তক ক্ৰমে D, E আৰু F বিন্দুত কাটে। প্ৰমাণ কৰা যে, DEF ত্ৰিভুজৰ কোণবোৰ $90° - \frac{1}{2}A$, $90° - \frac{1}{2}B$ আৰু $90° - \frac{1}{2}C$।
9. দুটা সৰ্বসম বৃত্তই পৰস্পৰ A আৰু B বিন্দুত কটাকটি কৰিছে। A ৰ মাজেৰে যিকোনো ৰেখাখণ্ড PAQ টনা হ'ল যাতে P, Q বৃত্ত দুটাত থাকে। প্ৰমাণ কৰা যে, BP = BQ।
10. যিকোনো ত্ৰিভুজ ABC ত, যদি $\angle A$ কোণৰ সমদ্বিখণ্ডক আৰু BC ৰ সমদ্বিখণ্ডকে কটাকটি কৰে প্ৰমাণ কৰা যে সিহঁতে ABC ত্ৰিভুজৰ পৰিবৃত্তত কটাকটি কৰে।

* এই অনুশীলনীবোৰ পৰীক্ষাৰ দৃষ্টিকোণৰ পৰা নল'বা।

10.9 সাৰাংশ (Summary) :

এই অধ্যায়ত তোমালোকে তলৰ কথাকেইটা শিকিলা—

1. এটা বৃত্ত হ'ল এখন সমতলৰ সকলো বিন্দুৰ সমষ্টি (থুপ), যিবোৰ সমতলখনৰ এটা স্থিৰ বিন্দুৰ পৰা সমান দূৰত্বত থাকে।
2. এটা বৃত্তৰ (বা সৰ্বসমবৃত্তৰ) সমান জ্যাবোৰে কেন্দ্ৰত সমান কোণ উৎপন্ন কৰে।
3. যদি এটা বৃত্ত (বা সৰ্বসম বৃত্তৰ) দুডাল জ্যাই কেন্দ্ৰত (অনুৰূপ কেন্দ্ৰবোৰত) সমান কোণ উৎপন্ন কৰে, তেন্তে জ্যাদুডাল সমান।
4. এটা বৃত্তৰ কেন্দ্ৰৰ পৰা জ্যালৈ টনা লম্বই জ্যাডালক সমদ্বিখণ্ডিত কৰে।
5. এটা বৃত্তৰ কেন্দ্ৰৰ মাজেৰে টনা ৰেখাই এডাল জ্যাক সমদ্বিখণ্ডিত কৰিলে ৰেখাডাল জ্যাৰ ওপৰত লম্ব।
6. তিনিটা একৰেখাত নথকা বিন্দুৰ মাজেৰে এটামাত্ৰ এটাহে বৃত্ত পোৱা যায়।
7. এটা বৃত্তৰ (বা সৰ্বসম বৃত্তৰ) সমান জ্যাবোৰ কেন্দ্ৰৰ (বা অনুৰূপ কেন্দ্ৰৰ) পৰা সমান দূৰত অৱস্থিত।
8. এটা বৃত্তৰ (বা সৰ্বসম বৃত্তৰ) কেন্দ্ৰৰ (বা অনুৰূপ কেন্দ্ৰৰ) পৰা সমদূৰত্ব অৱস্থিত জ্যাবোৰ সমান।
9. যদি এটা বৃত্তৰ দুটা চাপ সৰ্বসম তেন্তে সিহঁতৰ অনুৰূপ জ্যাবোৰ সমান আৰু বিপৰীতক্ৰমে, যদি এটা বৃত্তৰ দুডাল জ্যা সমান তেন্তে সিহঁতৰ অনুৰূপ চাপবোৰ (উপ, অধি) সৰ্বসম।
10. এটা বৃত্তৰ সৰ্বসম চাপবোৰে কেন্দ্ৰত সমান কোণ উৎপন্ন কৰে।
11. এটা বৃত্তৰ এটা চাপে কেন্দ্ৰত উৎপন্ন কৰা কোণ ই বৃত্তটোৰ বাকী অংশৰ যিকোনো বিন্দুত কৰা কোণৰ দুগুণ।
12. একে বৃত্তখণ্ডস্থ কোণবোৰ সমান।
13. অৰ্ধবৃত্তস্থ কোণ এক সমকোণ।
14. যদি দুটা বিন্দুসংযোগী এডাল ৰেখাখণ্ডই ই থকা ৰেখাডালৰ একেফালে থকা আন দুটা বিন্দুত সমান কোণ উৎপন্ন কৰে তেন্তে বিন্দু চাৰিটা এটা বৃত্তত অৱস্থিত।
15. এটা চক্ৰীয় চতুৰ্ভুজৰ প্ৰতিযোৰ বিপৰীত কোণৰ সমষ্টি $180°$।
16. যদি এটা চতুৰ্ভুজৰ এযোৰ বিপৰীত কোণৰ সমষ্টি $180°$, তেন্তে চতুৰ্ভুজটো চক্ৰীয়।