ସପ୍ତମ ଅଧ୍ୟାୟ

ତ୍ରିଭୁଜର ଧର୍ମ

7.1 ଆମେ ଯାହା ଜାଣିଛୁ :

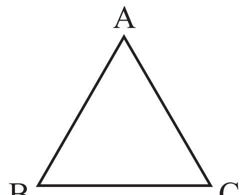
A, B, C ଏକ ସରଳରେଖାରେ ନ ଥିବା ତିନୋଟି ବିନ୍ଦୁ ହେଲେ, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ ଓ $\overline{CA}$ ରେଖାଖଣ୍ଡ ତିନୋଟି ଦ୍ୱାରା ଗଠିତ ଚିତ୍ର ହେଉଛି ଏକ ତ୍ରିଭୁଜ ଏବଂ ଏହାର ନାମ ΔABC (ଚିତ୍ର 7.1) । ତ୍ରିଭୁଜ ଏକ ଆବଦ୍ଧ ଚିତ୍ର ।

A, B, ଓ C କୁ ΔABC ର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ କୁହାଯାଏ ।

$\overline{AB}, \overline{BC}$ ଓ $\overline{CA}$ କୁ ΔABC ର ବାହୁ କୁହାଯାଏ ।

$\angle A, \angle B$ ଓ $\angle C$ ହେଉଛି ΔABC ର ତିନୋଟି କୋଣ ।

$\angle A$ ର ସମ୍ମୁଖୀନ ବାହୁ $\overline{BC}$ ଓ ବାହୁ $\overline{BC}$ ର ସମ୍ମୁଖୀନ କୋଣ ହେଉଛି $\angle A$ ।



ଚିତ୍ର 7.1

(କ) ସେହିଭଳି $\angle B$ ଓ $\angle C$ ର ସମ୍ମୁଖୀନ ବାହୁ ସ୍ଥିର କର ।

(ଖ) XYZ ନାମକ ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜ ଅଙ୍କନ କର । ଏହାର $\overline{XY}, \overline{YZ}$ ଓ $\overline{ZX}$ ର ସମ୍ମୁଖୀନ କୋଣଗୁଡ଼ିକର ନାମ ଲେଖ ।

ବାହୁମାନଙ୍କର ମାପ ଅନୁଯାୟୀ ତ୍ରିଭୁଜର ବିଭାଗୀକରଣ ନିମ୍ନ ପ୍ରକାରେ କରାଯାଇପାରେ ।

(କ) ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ (ଖ) ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ (ଗ) ବିଷମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ

ସେହିପରି, କୋଣମାନଙ୍କର ପରିମାଣ ପରିପ୍ରେକ୍ଷୀରେ ତ୍ରିଭୁଜର ବିଭାଗୀକରଣ ହେଉଛି –

(କ) ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜ (ଖ) ସ୍ଥୂଳକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜ (ଗ) ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜ

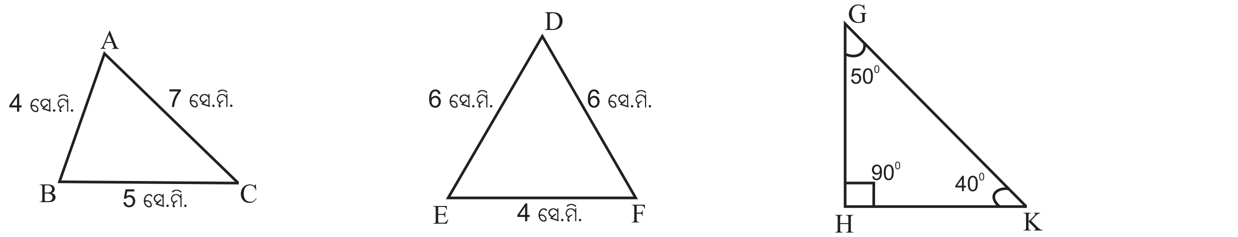
ଅଭ୍ୟାସ କାର୍ଯ୍ୟ 7.1

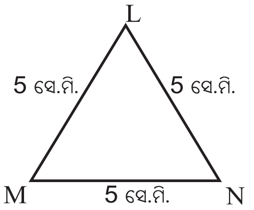
1. (କ) ΔPQR ରେ $\overline{QR}$ ର ସମ୍ମୁଖୀନ କୋଣର ନାମ ଲେଖ ।

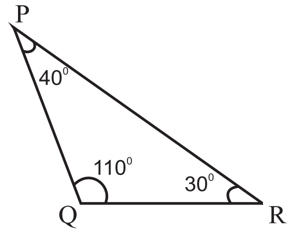
   (ଖ) ΔDEF ରେ $\angle E$ ର ସମ୍ମୁଖୀନ ବାହୁର ନାମ ଲେଖ ।

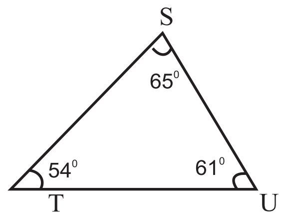
   (ଗ) ΔKLM ରେ M ଶୀର୍ଷର ସମ୍ମୁଖୀନ ବାହୁର ନାମ ଲେଖ ।

2. ନିମ୍ନ ଚିତ୍ରରେ ବିଭିନ୍ନ ତ୍ରିଭୁଜର ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଓ କୋଣର ପରିମାଣ ମାନ ଦିଆଯାଇଛି । ସେଗୁଡ଼ିକୁ ଦେଖି ନିମ୍ନ ପ୍ରଶ୍ନଗୁଡ଼ିକର ଉତ୍ତର ଦିଅ ।









ଉପଯୁକ୍ତ ତ୍ରିଭୁଜର ନାମକରଣ କର :

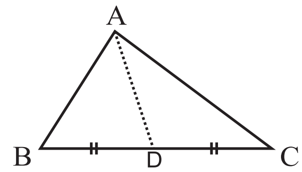
(କ) ବିଷମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ (ଖ) ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ (ଗ) ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ

(ଘ) ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜ (ଙ) ସ୍ଥୂଳକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜ (ଚ) ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜ

7.2 ତ୍ରିଭୁଜ ସମ୍ପୃକ୍ତ କେତେକ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ରେଖାଖଣ୍ଡ

(କ) ତ୍ରିଭୁଜର ମଧ୍ୟମା :

ଚିତ୍ର 7.2 ରେ ଥିବା Δ ABC ର $\overline{BC}$ ବାହୁକୁ ଦେଖ । $\overline{BC}$ ବାହୁର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ D । $\overline{BC}$ ବାହୁର ସମ୍ମୁଖୀନ ଶୀର୍ଷ A । $\overline{AD}$ କୁ Δ ABC ର **ଗୋଟିଏ ମଧ୍ୟମା** କୁହାଯାଏ । ଏଣୁ ଆମେ ଜାଣିଲେ -

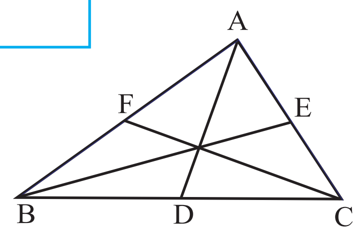


ଚିତ୍ର 7.2

ତ୍ରିଭୁଜର ଗୋଟିଏ ବାହୁର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ଓ ଉକ୍ତ ବାହୁର ସମ୍ମୁଖୀନ ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁର ସଂଯୋଜକ ରେଖାଖଣ୍ଡକୁ ତ୍ରିଭୁଜର ଗୋଟିଏ ମଧ୍ୟମା କୁହାଯାଏ ।

ଚିତ୍ର 7.2 ରେ ଅଙ୍କନ କରାଯାଇଥିବା ମଧ୍ୟମା ହେଉଛି $\overline{BC}$ ପ୍ରତି ମଧ୍ୟମା ।

$\overline{CA}$ ଓ $\overline{AB}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ନେଇ ଆଉ ଦୁଇଟି ମଧ୍ୟମା ମଧ୍ୟ ଅଙ୍କନ କରାଯାଇପାରେ । ସେଗୁଡ଼ିକୁ ଚିହ୍ନଟ କର ।



ଚିତ୍ର 7.3

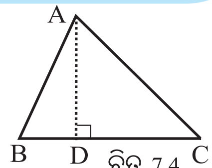
ନିଜେ କରି ଦେଖ :

- ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜ ଅଙ୍କନ କର । ଏହାର ନାମ ଦିଅ DEF ।
- Δ DEF ର ବାହୁ $\overline{DE}$, $\overline{EF}$ ଓ $\overline{FD}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ଚିହ୍ନଟ କର । ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ତିନୋଟିର ନାମ ଦିଅ K, L, M ।
- $\overline{KF}$, $\overline{LD}$ ଓ $\overline{ME}$ ମଧ୍ୟମା ତିନୋଟି ଅଙ୍କନ କର । $\overline{KF}$ ଓ $\overline{LD}$ ର ଛେଦବିନ୍ଦୁଟି ମଧ୍ୟମାର ଉପରେ ରହିଲା କିମ୍ବା ବାହାରେ ରହିଲା ଦେଖିଲ ? ଏଥିରୁ ଆମେ କ'ଣ ଜାଣିଲେ ?

  ତୁମେ ନିଶ୍ଚୟ ଲକ୍ଷ୍ୟ କରିଥିବ ଯେ, $\overline{KF}$ ଓ $\overline{LD}$ ର ଛେଦବିନ୍ଦୁ $\overline{ME}$ ମଧ୍ୟମା ଉପରେ ରହିବ । ଅର୍ଥାତ୍, ମଧ୍ୟମା ତିନୋଟି ଏକ ବିନ୍ଦୁଗାମୀ ।

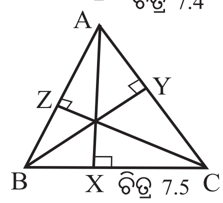
(ଖ) ତ୍ରିଭୁଜର ଉଚ୍ଚତା :

ଚିତ୍ର 7.4 ରେ ଥିବା Δ ABC ର ଶୀର୍ଷ ବିନ୍ଦୁ A ଠାରୁ $\overline{BC}$ ପ୍ରତି $\overline{AD}$ ଲମ୍ବ ଅଙ୍କନ କରାଯାଇଛି । $\overline{AD}$ କୁ Δ ABC ର $\overline{BC}$ ବାହୁ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବ ବୋଲି କୁହାଯାଏ । ଦୈର୍ଘ୍ୟ AD କୁ Δ ABC ର $\overline{BC}$ ପ୍ରତି **ଉଚ୍ଚତା** କୁହାଯାଏ ।



ଚିତ୍ର 7.4

ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ B ରୁ $\overline{AC}$ ବାହୁ ପ୍ରତି ଓ ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ C ରୁ $\overline{AB}$ ବାହୁ ପ୍ରତି ମଧ୍ୟ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ଲମ୍ବ ଅଙ୍କନ କରାଯାଇପାରେ । ସେ ଦୁଇଟି ମଧ୍ୟ Δ ABC ର ଅନ୍ୟ ଦୁଇଟି ଲମ୍ବ ।



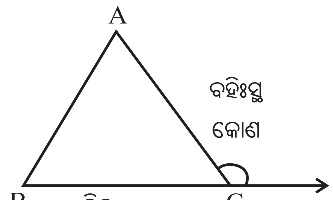
ଚିତ୍ର 7.5

ନିଜେ କରି ଦେଖ :

- Δ DEF ଅଙ୍କନ କର ।
- ସେଟ୍‌ସ୍କୋୟାର ସାହାଯ୍ୟରେ D ବିନ୍ଦୁରୁ $\overline{EF}$ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ଅଙ୍କନ କର ଓ ଲମ୍ବର ପାଦ ବିନ୍ଦୁର ନାମ ଦିଅ X ।
- ସେହିପରି E ବିନ୍ଦୁରୁ $\overline{DF}$ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ଅଙ୍କନ କର ଓ ଏହି ଲମ୍ବର ପାଦ ବିନ୍ଦୁର ନାମ ଦିଅ Y ।
- ପୁନଶ୍ଚ ପୂର୍ବ ପରି F ବିନ୍ଦୁରୁ $\overline{DE}$ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ଅଙ୍କନ କର ଓ ଏହି ଲମ୍ବର ପାଦ ବିନ୍ଦୁର ନାମ ଦିଅ Z । ବର୍ତ୍ତମାନ Δ DEF ର $\overline{EF}$ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ $\overline{DX}$, $\overline{FD}$ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ $\overline{EY}$ ଓ $\overline{DE}$ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ $\overline{FZ}$ ପାଇଲ ।
- କହିଲ ଦେଖି, $\overline{DX}$, $\overline{EY}$ ଓ $\overline{FZ}$ ଲମ୍ବ ତିନୋଟି ପରସ୍ପରକୁ ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରୁଥିବାର ଦେଖୁଛ ଅଥବା ଭିନ୍ନ ଭିନ୍ନ ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରୁଥିବାର ଦେଖୁଛ ?

ତୁମେ ନିଶ୍ଚୟ ଦେଖିବ ଯେ, ଲମ୍ବ ତ୍ରୟ ପରସ୍ପରକୁ ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରୁଛନ୍ତି । ଅର୍ଥାତ୍, **ତ୍ରିଭୁଜର ଲମ୍ବ ତିନୋଟି ଏକ ବିନ୍ଦୁଗାମୀ ।**

7.3 ତ୍ରିଭୁଜର ବହିଃସ୍ଥ କୋଣ ଓ ଏହାର ଧର୍ମ



ଚିତ୍ର 7.6

ତ୍ରିଭୁଜର ତିନୋଟି କୋଣ ଥାଏ, ତାହା ତୁମେ ଜାଣିଛ । ତ୍ରିଭୁଜର ପ୍ରତ୍ୟେକ କୋଣକୁ ତ୍ରିଭୁଜର **ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କୋଣ** ବୋଲି ମଧ୍ୟ କୁହାଯାଏ ।

ଚିତ୍ର 7.6 ରେ ଥିବା Δ ABC କୁ ଦେଖ । $\overrightarrow{BD}$ ରଶ୍ମି ଅଙ୍କନ କର ଯେପରି $\overline{BC}$ ବାହୁ $\overrightarrow{BD}$ ର ଏକ ଅଂଶ ହୋଇଥିବ ।

ଏବେ କହ, $\overrightarrow{CD}$ ଓ $\overline{CA}$ ଦ୍ୱାରା କେଉଁ କୋଣ ଉତ୍ପନ୍ନ ହେଉଛି ?

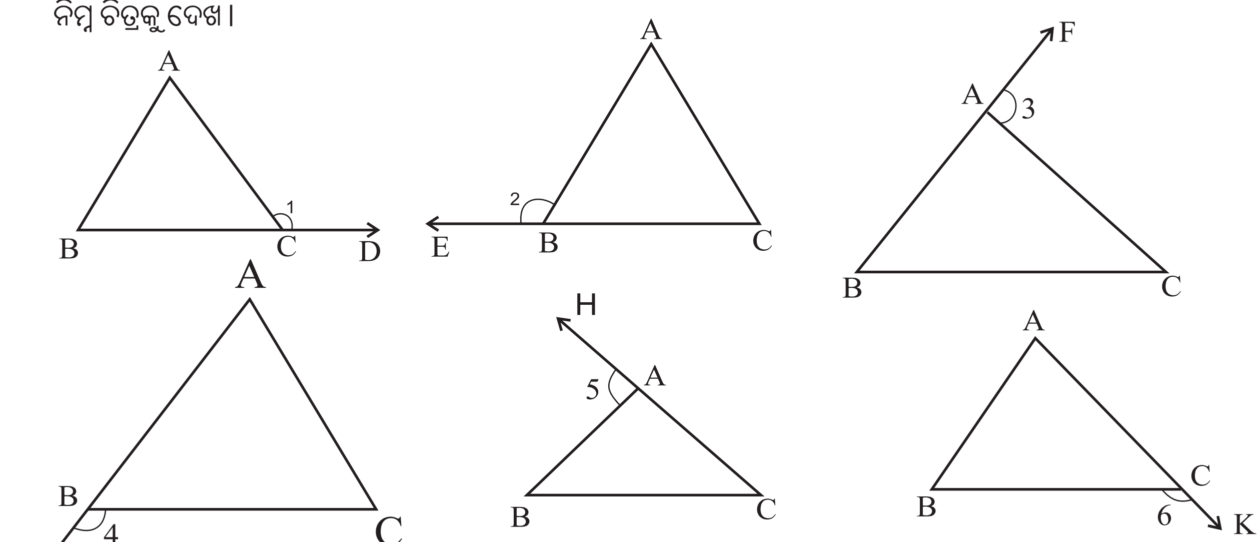
ଉତ୍ପନ୍ନ କୋଣ ହେଉଛି $\angle$ACD ।

$\angle$ACD କୁ Δ ABC ର ଗୋଟିଏ ବହିଃସ୍ଥ କୋଣ କୁହାଯାଏ ।

ଏହିଭଳି Δ ABC ର କେତୋଟି ବହିଃସ୍ଥ କୋଣ ସମ୍ଭବ ?

ନିମ୍ନ ଚିତ୍ରକୁ ଦେଖ ।

ଜାଣିଛ କି ?
$\overrightarrow{CD}$ କୁ ଆମେ ମଧ୍ୟ $\overline{BC}$ ର ବର୍ଦ୍ଧିତାଂଶ କହିଥାଉ । $\overline{BC}$ ର ବର୍ଦ୍ଧିତାଂଶ $\overrightarrow{CD}$ ସହ $\overline{AC}$ ବାହୁ ବହିଃସ୍ଥ $\angle$ACD କୋଣ ଉତ୍ପନ୍ନ କରେ ବୋଲି ମଧ୍ୟ କୁହାଯାଏ ।



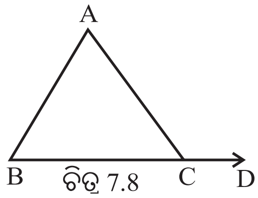
ଚିତ୍ର 7.7

Δ ABC ର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଶୀର୍ଷ ବିନ୍ଦୁଠାରେ ଦୁଇଟି ଲେଖାଏଁ ବହିଃସ୍ଥ କୋଣ ସମ୍ଭବ ।

ଚିତ୍ର 7.8 ରେ Δ ABC ର ଗୋଟିଏ ବହିଃସ୍ଥ କୋଣ ∠ACD ।

Δ ABC ର ତିନୋଟି ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କୋଣ ମଧ୍ୟରୁ ∠ACB, ବହିଃସ୍ଥ ∠ACD ର ସନ୍ନିହିତ କୋଣ ଅଟେ ।

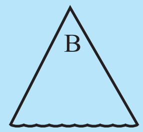
ଅନ୍ୟ ଦୁଇ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ∠BAC ଓ ∠ABC କୁ ବହିଃସ୍ଥ ∠ACD ର **ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ଦୂରବର୍ତ୍ତୀ କୋଣ** କୁହାଯାଏ ।

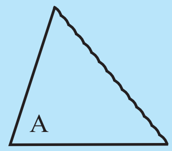


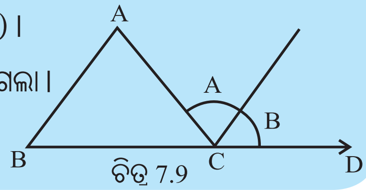
ଚିତ୍ର 7.8

ନିଜେ କରି ଦେଖ :

- ଗୋଟିଏ ଟ୍ରେସିଂ-କାଗଜ ନେଇ Δ ABC ଉପରେ ରଖ ଏବଂ ∠ABC ଓ ∠BAC ର ଅବିକଳ ନକଲ ଅଙ୍କନ କର (ଟ୍ରେସିଂ-କାଗଜ ନ ଥିଲେ ସାଧାକାଗଜରେ ତେଲ ଘସି ତେଲ ଲଗା କାଗଜ ନିଆଯାଇପାରେ)
- ∠ABC ଓ ∠BAC ର ନକଲ ଚିତ୍ରର ଧାରେ ଧାରେ କାଟି ଦେଇ କୋଣ ଦୁଇଟିକୁ ଅଲଗା କରି ନିଅ । ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ର ଭଳି କୋଣ ଆକୃତିର ଖଣ୍ଡମାନ ପାଇବ ।
- Δ ABC ର C ବିନ୍ଦୁରେ $\overline{CA}$ ସହ କଟାଯାଇଥିବା ∠A ଆକୃତିର ଗୋଟିଏ ଧାରକୁ ଲଗାଇ ରଖ ଏବଂ $\overline{CD}$ ସହ କଟାଯାଇଥିବା ∠B ଆକୃତିର ଗୋଟିଏ ଧାରକୁ ଲଗାଇ ରଖ (ଚିତ୍ର 7.9 ଭଳି) ।
- ବର୍ତ୍ତମାନ ଦେଖିବ ଯେ, ∠A ଆକୃତି ଓ ∠B ଆକୃତିର ଅନ୍ୟ ଧାର ଦୁଇଟି ପରସ୍ପର ସହ ମିଶିଗଲା ।
- ଏଥିରୁ ତୁମେ କ'ଣ ଜାଣିଲ ତୁମ ସାଙ୍ଗମାନଙ୍କ ସହ ଆଲୋଚନା କରି ଲେଖ ।







ଚିତ୍ର 7.9

ନିଜେ କରି ଦେଖ :

- ତୁମ ଖାତାରେ Δ ABC ଅଙ୍କନ କର ।
- $\overrightarrow{BD}$ ଅଙ୍କନ କର ଯାହାର $\overline{BC}$ ବାହୁ ଗୋଟିଏ ଅଂଶ । ବହିଃସ୍ଥ କୋଣ ∠ACD ପାଇଲ ।
- ∠A, ∠B ଓ ବହିଃସ୍ଥ ∠ACD କୁ ପ୍ରୋଟ୍ରାକ୍ଟର ସାହାଯ୍ୟରେ ମାପ ।
- m∠A + m∠B କେତେ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।
- ପାଇଥିବା ସମଷ୍ଟି ଓ m∠ACD ମଧ୍ୟରେ କି ସମ୍ପର୍କ ଦେଖୁଛ ?
- ଉପରୋକ୍ତ କାର୍ଯ୍ୟରୁ ଆମେ କ'ଣ ଜାଣିଲେ ?

ଆମେ ଜାଣିଲେ,

ଏକ ତ୍ରିଭୁଜର ଗୋଟିଏ ବହିଃସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣ,

ଏହାର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ଦୂରବର୍ତ୍ତୀ କୋଣ ଦ୍ୱୟର ପରିମାଣର ସମଷ୍ଟି ସହ ସମାନ ।

ଉତ୍ତର ଲେଖ :

1. Δ ABC ର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଶୀର୍ଷ ବିନ୍ଦୁରେ କେତୋଟି ବହିଃସ୍ଥ କୋଣ ଅଙ୍କନ ସମ୍ଭବ ?
2. Δ ABC ର A ଶୀର୍ଷ ବିନ୍ଦୁଠାରେ ବହିଃସ୍ଥ କୋଣ ଦୁଇଟି ଅଙ୍କନ କଲେ, ସେ ଦୁଇଟିର ପରିମାଣ ମଧ୍ୟରେ କି ସମ୍ପର୍କ ରହିବ ? ତୁମ ଉତ୍ତରର କାରଣ କ'ଣ ?
3. ଏକ ତ୍ରିଭୁଜର ଗୋଟିଏ ବହିଃସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣ ଓ ତା'ର ସନ୍ନିହିତ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣ ମଧ୍ୟରେ ସମ୍ପର୍କ କ'ଣ ? ତୁମ ଉତ୍ତରର କାରଣ କହ ।

ଉଦାହରଣ - 1

ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ରରେ Δ ABC ର ଗୋଟିଏ ବହିଃସ୍ଥ କୋଣ $\angle ABD$ ଅଙ୍କନ କରାଯାଇଛି ।

$m\angle ABD = 100^0$, $m\angle A = x^0$ ଓ $m\angle C = 35^0$ ହେଲେ x ର ମାନ କେତେ ?

ସମାଧାନ :

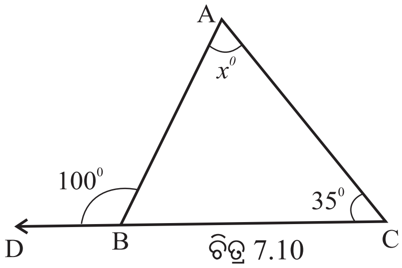
$\angle ABD$ ଗୋଟିଏ ବହିଃସ୍ଥ କୋଣ ।

ଏଣୁ $m\angle ABD = m\angle A + m\angle C$

କିମ୍ବା $100^0 = x^0 + 35^0$

କିମ୍ବା $100^0 - 35^0 = x^0$

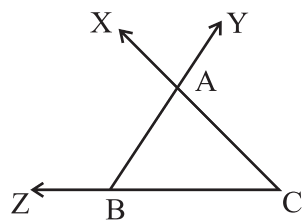
କିମ୍ବା $x = 65$



ଚିତ୍ର 7.10

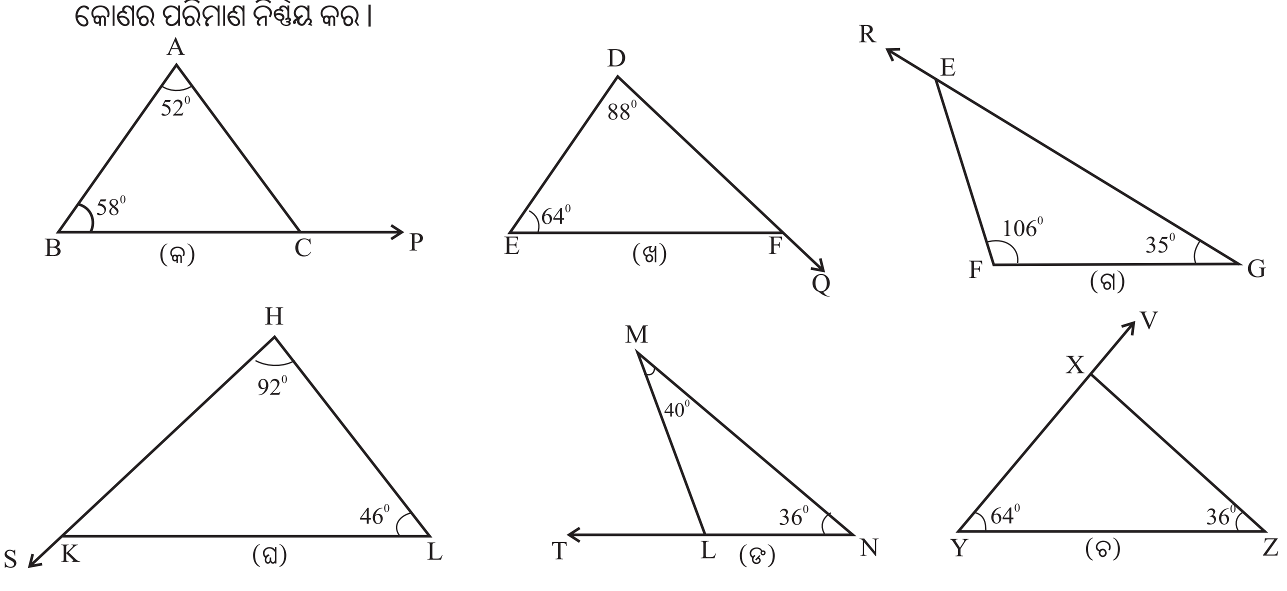
ଅଭ୍ୟାସ କାର୍ଯ୍ୟ 7.2

1. ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ରରେ ଦେଖୁଥିବା ବହିଃସ୍ଥ କୋଣଗୁଡ଼ିକର ନାମ ଲେଖ ।



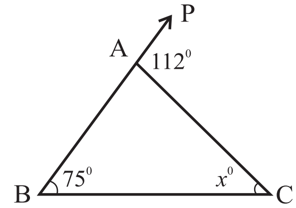
2. ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ମୋଟ କେତେ ଗୋଟି ବହିଃସ୍ଥ କୋଣ ଅଙ୍କନ ସମ୍ଭବ ?

3. ନିମ୍ନସ୍ଥ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଚିତ୍ରରେ ଦେଖୁଥିବା ତ୍ରିଭୁଜର ଦୁଇଟି କୋଣର ପରିମାଣ ଦିଆଯାଇଛି ଏବଂ ଗୋଟିଏ ବହିଃସ୍ଥ କୋଣ ଦର୍ଶାଯାଇଛି । ଉକ୍ତ ବହିଃସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।



4. ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ରରେ Δ ABC ର $\angle B$ ଓ ବହିଃସ୍ଥ $\angle PAC$ ର ପରିମାଣ ଯଥାକ୍ରମେ 75^0 ଓ 112^0 ।

$\angle C$ ର ପରିମାଣକୁ x^0 ରୂପେ ସୂଚିତ କରାଯାଇଛି । x ର ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।



5. Δ ABC ରେ $\angle$B ର ପରିମାଣ $\angle$C ର ପରିମାଣର ଦୁଇ ଗୁଣ । ଏହି ତ୍ରିଭୁଜର A ଠାରେ ଅଙ୍କିତ ଗୋଟିଏ ବହିଃସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣ 114^0 ହେଲେ, ତ୍ରିଭୁଜଟିର ପ୍ରତ୍ୟେକ କୋଣର ପରିମାଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

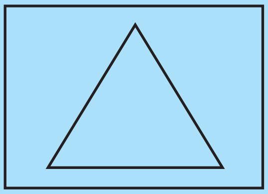
6. ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ Δ ABC ରେ AC=BC । ବହିଃସ୍ଥ $\angle$ACP ର ପରିମାଣ 160^0 ହେଲେ, $\angle$B ଓ $\angle$A ର ପରିମାଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

7.4 ତ୍ରିଭୁଜର କୋଣ ପରିମାଣ ସମ୍ପୃକ୍ତ ଧର୍ମ

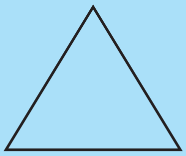
ତ୍ରିଭୁଜର ତିନି କୋଣର ପରିମାଣ ମଧ୍ୟରେ ଥିବା ସଂପର୍କକୁ ଜାଣିବା ପାଇଁ ନିମ୍ନ କାର୍ଯ୍ୟଗୁଡ଼ିକୁ କରିବା ।

ନିଜେ କରି ଦେଖ :

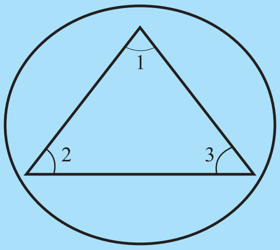
- ଖଣ୍ଡେ କାଗଜ ନେଇ ତା' ଉପରେ ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜ ଅଙ୍କନ କର ଏବଂ ଏହି ତ୍ରିଭୁଜର ବାହୁର ଧାରେ ଧାରେ କାଟି ତ୍ରିଭୁଜ ଆକୃତିର କାଗଜ ଖଣ୍ଡକୁ ଅଲଗା କରି ନିଅ ।



କାଗଜ ଉପରେ ଅଙ୍କିତ ତ୍ରିଭୁଜ
ଚିତ୍ର (କ)



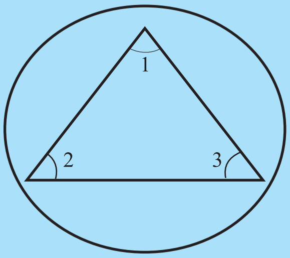
ତ୍ରିଭୁଜ ଆକୃତିର କାଗଜ ଖଣ୍ଡ
ଚିତ୍ର (ଖ)



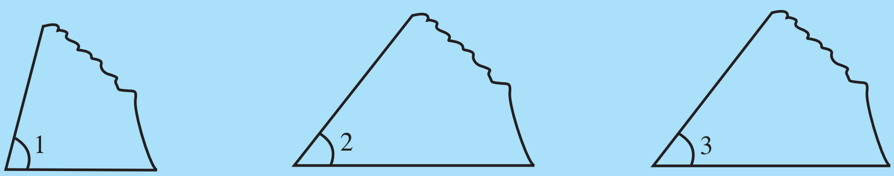
କୋଣ ତ୍ରୟର $\angle1$, $\angle2$ ଓ $\angle3$ ନାମ କରଣ
ଚିତ୍ର (ଗ)

ଚିତ୍ର 7.11

- ତ୍ରିଭୁଜ ଆକୃତି ବିଶିଷ୍ଟ କାଗଜରେ କୋଣ ତିନୋଟିକୁ $\angle1$, $\angle2$ ଓ $\angle3$ ରୂପେ ନାମିତ କର (ଚିତ୍ର - ଗ) ।

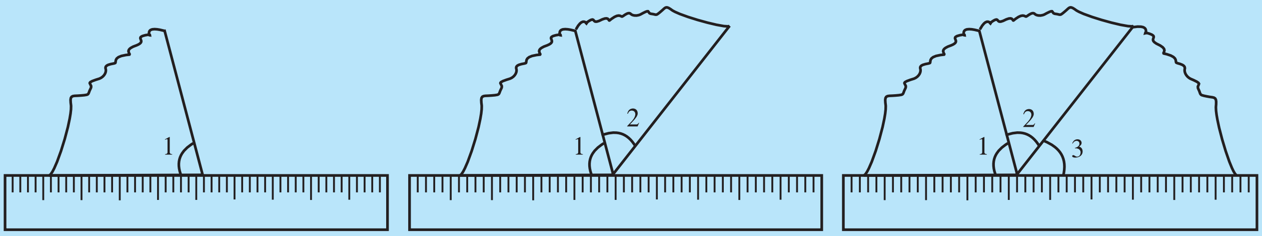


- ତ୍ରିଭୁଜ ଆକୃତି କାଗଜରୁ କୋଣ ତିନୋଟିକୁ କାଟି ଅଲଗା କରିଦିଅ ।



ଚିତ୍ର 7.12

- ତୁମ ଖାତା ଉପରେ ଗୋଟିଏ ସ୍କେଲ ରଖ । ସ୍କେଲର ଗୋଟିଏ ଧାର ସହ କଟାଯାଇଥିବା କୋଣ ତିନୋଟିର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁକୁ ଚିତ୍ର 7.13 ରେ ଦର୍ଶାଯାଇଥିବା ଭଳି ଲଗାଇ ରଖ । ଏଠାରେ $\angle1$ ର ଗୋଟିଏ ଧାର ସହ $\angle2$ ର ଗୋଟିଏ ଧାର ଲାଗି ରହିଛି ଓ $\angle2$ ର ଅନ୍ୟ ଧାର ସହ $\angle3$ ର ଗୋଟିଏ ଧାର ଲାଗି ରହିଛି ।



∠1 ନାମିତ କୋଣକୁ ରଖାଯାଇଛି   ∠1 ଓ ∠2 ନାମିତ କୋଣକୁ ରଖାଯାଇଛି   ∠1, ∠2 ଓ ∠3 ନାମିତ କୋଣତ୍ରୟକୁ ରଖାଯାଇଛି

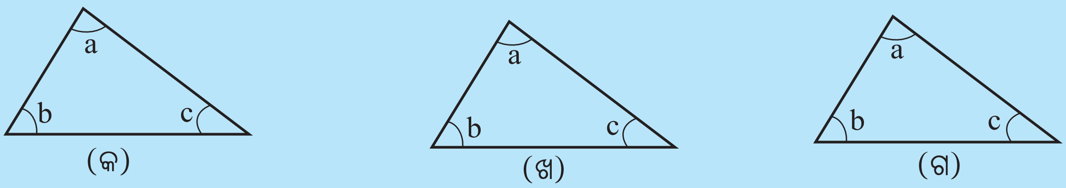
ଚିତ୍ର 7.13

∠1 ର ଗୋଟିଏ ଧାର ଓ କୋଣ ∠3 ର ଗୋଟିଏ ଧାର ସ୍କେଲର ଧାର ସହ ଲାଗି ରହିଛି । ଅର୍ଥାତ୍ ସେହି ଧାର ଦୁଇଟି ଏକ ସରଳରେଖାରେ ରହିଛି ।

ଏଥିରୁ ତ୍ରିଭୁଜର କୋଣ ତିନୋଟିର ପରିମାଣର ସମଷ୍ଟି କେତେ ହେଲା ବୋଲି ଜାଣିଲ ?

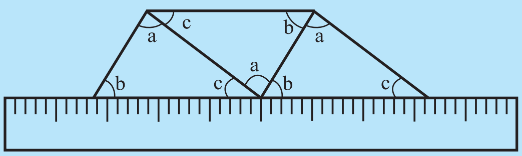
ନିଜେ କରି ଦେଖ :

- ତୁମ ଖାତାରେ ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜ ଅଙ୍କନ କର । କୋଣଗୁଡ଼ିକୁ ∠a, ∠b, ∠c ରୂପେ ନାମିତ କର ।
- ଖଣ୍ଡେ ଟ୍ରେସିଂ-କାଗଜ ନେଇ ସେଥିରେ ତୁମ ଖାତାରେ ଅଙ୍କିତ ତ୍ରିଭୁଜର ତିନୋଟି ଅବିକଳ ନକଲ ପ୍ରସ୍ତୁତ କର ଓ ମୂଳ ତ୍ରିଭୁଜର କୋଣମାନଙ୍କର ନାମକରଣ ଅନୁଯାୟୀ କୋଣଗୁଡ଼ିକର ନାମକରଣ କର ।
- ଟ୍ରେସିଂ-କାଗଜରୁ ନକଲ ତ୍ରିଭୁଜ ତିନୋଟିକୁ କାଟି ଅଲଗା କର ଯେପରି ଚିତ୍ର(କ), (ଖ) ଓ (ଗ) ରେ ଦର୍ଶାଯାଇଛି ।



ଚିତ୍ର 7.14

- ତୁମ ଖାତାର ଗୋଟିଏ ପୃଷ୍ଠା ଉପରେ ସ୍କେଲଟିଏ ରଖ । ତ୍ରିଭୁଜ ତିନୋଟିକୁ ସ୍କେଲ ଧାରରେ ନିମ୍ନ ଚିତ୍ର ଭଳି ସଜାଇ ରଖ । ଏଠାରେ ଗୋଟିଏ ଖଣ୍ଡର ∠a ନାମିତ କୋଣ, ଅନ୍ୟ ଗୋଟିକର ∠b ନାମିତ କୋଣ ଓ ତୃତୀୟଟିର ∠c ନାମିତ କୋଣ ଏକାଠି ରହିବ ।

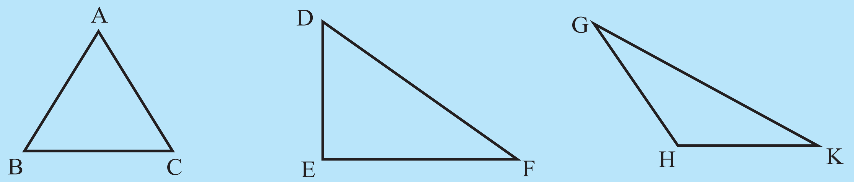


ଚିତ୍ର 7.15

- ଏହି ଅବସ୍ଥାରେ ପ୍ରଥମ ତ୍ରିଭୁଜର ∠c ର ଗୋଟିଏ ବାହୁ ଓ ତୃତୀୟ ତ୍ରିଭୁଜର ∠c ର ଗୋଟିଏ ବାହୁ ସ୍କେଲ୍ ଧାରକୁ ଲାଗି ରହିବାର ଦେଖିବା । ଏଥିରୁ ତ୍ରିଭୁଜର ∠a, ∠b ଓ ∠c ର ପରିମାଣର ସମଷ୍ଟି କେତେ ହେବ ?

ନିଜେ କରି ଦେଖ :

- ତୁମ ଖାତାରେ ବିଭିନ୍ନ ଆକୃତିର ତିନୋଟି ତ୍ରିଭୁଜ ଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କର ।



- ପ୍ରୋଟ୍ରାକ୍ଟର ବ୍ୟବହାର କରି ପ୍ରତ୍ୟେକ ତ୍ରିଭୁଜର କୋଣ ତିନୋଟିର ପରିମାଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଓ ସେଗୁଡ଼ିକୁ ନିମ୍ନ ସାରଣୀରେ ଯଥା ସ୍ଥାନରେ ଲେଖ ।

ତ୍ରିଭୁଜର ନାମ	କୋଣ ତିନୋଟିର ପରିମାଣ	କୋଣ ତିନୋଟିର ପରିମାଣର ସମଷ୍ଟି
Δ ABC	$m\angle A =$ $m\angle B =$ $m\angle C =$	...........+...........+...........=
Δ DEF	$m\angle D =$ $m\angle E =$ $m\angle F =$	...........+...........+...........=
Δ GHK	$m\angle G =$ $m\angle H =$ $m\angle K =$	...........+...........+...........=

- ପ୍ରତ୍ୟେକ କ୍ଷେତ୍ରରେ କୋଣ ତିନୋଟିର ପରିମାଣର ସମଷ୍ଟି କେତେ ହେବାର ଦେଖୁଛ ?

ଏଣୁ ଆମେ ଜାଣିଲେ -

ଏକ ତ୍ରିଭୁଜର କୋଣ ତିନୋଟିର ପରିମାଣର ସମଷ୍ଟି 180^0 ।

ତୁମେ ଉତ୍ତର ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାକୁ ଚେଷ୍ଟା କର :

1. Δ ABC ର $m\angle A=70^0$ ଓ $m\angle B=45^0$ ହେଲେ, $m\angle C$ କେତେ ?
2. Δ PQR ରେ $m\angle R$ ଅପେକ୍ଷା $m\angle Q$ 10^0 ଅଧିକ ଓ $m\angle Q$ ଠାରୁ $m\angle P$ 10^0 ଅଧିକ ହେଲେ, କୋଣ ତିନୋଟିର ପରିମାଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ଉଦାହରଣ - 2

Δ ABC ରେ $\angle A$ ର ପରିମାଣ $\angle B$ ର ପରିମାଣର ଦୁଇ ଗୁଣ ଓ $\angle C$ ର ପରିମାଣ $\angle A$ ର ପରିମାଣର ତିନି ଗୁଣ ହେଲେ, କୋଣ ତିନୋଟିର ପରିମାଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ ଅଛି -

$m\angle A$ = $\angle B$ ର ପରିମାଣର ଦୁଇ ଗୁଣ

$m\angle C$ = $\angle A$ ର ପରିମାଣର ତିନି ଗୁଣ

= $3\times\angle A$ ର ପରିମାଣ

= $3\times2\times\angle B$ ର ପରିମାଣ

= $6\times\angle B$ ର ପରିମାଣ ବା $\angle B$ ର ପରିମାଣର 6 ଗୁଣ

ମାତ୍ର $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180^0$

ଏଣୁ $2m\angle B + m\angle B + 6m\angle B = 180^0$

ବା, $9m\angle B = 180^0$

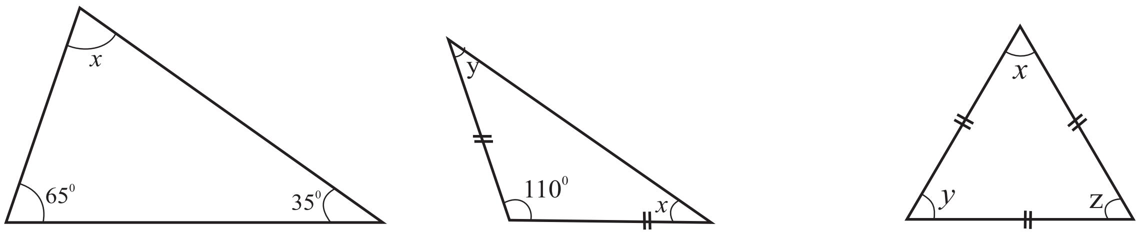
ବା, $m\angle B = \frac{180^0}{9} = 20^0$

$\because m\angle A = 2m\angle B = 2\times 20^0 = 40^0$

$m\angle C = 6m\angle B = 6\times 20^0 = 120^0$

ଅଭ୍ୟାସ କାର୍ଯ୍ୟ 7.3

1. ନିମ୍ନ ଚିତ୍ର ତିନୋଟିରୁ x , y ଓ z ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

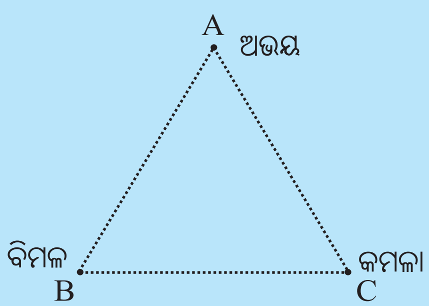


2. Δ ABC ରେ $m\angle A = m\angle B + m\angle C$ ହେଲେ, କେତେ $m\angle A$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

7.5. ତ୍ରିଭୁଜର ବାହୁ ସମ୍ପର୍କିତ ଧର୍ମ

ନିଜେ କରି ଦେଖ :

- ସ୍କୁଲର ଖେଳ ପଡ଼ିଆକୁ ଯାଅ । ଚିତ୍ରରେ ଦେଖା ଯାଇଥିବା ଭଳି ତୁମର ତିନି ଜଣ ସାଙ୍ଗଙ୍କୁ ତିନୋଟି ସ୍ଥାନରେ ଠିଆ କରାଅ । ଚିତ୍ର 7.17 ରେ ଅଭୟ, ବିମଳ ଓ କମଳା ଏହି ଭଳି ତିନୋଟି ସ୍ଥାନରେ ଠିଆ ହୋଇଛନ୍ତି ।



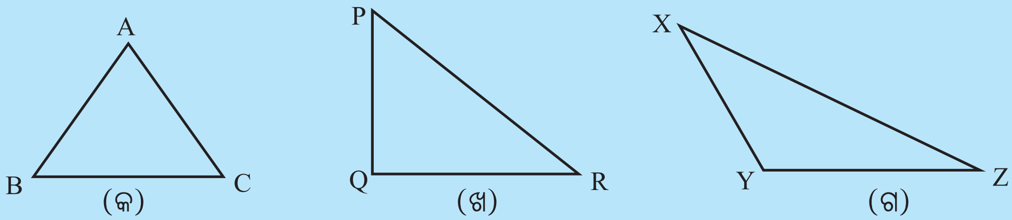
ଚିତ୍ର 7.17

- ବର୍ତ୍ତମାନ ଦୁଇ ଖଣ୍ଡ ଦଉଡ଼ି ନିଅ । ପ୍ରତ୍ୟେକ ଦଉଡ଼ାର ଗୋଟିଏ ମୁଣ୍ଡକୁ ଅଭୟକୁ ଧରିବାକୁ କହ ।
- ଗୋଟିଏ ଦଉଡ଼ାକୁ ଅଭୟ ପାଖରୁ କମଳା ପାଖକୁ ଲମ୍ବାଅ ଓ କମଳାକୁ ଦଉଡ଼ାଟିକି ଟାଣି ଧରିବାକୁ କହ । କମଳା ଧରିବା ସ୍ଥାନରେ ଦଉଡ଼ାଟିକୁ କାଟି ଦିଅ । ବର୍ତ୍ତମାନ ସେ ଦଉଡ଼ାର ଗୋଟିଏ ମୁଣ୍ଡ ଅଭୟ ଧରିଛି ଓ ଅନ୍ୟ ମୁଣ୍ଡ କମଳା ଧରିଛି । ତେଣୁ ସେ ଦଉଡ଼ାଟିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଅଭୟଠାରୁ କମଳାର ଦୂରତା ସହ ସମାନ ।
- ଦ୍ୱିତୀୟ ଦଉଡ଼ାରୁ ଗୋଟିଏ ମୁଣ୍ଡ ଅଭୟ ହାତରେ ଅଛି । ଦଉଡ଼ାଟିକୁ ବିମଳ ଆଡ଼କୁ ଲମ୍ବାଇ ଆଣ ଓ ବିମଳକୁ ଦଉଡ଼ାଟିକୁ ଟାଣି ଧରିବାକୁ କୁହ । ଦଉଡ଼ାଟିକୁ କମଳା ଆଡ଼କୁ ଲମ୍ବାଇ ନିଅ ଏବଂ କମଳାକୁ ଏହି ଦଉଡ଼ାଟିକୁ ଟାଣି ଧରିବାକୁ କୁହ । କମଳା ଟାଣି ଧରିବା ପରେ ଦଉଡ଼ାଟି ସେହି ଠାରୁ କାଟି ନିଅ ।

- ବର୍ତ୍ତମାନ ଦ୍ୱିତୀୟ ଦଉଡ଼ାଟିର ଗୋଟିଏ ଅଂଶ ଅଭୟ ଠାରୁ ବିମଳ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଦୂରତା ସହ ସମାନ ଓ ଅନ୍ୟ ଅଂଶ ବିମଳଠାରୁ କମଳା ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଦୂରତା ସହ ସମାନ । ଏଣୁ ପ୍ରଥମ ଦଉଡ଼ାର ଲମ୍ବ $= AC$, ଦ୍ୱିତୀୟ ଦଉଡ଼ାର ଲମ୍ବ $= AB + BC$
- ବର୍ତ୍ତମାନ ଦଉଡ଼ା ଦୁଇଟିକୁ ନେଇ ସେ ଦୁଇଟିର ଦୈର୍ଘ୍ୟକୁ ତୁଳନା କର । କ'ଣ ପାଇଲ ?
  ପ୍ରଥମ ଦଉଡ଼ାର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଅପେକ୍ଷା ଦ୍ୱିତୀୟ ଦଉଡ଼ାର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଅଧିକ ।
  ଏଥରୁ ଜାଣିଲେ, ΔABC ରେ $AB + BC > AC$

ନିଜେ କରି ଦେଖ :

- ତୁମ ଖାତାରେ ତିନୋଟି ଭିନ୍ନ ଭିନ୍ନ ତ୍ରିଭୁଜ ଅଙ୍କନ କର । ସେ ତ୍ରିଭୁଜ ତିନୋଟିର ନାମ ଦିଅ ABC, PQR, XYZ ।



- ପ୍ରତ୍ୟେକ ତ୍ରିଭୁଜର ବାହୁଗୁଡ଼ିକର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ମାପ ଓ ନିମ୍ନ ସାରଣୀ ପୂରଣ କର (ଶେଷ ସ୍ତମ୍ଭରେ (3) ଓ ସ୍ତମ୍ଭ (4)ର ଫଳ ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁଟି ବୃହତ୍ତର ଲେଖ ।)

ତ୍ରିଭୁଜର ନାମ (1)	ବାହୁତ୍ରୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ (2)	ଦୁଇଟି ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ସମଷ୍ଟି (3)	ତୃତୀୟ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ (4)	ସ୍ତମ୍ଭ (3) ଓ (4) ଫଳାଫଳ ମଧ୍ୟରେ ତୁଳନା (5)
ΔABC	AB =	AB + BC =	AC =	
	BC =	AB + AC =	BC =	
	CA =	BC + AC =	AB =	
ΔPQR	PQ =	PQ + QR =	RP =	
	QR =	QR + RP =	PQ =	
	RP =	PQ + RP =	QR =	
ΔXYZ	XY =	XY + YZ =	ZX =	
	YZ =	YZ + ZX =	XY =	
	ZX =	XY + ZX =	YZ =	

- ଉପରିସ୍ଥ ସାରଣୀର ସ୍ତମ୍ଭ (5) ରୁ ଆମେ କ'ଣ ଜାଣିଲେ ?

ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ଯେ କୌଣସି ଦୁଇଟି ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ସମଷ୍ଟି ଏହାର ତୃତୀୟ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଠାରୁ ବୃହତ୍ତର ।

କହିଲ ଦେଖି :

ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ଯେ କୌଣସି ଦୁଇଟି ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ବିୟୋଗଫଳ ତୃତୀୟ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟଠାରୁ କମ୍ ହେବ ନା ଅଧିକ ହେବ ?

✍ Δ PQR ର PQ = 8 ସେ.ମି. ଓ PR=11 ସେ.ମି., ନିମ୍ନ ଉକ୍ତିମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ ଠିକ୍ ଉକ୍ତିକୁ ବାଛ ।

(କ) QR, 2 ସେ.ମି. ଠାରୁ ଅଧିକ ଓ 19 ସେ.ମି. ଠାରୁ କମ୍

(ଖ) QR, 3 ସେ.ମି. ଠାରୁ ଅଧିକ ଓ 20 ସେ.ମି. ଠାରୁ କମ୍

(ଗ) QR, 3 ସେ.ମି. ଠାରୁ ଅଧିକ ଓ 19 ସେ.ମି ଠାରୁ କମ୍

(ଘ) QR, 2 ସେ.ମି. ଠାରୁ ଅଧିକ ଓ 20 ସେ.ମି. ଠାରୁ କମ୍

ତୁମର ଉତ୍ତର ସପକ୍ଷରେ କାରଣ ଦର୍ଶାଅ ।

ଅଭ୍ୟାସ କାର୍ଯ୍ୟ 7.4

1. ନିମ୍ନସ୍ଥ କେଉଁ ମାପଗୁଡ଼ିକ ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ବାହୁତ୍ରୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସହ ସମାନ ହୋଇପାରନ୍ତି ?

(କ) 4 ସେ.ମି., 5 ସେ.ମି. ଓ 9 ସେ.ମି.

(ଖ) 5 ସେ.ମି., 6.5 ସେ.ମି. ଓ 12 ସେ.ମି.

(ଗ) 12 ସେ.ମି., 7 ସେ.ମି. ଓ 4 ସେ.ମି.

(ଘ) 8 ସେ.ମି., 9 ସେ.ମି. ଓ 11 ସେ.ମି.

ଜାଣିଛ କି ?

- ବୃହତ୍ତମ ମାପ ସହ ଅନ୍ୟ ଦୁଇଟି ମାପର ସମଷ୍ଟିକୁ ତୁଳନା କଲେ ବୃହତ୍ତମ ମାପଟି ଅନ୍ୟ ଦୁଇଟି ସମଷ୍ଟି ଠାରୁ ଛୋଟ ହେବା ଆବଶ୍ୟକ
- କ୍ଷୁଦ୍ରତମ ମାପକୁ ଅନ୍ୟ ଦୁଇ ମାପର ବିୟୋଗଫଳ ସହ ତୁଳନା କଲେ, କ୍ଷୁଦ୍ରତମ ମାପଟି ଅନ୍ୟ ଦୁଇଟିର ବିୟୋଗଫଳ ଠାରୁ ବଡ଼ ହେବା ଆବଶ୍ୟକ ।

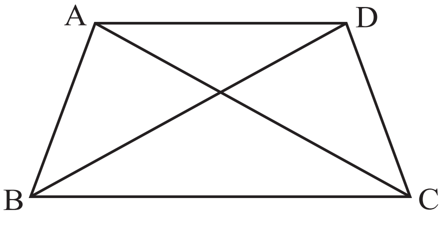
2. ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ରରୁ $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$, $\overline{AC}$ ଓ $\overline{BD}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ମାପ ।

ନିମ୍ନ ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର ।

AB + BC + CD + DA = _________

AC + BD = _________

AB + BC + CD + DA ☐ AC + BD [> ବା <]



ଏଥିରୁ କ'ଣ ଜାଣିଲ ଲେଖ ।

3. ନିଜେ ଚିନ୍ତାକର, ସାଙ୍ଗମାନଙ୍କ ସହ ଆଲୋଚନା କର ତା'ପରେ ଉତ୍ତର ଲେଖ । ପ୍ରତ୍ୟେକ ଉତ୍ତରର କାରଣ ଲେଖ ।

(କ) ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ଦୁଇଟି କୋଣ ପ୍ରତ୍ୟେକ ସମକୋଣ ହୋଇ ପାରିବ କି ?

(ଖ) ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ଦୁଇଟି କୋଣ ମଧ୍ୟରୁ ପ୍ରତ୍ୟେକ ସ୍ଥୁଳକୋଣ ହୋଇ ପାରିବ କି ?

(ଗ) ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜରେ କେବଳ ଗୋଟିଏ କୋଣ ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣ ହୋଇ ପାରିବ କି ?

(ଘ) ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜରେ କେବଳ ଦୁଇଟି କୋଣ ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣ ହୋଇ ପାରିବ କି ?

(ଙ) ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ପ୍ରତ୍ୟେକ କୋଣର ମାପ 60^0 ହୋଇ ପାରିବ କି ?

(ଚ) ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ପ୍ରତ୍ୟେକ କୋଣର ମାପ 60^0 ଠାରୁ ବଡ଼ ହୋଇ ପାରିବ କି ?

(ଛ) ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ପ୍ରତ୍ୟେକ କୋଣର ମାପ 60^0 ଠାରୁ ସାନ ହୋଇ ପାରିବ କି ?

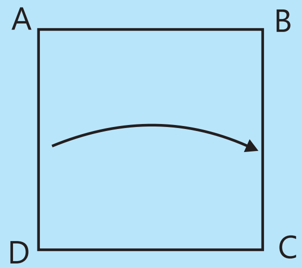
(ଜ) ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ବାହୁ ତିନୋଟିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 8 ସେ.ମି., 7 ସେ.ମି. ଓ 15 ସେ.ମି. ହୋଇ ପାରିବ କି ?

(ଝ) ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ବାହୁ ତ୍ରୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 8 ସେ.ମି., 5 ସେ.ମି. ଓ 3 ସେ.ମି. ହୋଇ ପାରିବ କି ?

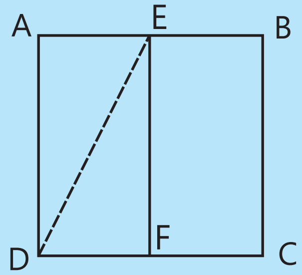
(ଞ) ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ବାହୁ ତ୍ରୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 4 ସେ.ମି., 5 ସେ.ମି. ଓ 8 ସେ.ମି. ହୋଇ ପାରିବ କି ?

ନିଜେ କରି ଦେଖ :

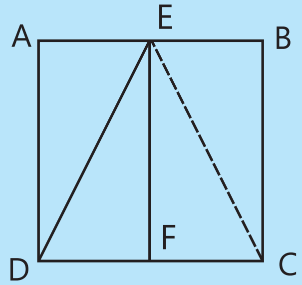
କାଗଜ ଭାଙ୍ଗି ସମଦ୍ୱିବାହୁ ଓ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜ ତିଆରି କରିବା ।



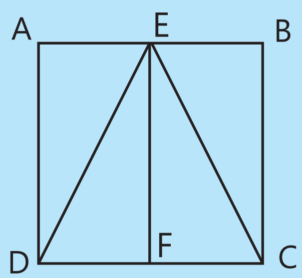
- ଖଣ୍ଡିଏ ବର୍ଗାକାର କାଗଜ ନେଇ ବାମ-ଡ଼ାହାଣ ଧାର ଭାଙ୍ଗି ଅଧା କର । ଭାଙ୍ଗଟିକୁ ଭଲକରି ଚାପି ଖୋଲିଦିଅ । ଭାଙ୍ଗଟିର ନାଁ 'EF' ରଖ ।



- 'E ଓ F' ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟକୁ ଯୋଡ଼ି ଭାଙ୍ଗିଦିଅ ଓ କାଗଜଟିକୁ ଖୋଲିଦିଅ । ଆମକୁ 'EF' ଭାଙ୍ଗ ମିଳିବ ।



- ସେହିପରି 'E ଓ C' ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟକୁ ଯୋଡ଼ି ଭାଙ୍ଗିଦିଅ ଓ କାଗଜଟିକୁ ଖୋଲିଦିଅ ।



- ଏବେ 'DEC' ଗୋଟିଏ ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ ହେବ । 'EF' ହେବ ଏହାର ମଧ୍ୟମା । ତେଣୁ 'DFE' ଓ 'CFE' ଦୁଇଟି ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜ ହେବ ।