புள்ளியியல்

மேல்நிலை – இரண்டாம் ஆண்டு

தமிழ்நாடு அரசு
இலவசப் பாடநூல் வழங்கும்
திட்டத்தின் கீழ் வெளியிடப்பட்டது.
(விற்பனைக்கு அன்று)

தீண்டாமை ஒரு பாவச்செயல்

தீண்டாமை ஒரு பெருங்குற்றம்

தீண்டாமை மனிதத்தன்மையற்ற செயல்

தமிழ்நாடு பாடநூல் மற்றும்
கல்வியியல் பணிகள் கழகம்
கல்லூரிச் சாலை, சென்னை – 600 006.

© தமிழ்நாடு அரசு
முதற் பதிப்பு – 2005
மறுபதிப்பு – 2017

குழுத்தலைவர்

முனைவர். ஜெ. ஜோதிகுமார்
இணைப் பேராசிரியர்
புள்ளியியல் துறை
மாநிலக் கல்லூரி
சென்னை – 600 005

மேலாய்வாளர்கள் மற்றும் நூலாசிரியர்கள்

திரு. கி. நாகபூஷணம்
தேர்வுநிலை விரிவுரையாளர்
புள்ளியியல் துறை
மாநிலக் கல்லூரி
சென்னை – 600 005.

முனைவர். இரா. இராவணன்
இணைப் பேராசிரியர்
புள்ளியியல் துறை
மாநிலக் கல்லூரி
சென்னை – 600 005.

நூலாசிரியர்கள்

திரு. கோ. ஞானசுந்தரம்
முதுகலை ஆசிரியர்
எஸ்.எஸ்.வி. மேனிலைப்பள்ளி
பூங்கா நகர், சென்னை – 600 003.

திருமதி. என். சுசீலா
முதுகலை ஆசிரியை
அண்ணா ஆதர்ஷ் மெ.மே.நி.பள்ளி,
அண்ணா நகர், சென்னை – 600 040.

திருமதி. சா. எழிலரசி
முதுகலை ஆசிரியை
பெ.கா.அரசினர் மகளிர்
மேல்நிலைப் பள்ளி
அம்பத்தூர், சென்னை – 600 053.

திரு. ஆ.ச. சேகர்
முதுகலை ஆசிரியர்
ஓ.இரா.கோ.நா.அரசு ஆண்கள்
மேல்நிலைப் பள்ளி
செங்குன்றம், சென்னை – 600 052.

பாடங்கள் தயாரிப்பு : தமிழ்நாடு அரசுக்காக பள்ளிக்கல்வி இயக்ககம், தமிழ்நாடு

இந்நூல் 60 ஜி.எஸ்.எம். தாளில் அச்சிடப்பட்டுள்ளது

ஆப்செட் முறையில் அச்சிட்டோர் :

முன்னுரை

இரண்டாம் ஆண்டு மேல்நிலைப்பள்ளி மாணவர்களுக்கான புள்ளியியல் பாட நூலை வழங்குவதில் நாங்கள் பெருமகிழ்வு அடைகிறோம்.

இந்நூல் திருத்தப்பட்ட புதிய பாடத்திட்டத்திற்கு ஏற்ப எழுதப்பட்டுள்ளது. இது பண்புசார் கோட்பாடுகள், தீர்மானக் கோட்பாடுகள் என்னும் இரண்டு புதிய அத்தியாயங்களோடு மொத்தம் பத்து அத்தியாயங்களைப் பெற்று அனைத்தும் தன்னகத்தே இருக்கும் வகையில் வடிவமைக்கப்பட்டுள்ளது. மேலும் புதிய பாடங்களைத் தவிர மற்ற பாடங்களும் இருக்கும் படியாக முழுமையாக திரும்பவும் எழுதப்பட்டுள்ளன.

இந்நூல் புள்ளியியலின் அடிப்படைக் கோட்பாடுகள், செயல்முறைகள், பயன்பாட்டுக் கருத்துக்கள் ஆகியவை தெளிவாகவும், பூரணமாகவும் தரப்பட்டுள்ளன. மேலும் ஒவ்வொரு அத்தியாயத்திலும், புள்ளியியல் கருத்துக்கள் பொருத்தமான எடுத்துக்காட்டுகளுடன் படிப்படியான முறையில் விளக்கப்பட்டுள்ளன. மாணவர்களின் தன்னம்பிக்கையை வளர்க்கும் விதத்திலும், அவர்களின் முன்னேற்றத்தைச் சோதனை செய்யும் விதத்திலும் இருக்கும்படியாகத் தாம் கற்றவற்றை மீண்டும் பயன்படுத்துவதற்கும் வாய்ப்பளிக்கும் வகையில், ஒவ்வொரு அத்தியாயமும் தகுந்த பயிற்சி வினாக்களுடன் நிறைவு பெறுகிறது.

இந்நூல் தொழில் துறை சார்ந்த படிப்புகளான C.A., I.C.W.A போன்ற மேல்படிப்பை மேற்கொள்ளும் மாணவர்களும் பயன்படுத்தும் வகையில் அமைக்கப்பட்டுள்ளது. இப்பாடநூல் இறுதியில் மாணவர்களின் வசதிக்காக, தேவையான புள்ளியியல் அட்டவணைகள் சேர்க்கப்பட்டுள்ளன.

மாணவர்கள், ஆசிரியர்கள், கல்வியாளர்கள் அனைவரிடம் இருந்தும் இந்நூலை மேன்மேலும் சிறப்புள்ளதாகச் செய்வதற்காக, மேலான ஆலோசனைகளை எப்பொழுதும் வரவேற்கிறோம்.

இந்நூலின் உருவாக்கத்திற்காக உதவிக்கரம் ஈந்த அனைவருக்கும் எங்கள் மனமார்ந்த நன்றிகள் உரித்தாகுக.

முனைவர். ஜெ. ஜோதிகுமார்
மற்றும்
பாடக்குழுவினர்

பொருளடக்கம்

			பக்கம்
1.	**நிகழ்தகவு**		
	1.0	அறிமுகம்	1
	1.1	வரையறைகளும் அடிப்படை விளக்கங்களும்	1
	1.2	நிகழ்தகவின் வரையறைகள்	3
	1.3	நிகழ்தகவின் கூட்டல் தேற்றங்கள்	5
	1.4	நிபந்தனை நிகழ்தகவு	7
	1.5	நிகழ்தகவின் பெருக்கல் தேற்றங்கள்	8
	1.6	பேயஸின் தேற்றம்	9
	1.7	வரிசை மாற்றங்கள் மற்றும் சேர்மானங்களுக்கான அடிப்படை விதிகள்	10
2.	**சமவாய்ப்பு மாறிகளும் கணித எதிர்பார்த்தலும்**		
	2.0	அறிமுகம்	34
	2.1	சமவாய்ப்பு மாறி	34
	2.2	நிகழ்தகவு திண்மைச் சார்பு	36
	2.3	பரவல் சார்பின் பண்புகள்	38
	2.4	நுண்கணிதத்தின் அடிப்படைச் செயல்கள் பற்றிய ஓர் அறிமுகம்	41
	2.5	கணித எதிர்பார்த்தல்	49
	2.6	விலக்கப்பெருக்குத் தொகை உருவாக்கும் சார்பு	56
	2.7	சிறப்பியல்புச் சார்பு	57
3.	**சில முக்கிய கோட்பாட்டு பரவல்கள்**		
	3.1	ஈருறுப்புப் பரவல்	63
	3.2	பாய்சான் பரவல்	72
	3.3	இயல்நிலைப் பரவல்	81
4.	**சிறப்பு காண் சோதனைகள்**		
	4.0	அறிமுகம்	102
	4.1	முழுமைத்தொகுதிப் பண்பளவை மற்றும் புள்ளியியல் அளவை	102

4.2	மாதிரிப்பரவல்	102
4.3	திட்டப்பிழை	103
4.4	இல் எனும் எடுகோள் மற்றும் மாற்று எடுகோள்	104
4.5	சிறப்பு காண் மட்டம் மற்றும் தீர்மான மதிப்பு	105
4.6	ஒரு முனை மற்றும் இருமுனை சோதனைகள்	107
4.7	முதல் வகை மற்றும் இரண்டாம் வகை பிழைகள்	109
4.8	சோதனைக்காண் வழிமுறைகள்	110

5. சிறப்பு காண் சோதனை (பெருங்கூறுகள்)

5.0	அறிமுகம்	114
5.1	பெருங்கூறுகள்	114
5.2	விகிதசமங்களுக்கான சிறப்பு காண் சோதனை	115
5.3	இரு மாதிரிகளின் விகித சம வித்தியாசத்திற்கான சிறப்பு காண் சோதனை	118
5.4	கூட்டு சராசரிக்கான சிறப்பு காண் சோதனை	123
5.5	இரு மாதிரிகளின் கூட்டு சராசரிகளின் வித்தியாசத்திற்கான சிறப்பு காண் சோதனை	126

6. சிறப்பு காண் சோதனை (சிறு கூறுகள்)

6.0	அறிமுகம்	134
6.1	புள்ளியியல் அளவை வரையறை	134
6.2	கூட்டுச் சராசரிக்கான சிறப்பு காண் சோதனை	137
6.3	இரண்டு சராசரிகளின் இடையே உள்ள வித்தியாசத்தின் சிறப்பு காண் சோதனை	140
6.4	கை வர்க்க சோதனை	148
6.5	பொருத்துதலின் செம்மை சோதனை (ஈருறுப்பு மற்றும் பாய்சான் பரவல்)	150
6.6	சார்பற்ற தன்மைக்கான சோதனை	155
6.7	முழுமைத் தொகுதி மாறுபாட்டிற்கான சோதனை	161
6.8	F - புள்ளியியல் அளவை : வரையறை	164

7. மாறுபாட்டு பகுப்பாய்வு

7.0	அறிமுகம்	175
7.1	வரையறை	175
7.2	அனுமானங்கள்	176

	7.3	ஒரு வழி பாகுபாடு	176
	7.4	சோதனை வழி முறை	177
	7.5	இரு வழி பாகுபாடு	183
	7.6	இரு வழி பகுப்பாய்விற்கான சோதனை வழிமுறை	184
8.	**காலத்தொடர் வரிசை**		
	8.0	அறிமுகம்	196
	8.1	வரையறை	196
	8.2	காலத்தொடர் வரிசையின் பிரிவுகள்	197
	8.3	மீச்சிறு வர்க்க முறை	206
	8.4	பருவகால மாறுபாடு	211
	8.5	முன்கணிப்பு	216
9.	**பண்புசார் கோட்பாடுகள்**		
	9.0	அறிமுகம்	225
	9.1	குறியீடுகள்	225
	9.2	பிரிவுகள் மற்றும் பிரிவு அலைவெண்கள்	225
	9.3	புள்ளி விவரத்தின் பொருத்தமுடைமை	226
	9.4	பண்புகளின் சார்பற்ற தன்மை	228
	9.5	யூலின் தொடர்புக் (உறவு) கெழு	230
10.	**தீர்மானக் கோட்பாடு**		
	10.0	அறிமுகம்	239
	10.1	அளித்தல்கள்	241
	10.2	நிச்சயமற்ற நிலையில் தீர்மானம் எடுத்தல் (நிகழ்தகவு கொடுக்கப்படாமல் இருக்கையில்)	246
	10.3	இடர்பாட்டு நிலையில் தீர்மானம் மேற்கொள்வது (நிகழ்தகவுடன்)	251
	10.4	தீர்மான மரவடிவ ஆய்வு	255

1. நிகழ்தகவு

1.0 அறிமுகம் :

ஆரம்ப காலத்தில் நிகழ்தகவுக் கொள்கை சூதாட்ட விளையாட்டுகளைச் சார்ந்த கணக்குகளில் பயன்பட்டிருக்கிறது. அதாவது நாணயங்களைச் சுண்டுதல், பகடை எறிதல், சீட்டுக்கட்டிலிருந்து சீட்டுகளை எடுத்தல் போன்றவற்றில் நிகழ்தகவுக் கொள்கைகளைப் பயன்படுத்தியுள்ளனர். ஜெரான் கார்டன் (Jerane Cardon) என்ற இத்தாலிய கணிதவியலார் எழுதிய "விளையாட்டுகளில் வாய்ப்புகள்" என்ற நூல் முதன் முதலாக 1663 இல் வெளியிடப்பட்டது. நிகழ்தகவு என்பது முதலில் விளையாட்டுகளில் உள்ள வெற்றி வாய்ப்புகளைக் கண்டறிவதில் ஆரம்பித்து இப்போது புள்ளியியல் கணிப்புகளின் அடிப்படைக் கருவிகளுள் ஒன்றாக விளங்கி வருகிறது.

தற்போதுள்ள பல புள்ளியியல் நடைமுறைகள், மாதிரிகளைக் கொண்டே முடிவெடுக்க வேண்டியுள்ளதால், அம்முடிவுகளை ஆராய்வதற்கு நிகழ்தகவுக் கொள்கைகளைப் பற்றிய கூர்ந்த அறிவு தேவைப்படுகிறது.

நிகழ்தகவுக் கொள்கையானது சமூக, பொருளாதார, வணிக மற்றும் பிற துறைகளிலுள்ள சிக்கல்களைத் தீர்க்கப் பயன்படுத்தப்படுகிறது. இப்போது நிகழ்தகவுக் கருத்தானது மிக முக்கியத்துவம் வாய்ந்ததாகவும் மேலும் கணிதம் சார்ந்த நிகழ்தகவுக் கருத்துக்கள், சமூகவியலிலும் முடிவெடுக்கும் திறன்சார்ந்த ஆய்வுகளிலும் அடிப்படையாக விளங்கி வருகிறது. குறிப்பிட்டுக் கூற வேண்டுமாயின் நிகழ்தகவுக் கொள்கையே, புள்ளியியல் முடிவெடுத்தல்களில் அடிப்படையாக விளங்குகிறது எனலாம்.

1.1 வரையறைகளும் அடிப்படை விளக்கங்களும் :

நிகழ்தகவுக் கொள்கையில் பல வரையறைகளும், பல சொல் விளக்கங்களும் பயன்படுத்தப் படுகின்றன. அவற்றை இங்குக் காண்போம்.

சமவாய்ப்புச் சோதனை அல்லது ராண்டம் சோதனை (Random experiment) :

ஒரு சோதனையின் முடிவு, வாய்ப்பின் அடிப்படையில் அமைந்து, அம்முடிவை முன்பாகவே கூற முடியாததாயின் அச்சோதனையை சமவாய்ப்புச் சோதனை அல்லது ராண்டம் சோதனை என்கிறோம்.

நாணயங்களைச் சுண்டுதல், பகடை வீசுதல் போன்றவை சமவாய்ப்புச் சோதனைக்கு எடுத்துக்காட்டுகளாகும்.

முயற்சி (Trial) :

சமவாய்ப்புச் சோதனை செய்தலை ‘‘முயற்சி” என்கிறோம்.

விளைவுகள் (Outcomes) :

ஒரு சமவாய்ப்புச் சோதனையின் முடிவுகள் அதன் ‘‘விளைவுகள்” எனப்படும்.

நிகழ்ச்சி (Event) :

ஒரு சமவாய்ப்புச் சோதனையின் ஒரு விளைவு அல்லது பல விளைவுகளின் தொகுப்பு "நிகழ்ச்சி" எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு நாணயத்தைச் சுண்டுவது என்பது ஒரு சமவாய்ப்புச் சோதனை. அதில் தலைவிழுதல் அல்லது பூ விழுதல் என்பது ஒரு நிகழ்ச்சி ஆகும்.

கூறுவெளி (Sample space) :

ஒரு சோதனையில் கருதக்கூடிய முடிவுகள் ஒவ்வொன்றும் "கூறுபுள்ளிகள்" (sample points) எனப்படும். எல்லா கூறு புள்ளிகளையும் கொண்ட அனைத்துக்கணம் "கூறுவெளி" எனப்படும். அது S என்ற எழுத்தால் குறிக்கப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு நாணயத்தைச் சுண்டும் போது கிடைக்கும் கூறுவெளியானது $S = \{ H, T \}$ என்ற கணம். அதில் H, T என்பவை கூறுபுள்ளிகளாகும்.

சரிசமவாய்ப்புள்ள நிகழ்ச்சிகள் (Equally likely events) :

இரண்டு அல்லது அதற்கும் மேற்பட்ட நிகழ்ச்சிகள் ஒவ்வொன்றும் தனித்தனியே நிகழ்வதற்கான வாய்ப்புகள் சரிசமமாக இருக்குமாயின் அவை சரிசமவாய்ப்புள்ள நிகழ்ச்சிகளாகும். எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு நாணயத்தைச் சுண்டும் பொழுது தலை விழுவதும் பூவிழுவதும் சரிசமவாய்ப்புள்ள நிகழ்ச்சிகளாகும்.

ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் (Mutually exclusive events) :

இரண்டு அல்லது அதற்கும் மேற்பட்ட நிகழ்ச்சிகள் ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகளாயின், அவற்றில் ஏதேனும் ஒன்று நடக்கும் சமயத்தில் வேறு எந்த நிகழ்ச்சியும் நடைபெற இயலாது. எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு நாணயத்தைச் சுண்டும் போது தலை அல்லது பூ மட்டுமே விழும். எனவே தலை விழும் நிகழ்ச்சியானது பூ விழும் நிகழ்ச்சியை முற்றிலும் விலக்குகிறது. எனவே இவ்விரண்டு நிகழ்ச்சிகளும் ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் எனப்படும்.

பூரணமான நிகழ்ச்சிகள் (Exhaustive events) :

ஒரு சமவாய்ப்புச் சோதனையில் பெறப்படும் எல்லா விளைவுகளையும் பெற்றிருக்கும் நிகழ்ச்சிகளைப் பூரணமான நிகழ்ச்சிகள் என்கிறோம். எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு பகடையை வீசும் போது கிடைக்கும் எல்லா விளைவுகளும் $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ பூரணமான நிகழ்ச்சிகளாகும். இப்பூரண நிகழ்ச்சியில் கிடைக்கும் கூறுபுள்ளிகளின் எண்ணிக்கை 6 ஆகும்.

எதிர்மறை நிகழ்ச்சிகள் (Complementary events) :

'A நிகழ்கிறது' எனும் நிகழ்ச்சியும் 'A நிகழாது' எனும் நிகழ்ச்சியும் எதிர்மறை நிகழ்ச்சிகள் அல்லது நிரப்பு நிகழ்ச்சிகள் என்று அழைக்கப்படுகின்றன. 'A நிகழாது' என்ற நிகழ்ச்சியை A' அல்லது $\overline{A}$ அல்லது A^c எனக் குறிப்பிடுகிறோம். ஒரு நிகழ்ச்சியும் அதன் எதிர்மறை நிகழ்ச்சியும் ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகளாகும்.

எடுத்துக்காட்டாக ஒரு பகடையை வீசும் போது ஒற்றை எண்களைப்பெறும் நிகழ்ச்சி $\{ 1, 3, 5 \}$ ஆகும். இரட்டை எண்களைப்பெறும் நிகழ்ச்சி $\{2, 4, 6\}$ ஆகும். இவை இரண்டும் எதிர்மறை நிகழ்ச்சிகளாகும்.

சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகள் (Independent events) :

ஒரு நிகழ்ச்சியின் தோற்றம், மற்ற நிகழ்ச்சிகளின் தோற்றத்தைப் பாதிக்காமலிருக்குமானால், அந்நிகழ்ச்சிகள் அனைத்தும் சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகள் எனப்படும். எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு நாணயத்தைச் சுண்டும் பொழுது முதல்முறை “தலை” விழுவதானது, இரண்டாம் முறை மற்றும் மூன்றாம் முறை “தலை” விழுவது முதல் விளைவைச் சார்ந்திராது.

1.2 நிகழ்தகவின் வரையறைகள் :

நிகழ்தகவு இரு வகைப்படும். அவை கணித நிகழ்தகவு (Mathematical probability) மற்றும் புள்ளியியல் நிகழ்தகவு (Statistical probability) என்பதாகும்.

1.2.1 கணித நிகழ்தகவு :

ஒரு நிகழ்ச்சி நடைபெறுவதற்கு முன்னரே, அதாவது அந்நிகழ்ச்சியைக் காண்பதற்கான சோதனை நடத்துவதற்கு முன்பே, அதன் நிகழ்தகவினைக் காண இயலுமாயின் அந்நிகழ்தகவு கணித நிகழ்தகவு எனப்படும். ஒரு சமவாய்ப்புச் சோதனையானது சரிசமவாய்ப்புள்ளதும், ஒன்றையொன்று விலக்கக்கூடியதுமான ‘n’ பூரண முடிவுகளைக் கொண்டுள்ளது என்க. இதில் ‘m’ முடிவுகள் A - என்ற நிகழ்ச்சி நடைபெறுவதற்குச் சாதகமான முடிவுகள் எனில், ***m/n*** என்ற விகிதம் A என்ற நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு எனப்படும் அதை P(A) எனக் குறிப்பிடுகிறோம்.

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{\text{A என்ற நிகழ்ச்சிக்குச் சாதகமான விளைவுகளின் எண்ணிக்கை}}{\text{மொத்த விளைவுகளின் எண்ணிக்கை}}$$

கணித நிகழ்தகவினை ஒரு முந்தைய நிகழ்தகவு (a priori probability) என்றும் கூறுவர். ஏனெனில் நாணயங்களைச் சுண்டுதல், பகடை வீசுதல் போன்ற எடுத்துக்காட்டுகளில் அச்சோதனைகளைச் செய்வதற்கு முன்பாகவே அவற்றின் நிகழ்தகவினைக் கூற இயலும்.

மேற்கூறிய நிகழ்தகவின் வரையறை அதிகம் பயன்படுத்தப்படுகிறது. இருப்பினும் சில சமயங்களில் அவ்வரையறையை கீழ்க்கண்ட காரணங்களால் பயன்படுத்த இயலாது.

1. ஒரு சோதனையின் எல்லா விளைவுகளையும் காண இயலாத போது.
2. கூறுபுள்ளிகள் அல்லது விளைவுகள் ஒன்றுக்கொன்று சார்ந்திருக்கும் போது
3. மொத்த விளைவுகளின் எண்ணிக்கை எண்ணிலடங்காமல் இருக்கும் போது
4. ஒவ்வொரு விளைவும் சரிசமவாய்ப்பைப் பெற்றிராதிருக்கும் போது

கணித நிகழ்தகவில் காணப்படும் சில குறைபாடுகள் பின்வரும் வரையறையில் நீக்கப்படுகின்றன.

1.2.2 புள்ளியியல் நிகழ்தகவு

ஒரு நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவானது அது நடந்த பின்னரே கூற முடியும் எனில் அந்நிகழ்தகவு புள்ளியியல் நிகழ்தகவு எனப்படும்.

ஒரு சோதனையை n முறை செய்யும் போது, A என்ற நிகழ்ச்சியானது m முறை நடைபெறுகிறது எனில் அதன் சார்பு நிகழ்வெண் m/n ஆகும். n இன் மதிப்பு மிக அதிகமாகும் போது, இதன் எல்லை மதிப்பு ஓர் எண்ணைக் குறிக்கும். இவ்வெண் நிகழ்ச்சி 'A' இன் நிகழ்தகவு ஆகும்.

இது $P(A) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{m}{n}\right)$

எனக் குறிப்பிடப்படும்.

இவ்வரையறை நீண்ட கால சோதனையைக் கருத்திற்கொண்டு உருவாக்கப்பட்டதாகும். இவ்வரையறைக்குக் காரணமானவர் வான்மைஸஸ் (Von Mises) என்ற கணிதவியலார் ஆவார்.

ஒரு நாணயம் 10 முறை சுண்டப்பட்டால், நாம் பெறுவது 6 தலை, 4 பூ அல்லது 4 தலை, 6 பூ அல்லது வேறு எந்த முடிவும் நமக்குக் கிடைக்கலாம். இச்சோதனை முடிவுகளில் தலை விழுவதற்கான நிகழ்தகவு சரியாக 0.5 என்று கூறமுடிவதில்லை. ஆனால் கணித நிகழ்தகவின் படி தலைவிழுவதற்கான நிகழ்தகவு 0.5 என்று கூறுகிறோம்.

எனினும் இச்சோதனையை மிக அதிக எண்ணிக்கையில் செய்து பார்க்கும் போது, சோதனையின் முடிவுகளில் தலைவிழுவதும், பூ விழுவதும் ஏறத்தாழ சமஎண்ணிக்கையில் அமையும் என்று எதிர்பார்க்கலாம். அப்போது தான் அதன் நிகழ்தகவு 0.5 என்பதை நெருங்குகிறது என்கிறோம். இவ்வாறு சோதனைகள் நிகழ்த்தியபின் கணக்கிடும் புள்ளியியல் நிகழ்தகவை ஒரு பிந்தைய நிகழ்தகவு (a posteriori probability) என்றும் கூறுவர்.

1.2.3 நிகழ்தகவைக் கோட்பாடுகள் மூலம் அணுகுதல் :

நிகழ்தகவைக் கோட்பாடுகள் மூலம் அணுகும் முறை நவீன முறையாகும். இம்முறை முழுவதும் கணங்களை அடிப்படையாகக் கொண்டதாகும். இது கோல்மோகோரவ் (Kolmogorov) என்ற ரஷ்ய கணிதவியலாளரால் 1933 ஆம் ஆண்டு அறிமுகப்படுத்தப்பட்டது.

நிகழ்தகவுக் கோட்பாடுகள் (Axioms of probability) :

ஒரு சமவாய்ப்புச் சோதனையின் A என்ற நிகழ்ச்சி S இல் உள்ளது என்க. P(A) என்பது நிகழ்தகவானால் அது பின்வரும் மூன்று கோட்பாடுகளை நிறைவு செய்யும். அவை

(1) எந்த ஒரு நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவும் 0 முதல் 1 முடிய உள்ள எண்களுக்கு இடையே அமையும். அதாவது $0 \le P(A) \le 1$

(2) மொத்த கூறுவெளியின் நிகழ்தகவு 1 ஆகும் அதாவது $P(S) = 1$

(3) $A_1, A_2, \ldots$ என்பவை S இல் உள்ள ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகளானால்

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots$$

கணக்குறியீட்டில் நிகழ்தகவு சொற்றொடர்கள் :

$S \Rightarrow$ கூறுவெளி

$\overline{A} \Rightarrow$ A நிகழாது இருத்தல்

$A \cup \overline{A} = S$

$A \cap B = \phi \Rightarrow$ A, B இரண்டு நிகழ்ச்சிகளும் ஒன்றையொன்று விலக்குவன

$A \cup B \Rightarrow$ A நிகழ்தல் அல்லது B நிகழ்தல் அல்லது A, B, இரண்டும் நிகழ்தல்

(A, B இவற்றுள் ஏதேனும் ஒன்றாவது நிகழ்தல்)

$A \cap B$ $\Rightarrow$ நிகழ்ச்சிகள் A, B இரண்டும் நிகழ்தல்

$\overline{A} \cap \overline{B}$ $\Rightarrow$ நிகழ்ச்சிகள் A, B இரண்டும் நிகழாது இருத்தல்

$A \cap \overline{B}$ $\Rightarrow$ A நிகழ்தல், B நிகழாது இருத்தல்

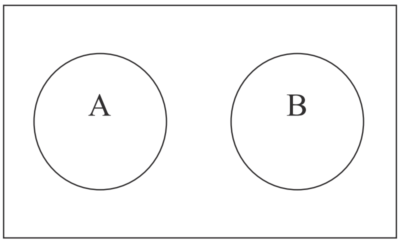
$\overline{A} \cap B$ $\Rightarrow$ A நிகழாது இருத்தல், B நிகழ்தல்

1.3 நிகழ்தகவின் கூட்டல் தேற்றங்கள் :

ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகளுக்கும் ஒன்றையொன்று விலக்கா நிகழ்ச்சிகளுக்குமான நிகழ்தகவுகளின் கூட்டல் தேற்றங்களை இங்கு காண்போம்.

1.3.1 ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகளுக்கான கூட்டல் தேற்றம் :

A மற்றும் B என்பவை ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் எனில் 'A அல்லது B என்ற நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவானது A மற்றும் B ஆகிய நிகழ்ச்சிகளின் தனித்தனி நிகழ்தகவுகளின் கூடுதல் பலனுக்குச் சமமாகும். அதாவது $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. இது நிகழ்தகவுக் கோட்பாடுகளில் தெளிவாகக் கூறப்பட்டுள்ளது.



1.3.2 ஒன்றையொன்று விலக்காத நிகழ்ச்சிகளுக்கான கூட்டல் தேற்றம் :

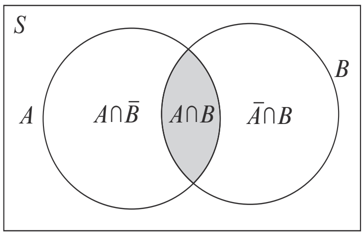
A மற்றும் B என்ற இரு நிகழ்ச்சிகளும் ஒன்றையொன்று விலக்கா நிகழ்ச்சிகள் எனில் அவைகளில் ஏதேனும் ஒன்றாவது அதாவது A அல்லது B அல்லது A, B இரண்டும் நிகழ்வதற்கான நிகழ்தகவு $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ ஆகும்.

நிரூபணம் :

N கூறுபுள்ளிகளுடைய கூறுவெளி S ஐக் கொண்ட ஒரு சமவாய்ப்புச் சோதனையை எடுத்துக் கொள்வோம்.

நிகழ்தகவின் வரையறையின் படி

$$P(A \cup B) = \frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{n(A \cup B)}{N}$$



படத்தில், ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகளுக்கான நிகழ்தகவின் கோட்பாட்டைப் பயன்படுத்திப் பின்வருமாறு எழுதுகிறோம்.

$$P(A\cup B)=\frac{n(A)+n(\overline{A}\cap B)}{N}$$

n $(A\cap B)$ ஐ தொகுதியில் கூட்டிக் கழிக்க கிடைப்பது,

$$=\frac{n(A)+(\overline{A}\cap B)+n(A\cap B)-n(A\cap B)}{N}$$

$$=\frac{n(A)+n(B)-n(A\cap B)}{N}$$

$$=\frac{n(A)}{N}+\frac{n(B)}{N}-\frac{n(A\cap B)}{N}$$

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$$

குறிப்பு :

A,B மற்றும் C என்ற ஏதேனும் மூன்று நிகழ்ச்சிகளுக்கு,

$$P(A\cup B\cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A\cap B) - P(A\cap C) - P(B\cap C) + P (A \cap B \cap C)$$

கூட்டு நிகழ்ச்சிகள் (Compound events) :

இரண்டு அல்லது அதற்கும் மேற்பட்ட நிகழ்ச்சிகள் இணைந்து ஒரே நேரத்தில் நிகழுமானால் அவை கூட்டு நிகழ்ச்சிகள் எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக, இரு நாணயங்களை ஒரே நேரத்தில் சுண்டும் போது "குறைந்தபட்சம் ஒரு தலை" வருவது ஒரு கூட்டு நிகழ்வாகும். ஏனெனில் இதில் இரண்டு சாதாரண நிகழ்வுகள் உள்ளன.

நிகழ்ச்சி A = ஒரு தலை வருதல், அதாவது A = { HT, TH} மேலும்

நிகழ்ச்சி B = இரு தலை வருதல், அதாவது B = {HH}

குறைந்தபட்சம் ஒரு தலை வருதல் = { HT, TH, HH}

அதேபோல், ஒரு பையில் 6 வெள்ளை மற்றும் 6 சிவப்பு பந்துகள் இருக்கின்றன. அப்பையிலிருந்து 2 பந்துகள் எடுக்கப்படுகிறது. அவை இரண்டும் வெள்ளையாக இருக்க உள்ள நிகழ்ச்சியும் ஒன்று வெள்ளை மற்றும் ஒன்று சிவப்பாக உள்ள நிகழ்ச்சியும் கூட்டு நிகழ்ச்சிகளாகும். கூட்டு நிகழ்ச்சிகள், சார்புடைய நிகழ்ச்சிகள் என்றும், சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகள் என்றும் பகுக்கப்படுகின்றன.

சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகள் :

ஒரு நிகழ்ச்சியின் தோற்றம், மற்ற நிகழ்ச்சிகளின் தோற்றத்தைப் பாதிக்காமல் இருக்குமானால், அந்நிகழ்ச்சிகள் அனைத்தும் சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகள் எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு நாணயத்தை இருமுறை சுண்டும் பொழுது, முதல்முறை விழும் முடிவை, இரண்டாம் முறை விழும் முடிவு எந்த விதத்திலும் பாதிக்காது.

ஒரு பையில் 5 வெள்ளை மற்றும் 7 சிவப்புப் பந்துகள் உள்ளன. இரு பந்துகள் ஒன்றன்பின் ஒன்றாக எடுக்கப்படுகின்றன. அவ்வாறு எடுக்கும் போது முதல்பந்தை எடுத்தபின் அப்பந்து மீண்டும் அப்பையிலேயே வைக்கப்படுகிறது. இச்சூழலில் "முதல் பந்து வெள்ளை" மற்றும் "இரண்டாவது பந்து சிவப்பு" என்ற நிகழ்ச்சிகள் சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகளாகும். ஏனெனில் இரண்டாவது பந்து எடுப்பதற்கு முன் அப்பையிலுள்ள பந்துகளின் எண்ணிக்கையில் எந்தவித மாற்றமும் இல்லை.

சார்புடைய நிகழ்ச்சிகள் :

ஒரு நிகழ்ச்சியின் தோற்றம், அடுத்த நிகழ்ச்சியின் தோற்றத்தைப் பாதிக்குமானால், இரண்டாவது நிகழ்ச்சியானது முதல் நிகழ்ச்சியைச் சார்ந்திருக்கும் என்கிறோம். மேற்கண்ட எடுத்துக்காட்டில், முதலில் எடுத்த பந்தை மறுபடியும் பையில் வைக்காமல் இருந்தால் பையில் உள்ள பந்துகளில் ஒன்று குறையும். எனவே அது இரண்டாவது பந்தை எடுக்கும் போது உள்ள வாய்ப்புகளில் மாற்றத்தை ஏற்படுத்துகிறது. அதாவது இரண்டாவதாக எடுக்கும் பந்து சிவப்பாக இருக்க வேண்டுமானால் அது முதலில் எடுக்கப்பட்ட பந்து சிவப்பு அல்லது வெள்ளை நிறப்பந்தைப் பொறுத்ததாகும்.

அதே போல் ஒரு சீட்டுக்கட்டில் ஒரு சீட்டு எடுக்கும் போது திரும்பவும் அதை மீண்டும் அக்கட்டில் வைக்காமல் இருந்தால், இரண்டாவதாக பின்னால் எடுக்கும் சீட்டு முதலில் எடுக்கப்பட்ட சீட்டைச் சார்ந்து உள்ளது.

1.4 நிபந்தனை நிகழ்தகவு (Conditional probability) :

A என்பது ஏதேனும் ஒரு நிகழ்ச்சி மற்றும் $P(A) > 0$ என்க. A, B ஆகிய இரு சார்புடைய நிகழ்ச்சிகள் எனில், A முன்பே ஏற்பட்டுள்ளது எனக்கொண்டு, அதன் பிறகு B ஏற்படுவதற்கான நிகழ்தகவை, B என்ற நிகழ்ச்சிக்கான நிகழ்தகவை, நிபந்தனை நிகழ்தகவு என்கிறோம். இதனை $P(B|A)$ எனக் குறிப்பிடுகிறோம்.

அதாவது A ஐப் பொறுத்த B என்ற நிகழ்ச்சிக்கான நிபந்தனை நிகழ்தகவு

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$ எனப்படுகிறது.

அதேபோல் B ஐப் பொறுத்த A என்ற நிகழ்ச்சியின் நிபந்தனை நிகழ்தகவு

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$ எனப்படுகிறது.

குறிப்பு :

A, B எனும் நிகழ்ச்சிகள் சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகள் ஆயின் $P(A|B) = P(A)$ மற்றும் $P(B/A) = P(B)$ என்றும் ஆகும்.

1.5 நிகழ்தகவின் பெருக்கல் தேற்றங்கள் :

சார்புடைய நிகழ்ச்சிகளுக்கும், சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகளுக்கும் நிகழ்தகவின் பெருக்கல் தேற்றங்களை இங்கு காண்போம்.

1.5.1 சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகளுக்கான நிகழ்தகவின் பெருக்கல் தேற்றம் :

A மற்றும் B ஆகியவை இரு சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகள் எனில் அவ்விரு நிகழ்ச்சிகள் நடைபெறுவதற்கான நிகழ்தகவானது அவற்றின் தனித்தனி நிகழ்தகவுகளின் பெருக்கல் பலனுக்குச் சமமாக இருக்கும். அதாவது $P(A \cap B) = P(A)\ P(B)$

நிரூபணம் :

மொத்தமுள்ள n_1 முடிவுகளில் m_1 முடிவுகள் A என்ற நிகழ்ச்சிக்குச் சாதகமாக உள்ளன என்க.

$$\therefore P(A) = \frac{m_1}{n_1}$$

மொத்தமுள்ள n_2 முடிவுகள் m_2 முடிவுகள் B என்ற நிகழ்ச்சிக்குச் சாதகமாக உள்ளன என்க.

$$\therefore P(B) = \frac{m_2}{n_2}$$

n_1 இல் உள்ள ஒவ்வொரு முடிவையும், n_2 இல் உள்ள ஒவ்வொரு முடிவோடு தொடர்புபடுத்த முடியும். ஆகவே 'A மற்றும் B' என்ற நிகழ்ச்சி நடைபெறுவதற்கான மொத்த வாய்ப்புகளின் எண்ணிக்கை $n_1 n_2$ ஆகும். இவ்வாறே m_1 இல் உள்ள ஒவ்வொரு முடிவையும் m_2 இல் உள்ள ஒவ்வொரு முடிவோடு தொடர்பு படுத்த முடியும். ஆகவே 'A மற்றும் B' என்ற நிகழ்ச்சி நடைபெறுவதற்குச் சாதகமான வாய்ப்புகளின் எண்ணிக்கை $m_1\ m_2$ ஆகும். ஆகவே 'A மற்றும் B' என்ற நிகழ்ச்சி நடைபெறுவதற்கான மொத்த வாய்ப்புகளின் எண்ணிக்கை $n_1 n_2$ ஆகும். இவ்வாறே m_1 இல் உள்ள ஒவ்வொரு முடிவையும் m_2 இல் உள்ள ஒவ்வொரு முடிவோடு தொடர்பு படுத்த முடியும். ஆகவே 'A மற்றும் B' என்ற நிகழ்ச்சி நடைபெறுவதற்குச் சாதகமான வாய்ப்புகளின் எண்ணிக்கை $m_1\ m_2$ ஆகும்.

$$\begin{aligned} \therefore P(A \cap B) &= \frac{m_1\ m_2}{n_1\ n_2} \\ &= \frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2} \\ &= P(A) . P(B) \end{aligned}$$

குறிப்பு :

இத்தேற்றத்தை இரண்டுக்கும் மேற்பட்ட நிகழ்ச்சிகளுக்கும் விரிவாக்கலாம்.

A,B,C……. ஆகியவை சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகள் எனில்,

$P(A \cap B \cap C \ldots\ldots) = P(A).P(B).P(C)\ldots\ldots$

1.5.2 சார்புடைய நிகழ்ச்சிகளுக்கான நிகழ்தகவின் பெருக்கல் தேற்றம் :

A மற்றும் B ஆகியவை இரு சார்புடைய நிகழ்ச்சிகள் எனில் அவை இரண்டும் நடைபெறுவதற்கான நிகழ்தகவு

$$P(A \cap B) = P(A)\ P(B|A)$$

நிரூபணம் :

ஒரு சோதனையில் மொத்தமுள்ள n சமவாய்ப்பு முடிவுகளில் m முடிவுகள் A என்ற நிகழ்ச்சி நிகழ்வதற்குச் சாதகமாக உள்ளன என்க. இந்த n முடிவுகளில், m_1 முடிவுகள் B என்ற நிகழ்ச்சிக்குச் சாதகமாக உள்ளன என்க.

இப்போது 'A மற்றும் B' என்ற நிகழ்ச்சி நடைபெற சாதகமான வாய்ப்புகளின் எண்ணிக்கை m_1 ஆகும்.

$$\therefore P(A \cap B) = \frac{m_1}{n}$$

$$= \frac{m_1}{n} \times \frac{m}{n} = \frac{m\,m_1}{nm}$$

$$= \frac{m}{n} \times \frac{m_1}{m}$$

$$\therefore P(A \cap B) = P(A).P(B|A)$$

குறிப்பு :

A, B, C என்பவை மூன்று சார்ந்த நிகழ்ச்சிகளாயின்

$P(A \cap B \cap C) = P(A).\ P(B|A).\ P(C|A \cap B)$ ஆகும்.

1.6 பேயெஸின் தேற்றம் (Bayes' Theorem) :

முன்பு விளக்கப்பட்ட நிபந்தனை நிகழ்தகவில் ஒரு நிகழ்ச்சியின் நிகழ்வைப் பொறுத்து, மற்றொரு நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவைக் கணிக்க முடிகிறது என்பதைக் கண்டோம்.

இக்கருத்து மேலும் விரிவாக்கப்பட்டு, நமக்குக் கிடைத்த புதிய விவரங்களைக் கொண்டு நிகழ்தகவினை மறுமதிப்பீடு செய்து, நிகழ்தகவைக் காரண காரியங்களுக்கு ஏற்பப் பெறலாம் என்ற கருத்தை அடிப்படையாகக் கொண்டது ஆகும். இவ்வாறு மறுமதிப்பீடு செய்து பெறப்படும் நிகழ்தகவைக் காணும் முறை பேயெஸின் விதி (Bayes' Rule) எனப்படுகிறது.

இக்கருத்து தாமஸ் பேயெஸ் (Thomas Bayes) என்பவரால் 1763இல் உருவாக்கப்பட்டது. இவ்விதிப்படி, முந்தைய நிகழ்தகவைக் (Prior probabilities) கருத்தில் கொண்டு பிந்தைய நிகழ்தகவுகள் (Posteriori probabilities) பெறப்படுகின்றன. எனவே பேயெஸின் நிகழ்தகவுகள், பிந்தைய நிகழ்தகவுகள் என்றும் அழைக்கப்படுகின்றன.

பேயெஸின் தேற்றம் அல்லது பேயெஸின் விதி :

$A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots A_i, \ldots\ldots A_n$ என்பவை ஒன்றையொன்று விலக்கும் n பூரண நிகழ்ச்சிகள். அவற்றின் நிகழ்தகவுகள் முறையே $P(A_1), P(A_2) \ldots, P(A_n)$ என்பதாகும். B என்பது மற்றொரு நிகழ்ச்சி. $P(B|A_i)$ $i = 1,2\ldots, n$ எல்லாம் தெரிந்த நிகழ்தகவுகள் எனில்,

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(B \mid A_i)\,P(A_i)}{\sum_{i=1}^{k} P(B \mid A_i)\,P(A_i)}$$

1.7 வரிசை மாற்றங்கள் மற்றும் சேர்மானங்களுக்கான அடிப்படை விதிகள் (Basic principles of Permutations and Combinations) :

நிகழ்தகவைக் கணக்கிட்டுக் காணும் போது நாம் பயன்படுத்தப் போகும் வரிசைக் காரணிப் பெருக்கல் (Factorial), வரிசை மாற்றங்கள் மற்றும் சேர்மானங்கள் போன்றவற்றின் அடிப்படை விளக்கங்களை இங்கு காண்போம்.

வரிசைக் காரணிப் பெருக்கல் (Factorial) :

தொடர்ச்சியான முதல் n இயல் எண்களின் பெருக்கல் பலனை, வரிசைக் காரணிப் பெருக்கல் n என்கிறோம். அதை n! அல்லது $\angle n$ எனக் குறிக்கிறோம்.

அதாவது $n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times \ldots \times n$

$3! = 3 \times 2 \times 1$

$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1$

$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

மேலும் $5! = 5 \times (4 \times 3 \times 2 \times 1) = 5 \times (4!)$ என எழுதலாம். இதை $n! = n \times (n-1)!$ என எழுதலாம்.

குறிப்பு : $1! = 1$, $0! = 1$.

வரிசை மாற்றங்கள் (Permutations) :

வரிசைமாற்றம் என்பது பொருட்களைப் பல வழிகளில் மாற்றி அமைத்துக் காண்பதாகும். A, B, C என்ற மூன்றில் ஒரே சமயத்தில் இரண்டிரண்டாக அமைத்தலைப் பின்வருமாறு செய்யலாம்.

A B	B A
A C	C A
B C	C B

இவற்றில் இங்கு 6 வகையான வரிசை அமைப்புகளைக் காண்கிறோம். AB என்ற அமைப்பும் BA என்ற அமைப்பும் வேறுவேறான அமைப்புகளாகும்.

மேற்கண்ட வரிசை அமைப்புகளின் எண்ணிக்கையை '3பொருட்களிலிருந்து, 2 பொருட்களின் வரிசைமாற்ற எண்ணிக்கை 6 ஆகும்' என்கிறோம். இதைக் குறியீடாக $3P_2 = 6$ எழுதுகிறோம்.

எனவே n பொருட்களிலிருந்து r பொருட்களின் வரிசைமாற்ற எண்ணிக்கை nPr எனக் குறிப்பிடுகிறோம்.

nPr இன் விரிவாக்கம் கீழ்க்கண்டவாறு அமைகிறது.

$nPr = n(n-1)(n-2) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots[n-(r-1)]$

இதனை வரிசைக் காரணிப் பெருக்கல் குறியீட்டில் எழுதும் பொழுது

$$nPr = \frac{n!}{(n-r)!}$$

எடுத்துக்காட்டாக, $10P_3$ இன் மதிப்பைக் காண, பின்வருமாறு எழுதுகிறோம்.

$$\begin{aligned} {}_{10}P_3 &= 10\,(10-1)\,(10-2) \\ &= 10 \times 9 \times 8 \\ &= 720 \end{aligned}$$

[${}_{10}P_3$ முதலில் 10 இல் தொடங்கி **3** இயல் எண்களை இறங்கு வரிசையில் எழுதிப் பெருக்குக.]

${}_{10}P_3$ ஐ வரிசைக் காரணிப் பெருக்கல் முறையில் சுருக்கும் விதம்,

$$\begin{aligned} {}_{10}P_3 = \frac{10!}{(10-3)!} &= \frac{10\times9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{7\times6\times5\times4\times3\times2\times1} \\ &= 10\times9\times8 \\ &= 720 \end{aligned}$$

குறிப்பு : $nP_0 = 1,\ nP_1 = n,\ nP_n = n!$

சேர்மானங்கள் (Combinations) :

ஒரு சேர்மானம் என்பது பொருட்களின் வரிசை முறையைக் கருதாமல் தேர்ந்தெடுக்கும் வழியாகும்.

எடுத்துக்காட்டாக A, B, C எனும் மூன்று பொருட்களில், இரண்டு பொருட்களை ஒரே சமயத்தில் எடுத்தால், அவை

A B   A C   B C என்பதாக அமையும்.

இங்கு AB, BA எனும் இரண்டும் வேறுவேறன்று, இரண்டும் ஒன்றே. எனவே சேர்மானங்களில் வரிசை அமைப்புகளைக் கருத்தில் கொள்வதற்கில்லை.

இந்த எடுத்துக்காட்டில் '**3** பொருட்களில் **2** பொருட்களை எடுக்கும் போது கிடைக்கும் சேர்மானங்களின் எண்ணிக்கை **3** ஆகும். இதை ${}_3C_2 = 3$ எனக் குறிப்பிடுகிறோம்.

எனவே n பொருட்களிலிருந்து r பொருட்களை எடுக்கும் சேர்மானங்களின் எண்ணிக்கை nCr எனக் குறிக்கப்படுகிறது.

$$nCr = \frac{n\,Pr}{r!}$$ என்றும்

$nCr = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$ எனவும் குறிப்பிடலாம்.

$$_{10}C_3 = \frac{_{10}P_3}{3!} = \frac{10\times9\times8}{1\times2\times3} = 120$$

மேலும் $_8C_4$. $_8C_4 = \frac{8\times7\times6\times5}{1\times2\times3\times4} = 70$

குறிப்பு : $nC_0 = 1, \quad nC_1 = n, \quad nC_n = 1$

எடுத்துக்காட்டாக $_{10}C_3$ இன் மதிப்பைக் காண்போம்.

[$8C_4$ ஐக்கான, தொகுதியில் 8 இல் தொடங்கி 4 இயல் எண்களின் பெருக்கல் பலனை இறங்கு வரிசையில் எழுதி, பகுதியில் 4 இன் வரிசைக் காரணிப் பெருக்கலை எழுதி, பின் சுருக்க வேண்டும்.]

$_{10}C_8$, $_{10}C_2$ இவற்றின் மதிப்பை ஒப்பிடுவோம்.

$$_{10}C_8 = \frac{10\times9\times8\times7\times6\times5\times4\times3}{1\times2\times3\times4\times5\times6\times7\times8} = \frac{10\times9}{1\times2} = 45$$

$$_{10}C_2 = \frac{10\times9}{1\times2} = 45$$

மேற்கண்ட இரண்டிலிருந்து $_{10}C_8 = {}_{10}C_2$ எனக் காண்கிறோம்.
இதை இவ்வாறும் பெறலாம்.

$$_{10}C_8 = {}_{10}C_{(10-8)} = {}_{10}C_2$$

n, r இவற்றிற்கிடையேயுள்ள வித்தியாசம் nCr இல் அதிகமாயிருக்கும் போது மேற்கண்ட முறைப்படி சுருக்கி எளிதில் கணக்கிடலாம்.

சேர்மானத்தில் இவ்விதி $_nC_r = {}_nC_{(n-r)}$ எனப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டாக, $_{200}C_{198}$ ஐக் கணக்கிட,

$_{200}C_{198} = {}_{200}C_{(200-198)} = {}_{200}C_2 = \frac{200\times199}{1\times2} = 19900$ என்று எளிதாக விடையைப் பெறலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக, கிரிக்கெட் அணிக்காக 13 விளையாட்டு வீரர்களுள் 11 வீரர்களைக் கொண்ட ஒரு குழு தேர்ந்தெடுக்கப்பட இருக்கிறது. இதை எத்தனை வழிகளில் தேர்ந்தெடுக்கலாம் ?

13 விளையாட்டு வீரர்களில், 11 வீரர்களை $_{13}C_{11}$ வழிகளில் தேர்ந்து எடுக்கலாம். அதாவது

$$_{13}C_{11} = {}_{13}C_2 = \frac{13\times12}{1\times2} = 78.$$

எடுத்துக்காட்டு 1 :

மூன்று நாணயங்கள் ஒரே சமயத்தில் சுண்டப்படுகின்றன எனில்

(i) தலைகள் விழாமல் இருக்க (ii) ஒரு தலை விழ (iii) இரு தலைகள் விழ (iv) குறைந்தபட்சம் இரு தலைகள் விழ (v) அதிகபட்சம் இருதலைகள் விழ நிகழ்தகவைக் காண்க.

தீர்வு :

மூன்று நாணயங்களைச் சுண்டும் போது ஏற்படும் கூறுவெளி

S = { HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT} ; n(S) = 8

(i) தலைகள் விழாமல் இருக்க A = {TTT}; n(A) = 1

$$\therefore P(A) = \frac{1}{8}$$

(ii) ஒரு தலை விழ B = {HTT, THT, TTH}; n (B) = 3

$$\therefore P(B) = \frac{3}{8}$$

(iii) இரு தலைகள் விழ C = {HHT, HTH, THH}; n(C) = 3

$$\therefore P(C) = \frac{3}{8}$$

(iv) குறைந்தபட்சம் இரு தலைகள் விழ

D = { HHT, HTH, THH, HHH}; n(D) = 4

$$\Re\, P(D) \quad \frac{4}{8} \quad 1/2$$

(v) அதிக பட்சம் இரு தலைகள் விழ

E = { TTT, HTT, THT, TTH,HHT, HTH,THH}

n(E) = 7

$$\therefore P(E) = \frac{7}{8}$$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

இரு பகடைகள் வீசப்படும் போது இரட்டைகள் (இரு பகடையிலும் ஒரே எண்) கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

தீர்வு :

இருபகடைகள் வீசப்படும் போது கூறுவெளியில் உள்ள கூறு புள்ளிகள்

n(S) = 36

இரட்டைகள் வருவதற்கான நிகழ்ச்சி

$A = \{(1,1) , (2,2) , (3,3) , (4,4) , (5,5) , (6,6)\}$

$$\therefore P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

எடுத்துக்காட்டு 3 :

நன்கு குலுக்கப்பட்ட ஒரு சீட்டுக்கட்டிலிருந்து ஒரு சீட்டை எடுக்கும் போது அது (i) A ஆக இருக்க (ii) டைமண்ட் ஆக இருக்க நிகழ்தவு யாது **?**

தீர்வு :

ஒரு சீட்டுக்கட்டில் 52 சீட்டுகள் உள்ளன என்பதை நாம் அறிவோம்

$n(S) = 52$

(i) ஒரு சீட்டுக்கட்டில் நான்கு 'A' உள்ளன. $\therefore n(A) = 4$

$$\Re P(A) \quad \frac{4}{52} \quad \frac{1}{13}$$

(ii) 13 டைமண்ட் சீட்டுகள் ஒரு சீட்டுக்கட்டில் இருக்கின்றன. $\therefore n(B) = 13$

$$\therefore P(B) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

எடுத்துக்காட்டு 4 :

ஒரு பெட்டியில் 5 பச்சை, 6 சிவப்பு, 4 மஞ்சள் நிறப்பந்துகள் உள்ளன. ஒரு பந்து சமவாய்ப்பு முறையில் எடுக்கப்படுகிறது என்றால் அது (i) பச்சை (ii) சிவப்பு (iii) மஞ்சள் (iv) பச்சை அல்லது சிவப்பு (v) மஞ்சள் நிறம் இல்லாமல் இருக்க நிகழ்தகவைக் கண்டுபிடி.

தீர்வு :

மொத்த பந்துகளின் எண்ணிக்கை = 5 + 6 + 4 = 15 பந்துகள்

(i) P (பச்சை நிறப்பந்து) $= \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$

(ii) P (சிவப்பு நிறப்பந்து) $= \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$

(iii) P (மஞ்சள் நிறப்பந்து) $= \frac{4}{15}$

(iv) P (பச்சை அல்லது சிவப்பு நிறப்பந்து) $= \frac{5}{15} + \frac{6}{15} = \frac{11}{15}$

(v) P (மஞ்சள் நிறம் இல்லாமல் இருக்க) $= 1 - P$ (மஞ்சள் நிறப்பந்து)

$$= 1 - \frac{4}{15} = \frac{11}{15}$$

எடுத்துக்காட்டு 5 :

இரு பகடைகள் வீசப்படுகின்றன. கூடுதல் 8 அல்லது 10 ஆக இருக்க நிகழ்தகவு யாது ?

தீர்வு :

கூறுவெளிப் புள்ளிகள் : $n(S)=36$

$A= \{$கூடுதல் 8 கிடைக்க$\}$

$\therefore \quad A= \{(6,2), (5,3), (4,4), (3,5), (2,6)\}; P(A) = \frac{5}{36}$

$B = \{$கூடுதல் 10 கிடைக்க$\}$

$\therefore \quad B = \{(6,4), (5,5) (4,6)\}; \qquad P(B) = \frac{3}{36}$

$A \cap B = \{ \ \} ; P(A \cap B) = 0$

$\therefore$ எனவே இரு நிகழ்ச்சிகளும் ஒன்றையொன்று விலக்குவன.

$$\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$= \frac{5}{36} + \frac{3}{36}$$

$$= \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

எடுத்துக்காட்டு 6 :

இரு பகடைகள் ஒரே சமயத்தில் வீசப்படுகின்றன. எனில் கூடுதல் 6 அல்லது இரு பகடைகளிலும் ஒரே எண் வருவதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

தீர்வு :

$n(S) = 36$

A என்பது கூடுதல் 6 கிடைப்பதற்கான நிகழ்ச்சி

$\therefore \quad A = \{(5,1), (4,2), (3,3), (2,4), (1,5)\}; \qquad P(A) = \frac{5}{36}$

A என்பது இரு பகடைகளிலும் ஒரே எண் கிடைப்பதற்கான நிகழ்ச்சி

$\therefore \quad B = \{(1,1) (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}; \quad P(B) = \frac{6}{36}$

$A \cap B = \{(3,3)\} ; \ P(A \cap B) = \frac{1}{36}$

இங்குள்ள நிகழ்ச்சிகள் ஒன்றையொன்று விலக்குவன அல்ல.

$$
\begin{aligned}
P(A\cup B) &= P(A)+P(B)-P(A\cap I \\
&= \frac{5}{36}+\frac{6}{36}-\frac{1}{36} \\
&= \frac{5+6-1}{36} \\
&= \frac{11-1}{36} \\
&= \frac{10}{36} = \frac{5}{18}
\end{aligned}
$$

எடுத்துக்காட்டு 7 :

ஒரு வேலைக்காக A மற்றும் B என்னும் இருவர் நேர்முகத்தேர்வை மேற்கொள்கின்றனர். A என்பவர் தேர்ந்தெடுக்கப்படுவதற்கான நிகழ்தகவு 1/3, B என்பவர் தேர்ந்தெடுக்கப்படுவதற்கான நிகழ்தகவு 1/2 எனில் (i) இருவரும் (ii) ஒருவர் மட்டும் தேர்ந்தெடுக்கப்படுவதற்கான நிகழ்தகவைக் கண்டுபிடி. (iii) எவரும் தேர்ந்தெடுக்கப்படாமல் இருக்க நிகழ்தகவு யாது **?**

தீர்வு :

$$P(A) = \frac{1}{3},\ P(B) = \frac{1}{2}$$

$$P(\overline{A}) = \frac{2}{3},\ P(\overline{B}) = \frac{1}{2}$$

ஒருவரைத் தேர்ந்தெடுப்பதும், தேர்ந்தெடுக்காமல் இருப்பதும் மற்றவரைப் பாதிக்காது எனில் A, B இரண்டும் சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகளாகும்.

(i) இருவரையும் தேர்ந்தெடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$
\begin{aligned}
P(A\cap B) &= P(A).P(B) \\
&= \frac{1}{3}\times\frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

(ii) ஒருவரை மட்டும் தேர்ந்தெடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு

P (A தேர்ந்தெடுக்கப்படுதல், B தேர்ந்தெடுக்கப்படாமல் இருத்தல்) +

P (A தேர்ந்தெடுக்கப்படாமல் இருத்தல், B தேர்ந்தெடுக்கப்படுதல்)

$$P(A\cap\overline{B})+P(\overline{A}\cap B) = P(A).P(\overline{B}) + P(\overline{A}).P(B)$$
$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{6} + \frac{2}{6}$$
$$= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

iii) இருவரும் தேர்ந்தெடுக்கப்படாமல் இருக்க

$$P(\overline{A}\cap\overline{B}) = P(\overline{A}) . P(\overline{B})$$
$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{3}$$

எடுத்துக்காட்டு 8 :

A , B, C என்னும் மூன்று தொலைக்காட்சி நிகழ்ச்சிகளை நகரின் ஒரு பகுதியில் 2000 குடும்பத்தினர் பார்க்கின்றனர். கீழ்க்கண்ட விவரங்கள் ஓர் ஆய்வின் படி கிடைக்கப்பெற்றன.

1200 குடும்பங்கள் A நிகழ்ச்சியைப் பார்க்கின்றனர்.

1100 குடும்பங்கள் B நிகழ்ச்சியைப் பார்க்கின்றனர்.

800 குடும்பங்கள் C நிகழ்ச்சியைப் பார்க்கின்றனர்.

765 குடும்பங்கள் A மற்றும் B நிகழ்ச்சியைப் பார்க்கின்றனர்.

450 குடும்பங்கள் A மற்றும் C நிகழ்ச்சியைப் பார்க்கின்றனர்.

400 குடும்பங்கள் B மற்றும் C நிகழ்ச்சியைப் பார்க்கின்றனர்.

100 குடும்பங்கள் A, B மற்றும் C நிகழ்ச்சியைப் பார்க்கின்றனர்.

எனில் ஒரு நிகழ்ச்சியையாவது பார்க்கும் குடும்பங்களின் நிகழ்தகவு என்ன ?

தீர்வு :

மொத்த குடும்பங்கள் $n(S) = 2000$

$n(A) = 1200$

$n(B) = 1100$

$n(C) = 800$

$n(A\cap B) = 765$

$n(A\cap C) = 450$

$n(B\cap C) = 400$

$n(A\cap B\cap C) = 100$

முதலில் $n(A\cup B\cup C)$ ஐக் காண வேண்டும்.

$$n(A\cup B\cup C) = n(A) + n(B)+ n(C) - n(A\cap B)-n(A\cap C)- n(B\cap C) + n(A\cap B\cap C)$$

$$= 1200 + 1100 + 800 - 765 - 450 - 400 + 100$$

$$n(A\cup B\cup C) = 1585$$

$$P(A\cup B\cup C) = \frac{n(A\cup B\cup C)}{n(S)}$$

$$= \frac{1585}{2000} = 0.792$$

எனவே சுமார் 79% குடும்பங்கள் ஒன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட நிகழ்ச்சிகளைக் காண்கின்றனர்.

எடுத்துக்காட்டு 9 :

ஒருவர் 20 பொருட்கள் கொண்ட தொகுப்புகளாக விற்பனை செய்கிறார். அத்தொகுப்பில் 12 குறைபாடற்றவை. 8 குறைபாடு உள்ளவை. ஒரு வாடிக்கையாளர் அத்தொகுப்பிலிருந்து 3 பொருட்களை எடுக்கிறார் எனில்,

(i) மூன்றுமே குறைபாடற்றவையாக

(ii) இரண்டு குறைபாடற்றவை, ஒன்று குறைபாடு உள்ளவையாக இருக்க நிகழ்தகவு என்ன ?

தீர்வு :

முதலில் 20 பொருட்களிலிருந்து 3 பொருட்களை எடுக்கும் வழிகள் $20C_3$ ஆகும். அதாவது $n(S) = 20C_3$

i) மூன்று பொருட்களும் குறைபாடற்றவையாக உள்ள நிகழ்ச்சி E_1 என்க.

12 குறைபாடற்ற பொருட்களிலிருந்து 3 பொருட்கள் பெற $_{12}C_3$ வழிகள் உள்ளன.

$$\therefore\ n(E_1)=12C_3$$

$$\therefore P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(S)} = \frac{12C_3}{20C_3}$$

$$= \frac{12\times 11\times 10}{20\times 19\times 18}$$

$$= 0.193$$

ii) இரண்டு பொருட்கள் குறைபாடற்றவையாகவும், ஒரு பொருள் குறைபாடுள்ளவையாகவும் இருப்பதற்கான நிகழ்ச்சி E_2 என்க.

12 பொருட்களில் 2 குறைபாடற்றவையாக இருக்க $_{12}C_2$ வழிகள் உள்ளன.

8 பொருட்களில் 1 குறைபாடு உள்ளதாக இருக்க $_{8}C_1$ வழிகள் உள்ளன.

$$n(E_2) = 12C_2 \,.\, 8C_1$$

$$P(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(S)} = \frac{12C_2 \,.\, 8C_1}{20C_3}$$
$$= \frac{12 \times 11 \times 8 \times 3}{20 \times 19 \times 18}$$
$$= 0.463$$

எடுத்துக்காட்டு 10 :

ஒரு தேர்வுத்தாளில் உள்ள 10 கணக்குகள், தீர்வைக் காண்பதற்கான A,B,C என்னும் மூன்று மாணவர்க்குத் தரப்படுகிறது. A என்பவர் அக்கணக்குகளின் தீர்வைக் காண்பதற்கான நிகழ்தகவு 60% ஆகவும் B என்பவரின் நிகழ்தகவு 40% ஆகவும் C என்பவரின் நிகழ்தகவு 30% ஆகவும் உள்ளது எனில் மூவரும் சேர்ந்து தீர்வு காண்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

தீர்வு :

A என்பவரின் கணக்கின் தீர்வு காண்பதற்கான நிகழ்தகவு = 60%

B என்பவரின் கணக்கின் தீர்வு காண்பதற்கான நிகழ்தகவு = 40%

C என்பவரின் கணக்கின் தீர்வு காண்பதற்கான நிகழ்தகவு = 30%

ஒரு மாணவர் கணக்கின் தீர்வைக் காண்பது என்பதும், அந்த கணக்கிற்கு மற்ற மாணவர் தீர்வு காண்பது என்பதும் சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகளாகும்.

எனவே, $P(A \cap B \cap C) = P(A).\, P(B).\, P(C)$

$$= \frac{60}{100} \times \frac{40}{100} \times \frac{30}{100}$$
$$= 0.6 \times 0.4 \times 0.3$$
$$= 0.072$$

எடுத்துக்காட்டு 11 :

ஒரு சீட்டுக்கட்டில், 2 சீட்டுகள் எடுக்கப்படுகின்றன எனில் அவை ஒரு ராஜா, ஒரு ராணி ஆக இருக்க நிகழ்தகவைக் காண்க.

தீர்வு :

52 சீட்டுகளிலிருந்து 2 சீட்டுகள் எடுக்கப்படும் வழிகள் $n(S) = {}_{52}C_2$

ஒரு ராஜா எடுக்கப்படும் வழிகள் $= {}_4C_1$

ஒரு ராணி எடுக்கப்படும் வழிகள் $= {}_4C_1$

ஒரு ராஜா மற்றும் ஒரு ராணி எடுக்கப்படும் வழிகள் $= {}_4C_1 \cdot {}_4C_1$

அதாவது $n(E) = {}_4C_1 \cdot {}_4C_1$

$$\therefore P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{4C_1 . 4C_1}{52C_2}$$

$$= 4 \times 4 \div \frac{52 \times 51}{1 \times 2}$$

$$= \frac{4 \times 4 \times 2}{52 \times 51}$$

$$= \frac{8}{663}$$

எடுத்துக்காட்டு 12 :

ஒரு பெட்டியில் **4** கருப்பு நிறப் பந்துகளும் **6** வெள்ளை நிறப் பந்துகளும் உள்ளன. **3** பந்துகள் சமவாய்ப்பு முறையில் எடுக்கப்பட்டால் (i) எல்லாம் கருப்பு நிறமாக (ii) எல்லாம் வெள்ளை நிறமாக இருக்க வேண்டிய நிகழ்தகவைக் காண்க.

தீர்வு :

மொத்தமான பந்துகளின் எண்ணிக்கை $= 10$

அவற்றுள் **3** பந்துகளை எடுக்கும் வழிகள் $= {}_{10}C_3$

(i) **3** கருப்பு பந்துகள் கிடைப்பதற்கான வழிகள் $= {}_4C_3$

P (3 கருப்பு நிறப் பந்துகள்) $= \dfrac{4C_3}{10C_3}$

$$= \frac{4 \times 3 \times 2}{1 \times 2 \times 3} \div \frac{10 \times 9 \times 8}{1 \times 2 \times 3}$$

$$= \frac{4 \times 3 \times 2}{10 \times 9 \times 8}$$

$$= \frac{1}{30}$$

(ii) **3** வெள்ளை பந்துகள் கிடைப்பதற்கான வழிகள் $= {}_6C_3$

P (3 வெள்ளை நிறப் பந்துகள்) $= \dfrac{6C_3}{10C_3} = \dfrac{6 \times 5 \times 4}{10 \times 9 \times 8}$

$$= \frac{1}{6}$$

எடுத்துக்காட்டு 13 :

ஒரு பெட்டியில் **5** பச்சை, **3** சிவப்பு நிறப் பந்துகள் உள்ளன. **3** பச்சை நிறப் பந்துக்களை ஒன்றன் பின் ஒன்றாக எடுத்தால் (i) திரும்பவும் அப்பெட்டியில் வைக்காமல் இருக்கும் போது

(ii) திரும்பவும் அப்பெட்டியில் வைத்தபின் கிடைக்கும் நிகழ்தகவைக் காண்க.

தீர்வு :

(i) திரும்ப வைக்காமல் இருக்கும் போது காணும் நிகழ்தகவு

8 பந்துகளில் 3 பந்துகளை எடுக்கும் வழிகள் = $_8C_3$

$$n(S) = {_8C_3}$$

5 பச்சை நிறப்பந்துகளில் 3 பந்துகளை எடுக்கும் வழிகள் = $_5C_3$

P (3 பச்சை நிறப்பந்துகள்) = $\frac{5C_3}{8C_3} = \frac{5\times4\times3}{8\times7\times6} = \frac{5}{28}$

(ii) திரும்ப வைத்த பின் காணும் நிகழ்தகவு

ஒரு பந்தை எடுத்தபின், மறுபடியும் அதே பெட்டியில் திரும்பவும் வைத்து விட்டால் பெட்டியிலுள்ள பந்துகளின் எண்ணிக்கை மாறாது. மேலும் பந்துகளை எடுக்கும் மூன்று நிகழ்ச்சிகளும் சார்பற்றவை. எனவே பச்சை நிறப்பந்தை எடுக்கும் முதல், இரண்டாம் மற்றும் மூன்றாம் முறையும் அதே நிகழ்தகவைக் கொண்டிருக்கும்.

அதாவது பச்சை நிறப்பந்தை எடுக்கும் நிகழ்தகவானது ஒவ்வொரு முறையும் $\frac{5}{8}$ ஆக இருக்கும். எனவே 3 பச்சை நிறப் பந்துகளை எடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$= \frac{5}{8}\times\frac{5}{8}\times\frac{5}{8} = \frac{125}{512}$$

எடுத்துக்காட்டு 14 :

ஒரு பெட்டியில் 5 சிவப்பு மற்றும் 4 வெள்ளை நிறக் கோலிகுண்டுகள் உள்ளன. இரண்டு கோலி குண்டுகள் ஒன்றன் பின் ஒன்றாக திரும்பவும் அதே பெட்டியில் வைக்கப்படாமல் எடுக்கப்படுகின்றன. இரண்டாவது எடுக்கப்படும் கோலிகுண்டு வெள்ளை நிறமாக இருந்து, முதலில் எடுக்கப்படும் கோலிகுண்டும் வெள்ளை நிறமாக இருக்க நிகழ்தகவு என்ன ?

தீர்வு :

முதல் முறை வெள்ளை நிறக் கோலிக்குண்டு கிடைக்கும் நிகழ்ச்சியை w_1 என்போம்.

இரண்டாம் முறை வெள்ளை நிறக் கோலிக்குண்டு கிடைக்கும் நிகழ்ச்சியை w_2 என்போம்.

$$P(w_1) = 4/9 \quad P(w_2) = 3/8$$

இப்போது நாம் காண வேண்டியது

$$P(w_1 / w_2) = \frac{P(w_1 \cap w_2)}{P(w_2)} = \frac{P(w_1).P(w_2)}{P(w_2)}$$

$$= \frac{(4/9)\ (3/8)}{(3/8)}$$

$$= \frac{4}{9}$$

எடுத்துக்காட்டு 15 :

ஒரு பையில் 6 சிவப்பு மற்றும் 8 கருப்பு நிறப்பந்துகள் உள்ளன. மற்றொரு பையில் 7 சிவப்பு மற்றும் 10 கருப்பு நிறப்பந்துகள் உள்ளன. முதலில் ஒரு பை தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டு அதிலிருந்து ஒரு பந்து எடுக்கப்படுகிறது எனில் அப்பந்து சிவப்பு நிறமாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

தீர்வு :

இரு பைகள் அங்கு உள்ளன. அவ்விரு பைகளில் ஒன்றைத் தேர்ந்தெடுக்க நிகழ்தகவு = $\frac{1}{2}$

A என்பது முதல் பையையும் B என்பது இரண்டாவது பையையும் R என்பது சிவப்புநிறப் பந்தையும் குறிக்கட்டும்.

$$\therefore P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$$

A என்ற பையில் 6 சிவப்பு, 8 கருப்பு நிறப்பந்துகள் உள்ளன.

$$\therefore P\ (\text{சிவப்பு நிறப்பந்து}) = \frac{6}{14}$$

A என்ற பையைத் தேர்ந்தெடுத்து அதிலிருந்து சிவப்பு நிறப்பந்தை தேர்ந்தெடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$P(A).\ P(R|A) = \frac{1}{2}\times\frac{6}{14}=\frac{3}{14}$$

அதுபோல B என்ற பையைத் தேர்ந்தெடுத்து அதிலிருந்து சிவப்பு நிறப்பந்தை தேர்ந்தெடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$P(B).\ P(R|B) = \frac{1}{2}\times\frac{7}{17}=\frac{7}{34}$$

இந்நிகழ்ச்சிகள் எல்லாம் ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் ஆகும். எனவே R என்பது சிவப்பு நிறப்பந்தைப் பெறுவதாக இருந்தால் அது A அல்லது B என்ற பையிலிருந்து எடுக்கப்படுவதற்கான நிகழ்தகவு.

$$\begin{aligned} P(R) &= P(A)\,P(R|A) + P(B)\,P(R|B) \\ &= \frac{3}{14} + \frac{7}{34} \\ &= \frac{17\times 3+7\times 7}{238} \\ &= \frac{51+49}{238} \\ &= \frac{100}{238} = \frac{50}{119} \end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 16 :

$P(A\cap B) = 0.3$, $P(A) = 0.6$, $P(B) = 0.7$ எனில், $P(B|A)$, $P(A|B)$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு :

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$= \frac{0.3}{0.6} = \frac{1}{2}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{0.3}{0.7} = \frac{3}{7}$$

எடுத்துக்காட்டு 17 :

ஒரு நகரத்தில் ஆண்களும், பெண்களும் சமமாக **50**% இருக்கிறார்கள். அவர்களில் 20% ஆண்களும், 5% பெண்களும் வேலைகிடைக்காதவர்கள். ஓர் ஆராய்ச்சி மாணவர் வேலை வாய்ப்பு பற்றிய ஆய்விற்காக வேலை கிடைக்காதவர்களை சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுத்து ஆய்வு செய்கிறார். அவ்வாறெனில் அவர் தேர்ந்தெடுப்பது (i) ஆண் (ii) பெண் ஆக இருக்க நிகழ்தகவு என்ன **?**

தீர்வு :

மக்கட்தொகை 50% இல் 20% ஆண்கள் வேலை கிடைக்காதவர்கள்

அதாவது $\frac{50}{100} \times \frac{20}{100} = \frac{10}{100} = 0.10$

மக்கட்தொகை 50% இல் 5% பெண்கள் வேலை கிடைக்காதவர்கள்

அதாவது $\frac{50}{100} \times \frac{5}{100} = \frac{25}{1000} = 0.025$

மேற்கண்ட விவரங்களை அட்டவணையில் பின்வருமாறு குறிப்பிடுவோம்.

	வேலை பெற்றவர்கள்	வேலை கிடைக்காதவர்கள்	மொத்தம்
ஆண்கள்	0.40	0.10	0.50
பெண்கள்	0.475	0.025	0.50
மொத்தம்	0.875	0.125	1.00

ஆண் தேர்ந்தெடுக்கப்படுதலை M என்றும் பெண் தேர்ந்தெடுக்கப்படுதலை F என்றும் கொள்வோம். ஆண், பெண் ஆகியோரில் வேலை கிடைக்காதவர்களை U என்போம். இப்போது,

(i) $P(M \mid U) = \dfrac{P(M \cap U)}{P(U)} = \dfrac{0.10}{0.125} = 0.80$

(ii) $P(F \mid U) = \dfrac{P(F \cap U)}{P(U)} = \dfrac{0.025}{0.125} = 0.20$

எடுத்துக்காட்டு 18 :

ஒரு நிறுவனத்தில், இயக்குனர் குழுவில் இடம் பெறுவதற்காக இரண்டு குழுக்கள் போட்டியிடுகின்றன. முதல் குழு மற்றும் இரண்டாம் குழு அதைப் பெறுவதற்கான நிகழ்தகவுகள் முறையே **0.6** மற்றும் **0.4** ஆகும். முதல் குழு, இயக்குனர் குழுவில் இடம் பெறுவார்கள் என்றால் அவர்கள் புதிய வகை பொருளை அறிமுகப் படுத்துவதற்கான நிகழ்தகவு **0.8** அதே போல் இரண்டாம் குழுவிற்கான நிகழ்தகவு **0.3** அவ்வாறெனில் புதிய வகை பொருளை அறிமுகப்படுத்துவதற்கான நிகழ்தகவு என்ன **?**

தீர்வு :

முதல் குழு, இயக்குனர் குழுவில் இடம் பிடிப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$P(A_1) = 0.6$

இரண்டாம் குழு, இயக்குனர் குழுவில் இடம் பிடிப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$P(A_2) = 0.4$

புதிய வகை பொருளை அறிமுகப்படுத்துவதற்கான நிகழ்தகவு $P(B)$

முதல் குழு இடம் பிடித்து, புதிய வகை பொருளை அறிமுகப்படுத்துவதற்கான நிகழ்தகவு

$P(B|A_1) = 0.8$

இரண்டாம் குழு இடம் பிடித்து, புதிய வகை பொருளை அறிமுகப்படுத்துவதற்கான நிகழ்தகவு

$P(B|A_2) = 0.3$

கூட்டல் விதித் தேற்றத்தின் படி,

புதிய வகை பொருளை அறிமுகப்படுத்துவதற்கான நிகழ்தகவு

P (புதிய வகை பொருள்)

= P(முதல் குழுவும், புதிய வகை பொருளும்)

+ P (இரண்டாம் குழுவும், புதிய வகை பொருளும்)

$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B)$

$= P(A_1)\, P(B|A_1) + P(A_2).P(B|A_2)$

$= 0.6 \times 0.8 + 0.4 \times 0.3$

$= 0.60$

எடுத்துக்காட்டு 19 :

ஒரு நிறுவனத்தில் ஒரு தலைமைப் பதவிக்கு A, B, C என்ற மூவர் போட்டியிடுகின்றனர். அவர்கள் அப்பதவிக்கு தேர்ந்தெடுக்கப்படுவதற்கான தேர்வு விகிதம் முறையே 4:2:3 ஆகும். அப்பதவிக்கு A தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டால் அவர் நிறுவனத்தை ஜனநாயக முறையில் நடத்திச் செல்வதற்கான நிகழ்தகவு **0.3** அதே போல் B என்பவருக்கு **0.5** மற்றும் C என்பவருக்கு **0.8** ஆகும். அந்நிறுவனத்தின் நிர்வாகத்தில் ஜனநாயக முறையை அறிமுகப்படுத்துவதற்கான நிகழ்தகவு யாது **?**

தீர்வு :

A_1, A_2, A_3 என்ற நிகழ்ச்சியில், முறையே A, B, C என்பவர் தேர்ந்தெடுக்கப்படுவதை குறிக்கட்டும். E என்னும் நிகழ்ச்சி அந்த நிறுவனத்தின் நிர்வாகத்தில் ஜனநாயக முறையை அறிமுகப்படுத்துவதைக் குறிக்கட்டும்.

$$P(A_1) = \frac{4}{9} \qquad P(A_2) = \frac{2}{9} \qquad P(A_3) = \frac{3}{9}$$

$$P(E|A_1) = 0.3 \qquad P(E|A_2) = 0.5 \qquad P(E|A_3) = 0.8$$

E என்னும் நிகழ்ச்சி பின்வரும் மூன்று ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகளால் நடைபெறும்.

(i) A என்பவர் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டு ஜனநாயக முறை அறிமுகப்படுத்துவதற்கான நிகழ்ச்சி $A_1 \cap E$ என்க.

(ii) B என்பவர் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டு ஜனநாயக முறை அறிமுகப்படுத்துவதற்கான நிகழ்ச்சி $A_2 \cap E$ என்க.

(iii) C என்பவர் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டு ஜனநாயக முறை அறிமுகப்படுத்துவதற்கான நிகழ்ச்சி $A_3 \cap E$ என்க.

அதாவது $E = (A_1 \cap E) \cup (A_2 \cap E) \cup (A_3 \cap E)$

இவை மூன்றும் வெட்டாக் கணங்கள், எனவே கூட்டல் தேற்ற விதிப்படி,

$$\begin{aligned} P(E) &= P(A_1 \cap E) + P(A_2 \cap E) + P(A_3 \cap E) \\ &= P(A_1)P(E|A_1) + P(A_2)P(E|A_2) + P(A_3)P(E|A_3) \\ &= \frac{4}{9} \times 0.3 + \frac{2}{9} \times 0.5 + \frac{3}{9} \times 0.8 \\ &= \frac{46}{90} \\ &= \frac{23}{45} \end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 20 :

திருகு ஆணிகள் தயாரிக்கும் ஒரு தொழிற்சாலையில், அதன் மொத்த உற்பத்தியில், அங்குள்ள A_1, A_2, A_3 என்ற மூன்று எந்திரங்கள் முறையே 25%, 35% மற்றும் 40% தயாரிக்கும் திறனுடையவை. தயாரிக்கப்பட்ட திருகு ஆணிகளுள், 5%, 4%, 2% திருகு

ஆணிகள் குறைபாடுள்ளவை. ஒரு திருகு ஆணி சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டு அது குறைபாடுள்து என்று கண்டறியப்படுகிறது. அது A_2 என்ற எந்திரத் தயாரிப்பில் இருந்து வருவதற்கான நிகழ்தகவு என்ன ?

தீர்வு :

$P(A_1)$ = P (A_1 என்ற எந்திரம் தயாரிப்பது) = 25%

= 0.25

$P(A_2) = 35\% = 0.35$

$P(A_3) = 40\% = 0.40$

B என்ற நிகழ்ச்சி குறைபாடுள்ள திருகு ஆணியைப் பெறும் நிகழ்ச்சி

$P(B|A_1)$ = P (A_1 என்ற எந்திரத் தயாரிப்பில் பெறப்பட்ட குறைபாடுள்ள திருகு ஆணி)

= 5 % = 0.05

அதுபோல, $P(B|A_2) = 4\% = 0.04$

மற்றும் $P(B|A_3) = 2\% = 0.02$

நாம் $P(A_2 / B)$ ஐ காண வேண்டும்.

பேயெஸின் தேற்றப்படி,

$$P(A_2|B) = \frac{P(A_2)\,P(B/A_2)}{P(A_1)\,P(B/A_1) + P(A_2)\,P(B/A_2) + P(A_3)\,P(B/A_3)}$$

$$= \frac{(0.35)\,(0.04)}{(0.25)(0.05) + (0.35)(0.04) + (0.4)(0.02)}$$

$$= \frac{28}{69}$$

$$= 0.4058$$

எடுத்துக்காட்டு 21 :

ஒரு தொழிற்சாலையில் மோட்டார் சைக்கிள் உற்பத்தி செய்யும் இரண்டு பிரிவுகள் உள்ளன. முதல் பிரிவில் 80% மோட்டார் சைக்கிள்கள் உற்பத்தி செய்ய முடியும். முதல் உற்பத்திப்பிரிவில் 85% மோட்டார் சைக்கிள்கள் மிகச்சிறந்த தரமுடையவை. இரண்டாவது உற்பத்திப்பிரிவில் 65% மோட்டார் சைக்கிள்கள் மிகச்சிறந்த தரமுடையவை.

(i) சிறந்த தரமுடைய மோட்டார் சைக்கிளாக இருந்து முதல் உற்பத்திப் பிரிவிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்படுவதற்கான நிகழ்தகவு என்ன ?

(ii) மிகச் சிறந்த தரமுடைய மோட்டார் சைக்கிளாக இருந்து இரண்டாம் உற்பத்திப் பிரிவிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்படுவதற்கான நிகழ்தகவு என்ன ?

தீர்வு :

A_1 எனும் நிகழ்ச்சி, முதல் உற்பத்திப் பிரிவிலிருந்து மோட்டர் சைக்கிளைப் பெறும் நிகழ்ச்சி என்க. A_2 எனும் நிகழ்ச்சி, இரண்டாம் உற்பத்திப் பிரிவிலிருந்து மோட்டார் சைக்கிளைப்

பெறும் நிகழ்ச்சி என்க. B என்னும் நிகழ்ச்சி முதல் பிரிவிலோ, இரண்டாம் பிரிவிலோ மோட்டார் சைக்கிளைப் பெறும் நிகழ்ச்சி என்க.

முதலில் கிடைத்த விவரங்களின் படி $P(A_1) = 0.80$, $P(A_2) = 0.20$

கூடுதலாகப் பெற்ற விவரங்களின் படி $P(B|A_1) = 0.85$

$P(B|A_2) = 0.65$

இதிலிருந்து நமக்குத் தேவையான மதிப்புகளைப் பின்வரும் அட்டவணையிலிருந்து பெறலாம். கடைசி நிரலில் விடைகளைப் பெறும் வீதம் காட்டப்பட்டுள்ளன.

நிகழ்ச்சி	முந்தைய நிகழ்தகவு $P(A_i)$	நிபந்தனை நிகழ்தகவு $P(B|A_i)$	இணைந்த நிகழ்தகவு $P(A_i \cap B) = P(A_i)\, P(B|A_i)$	பிந்தைய நிகழ்தகவு $P(A_i|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
A_1	0.80	0.85	0.68	$\frac{0.68}{0.81} = \frac{68}{81}$
A_2	0.20	0.65	0.13	$\frac{0.13}{0.81} = \frac{13}{81}$
கூடுதல்	1.00		$P(B) = 0.81$	1

அட்டவணையிலிருந்து, திருத்தப்பட்ட நிகழ்தகவின்படி மிகச்சிறந்த தரமுடைய மோட்டார் சைக்கிள் முதல் உற்பத்தப் பிரிவிலிருந்து பெறப்பட்டுள்ளன என்பதாகக் கூறலாம். (ஏனெனில் $P(A_1) = 80\%$ என்பது, $P(A_2) = 20\%$ ஐ விடப் பெரியது)

கவனக்குறிப்பு :

மேற்கண்ட விடையைப் பின்வருமாறு சரிபார்க்கலாம். அத்தொழிற்சாலையில் 10,000 மோட்டார் சைக்கிள்கள் உற்பத்தி செய்யப்பட்டால் முதல் உற்பத்திப் பிரிவில் தயாராகும் மோட்டார் சைக்கிள்கள் $10{,}000 \times 80\% = 8000$

இரண்டாம் உற்பத்திப்பிரிவில் தயாராகும் மோட்டார் சைக்கிள்கள்

$10000 \times 20\% = 2000$

அவற்றுள் மிகச்சிறந்த தரமுடைய மோட்டார் சைக்கிள்களை முதல் பிரிவில் பெறுவது

$$8000 \times \frac{85}{100} = 6800$$

இரண்டாம் பிரிவில்

$$2000 \times \frac{65}{100} = 1300$$

எனவே முதல் பிரிவில் மிகச்சிறந்த மோட்டார் சைக்கிள்கள் தயாரிப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$= \frac{6800}{6800+1300} = \frac{6800}{8100} = \frac{68}{81}$$

இரண்டாம் பிரிவில் பெறும் நிகழ்தகவு = $\dfrac{1300}{6800+1300} = \dfrac{1300}{8100} = \dfrac{13}{81}$

இவ்வாறு முந்தைய நிகழ்தகவுகளை, கிடைக்கும் தகவல்களைக் கொண்டு திருத்தப்பட்ட நிகழ்தகவுகளைப் பெற முடியும். எனவே பேயெஸின் தேற்றம், நிகழ்தகவின் தரத்தை மேலும் அதிகப்படுத்தும். சக்தி வாய்ந்த முறையாக விளங்குகிறது. அதனாலேயே மேலாண்மைத் துறையில் தீர்மானிக்கும் கொள்கையில் இத்தேற்றம் பயன்படுகிறது.

பயிற்சி – 1

I. சரியான விடையைத் தேர்ந்தெடுக்கவும் :

1. நிகழ்தகவு என்பது

அ) ஒரு விகிதமாக ஆ) ஒரு சதவீதமாக

இ) விகிதசமமாக ஈ) மேற்கூறிய அனைத்தும்

2. நிகழ்தகவு பெறும் மதிப்புகள்

அ) $-\infty$ இலிருந்து $+\infty$ வரை ஆ) $-\infty$ இலிருந்து 1 வரை

இ) 0 இலிருந்து 1 வரை ஈ) -1 இலிருந்து $+1$ வரை

3. இரண்டு நிகழ்ச்சிகள் சார்பற்றவை எனில்

அ) விளைவுகள் ஒவ்வொன்றும் சம வாய்ப்புகளைப் பெற்றிருக்கும்

ஆ) இரண்டிற்கும் பொதுவாக புள்ளியைப் பெற்றிருக்கும்

இ) ஒன்றின் தோற்றம் மற்றவற்றின் தோற்றத்தைப் பாதிக்காது

ஈ) இரண்டும் ஒரே ஒரு புள்ளியைப் பெற்றிருக்கும்

4. சிறப்பு நிகழ்தகவு (classical probability) என்பது

அ) புள்ளியியல் நிகழ்தகவு ஆ) ஒரு முந்தைய நிகழ்தகவு

இ) எம்பெரிக்கல் நிகழ்தகவு ஈ) மேற்கூறிய எதுவுமில்லை

5. ஒரு நாணயமும், ஒரு பகடையும் ஒருங்கே வீசப்படும் போது ஏற்படும் எல்லா விளைவுகளின் எண்ணிக்கை

அ) 7 ஆ) 8 இ) 12 ஈ) 0

6. நன்கு குலுக்கப்பட்ட ஒரு சீட்டுக்கட்டிலிந்து ஒரு "ஸ்பேட்" ராணி பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு

அ) $\frac{1}{13}$ ஆ) $\frac{1}{52}$ இ) $\frac{4}{13}$ ஈ) 1

7. மூன்று பகடைகள் ஒருங்கே வீசப்படுகின்றன அதில் கூடுதல் 3 கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு

அ) 0 ஆ) 1 / 216 இ) 2 / 216 ஈ) 3 / 216

8. 1 முதல் 20 வரையுள்ள முழுக்கள் எண்களில் ஒரு முழு எண் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறது அது 4 ஆல் வகுபடும் எண்ணாக இருக்க வேண்டிய நிகழ்தகவு

அ) $\frac{1}{4}$ ஆ) $\frac{1}{3}$ இ) $\frac{1}{2}$ ஈ) $\frac{1}{10}$

9. A ஐப் பொருத்த B என்ற நிகழ்ச்சிக்கான நிபந்தனை நிகழ்தகவு

அ) $\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ ஆ) $\frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ இ) $\frac{P(A \cup B)}{P(B)}$ ஈ) $\frac{P(A \cup B)}{P(A)}$

10. $P(X) = 0.15$, $P(Y) = 0.25$, $P(X \cap Y) = 0.10$ எனில் $P(X \cup Y)$ இன் மதிப்பு

அ) 0.10 ஆ) 0.20 இ) 0.30 ஈ) 0.40

11. If $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.3$ மேலும் A, B சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகள் எனில், $P(A \cap B)$ என்பது

அ) 0.8 (b) 0.15 (c) 0.08 ஈ) 0.015

12. If $P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.5$, $P(A \cap B) = 0.2$ எனில் $P(B|A)$ என்பது

அ) $\frac{1}{2}$ ஆ) $\frac{1}{3}$ இ) $\frac{4}{5}$ ஈ) $\frac{2}{5}$

13. ஒரு நாணயம் 6 முறை சுண்டப்படுகிறது எனில் கூறுவெளியில் உள்ள மொத்த புள்ளிகள்

அ) 12 ஆ)16 இ) 32 ஈ) 64

14. ஒரு பகடை வீசும் போது ஒற்றை எண்கள் கிடைக்கும் நிகழ்ச்சியும், இரட்டை எண்கள் கிடைக்கும் நிகழ்ச்சியும்

அ) ஒன்றையொன்று விலக்குவன

ஆ) ஒன்றையொன்று விலக்குவன அல்ல

இ) சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகள்

ஈ) சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகள் அல்ல

15. ஒரு பகடை வீசும் போது '2' கிடைக்காமல் இருக்க நிகழ்தகவு

அ) $\frac{1}{3}$ ஆ) $\frac{2}{3}$ இ) $\frac{1}{6}$ ஈ) $\frac{5}{6}$

II. கோடிட்ட இடத்தை நிரப்புக :

16. நிச்சயமான நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு ___________

17. நடக்க இயலாத நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு __________

18. கணிதப் புள்ளியியல் ___________ என்றும் அழைக்கப்படுகிறது.

19. இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட நிகழ்ச்சிகள் ஒரே சமயத்தில் வருவதற்கு ___________ எனப்படும்.

20. A, B இரண்டும் ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகளாயின் $P(A \cup B)$ = _______

21. A, B இரண்டும் சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகளாயின் $P(A \cap B)$ = _________

22. A, B இரண்டும் சார்ந்த நிகழ்ச்சிகளாயின் $P(A|B)$ = ___________

23. A, B இரண்டும் ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகளாயின் $P(A \cap B)$ = _________

24. மூன்று நாணயங்களைச் சுண்டும் பொழுது மூன்றுமே தலைகளாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு _________

25. 3 பகடைகள் வீசப்படும் போது கூடுதல் 17 கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு __________

26. இரு பகடைகள் வீசப்படும் போது கூடுதல் 11 கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு ____________

III. கீழ்க்கண்ட வினாக்களுக்கு விடை தருக :

27. பின்வருவனவற்றை வரையறுக்க.

நிகழ்ச்சி, சரிசமவாய்ப்பு நிகழ்ச்சிகள், ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள், பூரண நிகழ்ச்சிகள், கூறுவெளி.

28. சார்புடைய நிகழ்ச்சிகள், சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகள் என்பவற்றை வரையறுக்க.

29. கணித நிகழ்தகவு – வரையறுக்க.

30. புள்ளியியல் நிகழ்தகவு – வரையறுக்க.

31. நிகழ்தகவு கோட்பாடுகளைக் கூறுக.

32. ஏதேனும் இரு நிகழ்ச்சிகளுக்கான நிகழ்தகவின் கூட்டல் தேற்றத்தை விவரிக்க.

33. நிகழ்தகவின் பெருக்கல் தேற்றத்தைக் கூறுக.

34. நிபந்தனை நிகழ்தகவை வரையறுக்க.

35. பேயெஸின் விதியைக் கூறுக.

36. ஒரு மாதிரியில் உள்ள 30 பொருட்களில் 5 குறைபாடுள்ளவை. அம்மாதிரியிலிருந்து ஒரு பொருளை எடுத்தால் அது (i) குறைபாடுள்ளதாக (ii) குறைபாடற்றதாக இருக்க நிகழ்தகவைக் காண்க.

37. நான்கு நாணயங்கள் ஒருங்கே வீசப்படுகின்றன. அவற்றில் (i) 2 தலைகள் (ii) 3 தலைகள் (iii) குறைந்தபட்சம் 3 தலைகள் விழ நிகழ்தகவைக் கண்டுபிடி.

38. இரு பகடைகள் வீசப்படுகின்றன. அவற்றில் (i) கூடுதல் 10 ஆக (ii) குறைந்த பட்சம் 10 ஆக இருக்க நிகழ்தகவைக் காண்க.

39. மூன்று பகடைகள் ஒருமுறை வீசப்படுகின்றன. அவற்றின் கூடுதல் (i) சரியாக 17 ஆக (ii) அதிகபட்சம் 17 ஆக இருக்க வேண்டிய நிகழ்தகவைக் காண்க.

40. 20 லிருந்து 30 க்குள் ஒரு முழு எண் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறது. அது ஒரு பகா எண்ணாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

41. ஒரு முழு எண் 1 இலிருந்து 50க்குள் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறது. அது 5 இன் மடங்காகவோ அல்லது 7இன் மடங்காகவோ இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

42. ஒரு சீட்டுக்கட்டிலிருந்து ஒரு சீட்டு எடுக்கப்பட்டால் அது ஸ்பேட் அல்லது டைமண்ட் ஆக இருக்க நிகழ்தகவைக் காண்க.

43. ஒரு லீப் வருடத்தில் 53 ஞாயிற்றுக்கிழமைகள் வருவதற்கான நிகழ்தகவு யாது ?

44. லீப் வருடம் அல்லாத சாதாரண ஆண்டில் 53 ஞாயிற்றுக்கிழமைகள் அல்லது 53 திங்கட் கிழமைகள் வருவதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

45. A, B என்பவை ஒன்றையொன்று விலக்காத நிகழ்ச்சிகளாகவும், $P(A)= 1/4$, $P(B) =2/5$, $P(A \cup B) = 1/2$ ஆகவும் இருந்தால் $P(B/A)$ ஐக் காண்க.

46. A, B என்ற இரு சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகளுள் $P(A) = 1/2$, $P(B) = 1/3$ எனில் ஏதேனும் ஒன்று வருவதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

47. A, B என்ற இரு நிகழ்ச்சிகளுள் $P(A) = 1/3 = P(\overline{B})$, $P(B|A) =1/4$ எனில் $P(A|B)$ ஐக் காண்க.

48. ஒரு பெட்டியில் 4 சிவப்பு பேனாக்களும், 5 கருப்பு பேனாக்களும் உள்ளன. 3 கருப்பு நிற பேனாக்களை ஒன்றன் பின் ஒன்றாக எடுத்தால் (i) திரும்ப வைக்கும் முறையில் (ii) திரும்ப வைக்காத முறையில் ஏற்படும் நிகழ்தகவைக் காண்க.

49. ஒரு கொள்கலனில் 5 சிவப்பு, 7 பச்சை நிற பந்துகள் உள்ளன. மற்றொரு கொள்கலனில் 6 சிவப்பு, 9 பச்சை நிற பந்துகள் உள்ளன. ஒரு பந்து ஏதேனும் ஒரு கொள்கலனுக்குள் எடுக்கப்பட்டு, அது பச்சை நிறப் பந்தாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் கண்டுபிடி.

50. ஒரு சீட்டுக்கட்டிலிருந்து இரண்டு சீட்டுகள் எடுக்கப்படுகின்றன. அவை (i) ‘டைமண்ட்’ மற்றும் ‘ஸ்பேட்’ ஆக (ii) ஒரு ராஜா மற்றும் ஒரு ராணி (iii) இரண்டு 'A' கள் இருக்க வேண்டிய நிகழ்தகவைக் காண்க.

51. ஒரு புள்ளியில் கணக்கு A, B என்னும் இரு மாணவர்க்குத் தரப்படுகிறது. A என்பவர் அக்கணக்கின் தீர்வைக் காண்பதற்கான நிகழ்தகவு 1/2, B என்பவர்க்கு 2/3 ஆகிறது எனில் அக்கணக்கு தீர்வு செய்யப்படுவதற்கான நிகழ்தகவைக் கண்டுபிடி.

52. ஒரு பையில் 6 வெள்ளை, 4 பச்சை, 10 மஞ்சள் நிறப் பந்துகள் உள்ளன. இரண்டு பந்துகள் சமவாய்ப்பு முறையில் எடுக்கப்படுகின்றன எனில் இரண்டுமே மஞ்சள் பந்துகளாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

53. ஒரு வகுப்பில் பயிலும் மாணவர்கள் A, B, C என்னும் பாடங்களைப் பயில்கிறார்கள். 21 மாணவர்கள் பாடம் A என்பதையும், 17 பேர் B பாடத்தையும் 10 பேர் C பாடத்தையும் படிக்கிறார்கள். 12 பேர் A மற்றும் B பாடங்களையும், 5 பேர் B மற்றும் C பாடங்களையும், 6 பேர் A மற்றும் C பாடங்களையும் படிக்கிறார்கள். 2 பேர் மூன்று பாடங்களையும் படிக்கிறார்கள் எனில் ஒரு மாணவர் ஏதேனும் ஒரு பாடத்தை மட்டும் படிப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

54. $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.2$, $P(C) = 0.1$ மேலும் A,B,C என்பவை சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகளாகும். அவற்றுள் ஏதேனும் ஒன்று வருவதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

55. A உண்மை பேசுவதற்கான சாதக விகிதம் 3 : 2. B உண்மை பேசுவதற்கான சாதக விகிதம் 5 : 3 இருவரும் ஒரே சமயத்தில் முரண்பட்டுப் பேசுவதற்கான நிகழ்தகவின் சதவீதம் என்ன ?

56. ஓர் அலுவலகத்தில் X, Y மற்றும் Z ஆகியோர் அலுவலகத்தின் தலைமை அதிகாரியாக பொறுப்பேற்பதற்கான வாய்ப்புகள் முறையே 4 : 2 : 3 என்ற விகிதத்தில் அமைந்துள்ளன. அவர்கள் தலைமை அதிகாரிகளாக பொறுப்பேற்பின் போனஸ் திட்டத்தை செயல்படுத்துவதற்கான நிகழ்தகவுகள் முறையே 0.3, 0.5 மற்றும் 0.4 அலுவலகத்தில் போனஸ் திட்டம் அறிமுகப்படுத்தப்பட்டிருப்பின் Z தலைமையதிகாரியாக நியமனம் செய்யப்படுவதற்கான நிகழ்தகவினைக் காண்க.

57. இரும்புக் குழாய்கள் தயாரிக்கும் ஒரு நிறுவனத்தில் மூன்று உற்பத்திப் பிரிவுகள் உள்ளன. அவை முறையே 500, 1000, 2000 குழாய்களைத் தினசரி தயாரிக்கும் திறனுடையவை. முந்தைய அனுபவங்களின்படி அப்பிரிவுகளில் ஏற்படும் குறைபாடுடைய குழாய்களின் நிகழ்தகவுகள் முறையே 0.005, 0.008 மற்றும் 0.010 ஆகும். தினசரி உற்பத்தியில் ஒரு குழாய் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டு குறைபாடு உடையவை என்று காணப்படுமேயானால் அக்குழாய்

(i) முதல் பிரிவு

(ii) இரண்டாம் பிரிவு மற்றும்

(iii) மூன்றாம் பிரிவில் வருவதற்கான நிகழ்தகவு யாது ?

விடைகள்

I.

1. (ஈ)	2. (இ)	3. (இ)	4. (ஆ)	5. (இ)	6. (ஆ)
7. (ஆ)	8. (அ)	9. (ஆ)	10. (இ)	11. (ஆ)	12. (அ)
13.(ஈ)	14.(அ)	15. (ஈ)			

II.

16. 1	17. 0	18. முந்தைய நிகழ்தகவு
19. கூட்டு நிகழ்ச்சிகள்	20. $P(A) + P(B)$	21. $P(A) . P(B)$
22. $\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$	23. 0	24. $\frac{1}{8}$
25. $\frac{3}{216}$	26. $\frac{1}{18}$	

III

36. $\frac{1}{6}, \frac{5}{6}$ 37. $\frac{3}{8}, \frac{1}{4}, \frac{5}{16}$ 38. $\frac{1}{12}, \frac{1}{6}$ 39. $\frac{1}{216}, \frac{3}{216}, \frac{215}{216}$

40. $\frac{2}{11}$ 41. $\frac{8}{25}$ 42. $\frac{1}{2}$ 43. $\frac{2}{7}$ 44. $\frac{2}{7}$

45. $P(A\cap B) = 3/20$; $P(B/A) = 3/5$ 46. $\frac{1}{2}$ 47. $P(A\cap B) = 1/12$ $P(A|B) = 1/8$

48. $\frac{125}{729}, \frac{5}{42}$ 49. $\frac{71}{120}$ 50. $\frac{13}{102}, \frac{8}{663}, \frac{1}{221}$ 51. $\frac{5}{6}$ 52. $\frac{9}{38}$

53. $\frac{8}{27}$ 54. 0.496 55. $\frac{3}{5}\times\frac{3}{8}+\frac{2}{5}\times\frac{5}{8}=\frac{19}{40}=47.5\%$ 56. 6/17

57. (a) $\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{4}{7}$ (b) $\frac{5}{61}, \frac{16}{61}, \frac{40}{61}$

செய்து பார்க்க :

ஒரு நாணயத்தைச் சுண்டும் போது, தலை வருவதற்கான நிகழ்தகவு 0.5 என்று அச்சோதனை செய்யாமலே கூறலாம். இப்போது பின்வரும் சோதனைகளைச் செய்து பார்க்க.

1. ஒரு பிழையற்ற நாணயத்தை எடுத்துக் கொண்டு 10 முறை சுண்டுக. அந்நிகழ்ச்சிகளில் எத்தனை தலைகள் வந்தன என்பதைக் குறித்துக் கொள்க.
2. இப்போது அதே நாணயத்தை 100 முறை சுண்டி, உமது நண்பர் குழாம் உதவியுடன், எத்தனை தலைகள் கிடைத்தன என்பதையும் பதிவு செய்க.
3. மேற்கண்ட மூன்றில் நீவிர் கற்றவற்றைத் தொகுத்து உன் கருத்தைக் கூறுக.

2. சமவாய்ப்பு மாறிகளும் கணித எதிர்பார்த்தலும்

2.0 அறிமுகம் :

ஒரு சோதனையை அதே சூழ்நிலைகளில் பலமுறை செய்யும் போது பெறப்படும் மதிப்புகள் யாவும் ஒரே மாதிரியாக இருக்கும் என்பது ஒரு பொதுவான கருத்தாகும். அச்சோதனையில் தாம் கவனிக்க வேண்டியது ஒரு கருத்தைப் பற்றியதாகவோ, ஒரு பண்பைப் பற்றியதாகவோ இருந்தால் அச்சோதனையின் போது அவற்றிற்குப் பல மதிப்புகள் அளிக்கலாம். இவ்வாறு இப்பண்பிற்கு அளிக்கப்படும் பல மதிப்புகள் மாறுபட்டு வருவதால் அதை மாறி என்று அழைக்கிறோம். மேலும் சோதனையை, அதே சூழ்நிலைகளில் செய்தாலும் மாறிகளுக்கான மதிப்புகள் மாறுபடுவதைக் காண்கிறோம். எனவே, ஒரு சம வாய்ப்புச் சோதனையில் வரும் விளைவுகளைக் (கூறுபுள்ளிகளைக்) கொண்டு, மாறுபட்டு வரும் மதிப்புகளால் ஆன ஒரு கணத்தை அமைக்கிறோம். இவ்வாறு ஒவ்வொரு விளைவிற்கும் (கூறுபுள்ளிக்கும்) ஒரு மெய்யெண் மதிப்பை அளிக்கும் மாறி சமவாய்ப்பு மாறி என்று அழைக்கப்படுகிறது.

மேற்கண்ட விளக்கங்களிலிருந்து ஒவ்வொரு விளைவிற்கும் ஒரு மதிப்பு அளிக்கப்பட்டு, அதற்குரிய நிகழ்தகவும் பெறப்படுகின்றது என்பது வெளிப்படை. எனவே, சமவாய்ப்பு மாறிகளின் மதிப்புகளுடன், அவற்றால் பெறப்பட்ட நிகழ்தகவுகளையும் கொண்ட பட்டியலிடப்பட்ட விவரங்கள் நிகழதகவுப் பரவல் என்று அழைக்கப்படுகிறது.

நிகழ்தகவுப் பரவலில் நிகழ்தகவு திண்மை, நிகழ்தகவு அடர்த்தி, தனித்த மற்றும் தொடர்ச்சியான மாறிகளுக்கான நிகழ்தகவுகள் போன்ற சொற்கள் வழக்கமாகப் பயன்படுத்தப்பட்டு வருகின்றன. இவற்றைப் பற்றி விரிவாகக் காண்பதற்கு முன், சமவாய்ப்பு மாறியின் வரைமுறையும், அதைக் கணக்குகளில் செயல்படுத்தும் முறைகளும் இங்கு தரப்படுகின்றன.

2.1 சமவாய்ப்பு மாறி அல்லது ராண்டம் மாறி (Random variable) :

ஒரு மாறியில் பெறப்படும் எண்கள், ஒரு சமவாய்ப்புச் சோதனையின் விளைவுகளால் பெறப்பட்ட எண்களாக இருந்தால் அது சமவாய்ப்பு மாறி அல்லது ராண்டம் மாறி என்று அழைக்கப்படுகிறது.

சமவாய்ப்பு மாறியை ஒரு சார்பு என்றும் கூறலாம். அது ஒரு சமவாய்ப்புச் சோதனையில் வரையறுக்கப்பட்ட கூறுவெளியில் உள்ள ஒவ்வொரு மதிப்பிற்கும் குறிப்பிட்ட நிகழ்தகவை எடுக்கும் சார்பாகும். பொதுவாக சமவாய்ப்பு மாறிகள் X, Y, Z….., என்னும் பெரிய ஆங்கி எழுத்துக்களால் குறிக்கப்படும். அதே போல் சமவாய்ப்பு மாறிகளின் மதிப்புகள் x, y, z … என்னும் ஆங்கில சிறிய எழுத்துக்களால் குறிக்கப்படும்.

இரு நாணயங்களைச் சுண்டும் போது கிடைக்கும் கூறுவெளி S={HH,HT,TH,TT} என்பதாகும். இதில் X என்பது தலைகள விழுவதைக் குறிக்கும் என்றால், ஒவ்வொரு கூறுபுள்ளிக்கும் நாம் ஓர் எண்ணைத் தந்தால் அதைக் கீழ்கண்ட அட்டவணையில் பின்வருமாறு குறிப்போம்.

கூறுபுள்ளி	HH	HT	TH	TT
X	2	1	1	0

இவ்வாறு இச்சமவாய்ப்புச் சோதனையில், சமவாய்ப்பு மாறி X ஆனது 0, 1, 2 மதிப்புகளைப் பெறுகிறது.

மேற்கண்ட எடுத்துக்காட்டில் சமவாய்ப்பு மாறி முடிவுறு எண்களைக் கொண்டிருக்கிறது. இங்கு ஒவ்வொரு சமவாய்ப்பு மதிப்புகளுக்கும், அதற்குரிய நிகழ்தகவுகள் பின்வருமாறு அட்டவணையில் காட்டப்பட்டுள்ளது.

பொதுவாக ஒவ்வொரு சமவாய்ப்பு மாறி x_i க்கும், அதற்குரிய நிகழ்தகவை $p(x_i)$ அல்லது சுருக்கமாக p_i என்று குறிப்பது வழக்கம்.

X	$x_1 = 0$	$x_2 = 1$	$x_3 = 2$
$p(x_i)$	$p(x_1) = \frac{1}{4}$	$p(x_2) = \frac{2}{4}$	$p(x_3) = \frac{1}{4}$

இந்த அட்டவணையிலுள்ள எல்லா நிகழ்தகவுகளின் கூடுதல் 1 என்பதைக் கவனிக்க.

அதாவது $p(x_1) + p(x_2) + p(x_3) = \frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{1}{4} = 1.$

எனவே சமவாய்ப்பு மாறிகளைக் கொண்ட நிகழ்தகவுப் பரவலில் அதன் ஒவ்வொரு மதிப்பிற்கும், அதற்குரிய நிகழ்தகவுகளையும் அந்நிகழ்தகவுகளின் கூடுதல் 1 என்று அறிகிறோம்.

அது போல 3 நாணயங்கள் சுண்டப்படும் பொழுது, தலைகள் விழுவதற்கான சமவாய்ப்பு மாறி $X = 0$, $X = 1$, $X = 2$, $X = 3$ என்ற மதிப்புகளை ஏற்கிறது. மேலும் அவற்றிற்குரிய நிகழ்தகவுகளின் கூடுதல், அதாவது $\sum p(x_i) = 1$ ஆகிறது.

இரு பகடைகள் உருட்டப்படும் போது கிடைக்கும் கூறுவெளியில், 36 கூறுபுள்ளிகள் உள்ளன. இங்கு X என்பது இரு பகடைகளில் விழும் எண்களின் கூடுதல் என்க. பின் X என்ற சமவாய்ப்புச் சார்பு S இல் வரையறுக்கப்பட்டு $X(i, j) = i + j$ என்ற விதியை உருவாக்குகிறது.

எனவே X என்ற சமவாய்ப்பு மாறி இங்கு 2,3,4……12 என்ற மதிப்புகளை ஏற்கிறது. எனவே, X இன் வீச்சுகள் {2,3,4……12} ஆகும்.

2.1.1 தனித்த சமவாய்ப்பு மாறி அல்லது தொடர்ச்சியற்ற சமவாய்ப்பு மாறி (Discrete random variable) :

X என்ற சமவாய்ப்பு மாறியின் மதிப்புகள் முடிவுறுவதாகவோ எண்ணிடத்தக்க அளவுள்ளதாகவோ இருப்பின், அது தனித்த சமவாய்ப்பு மாறி அல்லது தொடர்ச்சியற்ற சமவாய்ப்பு மாறி என்று அழைக்கப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டாக, 3 நாணயங்கள் சுண்டப்படும் பொழுது, தலை விழுதல் என்பது சமவாய்ப்பு மாறி X ஆனால், அது பெறும் மதிப்புகள் 0,1,2,3 ஆகும். இது ஒரு எண்ணத்தக்க கணமாகும். இவ்வாறான மாறி ஒரு தனித்த மாறி என்று அழைக்கப்படுகிறது.

2.1.2 தொடர் சமவாய்ப்பு மாறி (Continuous random variable) :

X என்ற சமவாய்ப்பு மாறி, இடைவெளியில் குறிப்பிட்ட திட்டமான எண்ணிலடங்கா எந்த மதிப்பையும் எடுக்குமாயின் அது தொடர் சமவாய்ப்பு மாறி என்று அழைக்கப்படுகிறது.

X என்ற தொடர் சமவாய்ப்பு மாறியில் ஒரு தனித்த மதிப்புக்கு நிகழ்தகவு பூச்சியமாகும் என்பதை அறிக. அதாவது $P(X = x) = 0$ எனவே தொடர் சமவாய்ப்பு மாறிகள், இரண்டு திட்டமான இடைவெளிகளுக்கு இடையில் மட்டுமே நிகழ்தகவைக் கொண்டிருக்கும். எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு வகுப்பில் மாணவர்களின் உயரமானது 4 அடிக்கும் 6 அடிக்கும் உட்பட்டது என்பதைச் சமவாய்ப்பு மாறி $X = \{x|4 \le x \le 6\}$ என்று எழுதுகிறோம்.

மின் விளக்கு தொடர்ச்சியாக உழைப்பதற்கான அதிகபட்ச நேரம் 2000 மணிகள் என்றால் அதன் தொடர் சமவாய்ப்பு மாறியை $X = \{x \mid 0 \le x \le 2000\}$ என எழுதலாம்.

2.2 நிகழ்தகவுத் திண்மைச் சார்பு (Probability mass function) :

X என்பது ஒரு தனித்த சமவாய்ப்பு மாறி. அது ஏற்கும் மதிப்புகள் $x_1, x_2, ...x_n$ என்றும் இம்மதிப்புகள் இணைக்கப்படும் ஒவ்வோர் எண்ணும் நிகழ்தகவு $p_i = P(X = x_i), i = 1,2,3\ldots n$ எனப்படும். இச்சார்பானது x_i இன் நிகழ்தகவு என்றும் பின்வரும் நிபந்தனைகளை நிறைவு செய்வதாகவும் இருக்கும்.

(i) $p_i \ge 0$ அதாவது pi எல்லாம் குறையற்ற எண்கள்

(ii) $\sum p_i = p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$

அதாவது எல்லா நிகழ்தகவுகளின் கூடுதல் 1 ஆகும்.

இச்சார்பு p_i அல்லது $p(x_i)$ என்பது தனித்த மாறி X இன் நிகழ்தகவுத் திண்மைச் சார்பு என்று அழைக்கப்படுகிறது.

(x, p (x)) என்ற வரிசைச் சோடிகளால் ஆன கணம், X என்ற சமவாய்ப்பு மாறியின் நிகழ்தகவு பரவல் என்று அழைக்கப்படுகிறது.

குறிப்பு :

நிகழ்தகவு பரவல் என்ற கருத்து அலைவெண் பரவல் என்ற கருத்தைப் போன்றதே. அலைவெண் பரவலில், எவ்வாறு மொத்த அலைவெண்கள் பல பிரிவு இடைவெளிகளுக்குப் பங்கீடு செயல்பட்டிருக்கிறதோ, அது போல நிகழ்தகவுப் பரவலில் மொத்த நிகழ்தகவான 1 பகுதி என்பது, சமவாய்ப்பு மாறியேற்கும் பல்வேறு மதிப்புகளுக்குரிய நிகழ்தகவுகளால் பங்கிடப்பட்டுள்ளன.

இது அட்டவணையில் கீழ்கண்டவாறு எழுதப்படுகிறது.

X	x_1	x_2	x_3	....	x_n
$P(X = x)$	$P(x_1)$	$P(x_2)$	$P(x_3)$	....	$p(x_n)$

2.2.1 தனித்த மாறிக்கான நிகழ்தகவுப் பரவல் (Discrete probability distribution) :

ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி தனித்த மாறியானால், பொதுவாக அது பரவலும் தனித்த மாறியாகவே இருக்கும். ஒரு தனித்த சமவாய்ப்பு மாறி X க்கு, பரவல் சார்பு அல்லது குவிப் பரவல் சார்பு F(x) எனப்படும். அது $F(x) = P(X \leq x)$; $-\infty < x < \infty$ என்று எழுதப்படுகிறது.

எனவே தனித்த மாறிக்கான நிகழ்தகவுப் பரவலில் எண்ணக்கூடிய அளவிலான புள்ளிகள் $x_1, x_2, \ldots$ ஆகவும், அவற்றின் நிகழ்தகவுகள் p_i ஆகவும் இருக்க,

$$F(x_i) = \sum_{x_i < x} p_i, \; i = 1, 2, \ldots\ldots\ldots n$$ என்று குறிப்பிடப்படுகிறது.

குறிப்பு :

தனித்த மாறிக்கான நிகழ்தகவுப் பரவலில், $F(x_j) - F(x_{j-1}) = p(x_j)$ ஆகும்.

2.2.2 நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு (Probability density function) :

X என்ற தொடர் சமவாய்ப்பு மாறியின், நிகழ்தகவு f (x) அடர்த்திச் சார்பாக இருக்க வேண்டுமாயின்,

(i) $f(x) \geq 0 \quad -\infty < x < \infty$

(ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ என்ற பண்புகளைப் பெற்றிருக்க வேண்டும்.

குறிப்பு :

தனித்த மாறியில் குறிப்பிட்ட ஒரு புள்ளியில் அதாவது P (x = a) என்பது பூச்சிமாக இருக்க வேண்டியதில்லை. ஆனால் தொடர் சமவாய்ப்பு மாறியில் ஒரு புள்ளியில் காணும் நிகழ்தகவு எப்போதும் பூச்சியத்தைத் தரும்.

அதாவது $$P(X = a) = \int_a^a f(x)\,dx = 0$$

எனவே $P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b)$ என்று எழுதலாம்.

f (x) என்ற நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்புக்கு, சமவாய்ப்பு மாறி X என்பது (a, b) என்ற இடைவெளியில் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

தொடர் சமவாய்ப்பு மாறியின் பரவல் சார்பு (Distribution function for continuous random variable) :

X ஒரு தொடர் சமவாய்ப்பு மாறி, அதன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு f(x) எனில் அதன் பரவல் சார்பு F(x) ஆனது

(i) $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = P(X \leq x)$; $-\infty < x < \infty$

(ii) $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx = P(a \le X \le b)$ ஆகும்.

2.3 பரவல் சார்பின் பண்புகள் :

X என்பது தனித்த அல்லது தொடர் சமவாய்ப்ப மாறி எனில் பரவல் சார்பின் பண்புகள் பின்வருமாறு.

(i) F (x) என்பது X இல் குறைவற்ற சார்பு.

(ii) $0 \le F(x) \le 1$, $-\infty < x < \infty$

(iii) $F(-\infty) = \underset{x\to-\infty}{\text{limit}} F(x) = 0$

(iv) $F(\infty) = \underset{x\to\infty}{\text{limit}} F(x) = 1$

(v) X என்ற தொடர் சமவாய்ப்பு மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு f(x) ஆகவும், குவிவுபரவல் சார்பு F(x) ஆகவும் இருந்தால் $F'(x) = f(x)$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி பின்வரும் நிகழ்வுப்பரவலைப் பெற்றிருக்கிறது.

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8
P (x)	a	3a	5a	7a	9a	11a	13a	15a	17a

(1) a இன் மதிப்பைக் கண்டுபிடி.

(2) பின்வருவனவற்றைக் காண்க. (i) $P(x < 3)$ (ii) $P(x \le 3)$ (iii) $P(x > 7)$
(iv) $P(2 \le x \le 5)$, (v) $P(2 < x < 5)$

(3) குவிவு அலைவெண் பரவலைக் காண்க.

தீர்வு :

1. p_i என்பது X என்ற சமவாய்ப்பு மாறியின் நிகழ்தகவு திண்மைச் சார்பாதலால், $\sum p_i = 1$

$\therefore a + 3a + 5a + 7a + 9a + 11a + 13a + 15a + 17a = 1$

$81a = 1$

$a = 1/81$

2. (i) $P(x < 3) = P(x = 0) + P(x = 1) + P(x = 2)$

$= a + 3a + 5a$

$= 9a$

$= 9\left(\frac{1}{81}\right)$

$= \frac{1}{9}$

(ii) $P(x \leq 3) = P(x = 0) + P(x = 1) + P(x = 2) + P(x = 3)$

$= a + 3a + 5a + 7a$

$= 16a$

$= \frac{16}{81}$

(iii) $P(x > 7) = P(x = 8)$

$= 17a$

$= \frac{17}{81}$

(iv) $P(2 \leq x \leq 5) = P(x = 2) + P(x = 3) + P(x = 4) + P(x = 5)$

$= 5a + 7a + 9a + 11a$

$= 32a$

$= \frac{32}{81}$

(v) $P(2 < x < 5) = P(x = 3) + P(x = 4)$

$= 7a + 9a$

$= 16a$

$= \frac{16}{81}$

3) நிகழ்தகவுப் பரவல் சார்பு பின்வருமாறு :

$X = x$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$F(x) = P(X \leq x)$	a	4a	9a	16a	25a	36a	49a	64a	81a
(or) F (x)	$\frac{1}{81}$	$\frac{4}{81}$	$\frac{9}{81}$	$\frac{16}{81}$	$\frac{25}{81}$	$\frac{36}{81}$	$\frac{49}{81}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{81}{81} = 1$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

இரு பகடைகள் வீசப்படும் போது '**6**' என்ற எண் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவுப் பரவலைக் காண்க.

தீர்வு :

இரு பகடைகள் வீசப்படும் போது கிடைக்கும் மொத்த கூறுபுள்ளிகள் **36** ஆகும்.

X என்பது பகடையை வீசும் போது கிடைக்கும் **6** என்ற எண்களின் எண்ணிக்கை என்றால், X இன் மதிப்புகள் 0,1,2 என்பதைப் பெறும்.

A என்பது **6** என்ற எண் கிடைப்பதையும் $\overline{A}$ என்பது **6** கிடைக்காமல் இருப்பதற்கான நிகழ்ச்சியையும் குறிக்கட்டும்.

இதிலிருந்து '**6**' கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு $P(A) = \frac{1}{6}$

'**6**' கிடைக்காமல் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $P(\overline{A}) = \frac{5}{6}$

$$\therefore P(x = 0) = P(\overline{A}, \overline{A})$$
$$= P(\overline{A}) . P(\overline{A})$$
$$= \frac{5}{6} . \frac{5}{6}$$
$$= \frac{25}{36}$$

ஒரு **6** மட்டும் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$P(x = 1) = P(A, \overline{A}) \text{ அல்லது } P(\overline{A}, A)$$
$$= P(A) . P(\overline{A}) + P(\overline{A}) . P(A)$$
$$= \frac{1}{6} . \frac{5}{6} + \frac{5}{6} \quad \frac{1}{6}$$
$$= \frac{5}{36} + \frac{5}{36}$$
$$= \frac{10}{36}$$
$$= \frac{5}{18}$$

இரண்டிலும் **6** கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$P(x = 2) = P(A, A)$$
$$= P(A) . P(A)$$
$$= \frac{1}{6} . \frac{1}{6}$$
$$= \frac{1}{36}$$

எனவே X இன் நிகழ்தகவுப் பரவல்

X = x	0	1	2
P (X = x)	$\frac{25}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{1}{36}$

எடுத்துக்காட்டு 3 :

ஒரு கொள்கலனில் 6 சிவப்பு மற்றும் 4 வெள்ளை பந்துகள் உள்ளன. 3 பந்துகள் சமவாய்ப்பு முறையில் எடுக்கப்படுகின்றன. வெள்ளைப் பந்துகள் பெறும் எண்ணிக்கையைப் பொறுத்து நிகழ்தகவுப் பரவலைப் பெறுக.

தீர்வு :

கொள்கலனில் உள்ள மொத்த பந்துக்களின் எண்ணிக்கை 10

X என்பது வெள்ளைப் பந்துகள் எடுக்கப்படும் எண்ணிக்கையைக் குறிக்கட்டும்.

3 பந்துகள் எடுக்கப்பட்டால் X பெறும் மதிப்புகள் X= 0, 1, 2, 3 ஆகும். மொத்தமுள்ள 10 பந்துகளிலிருந்து 3 வெள்ளைப் பந்துகளை எடுப்பது பின்வரும் சேர்மானங்களில் அமையும்.

P (வெள்ளை இல்லை, 3 சிவப்பு பந்துகள்) $= \dfrac{4C_0\, 6C_3}{10C_3} = \dfrac{1\times 120}{720} = \dfrac{5}{30}$

P (1 வெள்ளை, 2 சிவப்பு) $= \dfrac{4C_1 . 6C_2}{10C_3} = \dfrac{15}{30}$

P (2 வெள்ளை, 1 சிவப்பு) $= \dfrac{4C_2\, 6C_1}{10C_3} = \dfrac{9}{30}$

P (3 வெள்ளை, சிவப்பு இல்லை) $= \dfrac{4C_3\, 6C_0}{10C_3} = \dfrac{1}{30}$

எனவே X என்ற மாறியின் நிகழ்தகவுப் பரவல்

X = x	0	1	2	3
P (X = x)	$\frac{5}{30}$	$\frac{15}{30}$	$\frac{9}{30}$	$\frac{1}{30}$

2.4 நுண்கணிதத்தின் அடிப்படை செயல்கள் பற்றிய ஓர் அறிமுகம் (An introduction to elementary calculus):

தொடர் சமவாய்ப்பு மாறியில் அமைந்த கணக்குகளுக்குத் தீர்வு காண்பதற்கு முன், நுண் கணிதத்தில் **(calculus)** உள்ள வகையிடல் **(Differentiation)** மற்றும் தொகையிடல் **(Integration)** என்பவை பற்றிய அடிப்படைக் கருத்துக்களை நாம் தெரிந்து கொள்ள வேண்டியிருக்கிறது.

எனவே, இப்பகுதியில் நுண்கணிதத்தைப் பயன்படுத்திச் செய்யக்கூடிய கணக்குகளுக்கு ஏற்ப, நுண்கணிதத்தைப் பற்றிய சில விளக்கங்களும், சூத்திரங்களும் எளிய முறையில் தரப்படுகின்றன.

2.4.1 வகையிடல் (Differentiation) :

1. சார்பின் மதிப்பு என்பது மிகச் சரியான மதிப்பாகும். f(x) என்ற சார்பிற்கு x = a என்று பிரதியீட்டுக் கிடைக்கக் கூடிய ாா்பின் மதிப்பை f(a) = k என்று எழுதுகிறோம்.

2. எல்லை மதிப்பு என்பது தோராயமான மதிப்பாகும். ஆனால் இம்மதிப்பு மிகச் சரியான மதிப்பை மிகவும் நெருங்கியிருக்கும் மதிப்பாகும். மிகச் சரியான மதிப்பு 4 எனக் கொள்க. நாம் பெறும் எல்லை மதிப்பானது 4.00000000001 ஆகவோ, 3.999999994 ஆகவோ இருக்கும். இங்கு மிகச் சரியான மதிப்பும், எல்லை மதிப்பும் ஏறத்தாழ சமமாகவே இருப்பதைக் காண்கிறோம். எனவே பல சமயங்களில் சிக்கலான கணக்குகளுக்கு நாம் எல்லை மதிப்புகளைப் பயன்படுத்துகிறோம். f(x) என்ற சார்பில் x என்பது 2ஐ நோக்கி மிக நெருங்கிச் சென்றால் l என்ற எண் கிடைக்கும் என்பதைக் குறியீடாக பின்வருமாறு எழுதுகிறோம்.

$$\underset{x\to 2}{\text{limit}}\ f(x) = f(2) = l$$

3. எல்லை மதிப்புகளில், ஒரு சிறப்பான எல்லை மதிப்பான $\underset{h\to 0}{\text{limit}} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ என்பது இருக்குமேயானால், அந்த எல்லை x ஐப் பொருத்த f என்ற சார்பின் வகைக்கெழு என்கிறோம். அதனை $f'(x)$ என்று குறிப்பிடுகிறோம்.

4. வகையிடலில் சில விதிகள் :

   (i) மாறிலியின் வகைக்கெழு பூச்சியம். அதாவது $f'(c)=0$, c என்பது ஒரு மாறிலி.

   (ii) u என்பது x இன் சார்பு, k என்பது மாறிலி, மற்றும் வகையிடலைக் குறிக்க ′(dash) என்ற குறியை இடுவோம் எனில் $[ku]' = k[u]'$

   (iii) $(u \pm v)' = u' \pm v'$

   (iv) $(uv)' = u'v + uv'$

   (v) $\left[\dfrac{u}{v}\right]' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

5. முக்கியமான சூத்திரங்கள் :

   (i) $(x^n)' = nx^{n-1}$

   (ii) $(e^x)' = e^x$

   (iii) $(\log x)' = \dfrac{1}{x}$

எடுத்துக்காட்டு 4 :

பின்வருவனவற்றிற்கு எல்லை மதிப்புகளைக் காண்க :

(i) $\underset{x\to 2}{\text{limit}} \dfrac{x^2+5x}{x+2}$ (ii) $\underset{x\to 1}{\text{limit}} \dfrac{x^2-1}{x-1}$

தீர்வு :

(i) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+5x}{x+2}=\dfrac{(2)^2+5(2)}{2+2}=\dfrac{4+10}{4}=\dfrac{14}{4}=\dfrac{7}{2}$

(ii) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\dfrac{1^2-1}{1-1}=\dfrac{0}{0}$.இது ஒரு தீர்மானிக்க முடியாத எண்.

எனவே முதலில் கோவையை காரணிப்படுத்திச் சுருக்கிய பின் அதே எல்லையை அளிக்க, எல்லை மதிப்பை நாம் பெறலாம்.

$$\therefore \frac{x^2-1}{x-1}=\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)}=x+1$$

$$\therefore \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)=1+1=2$$

எடுத்துக்காட்டு 5 :

பின்வருவனவற்றை x ஐப் பொருத்து வகையிடுக.

(i) $x^{12}+7$ (ii) (x^4+4x^2-5) (iii) $(x^3)(e^x)$ (iv) $\dfrac{x^2+1}{x-5}$

தீர்வு :

(i) $y = x^{12}+7$ என்க

$\therefore \dfrac{dy}{dx} = 12x^{12-1}+0 = 12x^{11}$

(ii) $y = x^3+4x^2-5$

$y' = 4x^3+4(2x)-0$

$= 4x^3+8$

(iii) $y = x^3e^x$

$(uv)' = u'v+uv'$

$= [x^3]'(e^x)+(x^3)[e^x]'$

$= 3x^2e^x+x^3e^x$

$= e^x(3x^2+x^3)$

(iv) $y = \dfrac{x^2+1}{x-5}$. $\left[\dfrac{u}{v}\right]'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{[x^2+1]'(x-5)-(x^2+1)[x-5]'}{(x-5)^2}$$

$$= \frac{[2x](x-5)-(x^2+1)[1]}{(x-5)^2}$$

$$= \frac{2x^2-10x-x^2-1}{(x-5)^2}$$

$$= \frac{x^2-10x-1}{(x-5)^2}$$

2.4.2 தொகையிடல் (Integration) :

தொகையிடல் என்பது, வகையிடல் என்பதின் எதிர்மறைச் செயலாகும். அதாவது x^3 இன் வகையீட்டுக் கெழு $3x^2$ எனில் $3x^2$ இன் தொகை x^3 ஆகும். இவற்றைப் பின்வருமாறு குறியீட்டில் எழுதலாம்.

$$\frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2 \qquad \Rightarrow 3\int x^2 dx = x^3$$

அது போல

$$\frac{d}{dx}(x^8) = 8x^7 \qquad \Rightarrow 8\int x^7 dx = x^8$$

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x \qquad \Rightarrow \int e^x dx = e^x$$

குறிப்பு :

வகைப்படுத்தும் போது மாறிலிகள் பூச்சியமாகின்றன. ஆனால் எதிர்மறைச் செயலான தொகையிடலில், மாறிலியின் மதிப்பு தெரியாவிட்டால் அதைச் சேர்க்க இயலாது. எனவே தொகையிடும் போது கிடைக்கும் மதிப்புடன் C என்ற மாறிலியைச் சேர்க்கிறோம்.

எனவே மேற்கண்ட எடுத்துக்காட்டுகளை $\int e^x dx = e^x + c$, $\int 8x^7 dx = x^8 + c$ என்று எழுதுவது வழக்கம்.

இவ்வாறு கிடைக்கும் தொகைகள் அறுதியற்ற தொகைகள் அல்லது வரையற்ற தொகைகள் (indefinite integrals) என்று அழைக்கப்படுகின்றன.

தொகையிடலில் உள்ள முக்கிய விதிகளும், சூத்திரங்களும் :

(i) $\int k \; dx = kx$

(ii) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$

(iii) $\int e^x dx = e^x$

(iv) $\int \frac{1}{x} dx = \log x$

(v) $\int (u \pm v) dx = \int u \; dx \pm \int v \; dx$

எடுத்துக்காட்டு 6 :

x ஐப் பொருத்து பின்வருவனவற்றிற்குத் தொகை காண்க.

(i) $\int x^6 dx = \frac{x^{6+1}}{6+1} = \frac{x^7}{7} + c$

(ii) $\int x^{-5} dx = \frac{x^{-5+1}}{-5+1} = \frac{x^{-4}}{-4} = -\frac{1}{4}\frac{1}{x^4} = -\frac{1}{4x^4} + c$

(iii) $\int \frac{1}{x} dx = \log x + c$

(iv) $\int \sqrt{x}\, dx = \int x^{1/2} dx = \frac{x^{1/2+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} x^{3/2} + c$

(v) $\int (x^4 + 2x^2 + 4x + 8)\, dx = \frac{x^5}{5} + 2\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2} + 8x + c$

(vi) $\int (e^x + x^4 + 1/x^3 + 10)\ dx = e^x + x^5/5 - 1/2x^2 + 10x + c$

மேலே எடுத்துக்காட்டுகளுடன் விளக்கப்பட்ட தொகைகள் அறுதியற்ற தொகைகள் (indefinite integrals) அல்லது வரையற்ற தொகைகள் எனப்படும். வரையறுத்த தொகைகள் என்னும் தொகைகளுக்கு கீழ் எல்லையும், மேல் எல்லையும் உண்டு.

$\int f(x)\ dx$ என்பது ஒரு வரையற்ற தொகையாகும். அதே சார்புக்குத் தொகைகண்டு அதை ஒரு வரையறைக்குள் a, b என்ற எல்லைக்குள் அமைத்தால் அது வரையறுத்த தொகை(definite integral) எனப்படும்.

அதாவது $\int_a^b f(x)\ dx = k$ (ஒரு நிலையெண்) என்பது ஒரு வரையறுத்த தொகையாகும். a என்பது கீழ் எல்லை எனவும் b என்பது மேல் எல்லை எனவும் கூறப்படும்.

வரையறுத்த தொகையின் மதிப்பைக் காண பின்வரும் விதிமுறையைப் பயன்படுத்துகிறோம்.

$\int f(x)\, dx = F(x)$ எனில்

$\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a)$ ஆகும்.

ஆசிரியர்க்கும், மாணவர்க்கும் ஒரு முக்கிய குறிப்பு :

புள்ளியியல் கணக்குகளைப் பொறுத்த அளவில் வகையிடல் மற்றும் தொகையிடல் முறைகளில் எளிய பல்லுறுப்புக் கோவைகளால் ஆன சார்புகளே பயன்படுத்தப்பட வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 7 :

மதிப்பிடுக :

(i) $\int_0^4 3x^2 dx$ (ii) $\int_1^3 x^3 dx$ (iii) $\int_2^5 x\ dx$

தீர்வு :

(i) $\int_0^4 3x^2 dx = \left[\frac{3x^3}{3}\right]_0^4 = [x^3]_0^4$

$= 4^3 - 0^3 = 64$

(ii) $\int_1^3 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_1^3$

$= \frac{1}{4}[x^4]_1^3$

$= \frac{1}{4}[3^4 - 1^4]$

$= \frac{1}{4}[81 - 1]$

$= \frac{1}{4}[80]$

$= 20$

(iii) $\int_2^5 x\, dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_2^5$

$= \frac{1}{2}[5^2 - 2^2]$

$= \frac{1}{2}[25 - 4] = \frac{21}{2}$

எடுத்துக்காட்டு 8 :

X என்ற தொடர் சமவாய்ப்பு மாறியில் அமைந்த சார்பு $f(x) = 5x^4$, $0 < x < 1$ ஒரு நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பாகுமா என்பதை ஆராய்க.

தீர்வு :

நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பானால் $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx = 1$ எனக் காட்ட வேண்டும். அதாவது $\int_0^1 5(x)^4 dx = 1$ எனக் காட்ட வேண்டும்.

$$\int_0^1 5(x)^4 dx = 5\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1$$

$$= \frac{5}{5}\left[x^5\right]_0^1$$

$$= [1^5 - 0] = 1$$

$\therefore$ f(x) என்பது ஒரு நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு.

எடுத்துக்காட்டு 9 :

ஒரு தொடர் சமவாய்ப்பு மாறி X என்பது $f(x) = Ax^2, 0 < x < 1$. என்ற விதிக்கு உட்பட்டு நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பாகும் எனில் A இன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு :

f (x) ஒரு நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பாதலால் $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$

$$\int_0^1 Ax^2 dx = 1$$

$$A\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 1$$

$$\frac{A}{3}\left[x^3\right]_0^1 = 1$$

$$\frac{A}{3}[1] = 1$$

$$A = 3$$

எடுத்துக்காட்டு 10 :

$f(x) = c(1\text{-}x)\ x^2 ,\ 0 < x < 1$ என்பது ஒரு நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு எனில், c இன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு :

$f(x) = c\ (1 - x)x^2 ,\ 0 < x < 1$

f(x) என்பது ஒரு நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பாதலால் $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$

$$\therefore \quad \int_0^1 c\,(x^2 - x^3)\, dx = 1$$

$$c\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)_0^1 = 1$$

$$c\left[\left(\frac{1^3}{3}-\frac{1^4}{4}\right)-(0-0)\right]=1$$

$$c\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)=1$$

$$c\left(\frac{1}{12}\right)=1$$

$$c=12$$

எடுத்துக்காட்டு 11 :

ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி x பின்வரும் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பைப் பெற்றுள்ளது.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}, & -2<x<2\\ 0, & \end{cases}$$ எனில்

(i) P (– 1 < x < 2) (ii) P (x > 1) ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு :

(i) $$P(-1<x<2)=\int_{-1}^{2}f(x)dx$$

$$\int_{-1}^{2}\frac{1}{4}dx=\frac{1}{4}[x]_{-1}^{+2}$$

$$=\frac{1}{4}[2-(-1)]$$

$$=\frac{1}{4}[3]$$

$$=\frac{3}{4}$$

இங்கு நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பின் மேல் எல்லை 2 ஆகும். எனவே கொடுக்கப்பட்ட எல்லைக்குட்பட்ட நிகழ்தகவு.

$$P(x>1)=\int_{1}^{2}\frac{1}{4}dx$$

$$=\frac{1}{4}[x]_{1}^{2}$$

$$=\frac{1}{4}[2-1]$$

$$= \frac{1}{4}ü$$

$$= \frac{1}{4}$$

2.5 கணித எதிர்பார்த்தல் (Mathematical Expectation) :

எதிர்பார்த்தல் (Expectation) என்ற அடிப்படைக் கருத்தானது தீர்மானிக்கும் கொள்கை, மேலாண்மை அறிவியல், பகுப்பாய்வுக் கொள்கை, விளையாட்டுக் கொள்கை போன்றவற்றிலும் மேலும் பல துறைகளிலும் பயன்படுத்தப்படுகிறது. எதிர்பார்த்தலின் சில பயன்பாடுகள் நம் பாடத்திலுள்ள தீர்மானிக்கும் கொள்கை என்ற பகுதியிலும் விளக்கப்படுகின்றது.

X என்ற சமவாய்ப்பு மாறியின் எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு அல்லது கணித எதிர்பார்த்தல் என்பது, X இன் நிறையிட்ட கூட்டுச் சராசரியாகும். அதன் நிறைகளாக, அச்சமவாய்ப்பு மாறியின் மதிப்புகளுக்குரிய நிகழ்தகவுகள் எடுத்துக் கொள்ளப்படுகின்றன.

X என்ற ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி ஏற்கும் மதிப்புகளை அதற்குரிய நிகழ்தகவுகளால் பெருக்கி அப்பெருக்கல் பலன்களைக் கூட்டக் கிடைப்பதே எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு எனப்படுகிறது.

2.5.1 தனித்த சமவாய்ப்பு மாறிக்கான கணித எதிர்பார்த்தல் :

X என்பது ஒரு தனித்த சமவாய்ப்பு மாறி, அது $x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots x_n$ என்ற மதிப்புகளை, முறையே, அதற்குரிய நிகழ்தகவுகளாக $p_1, p_2, p_3 \ldots\ldots p_n$ எனக் கொண்டு ஏற்கிறது. அவ்வாறெனின் X இன் கணித எதிர்பார்த்தல்.

$$E(x) = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + \ldots\ldots\ldots + x_np_n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_ip_i, \ \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$ எனப்படுகிறது.

ஒரு சமவாய்ப்பு மாறியின் கணித எதிர்பார்த்தலின் தேற்றங்கள் சிலவற்றைப் பயன்பாட்டிற்காக நிரூபணம் இன்றித் தருவோம்.

2.5.2 எதிர்பார்த்தலின் தேற்றங்கள் :

1. X,Y என்ற இரு சமவாய்ப்பு மாறிகளுக்கு E(X), E(Y) இருக்குமானால், $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ ஆகும். இது எதிர்பார்த்தலின் கூட்டல் தேற்றம் எனப்படுகிறது.

2. X, Y என்ற இரு சார்பற்ற சமவாய்ப்பு மாறிகளுக்கு எதிர்பாத்தல் மதிப்புகளும் இருக்குமானால் $E(XY) = E(X).E(Y)$ ஆகும். இது எதிர்பார்த்தலின் பெருக்கல் தேற்றம் எனப்படுகிறது.

3. எதிர்பார்த்தலின் மாறிலி மதிப்பு அதே மாறிலி ஆகும்.

   அதாவது $E(C) = C$

4. $E(cX) = cE(X)$

5. E (aX + b) = aE(X) +b

6. மாறிலியின் பரவல்படி (Variance) பூச்சியமாகும் அதாவது Var(c) = 0

7. Var (X + c) = Var X

(குறிப்பு : இத்தேற்றம் ஆதியை மாற்றினால் பரவல்படி மாறாது என்பதைத் தெரிவிக்கிறது)

8. Var (aX) = a^2 var(X)

(குறிப்பு : இத்தேற்றம் அலகு மாற்றத்தினால் பரவல்படி மாறும் என்பதைத் தெரிவிக்கிறது)

9. Var (aX + b) = a^2Var (X)

10. Var (b – aX) = a^2 Var (x)

குறிப்பு :

'Variance' என்ற சொல்லை புள்ளியியலில் மாறுபாட்டளவை, விலக்க வர்க்க சராசரி, பரவல்படி என்று பலவாறாகக் கூறுவர்.

வரையறை :

X என்ற சமவாய்ப்பு மாறியின் சார்பு f(x) எனில், f(x) இன் எதிர்பார்த்தல் $E(f(x)) = \sum f(x) P(X = x)$ எனப்படுகிறது. அதில் x என்பது P (X = x) இன் நிகழ்தகவுச் சார்பு ஆகும்.

சில குறிப்பிட்ட முடிவுகள் :

1. $f(x) = X^r$ என எடுத்துக் கொண்டால் $E(X^r) = \sum x^r p(x)$ என்பதை A என்னும் ஆதியை யொட்டிய r ஆவது விலக்கப் பெருக்குத்தொகை **(r^{th} moment about origin)** என்கிறாம். அதை μ'_r எனக் குறிக்கிறோம்.

எனவே $\mu'_r = E(X^r)$

$\mu'_1 = E(X)$

$\mu'_2 = E(X^2)$

இங்கு சராசரி $= \overline{X} = \mu'_1 = E(X)$ ஆகும்.

$$\text{மாறுபாட்டளவை} = \frac{\sum x^2}{N} - \left[\frac{\sum x}{N}\right]^2$$

$$= E(x^2) - (E(x))^2$$

$$= \mu'_2 - (\mu'_1)^2$$

மாறுபாட்டளவை (Variance) μ_2 எனக் குறிக்கப்படுகிறது.

$f(x) = (X - \overline{X})^r$ எனில்

$$E(X - \overline{X})^r = \sum (X - \overline{X})^r p(x)$$

என்பதை (**r^{th} moment about mean or r^{th} central moment**) r ஆவது மைய விலக்குப் பெருக்குத் தொகை என்கிறோம். அது μr எனக் குறிக்கப்படுகிறது.

குறிப்பாக r = 2, எனில்

$$\mu_2 = E\,(X - \overline{X})^2$$
$$= \Sigma\,(X - \overline{X})^2\, p(X)$$
$$= E\,[(X - E\,(X)]^2$$
$$= E\,(X) - E\,(X)]^2$$ ஆகும்.

இந்த இருவிதிகளும், எதிர்பார்த்தல் மூலம் நிகழ்தகவின் மாறுபாட்டளவையைக் காண உதவுகின்றன.

எடுத்துக்காட்டு 12 :

ஒரு பகடையை வீசும் போது ஏற்படும் விளைவுகள் X எனில், X–இன் எதிர்பார்த்தலைக் காண்க.

தீர்வு :

இங்கு ஒரு பகடையை வீசுவதால் ஏற்படும் விளைவுகள் 1, 2, 3, 4, 5 மற்றும் 6 என்ற எண்களாகும். இவை ஒவ்வொன்றும் $\frac{1}{6}$ என்ற நிகழ்தகவைக் கொண்டிருக்கும். எனவே இவற்றின் நிகழ்தகவுப் பரவல் பின்வருமாறு :

x	1	2	3	4	5	6
P(x)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	–	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

எனவே X இன் எதிர்பார்த்தல் மதிப்பு

$$E(X) = \sum x_i p_i$$
$$= x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4 + x_5p_5 + x_6p_6$$
$$E(X) = \left[1 \times \frac{1}{6}\right] + \left[2 \times \frac{1}{6}\right] + \left[3 \times \frac{1}{6}\right] + \left[4 \times \frac{1}{6}\right] + \left[5 \times \frac{1}{6}\right] + \left[6 \times \frac{1}{6}\right]$$
$$= \frac{7}{2}$$
$$E(X) = 3.5$$

குறிப்பு :

வாய்ப்புகளை அடிப்படையாகக் கொண்ட விளையாட்டுகளில், எதிர்பார்த்தல் மதிப்பு, விளையாட்டின் மதிப்பாக, விளையாடுவோரால் எடுத்துக் கொள்ளப்படுகிறது. எதிர்பார்த்தல் மதிப்பு மிக எண்ணாக இருந்தால் அது சாதகமான மதிப்பு என்றும், குறை எண்ணாக இருந்தால் அது சாதகமற்ற மதிப்பு என்றும் கருதப்படுகிறது. எதிர்பார்த்தல் மதிப்பு பூச்சியம் என்றால் இரண்டுமற்ற நிலை என்று கூறப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 13 :

ஒருவர் நல்ல பகடை ஒன்றை வீசுகிறார். அதில் பகா எண் வந்தால் வரும் எண்ணிற்குரிய பணத்தை எடுத்து வெற்றி பெறுகிறார். மற்ற எண் வந்தால் அந்த எண்ணுக்குரிய பணத்தைக் கொடுத்து தோல்வியுறுகிறார் எனில் விளையாடுபவரின் எதிர்பார்த்தல் மதிப்பைக் கணித்து உன் கருத்தைக் கூறுக.

தீர்வு :

ஒரு பகடையை வீசுவதால் கிடைக்கும் ஆறு விளைவுகளுக்கும் குறிப்பிட்ட பணம் லாபமாகவோ, நஷ்டமாகவோ தரப்படுகிறது. எனவே எதிர்பார்த்தல் மதிப்பைக் காண அவ்விளைவுகளுக்கான பண மதிப்பு அளிக்கப்படுகிறது. இதை X என்ற சமவாய்ப்பு மாறியாகக் குறிப்போம். இவற்றைப் பின்வருமாறு அட்டவணையில் எழுதலாம்.

பகடையில் ஏற்படும் விளைவுகள்	1	2	3	4	5	6
அதையொட்டிய விளைவுகளின் பயன்கள் (x_i)	– 1	2	3	– 4	5	– 6
P (x_i)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

2, 3, 5 என்பவை பகா எண்கள் என்பதறிக.

$$E(x) = \sum_{i=1}^{6} x_i p_i$$

$$= (-1)\left[\frac{1}{6}\right] + (2)\left[\frac{1}{6}\right] + (3)\left[\frac{1}{6}\right] + (-4)\left[\frac{1}{6}\right] + (5)\left[\frac{1}{6}\right] + (-6)\left[\frac{1}{6}\right]$$

$$= -\left[\frac{1}{6}\right]$$

இவ்விளையாட்டின் எதிர்பார்த்தல் மதிப்பு குறையெண்ணாக இருப்பதால், இது விளையாடுவோர்க்குச் சாதகமற்றது எனத் தெரிகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 14 :

ஒரு கொள்கலனில் 7 வெள்ளை மற்றும் 3 சிவப்பு நிறப்பந்துகள் உள்ளன. இரு பந்துகள் ஒருங்கே சமவாய்ப்பு முறையில் எடுக்கப்படுகின்றன. வெள்ளைப் பந்துகள் வருவதற்கான எதிர்பார்த்தலைக் காண்க.

தீர்வு :

கொள்கலனில் உள்ள 7 வெள்ளை மற்றும் 3 சிவப்பு நிறப் பந்துகளில், இரு பந்துகள் $_{10}C_2$ வழிகளில் எடுக்கலாம். X என்பது வெள்ளைப் பந்துகளை எடுக்கக் குறிப்பிடப்படுமானால், X இன் மதிப்புகள் 0, 1, 2 ஆக இருக்கும். எனவே, X இன் நிகழ்தகவு பரவலைப் பின்வருமாறு பெறலாம்.

P(0) = பந்துகள் இரண்டும் வெள்ளை நிறமற்று இருக்க நிகழ்தகவு

(அல்லது)

பந்துகள் இரண்டும் சிவப்பு நிறமாக இருக்க நிகழ்தகவு

$$= \frac{3C_2}{10C_2} = \frac{3\times2}{10\times9} = \frac{1}{15}$$

P(1) = 1 வெள்ளை, 1 சிவப்பாக இருக்க நிகழ்தகவு

$$= \frac{7C_1\times3C_1}{10C_2} = \frac{7\times3\times2}{10\times9} = \frac{7}{15}$$

P(2) = 2 வெள்ளை நிறமாக இருக்க நிகழ்தகவு

$$= \frac{7C_2}{10C_2} = \frac{7\times6}{10\times9} = \frac{7}{15}$$

எனவே இரு வெள்ளை நிறப்பந்துகள் வருவதற்கான எதிர்பார்த்தல்,

$$E(x) = \sum x_i p(x_i) = \left[0\times\frac{1}{15}\right] + \left[1\times\frac{7}{15}\right] + \left[2\times\frac{7}{15}\right]$$

$$= \frac{7}{5} = 1.4$$

எடுத்துக்காட்டு 15 :

தொலைக்காட்சிப் பெட்டிகளை விற்பனை செய்யும் ஒருவர், ஒரு நாளில் விற்பனையாகும் தொலைக்காட்சிப் பெட்டிகளின் எண்ணிக்கையின் நிகழ்தகவுகளைத் தமது முந்தைய விற்பனை விவரங்களிலிருந்து தந்திருக்கிறார். ஒரு நாளில் அவரது விற்பனை எண்ணிக்கையின் எதிர்பார்த்தலைக் காண்க.

விற்பனையான தொலைக்காட்சிப் பெட்டிகளின் எண்ணிக்கை	0	1	2	3	4	5	6
நிகழ்தகவு	0.02	0.10	0.21	0.32	0.20	0.09	0.06

தீர்வு :

ஒரு நாளில் விற்பனையாகும் தொலைக்காட்சிப் பெட்டிகளின் எண்ணிக்கை ஒரு சமவாய்ப்பு மாறியில் அமைந்துள்ளது எனில், அது ஏற்கும் மதிப்புகள் 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 ஆகவும் அதற்குரிய நிகழ்தகவுகள் அட்டவணையில் தரப்பட்டுள்ளன.

X இன் எதிர்பார்த்தல் = $E(X) = \sum x_i p_i$

$= x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4 + x_5p_5 + x_6p_6$

$= (0)\,(0.02) + (1)\,(0.010) + 2(0.21) + (3)\,(0.32) + 4(0.20) + (5)\,(0.09) + (6)\,(0.06)$

$E(X) = 3.09$

அதாவது $E(X) = 3$

எடுத்துக்காட்டு 16 :

X என்ற சமவாய்ப்பு மாறி பின்வரும் நிகழ்தகவுப் பரவலைக் கொண்டிருக்கிறது.

எனில் சராசரி, மாறுபாட்டளவையைக் காண்க.

X	– 3	6	9
P (X = x)	1/6	1/2	1/3

தீர்வு :

$$E(x) = \sum x_i \, p_i$$
$$= (-3)\left[\frac{1}{6}\right] + (6)\left[\frac{1}{2}\right] + (9)\left[\frac{1}{3}\right]$$
$$= \left[\frac{11}{2}\right]$$

$$E(x^2) = \sum x_i^2 \, p_i$$
$$= (-3)^2\left[\frac{1}{6}\right] + (6)^2\left[\frac{1}{2}\right] + (9)^2\left[\frac{1}{3}\right] = \left[\frac{93}{2}\right]$$

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$
$$= \left[\frac{93}{2}\right] - \left[\frac{11}{2}\right]^2$$
$$= \left[\frac{93}{2}\right] - \left[\frac{121}{4}\right]$$
$$= \frac{186 - 121}{4}$$
$$= \frac{65}{4}$$

எனவே கூட்டுச்சராசரி **11/2**, மாறுபாட்டளவை = **65/4** ஆகும்.

2.5.3 தொடர் சமவாய்ப்பு மாறிக்கான கணித எதிர்பார்த்தல் (Expectation of a continuous random variable) :

X என்ற தொடர் சமவாய்ப்பு மாறிக்கான நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு f(x) எனில் x இன் கணித எதிர்பார்த்தல் பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படுகிறது.

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx$$, தொகையிடல் இருக்குமெனில்

தீர்வு :

g(x) என்பது ஒரு சமவாய்ப்பு மாறிச்சார்பு மேலும் E[g(x)] இருக்குமெனில்

$$E[(g(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, f(x)\, dx$$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 17 :

X என்ற தொடர் சமவாய்ப்பு மாறிக்கான நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $f(x) = 4x^3$, $0< x< 1$ எனில், X இன் எதிர்பார்த்தல் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு :

$$E\,(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx$$ என்பதை நாம் அறிவோம்.

இக்கணக்கில் $$E\,(X) = \int_{0}^{1} x\,(4x^3)\,dx$$

$$= 4\int_{0}^{1} x\,(x^3)\,dx$$

$$= 4\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1$$

$$= \frac{4}{5}\left[x^5\right]_0^1$$

$$= \frac{4}{5}[1^5 - 0^5]$$

$$= \frac{4}{5}[1]$$

$$= \frac{4}{5}$$

எடுத்துக்காட்டு 18 :

X என்ற தொடர் சமவாய்ப்பு மாறிக்கான நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $f(x) = 3x^2$, $0< x < 1$ எனில் கூட்டுச்சராசரியையும், மாறுபாட்டளவையும் காண்க.

தீர்வு :

$$E\,(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx$$

$$E\,(x) = \int_{0}^{1} x\,(3x^2)\,dx$$

$$= 3\int_{0}^{1} (x^3)\,dx$$

$$= 3\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1$$

$$= \frac{3}{4}\left[x^4\right]_0^1$$

$$= \frac{3}{4}[1^4 - 0]$$

$$= \frac{3}{4}$$

$$E(x^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx$$

$$= \int_0^1 x^2 (3x^2)dx$$

$$= 3\int_0^1 (x^4)\, dx$$

$$= 3\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1$$

$$= \frac{3}{5}\left[x^5\right]_0^1$$

$$= \frac{3}{5}[1^5 - 0]$$

$$= \frac{3}{5}$$

மாறுபாட்டளவை $= E(x^2) - [E(x)]^2$

$$= \frac{3}{5} - \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

$$= \frac{3}{5} - \frac{9}{16}$$

$$= \frac{48-45}{80} = \frac{3}{80}$$

2.6 விலக்கப் பெருக்குத் தொகை உருவாக்கும் சார்பு (Moment Generating function (M.G.F)):

விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள் **(Moments)** காண்பதற்கு விலக்கப் பெருக்குத் தொகை உருவாக்கும் சார்பு **(Moment generating function)** ஒரு சிறந்த கருவியாக விளங்குகிறது. இது கணித எதிர்பார்த்தலில் ஒரு சிறந்த வடிவமாகும். இது நிகழ்தகவுப் பரவலின் விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளை உருவாக்கப் பயன்படுகிறது.

வரையறை :

X ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி எனில் e^{tx} இன் எதிர்பார்த்தல் மதிப்பு விலக்கப் பெருக்குத் தொகை உருவாக்கும் சார்பு எனப்படுகிறது. இதில் ஒவ்வொரு t மதிப்பிற்கும், $-h < t < h$ என்ற இடைவெளியில் எதிர்பார்த்தல் மதிப்பைப் பெற்றிருக்க வேண்டும். (h ஒரு மிகை மெய்யெண்).

விலக்கப் பெருக்குத் தொகை **(M.G.F)** உருவாக்கும் சார்பு $M_x(t)$ என்று குறிப்பிடப்படுகிறது.

தனித்த சமவாய்ப்பு மாறிக்கான மைய விலக்க பெருக்குத் தொகை,

$$M_x(t) = E(e^{tx})$$

$$= \sum e^{tx} p(x)$$

$$= \sum \left(1 + tx + \frac{(tx)^2}{2!} + \frac{(tx)^3}{3!} + ...\right) p(x)$$

$$M_x(t) = \left(1 + t\mu_1' + \frac{t^2}{2!}\mu_2' + \frac{t^3}{3!}\mu_3' + ...\right) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{t^r}{r!}\mu_r'$$

மேற்கண்ட கோவையில், ஆதியையொட்டிய r ஆவது விலக்கப் பெருக்குத்தொகை, $\frac{t^r}{r!}$ இன் குணகமாகக் கிடைக்கிறது. பெருக்குத் தொகைகளைக் காண்பதற்கு, விலக்கப் பெருக்குத் தொகை உருவாக்கும் சார்பை, t ஐப் பொருத்து, ஒருமுறை, இருமுறை, மூன்றுமுறை ...... வகைப்படுத்தி அதில் $t = 0$ என்பதை பிரதியிட, நாம் முதலாவது, இரண்டாவது, மூன்றாவது ..... விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளைப் பெறலாம்.

இதிலிருந்து மைய விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளைக் (central moments) காண்பதற்கு இரண்டிற்குமுள்ள தொடர்பு விதிகளைப் பயன்படுத்திப் பெறலாம்.

2.7 சிறப்பியல்புச் சார்பு (Characteristic function) :

விலக்கப் பெருக்குத் தொகை உருவாக்கும் சார்பு எல்லாப் பரவல்களுக்கும் வரையறுக்க இயலாது. எனவே எல்லாப் பரவல்களுக்கும் பொருத்தக்கூடிய சார்பாக விளங்கும் மற்றொரு சார்பான சிறப்பியல்புச் சார்பு **(characteristic function)** இங்கு அறிமுகப்படுத்தப்படுகிறது.

இது e^{itx} இன் எதிர்பார்த்தல் மதிப்பாகும். இதில் $i = \sqrt{-1}$, t என்பது மெய்மதிப்பைக் கொண்டதாகும்.

X என்ற சமவாய்ப்பு மாறியின் சிறப்பியல்புச் சார்பு $\phi_x(t)$ என்று குறிப்பிடப்படுகிறது.

X என்ற தொடர் சமவாய்ப்பு மாறிக்கான நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு f(x) எனில்,

சிறப்பியல்புச் சார்பு $\phi_x(t) = \int_a^b e^{itx} f(x)\, dx$, $a < x < b$ ஆகும்.

பயிற்சி – 2

I. சரியான விடையைத் தேர்ந்தெடுக்கவும் :

1. $\sum_{i=1}^{n} p(x_i)$ என்பது

(அ) 0 (ஆ) 1 (இ) – 1 (ஈ) ∞

2. F(x) என்பது ஒரு பரவல் சார்பானால் $F(-\infty)$ என்பது

(அ) –1 (ஆ) 0 (இ) 1 (ஈ) $-\infty$

3. கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமவாய்ப்பு மாறி அட்டவணையில் a இன் மதிப்பு

X = x	0	1	2
p_i	a	2a	a

(அ) 1 (ஆ) – (இ) 4 (ஈ) $\frac{1}{4}$

4. E (2x + 3) என்பது

(அ) E(2x) (ஆ) 2E(x) + 3 (இ) E(3) (ஈ) 2x + 3

5. Var (x + 8) என்பது

(அ) var (8) (ஆ) var(x) (இ) 8 var (x) (ஈ) 0

6. Var(5x+2) என்பது

(அ) 25 var (x) (ஆ) 5 var (x) (இ) 2 var (x) (ஈ) 25

7. சமவாய்ப்பு மாறி X இன் மாறுபாட்டளவை

(அ) $E(x^2) - [E(x)]^2$ (ஆ) $[E(x)]^2 - E(x^2)$ (இ) $E(x^2)$ (ஈ) $[E(x)]^2$

8. ஒரு சமவாய்ப்பு மாறியின் பரவல்படி $\frac{1}{16}$ எனில் அதன் திட்டவிலக்கம்

(அ) $\frac{1}{256}$ (ஆ) $\frac{1}{32}$ (இ) $\frac{1}{64}$ (ஈ) $\frac{1}{4}$

9. ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி X இல் E(x) = 2, $E(x^2) = 8$ எனில் அதன் மாறுபாட்டளவை

(அ) 4 (ஆ) 6 (இ) 8 (ஈ) 2

10. f(x) என்பது நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு x எனில் $E(x^2)$ என்பது

(அ) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ (ஆ) $\int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,dx$ (இ) $\int_{-\infty}^{\infty} x^2\,f(x)\,dx$ (ஈ) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x^2)\,dx$

II. **கோடிட்ட இடத்தை நிரப்புக** :

11. f(x) ஒரு பரவல் சார்பு எனில் $F(+\infty)$ என்பதின் மதிப்பு ________

12. f(x) ஒரு தொடர் சமவாய்ப்பு மாறியில் அமைந்த நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு F(x) என்பது அதன் குவிவு பரவல் சார்பு எனில் $F'(x)$ = __________

13. X என்ற தொடர் சமவாய்ப்பு மாறியில் அமைந்த f(x) ஒரு நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு எனில்,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = ________$$

14. X என்ற சமவாய்ப்பு மாறியின் கணித எதிர்பார்த்தல் _________ என்றும் அழைக்கப்படும்.

15. மாறிலியின் பரவல்படி _____________

16. Var (12x) என்பது _____________

17. Var (4x + 7) என்பது _________

18. X என்ற தனித்த சமவாய்ப்பு மாறியின் மதிப்புகளின் நிகழ்தகவுகள் p_i என்றால் x^2 இன் கணித எதிர்பார்த்தலை ________ என்று எழுதுகிறோம்.

19. f(x) என்ற நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்புடன் கூடிய தொடர் சமவாய்ப்பு மாறி X இன் எதிர்பார்த்தல் __________ என்று எழுதப்படுகிறது.

20. தனித்த சமவாய்ப்பு மாறிக்கான விலக்கப் பெருக்குத் தொகை உருவாக்கும் சார்பு ________ ஆகும்.

III. பின்வருவனவற்றிற்கு விடையளிக்க :

21. சமவாய்ப்பு மாறியை வரையறுக்க.

22. தனித்த சமவாய்ப்பு மாறியை வரையறுக்க.

23. தொடர் சமவாய்ப்பு மாறியை வரையறுக்க.

24. நிகழ்தகவுத் திண்மைச் சார்பு என்றால் என்ன **?**

25. தனித்த பரவல் சார்பு என்றால் என்ன **?**

26. நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பை வரையறுக்க.

27. பரவல் சார்பின் பண்புகளை எழுதுக.

28. தனித்த சமவாய்ப்பு மாறிக்கான கணித எதிர்பார்த்தலை வரையறுக்க.

29. தொடர் சமவாய்ப்பு மாறிக்கான எதிர்பார்த்தலை வரையறுக்க.

30. விலக்கப் பெருக்குத் தொகை உருவாக்கம் சார்பை (mgf) எழுதுக.

31. தனித்த சமவாய்ப்பு மாறிக்கான சிறப்பியல்புச் சார்பை (characteristic function) எழுதுக.

32. தொடர் சமவாய்ப்பு மாறிக்கான சிறப்பியல்புச் சார்பை எழுதுக.

33. விலக்கப் பெருக்குத் தொகை உருவாக்கும் சார்பு (mgf) பற்றி ஒரு சிறு குறிப்பு எழுதுக.

34. சிறப்பியல்புச் சார்பு பற்றி ஒரு சிறு குறிப்பு எழுதுக.

35. X என்பது தலைவிழுதலைக் குறிக்குமானால், 3 நாணயங்களைச் சுண்டுவதால் ஏற்படும் பரவல் சார்பைக் காண்க.

36. இரு பகடைகள் ஒருங்கே வீசப்படுகின்றன. 3 என்ற எண் பெறுவது வெற்றியாகக் கருதப்படுகிறது என்றால் மூன்றுகள் விழுவதற்கான பரவல் சார்பினைப் பெறுக.

37. மூன்று சீட்டுகள் ஒன்றன்பின் ஒன்றாக, திரும்பவும் அதே சீட்டுக்கட்டில் வைக்கும் முறையில் எடுக்கப்படுகின்றன. 52 சீட்டுகள் உள்ள அக்கட்டில் டைமண்ட் சீட்டு வருவது வெற்றியாகக் கருதப்பட்டால், வெற்றிகளின் எண்ணிக்கையை நிகழ்தகவுப் பரவலில் பெறுக.

38. ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி X பின்வரும் நிகழ்தகவுப் பரவலைப் பெற்றிருக்கிறது.

X	0	1	2	3	4
P (X = x)	3a	4a	6a	7a	8a

(a) a இன் மதிப்பைக் கண்டுபிடிக்க.

(b) $p\ (1 < x < 4)$ ஐக் காண்க.

(c) $P(1 \leq x \leq 4)$ ஐக் காண்க.

(d) $P\ (x > 2)$ பரவல் சார்பைக் காண்க.

39. ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி X பின்வரும் நிகழ்தகவுப் பரவலைப் பெற்றிருக்கிறது.

X	0	1	2	3	4	5	6	7
P (X = x)	0	k	2k	2k	3k	k^2	$2k^2$	$7k^2 + k$

(i) k இன் மதிப்பைக் கண்டுபிடிக்க.

(ii) $p(0 < x < 5)$ ஐக் காண்க.

(iii) $p(x \leq 6)$ ஐக் காண்க.

40. பின்வருவன நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்புகளா என சரிபார்க்க.

(i) $f\ (x) = 5x^4, \quad 0 < x < 1$

(ii) $f\ (x) = \frac{2x}{9}, \quad 0 < x < 3$

41. ஒரு தொடர் சமவாய்ப்பு மாறி x, பின்வரும் அடர்த்திச் சார்பைக் கொண்டிருக்கிறது. அது $f\ (x) = Ax^3$, $0 < x < 1$ எனில், A இன் மதிப்பைக் கண்டுபிடி.

42. X என்ற சமவாய்ப்பு மாறி $f(x) = Ax^3$, $0 < x < 1$ என்ற அடர்த்திச் சார்பைக் கொண்டிருக்கிறது. 0.2, 0.5 இவற்றிற்கு இடைப்பட்ட நிகழ்தகவைக் காண்க.

43. ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி X பின்வரும் நிகழ்தகவுப் பரவலைப் பெற்றிருக்கிறது.

X = x	5	2	1
P (x)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

X இன் எதிர்பார்த்தலைக் காண்க.

44. ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி X பின்வரும் நிகழ்தகவுப் பரவலைப் பெற்றிருக்கிறது.

x	– 1	0	1	2
P (x)	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

$E(x)$, $E(x^2)$, $Var (x)$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

45. ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி X இல் $E(x) = \frac{1}{2}$, $E(x^2) = \frac{1}{2}$ எனில் அதன் பரவற்படியையும், திட்ட விலக்கத்தையும் காண்க.

46. ஒரு தொடர் சமவாய்ப்பு மாறியில், நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $f(x) = \frac{3}{4} x (2 – x)$, $0 < x < 2$, எனில் X இன் எதிர்பார்த்தலைக் காண்க.

47. ஒரு தொடர் சமவாய்ப்பு மாறி X இன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $f(x) = \frac{x}{2}$, $0 < x < 2$ எனில் சராசரி மற்றும் மாறுபாட்டளவையைக் காண்க.

விடைகள்

I.

1. (ஆ) 2. (ஆ) 3. (ஈ) 4. (ஆ) 5. (ஆ)

6. (அ) 7. (அ) 8. (ஈ) 9. (அ) 10. (இ)

II.

11. 1 12. f (x) 13. 1 14. சராசரி 15. zero

16. 144 var(x) 17. 16 var(x) 18. $\sum x_i^2 pi$ 19. $\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$

20. $\sum_{r=0}^{\infty} \frac{t^r}{r!} \mu^!_r$

III.

35.

X = x	0	1	2	3
$P (x_i)$	1/8	3/8	3/8	1/8

36.

X = x	0	1	2
P (X = x)	$\frac{25}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{1}{36}$

37.

X = x	0	1	2	3
$P(x_i)$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{1}{64}$

38. (i) a = 1/28 (ii) 13/28 (iii) 25/28 (iv) 15/28

(v)

x	0	1	2	3	4
F(x)	$\frac{3}{28}$	$\frac{7}{28}$	$\frac{13}{28}$	$\frac{20}{28}$	$\frac{28}{28} = 1$

39. (i) k = 1/10 (ii) 4/5 (iii) 83/100

40. (i) நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு (ii) நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு

41. A = 4

42. P(0.2 < x , 0.5) = 0.117

43. 2.5

44. E(x) = 1/2 , var (x) = 19/12

45. 1/4 , 1/2

46. E(x) = 1

47. E(x) = 4/3 , var (x) = 2/9

3. சில முக்கிய கோட்பாட்டுப் பரவல்கள்

3.1 ஈருறுப்புப் பரவல்

3.1.0 அறிமுகம் :

நாம் இப்பாடப்பிரிவில் தனித்த மாறிகளின் பரவல்களின் கோட்பாடுகளைக் காண்போம். கணிதத்தின் அடிப்படையிலும், முடிவுறு நிகழ்தகவு விதிகளின் படியும், மாறிகளின் பரவல் அமைந்திருப்பதை விளக்கமாக அறியலாம். மீண்டும் மீண்டும் இரு நிகழ்ச்சிகள் மட்டுமே நிகழக் கூடிய அதாவது வெற்றி அல்லது தோல்வி ஐ மாறிகளாக கொண்ட கணத்தைக் கொண்டு விளக்கக் கூடிய தனித்த (எண்ணிடத்தக்கதாக) மாறியின் பரவல் ஈருறுப்பு பரவல் என்றழைக்கப்படும். இப்பரவல் வணிகம் மற்றும் சமூக அறிவியல் போன்ற பல்வேறு துறைகளில் பெருமளவில் பயன்படுத்தப்படுகிறது.

3.1.1 பெர்னோலியின் பரவல் :

சமவாய்ப்பு மாறி x ஆனது 0 மற்றும் 1 என்ற மதிப்புகளின் நிகழ்தகவுகள் q மற்றும் p முறையே ஏற்கிறது. ie $P(x = 1) = p$ மற்றும் $P(x = 0) = q$, $q = 1 - p$ எனில், இவைகள் பெர்னோலியின் மாறிகள் என்று அழைக்கப்படும். வெற்றி மற்றும் தோல்விகளின் நிகழ்தகவுகள் முறையே p மற்றும் q என்றமைந்த பரவல் பெர்னோலியின் பரவல் என்றழைக்கப்படும். இதனை சுவிஸ் நாட்டு கணித மேதை ஜேம்ஸ் பெர்னோலி என்பவர் (1654–1705) கண்டுபிடித்தார்.

எடுத்துக்காட்டாக, பெர்னோலியின் முயற்சிகள் கீழ்வருமாறு

1. நாணயம் சுண்டுதல் (தலை அல்லது பூ விழுதல்)
2. பகடை ஒன்று வீசுதல் (ஒற்றைப் படை எண் அல்லது இரட்டைப் படை எண் கிடைத்தல்)
3. தேர்வில் மாணவர் பெறும் முடிவுகள் (வெற்றி அல்லது தோல்வி)

3.1.2 ஈருறுப்புப் பரவல் :

X என்ற சமவாய்ப்பு மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பு

$$P(X = x) = P(x) = \begin{cases} nC_x p^x q^{n-x}; & x = 0, 1, 2, ..., n \\ 0 & ; \text{ மற்றபடி} \end{cases}$$

என்றமையும் போது சமவாய்ப்பு மாறி X ஆனது ஈருறுப்புப் பரவலை பின்பற்றுகிறது எனலாம்.

இரு சார்பற்ற மாறிலிகளான n மற்றும் p ஈருறுப்புப் பரவலின் பண்பளவைகள் ஆகும். எனவே n மற்றும் p ன் மதிப்புகள் தெரிந்தால் மட்டுமே ஈருறுப்புப் பரவலை முழுமையாக நிர்ணயிக்க முடியும்.

N எண்ணிக்கை கொண்ட தொகுதியில் n முயற்சிகள் மேற்கொள்ளும் போது கிடைக்கும் வெற்றிகள் x ஆகக் கொண்டால் மொத்த வெற்றிகளின் எண்ணிக்கை, $N(nCx\ p^x\ q^{n-x})$ ஆகும்.

மேலும் $N (q + p)^n$ என்ற விரிவின் உறுப்புகள் 0, 1, 2,...,n வெற்றிகளின் நிகழ்தகவுகளாகவும் இவை N என்ற தொகுதியில் மேற்கொள்ளப்படும் n முயற்சிகளுக்கு அமைகிறது.

3.1.3 ஈருறுப்புப் பரவலின் நிபந்தனைகள் :

ஈருறுப்புப் பரவல் காண்பதற்கான செயல்முறை நிபந்தனைகள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

1) முயற்சிகளின் எண்ணிக்கை ‘n’ ஒரு முடிவுறு எண்ணாக (எண்ணிடத்தக்கதாக) இருத்தல் வேண்டும்.

2) முயற்சிகள் ஒன்றுக்கொன்று சார்பற்றவையாக இருத்தல் வேண்டும்.

3) வெற்றிக்கான நிகழ்தகவு ‘p’ ஆனது ஒவ்வொரு முயற்சிக்கும் மாறாத எண்ணாக அமைதல் வேண்டும்.

4) ஒவ்வொரு முயற்சியும் வெற்றி அல்லது தோல்வியாகத் தான் இருத்தல் வேண்டும். நாணயம் சுண்டுதல் அல்லது பகடை வீசுதல் அல்லது சீட்டுக் கட்டிலிருந்து ஒரு சீட்டு எடுத்தல் (திரும்ப வைத்தல்) போன்ற நிகழ்ச்சிகள் யாவும் ஈருறுப்புப் பரவலைச் சார்ந்து அமைகிறது.

3.1.4 ஈருறுப்புப் பரவலின் பண்புகள் :

1. ஈருறுப்புப் பரவல் ஒரு தனித்த மாறி பரவலாகும். இங்கு சமவாய்ப்பு மாறி X ஆனது 0,1, 2, ….n, (வெற்றிகளின் எண்ணிக்கை) என்ற முடிவுறு மதிப்புகளை ஏற்கிறது.

2. சராசரி = np, மாறுபாடு = npq மற்றும் திட்டவிலக்கம் $\sigma = \sqrt{npq}$, கோட்டளவைக் கெழு = $\frac{q-p}{\sqrt{npq}}$, தட்டையளவைக் கெழு = $\frac{1-6pq}{\sqrt{npq}}$, நிகழ்தகவுகள் யாவும் எதிரிடை எண்ணாக (non-negative) அமையாது என்றும், நிகழ்தகவு மதிப்புகளின் மொத்தக் கூடுதல் ஒன்று எனத் தெளிவாக அறிகிறோம், ($p < 1$, $q < 1$ மற்றும் $p + q =1$, $q = 1- p$).

3. அதிக அலைவெண் மதிப்புடைய மாறி எதுவோ அதன் மதிப்பே ஈருறுப்பு பரவலின் முகடு (mode) ஆகும். இப்பரவலில் ஒன்று அல்லது இரண்டு முகடுகள் இருக்கலாம்.

4. X மற்றும் Y எனும் இரு சமவாய்ப்பு மாறிகள் ஈருறுப்பு பரவலின் கீழ், முறையே (n_1, p) மற்றும் (n_2, p) பண்பளவைகளாக கொண்டுள்ளது எனில், அவைகளின் கூடுதல் (X + Y) என்ற சமவாய்ப்பு மாறியின் ஈருறுப்புப் பரவலின் கீழ் பண்பளவையாக $(n_1 + n_2, p)$ அமைகிறது.

5. n சார்பற்ற முயற்சிகள் N முறைகள் செய்யும் போது, அதாவது N தொகுதிகளின் n முயற்சிகள் நடைபெறும் போது x வெற்றிகளின் எதிர்பார்க்கும் அலைவெண் $N(nC_x\ p^x\ q^{n-x})$ ஆகும். எனவே, 0, 1, 2… n என்ற வெற்றிகளின் எதிர்பார்க்கப்படும் நிகழ்தகவுகள் $N(q + p)^n$ என்ற விரிவின் தொடர்ச்சியாக அடுத்தடுத்து வரும் உறுப்புகளாக அமைகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

ஓர் ஈருறுப்புப் பரவலின் சராசரி 5 மற்றும் அதன் மாறுபாடு 9 என்ற கூற்றை விளக்குக.

தீர்வு :

ஈருறுப்புப் பரவலின் பண்பளவைகளாவன n மற்றும் p

இதில் சராசரி $\Rightarrow np = 5$

மாறுபாடு $\Rightarrow npq = 9$

$$\therefore\ q = \frac{npq}{np} = \frac{9}{5}$$

$$q = \frac{9}{5} > 1$$

q என்பது நிகழ்தகவு ஆகும். ஆகவே q என்பது எப்பொழுதும் 1 க்கும் குறைவாக இருக்கும். எனவே கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் விவரங்கள் தவறானவை ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

பிழையற்ற எட்டு நாணயங்கள் ஒரே சமயத்தில் சுண்டப்படுகின்றன, எனில் குறைந்தது ஆறு தலைகள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

தீர்வு :

இங்கு முயற்சிகளின் எண்ணிக்கை $n = 8$,

தலை கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு = p

$\therefore\ p = \frac{1}{2}$ மற்றும் $q = \frac{1}{2}$

X என்ற சமவாய்ப்பு மாறியானது கிடைக்கும் தலைகளின் எண்ணிக்கையைக் குறிப்பதாகக் கொண்டால், n முயற்சிகளில் கிடைக்கும் (தலைகளின் எண்ணிக்கை) வெற்றிகளின் நிகழ்தகவுச் சார்பு.

$$P(X = x) = nC_x p^x q^{n-x}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots.., n$$

$$= 8C_x \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{8-x} = 8C_x \left(\frac{1}{2}\right)^8$$

$$= \frac{1}{2^8} 8C_x$$

குறைந்தது 6 தலைகள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$P(x \geq 6) = P(x = 6) + p(x = 7) + P(x = 8)$$

$$= \frac{1}{2^8} 8C_6 + \frac{1}{2^8} 8C_7 + \frac{1}{2^8} 8C_8$$

$$= \frac{1}{2^8}[8C_6 + 8C_7 + 8C_8]$$

$$= \frac{1}{2^8}[28 + 8 + 1] = \frac{37}{256}$$

எடுத்துக்காட்டு 3 :

பிழையற்ற பத்து நாணயங்கள் ஒரே சமயத்தில் சுண்டப்படுகின்றன. அவற்றில் (i) குறைந்தது 7 தலைகள் (ii) சரியாக 7 தலைகள் (iii) அதிகபட்சம் 7 தலைகள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு காண்க.

தீர்வு :

$p =$ தலை கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= \frac{1}{2}$

$q =$ தலை கிடைக்காமல இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= \frac{1}{2}$

10 நாணயங்கள் வீசும் போது தலைகள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு சார்பு.

$$P(X = x) = nC_x p^x q^{n-x}, \quad x = 0, 1, 2, ..., n$$

$$= 10C_x \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{10-x} = \frac{1}{2^{10}} 10C_x$$

i) குறைந்தது 7 தலைகள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$P(x \geq 7) = P(x = 7) + P(x = 8) + P(x = 9) + P(x = 10)$$

$$= \frac{1}{2^{10}}[10C_7 + 10C_8 + 10C_9 + 10C_{10}]$$

$$= \frac{1}{1024}[120 + 45 + 10 + 1] = \frac{176}{1024}$$

ii) சரியாக 7 தலைகள் மட்டும் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$P(x = 7) = \frac{1}{2^{10}} 10C_7 = \frac{1}{2^{10}}(120)$$

$$= \frac{120}{1024}$$

iii) அதிகபட்சம் 7 தலைகள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$P(x \leq 7) = 1 - P(x > 7)$$

$$= 1 - \{P(x = 8) + P(x = 9) + P(x = 10)\}$$

$$= 1 - \frac{1}{2^{10}}\{10C_8 + 10C_9 + 10C_{10}\}$$

$$= 1 - \frac{1}{2^{10}}[45 + 10 + 1]$$

$$= 1 - \frac{56}{1024}$$

$$= \frac{968}{1024}$$

எடுத்துக்காட்டு 4 :

ஒரு பெட்டியில் உள்ள **100** கைக் கடிகாரங்களில் **20** கைக் கடிகாரங்கள் குறைபாடுள்ளவை. சமவாய்ப்பு முறையில் **10** கடிகாரங்கள் தேர்ந்தெடுக்கும் பொழுது (i) **10**–ம் குறைபாடுள்ளவையாக (ii) **10**–ம் நல்லவையாக (iii) குறைந்தது ஒன்றாவது குறைபாடுள்ளதாக (iv) அதிகபட்சம் **3** குறைபாடுள்ளவையாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவை காண்க.

தீர்வு :

x = குறைபாடுள்ள கைக்கடிகாரங்கள் என்க.

100 கைக் கடிகாரங்களில் குறைபாடுள்ளவை 20.

குறைபாடுள்ள கடிகாரத்தின் நிகழ்தகவு $p = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$

$$\therefore q = 1 - p = \frac{4}{5}$$

சமவாய்ப்பு முறையில் 10 கடிகாரங்கள் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகின்றன.

n =10, ஈருறுப்புப் பரவலின் சார்பு

$$P(X = x) = nC_x p^x q^{n-x}, \quad x = 0, 1, 2, ..., n$$

$$= 10C_x \left(\frac{1}{5}\right)^x \left(\frac{4}{5}\right)^{10-x}$$

i) 10–ம் குறைபாடுள்ள கடிகாரங்களாக இருக்க நிகழ்தகவு

$$P(x = 10) = 10C_{10} \left(\frac{1}{5}\right)^{10} \left(\frac{4}{5}\right)^0$$

$$= 1.\frac{1}{5^{10}}.1 = \frac{1}{5^{10}}$$

ii) 10–ம் நல்ல கடிகாரங்களாக தேர்ந்தெடுக்க நிகழ்தகவு (குறைபாடில்லாத)

$$P(x = 0) = 10C_0 \left(\frac{1}{5}\right)^0 \left(\frac{4}{5}\right)^{10}$$

$$= 1.1\left(\frac{4}{5}\right)^{10} = \left(\frac{4}{5}\right)^{10}$$

iii) குறைந்தது ஒன்று குறைபாடுள்ளதாக இருக்க நிகழ்தகவு

$$P(x \geq 1) = 1 - P(x < 1)$$
$$= 1 - P(x = 0)$$
$$= 1 - 10C_0 \left(\frac{1}{5}\right)^0 \left(\frac{4}{5}\right)^{10}$$
$$= 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{10}$$

iv) அதிபட்சம் 3 கடிகாரங்கள் குறைபாடுள்ளவையாக இருக்க நிகழ்தகவு

$$P(x \leq 3) = P(x = 0) + P(x = 1) + P(x = 2) + P(x = 3)$$
$$= 10C_0 \left(\frac{1}{5}\right)^0 \left(\frac{4}{5}\right)^{10} + 10C_1 \left(\frac{1}{5}\right)^1 \left(\frac{4}{5}\right)^9 + 10C_2 \left(\frac{1}{5}\right)^2 \left(\frac{4}{5}\right)^8 + 10C_3 \left(\frac{1}{5}\right)^3 \left(\frac{4}{5}\right)^7$$
$$= 1.1.\left(\frac{4}{5}\right)^{10} + 10\left(\frac{1}{5}\right)^1 \left(\frac{4}{5}\right)^9 + \frac{10.9}{1.2}\left(\frac{1}{5}\right)^2 \left(\frac{4}{5}\right)^8 + \frac{10.9.8}{1.2.3}\left(\frac{1}{5}\right)^3 \left(\frac{4}{5}\right)^7$$
$$= 1.(0.107) + 10(0.026) + 45(0.0062) + 120(0.0016)$$

$= 0.859$ (தோராயம்)

எடுத்துக்காட்டு 5 :

X என்பது ஈருறுப்புப் பரவலின் சமவாய்ப்பு மாறி ஆகும். மேலும் $9P(X = 4) = P(X = 2)$, $n = 6$ என்ற நிலையில் p ன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு :

சமவாய்ப்பு மாறி X இன் ஈருறுப்புப் பரவல் சார்பு

$P(X = x) = nC_x\, p^x\, q^{n-x}$, $x = 0, 1, 2, ..., n$

$n = 6$ $\quad \therefore P(X = x) = 6C_x\, p^x\, q^{6-x}$

$$P(x = 4) = 6C_4\, p^4\, q^2$$
$$P(x = 2) = 6C_2\, p^2\, q^4$$
$$9.\ P(x = 4) = P(x = 2)$$
$$9.\ 6C_4\, p^4\, q^2 = 6C_2\, p^2\, q^4$$
$$\Rightarrow 9 \times 15p^2 = 15q^2$$
$$9p^2 = q^2$$

இருபுறமும் வர்க்க மூலம் (மிகை மதிப்பு) எடுக்க,

$$3p = q$$
$$= 1 - p$$
$$4p = 1$$
$$\therefore p = \frac{1}{4} = 0.25$$

3.1.5 ஈருறுப்புப் பரவலைப் பொருத்துக (Fitting of a Binomial Distribution) :

கண்டறியப்பட்ட (கொடுக்கப்பட்ட) விவரங்களுக்கு ஈருறுப்புப் பரவலைப் பொருத்துவதற்கான வழிமுறைகளைக் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

1. சராசரி = $\bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum f} = np$ ஐக் காண்க.

   $\Rightarrow p = \frac{\bar{x}}{n}$ இதில் n என்பது முயற்சிகளின் எண்ணிக்கை ஆகும்.

2. $q = 1 - p$, என q ன் மதிப்பைக் காண்க.

3. $P(x) = nC_x\, p^x\, q^{n-x}$ என்ற நிகழ்தகவுச் சார்பில், $x = 0$, என மதிப்பிட்டு $P(0) = q^n$ என்றும் $f(0) = N \times P(0)$ என அமைத்து எதிர்பார்க்கப்படும் அலைவெண் மதிப்பு காண்க.

4. மற்ற எதிர்பார்க்கப்படும் அலைவெண் மதிப்புகளை மறுதரவு தொடர்பு (recurrence relation) $f(x+1) = \frac{n-x}{x+1}\frac{p}{q}f(x)$ ஐ பயன்படுத்திக் காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 6 :

ஒரே மாதிரியான 3 நாணயங்கள் ஒரு சேர 100 முறை சுண்டப்படுகின்றன. இதன் முடிவுகள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

தலைகளின் எண்ணிக்கை :	0	1	2	3
நிகழ்வெண் :	36	40	22	2

ஈருறுப்புப் பரவலைப் பொருத்துக.

தீர்வு :

X	f	fx
0	36	0
1	40	40
2	22	44
3	2	6
	$\sum f = 100$	$\sum fx = 90$

சராசரி $= \bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum f} = \frac{90}{100} = 0.9$

$$p = \frac{\bar{x}}{n}$$

$$= \frac{0.9}{3} = 0.3$$

$$q = 1 - 0.3$$

$$= 0.7$$

இங்கு n = 3, p = 0.3 q = 0.7

நிகழ்தகவுச் சார்பு, $P(x) = nC_x\, p^x\, q^{n-x}$

$$\therefore P(x) = 3C_x\, (0.3)^x\, (0.7)^{3-x}$$

x = 0 எனில், $P(0) = 3C_0\, (0.3)^0\, (0.7)^3$

$$= (0.7)^3 = 0.343$$

$$\therefore f(0) = N \times P(0) = 0.343 \times 100 = 34.3$$

மற்ற எதிர்பார்க்கப்படும் அலைவெண்கள் மறுதரவு தொடர்பின் மூலம் காணலாம்.

$f(x+1) = \frac{n-x}{x+1}\left(\frac{p}{q}\right) f(x)$. இதில் x = 0, 1, 2 என மதிப்பிட்ட பிற எதிர்பார்க்கப்படும் அலைவெண்களைக் கணக்கிடலாம்.

$$f(1) = \frac{3-0}{0+1}\left(\frac{p}{q}\right) \times 34.3$$

$$= 3 \times (0.43) \times 34.3 = 44.247$$

$$f(2) = \frac{3-1}{1+1}\left(\frac{p}{q}\right) f(1)$$

$$= \frac{2}{2}(0.43) \times 44.247$$

$$= 19.03$$

$$f(3) = \frac{3-2}{2+1}\left(\frac{p}{q}\right) f(2)$$

$$= \frac{1}{3}(0.43) \times 19.03$$

$$= 2.727$$

கண்டறியப்பட்ட மற்றும் எதிர்பார்க்கப்படும் அலைவெண்கள் கீழ்வருமாறு அட்டவணை செய்யப்பட்டுள்ளது.

					மொத்தம்
கண்டறியப்பட்ட அலைவெண்கள்	36	40	22	2	100
எதிர்பார்க்கப்படும் அலைவெண்கள்	34	44	19	3	100

எடுத்துக்காட்டு 7 :

நான்கு நாணயங்கள் சுண்டப்பட்டு கிடைக்கும் தலைகளின் எண்ணிக்கை குறிக்கப்படுகிறது. இச்சோதனை 200 முறை திரும்பத் திரும்ப செய்யப்படும் போது கீழ்க்கண்ட பரவல் கிடைக்கிறது.

தலைகளின் எண்ணிக்கை	0	1	2	3	4
அலைவெண்	62	85	40	11	2

ஈருறுப்புப் பரவலைப் பொருத்துக.

தீர்வு :

X	0	1	2	3	4	மொத்தம்
f	62	85	40	11	2	200
fx	0	85	80	33	8	206

சராசரி $= \bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum f} = \frac{206}{200} = 1.03$

$$p = \frac{\bar{x}}{n} = \frac{1.03}{4} = 0.2575$$

$\therefore q = 1 - 0.2575 = 0.7425$

இங்கு $n = 4$, $p = 0.2575$; $q = 0.7425$

ஈருறுப்புப் பரவலின் நிகழ்தகவு சார்பு

$$P(x) = nC_x \, p^x \, q^{n-x}$$

$$P(x) = 4C_x \, (0.2575)^x \, (0.7425)^{4-x}$$

$$P(0) = (0.7425)^4$$

$$= 0.3039$$

$$\therefore f(0) = NP(0)$$

$$= 200 \times 0.3039$$

$$= 60.78$$

மற்ற நிகழ்வெண்களை மறுதரவு தொடர்பைப் (recurrence relation) பயன்படுத்திக் காணலாம்.

$f(x+1) = \frac{n-x}{x+1} \left(\frac{p}{q}\right) f(x)$. இதில் $x = 0,1, 2, 3$ என மதிப்பிட்டு பிற எதிர்பார்க்கப்படும் அலைவெண்களைக் கீழ்க்கண்டவாறு கணக்கிடலாம்.

x = 0, எனில் $f(0 + 1) = f(1) = \frac{4-0}{0+1}(0.3468)(60.78)$

$= 84.3140$

x = 1, எனில் $f(1 + 1) = f(2) = \frac{4-1}{1+1}(0.3468)(84.3140)$

$= 43.8601$

x = 2, எனில் $f(2 + 1) = f(3) = \frac{4-2}{2+1}(0.3468)(43.8601)$

$= 10.1394$

x = 3, எனில் $f(3 + 1) = f(4) = \frac{4-3}{3+1}(0.3468)(10.1394)$

$= 0.8791$

கண்டறியப்பட்ட மற்றும் எதிர்பார்க்கப்படும் அலைவெண்கள் கீழ்க்கண்ட அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

						மொத்தம்
கண்டறியப்பட்ட அலைவெண்கள்	62	85	40	11	2	200
எதிர்பார்க்கப்படும் அலைவெண்கள்	61	84	44	10	1	200

3.2 பாய்சான் பரவல்

3.2.0 அறிமுகம் :

கணிதம் மற்றும் இயற்பியல் சார்ந்த மேதையான பிரான்சு நாட்டுக்காரர் சைமன் டெனிஸ் பாய்சான் என்பவர் 1837 ஆம் ஆண்டு பாய்சான் பரவலைக் கண்டுபிடித்தார். பாய்சான் பரவல் ஓர் தனித்த மாறி பரவல் ஆகும். இப்பரவலை இவர் ஈருறுப்புப் பரவலின் நெருக்கமாக, எல்லையாக அமைகிறது என நிருவியுள்ளார்.

n முயற்சிகளுக்கு x வெற்றிகளின் ஈருறுப்புப் பரவல் $P(X = x) = nC_x\, p^x\, q^{n-x}$ ஆகும். இங்கு n முயற்சிகளின் எண்ணிக்கை மிக அதிகமாகவும், மற்றும் வெற்றிக்கான நிகழ்தகவு p மிகச் சிறியதாகவும் மேலும் np = m என்ற எதிர்எண் அற்ற முடிவுறு எண்ணாக அமைகிறது.

அதாவது x வெற்றிகளுக்கான பாய்சான் பரவல்,

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{e^{-m} m^x}{x!}; \ x = 0,1,2 \ldots. \text{ க்கு} \\ 0 \quad ; \text{ மற்றபடி} \end{cases}$$

எனக் கொடுக்கப்படுகிறது.

இங்கு m என்பது இப்பரவலின் பண்பளவையாகும். மேலும் m >0 முயற்சிகளின் எண்ணிக்கை மிக அதிகமாகவும் வெற்றிக்கான நிகழ்தகவு மிகச்சிறியதாக அமையும் போது இத்தகைய நிகழ்ச்சிகள் அரிய நிகழ்ச்சிகளாக அமைகிறது. எனவே பாய்சான் பரவலானது இவ்வாறு அமையும் அரிய நிகழ்ச்சிகளுடன் தொடர்புடையதாக அமைகிறது.

குறிப்பு :

1) e ன் மதிப்பு $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... = 2.71828$

2) $P(X = 0) = \frac{e^{-m} m^0}{0!}$, இங்கு $0! = 1$ மற்றும் $1! = 1$

3) $P(X = 1) = \frac{e^{-m} m^1}{1!}$

பாய்சான் பரவலுக்கு சில எடுத்துக்காட்டுகள் :

1. ஒரு குறிப்பிட்ட வருடத்தில் ஒரு நகரில் பிறவிக் குருடாக பிறக்கும் குழந்தைகளின் எண்ணிக்கை.
2. தட்டச்சு செய்யப்பட்ட ஒரு பக்கத்தில் உள்ள தட்டச்சுப் பிழைகளின் எண்ணிக்கை.
3. எல்லா பாடங்களிலும் மிக அதிக மதிப்பெண் எடுத்த மாணவர்களின் எண்ணிக்கை.
4. ஒரு குறிப்பிட்ட வாரத்தில் ஏற்பட்ட விமான விபத்துகளின் எண்ணிக்கை.
5. ஒரு நல்ல தொழிற்சாலையில் செய்யப்பட்ட திருகாணிகளில் 100 கொண்ட பெட்டியில் குறைபாடுள்ள திருகாணிகளின் எண்ணிக்கை.
6. குறிப்பிட்ட ஒரு நாளில் பதிவான தற்கொலைகளின் எண்ணிக்கை.

3.2.1 நிபந்தனைகள்

ஈருறுப்புப் பரவலின் எல்லைகளாக (நெருக்கமாக) அமைந்த பாய்சான் பரவலுக்கான நிபந்தனைகள் கீழ்வருவன.

1. முயற்சிகளின் (முடிவுகளின்) எண்ணிக்கை n ஆனது எல்லையற்ற அளவிற்கு அதிகமாகும் i.e., $n \to \infty$
2. ஒவ்வொரு முயற்சியிலும் வெற்றிக்கான நிகழ்தகவு மிகவும் சிறியதாகும். i.e., $p \to 0$
3. $np = m$, இது ஓர் முடிவுறு எண். மேலும் $m > 0$

3.2.2 பாய்சான் பரவலின் பண்புகள் :

1. தனித்த பரவல் : பாய்சான் பரவலும், ஈருறுப்புப் பரவலைப் போன்றே தனித்த பரவல் ஆகும். இதன் சமவாய்ப்பு மாறியானது எண்ணிடத்தக்க மதிப்புகளான $0,1,2 \ldots . \infty$ ஐ ஏற்கிறது.
2. p மற்றும் q இன் மதிப்புகள் : ஒரு நிகழ்ச்சியின் வெற்றிக்கான நிகழ்தகவு p இன் மதிப்பு மிகவும் குறைவாகவும். மற்றும் தோல்விக்கான நிகழ்தகவு q இன் மதிப்பு அதிகமாகவும், n ன் மதிப்பு மிக மிக அதிகமாகும் போது இப்பரவல் அமைகிறது.
3. பண்பளவை : பாய்சான் பரவலின் பண்பளவை m ஆகும். m ன் மதிப்பு தெரியுமானால், பாய்சான் பரவலின் அனைத்து நிகழ்தகவுகளையும் கணக்கிடலாம்.
4. மாறிலிகளின் மதிப்புகள் : சராசரி = m = மாறுபாட்டளவை ஆகும். திட்டவிலக்கம் $= \sqrt{m}$. பாய்சான் பரவலுக்கு ஒன்று அல்லது இரண்டு முகடுகள் இருக்கலாம்.

5. கூட்டுப்பண்பு : X மற்றும் Y எனும் ஒன்றையொன்று சாராத பாய்சான் மாறிகளின் பண்பளவைகள் முறையே m_1 மற்றும் m_2 எனில் (X+Y) என்ற பாய்சான் மாறியின் பண்பளவை $(m_1 + m_2)$ ஆகும்.

6. ஈருறுப்புப் பரவலின் ஓர் எல்லையாக (தோராயமாக) : n ன் மதிப்பு மிக அதிகமாகவும் p ன் மதிப்பு மிகக் குறைவாகவும் அமைந்து, np = m ன் மதிப்பு நிலையாக (மாறிலியாக) இருக்கும் போது ஈருறுப்புப் பரவலின் எல்லை நிலையில் பாய்சான் பரவல் அமைகிறது.

7. பாய்சான் பரவல் பின்வரும் அனுமானங்களை கொண்டுள்ளது.

i) ஒரு நிகழ்ச்சியில் ஏற்படும் நிகழ்வு அல்லது நிகழாமை வேறு எந்த நிகழ்ச்சியின் நிகழ்வு அல்லது நிகழாமையைப் பாதிப்பதில்லை (ஆதிக்கம் செய்வதில்லை)

ii) ஒரு சிறிய இடைவெளியிலோ அல்லது கூறுவெளியின் ஒரு பகுதியிலோ வெற்றியின் நிகழ்தகவானது மொத்த கால இடைவெளி அல்லது கூறுவெளியின் விகித சமத்தில் அமையும்.

iii) ஒரு மிகச்சிறிய இடைவெளியில் ஒன்றிற்கு மேற்பட்ட நிகழ்ச்சிகளின் நிகழ்தகவு தவிர்க்கதக்கதாக இருக்கும்.+

எடுத்துக்காட்டு 8 :

ஒரு குறிப்பிட்ட மாவட்டத்தில் ஒரு குறிப்பிட்ட ஆண்டில் சராசரியாக 1000 வீடுகளில் 1 வீடு தீ விபத்துக்குள்ளாகிறது. 2000 வீடுகள் உள்ள அம்மாவட்டத்தில் அவ்வாண்டில் சரியாக 5 வீடுகள் மட்டும் தீவிபத்து ஏற்படுவதற்கான நிகழ்தகவு என்ன ?

தீர்வு :

n = 2000 மற்றும் $p = \frac{1}{1000}$

சராசரி $\bar{x} = np$,

$np = 2000 \times \frac{1}{1000}$

அதாவது m = 2

x என்பது தீ விபத்து ஏற்படும் வீடுகள் என்க. பாய்சான் பரவலின் நிகழ்தகவு சார்பானது,

$$P(X = x) = \frac{e^{-m} m^{x}}{x!}$$

$$\therefore P(X = 5) = \frac{e^{-2} 2^{5}}{5!}$$

$$= \frac{(0.13534) \times 32}{120}$$

$$= 0.036$$

எடுத்துக்காட்டு 9 :

பாய்சான் பரவலில் $3P(X = 2) = P(X = 4)$ எனில் பண்பளவை 'm' ன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு :

$$P(X = x) = \frac{e^{-m} m^x}{x!}$$

$$3P(x = 2) = P(x = 4)$$

$$3.\frac{e^{-m} m^2}{2!} = \frac{e^{-m} m^4}{4!}$$

$$m^2 = \frac{3 \times 4!}{2!}$$

$$\therefore m = \pm 6$$

m ஆனது எப்பொழுதும் நேரிடையாகும். ஆகவே $m = 6$

எடுத்துக்காட்டு 10 :

ஒரு நிறுவனத்தில் தயாரிக்கப்பட்ட விளக்குகளில் 2% குறைபாடுள்ளவை. 200 விளக்குகள் கொண்ட கூறில் i) 2 விளக்குகளுக்கும் குறைவாக ii) 3 விளக்குகளுக்கும் மேலாக குறைபாடுகள் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

தீர்வு :

x = குறைபாடாக உள்ள மின்விளக்குகள் என்க.

ஒரு மின்விளக்கு குறைபாடாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $p = \frac{2}{100} = 0.02$, $n = 200$ என கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

p ன் மதிப்பு மிகக் குறைவாகவும் n ன் மதிப்பு அதிகமாகவும் உள்ளதால் இங்கு பாய்சான் பரவலைப் பயன்படுத்துகிறோம்.

சராசரி $m = np = 200 \times 0.02 = 4$

பாய்சான் நிகழ்தகவு திண்ம சார்பு $P(X = x) = \frac{e^{-m} m^x}{x!}$

i) 2 மின் விளக்குகளை விடக் குறைவான குறைபாடுகள் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$P(X < 2) = P(x = 0) + P(x = 1)$$

$$= \frac{e^{-4} 4^0}{0!} + \frac{e^{-4} 4^1}{1!}$$

$$= e^{-4} + e^{-4}(4)$$

$$= e^{-4}(1 + 4) = 0.0183 \text{ x } 5$$

$$= 0.0915$$

ii) குறைபாடுள்ள மின்விளக்குகள் **3**க்கும் அதிகமாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$P(x > 3) = 1 - P(x \le 3)$$
$$= 1 - \{P(x = 0) + P(x = 1) + P(x = 2) + P(x = 3)\}$$
$$= 1 - e^{-4}\{1 + 4 + \frac{4^2}{2!} + \frac{4^3}{3!}\}$$
$$= 1 - \{0.0183 \times (1 + 4 + 8 + 10.67)\}$$
$$= 0.567$$

3.2.3 பாய்சான் பரவலைப் பொருத்துதல் :

பாய்சான் பரவலைப் பொருத்துதலுக்கான வழிமுறைகள்

1) முதலில் நாம் சராசரியைக் கணக்கிட வேண்டும்.

   சராசரி = $\bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum f} = m$

2) e^{-m} ன் மதிப்பைக் காணவும்.

3) பாய்சான் பரவல் $P(X = x) = \frac{e^{-m}.m^x}{x!}$ ஐ பயன்படுத்தி அதில் $x = 0$ என மதிப்பிட்டு,

   $P(0) = e^{-m}$ ஐ கணக்கிடவும். பின்னர் $f(0) = N \times P(0)$ ஐ காண்க.

மற்ற எதிர்பார்க்கப்படும் அலைவெண்களை பின்வரும் மறுதரவு (Recurrence relation) தொடர்பு $f(x+1) = \frac{m}{x+1} f(x)$ ஐ பயன்படுத்தி $x = 0, 1, 2, ...$ என மதிப்பிட்டு காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 11 :

புத்தகம் ஒன்றில் ஒரு பக்கத்தில் உள்ள பிழைகளின் எண்ணிக்கை பின்வரும் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இதற்கு பாய்சான் பரவலைப் பொருத்துக.

பிழைகளின் எண்ணிக்கை (பக்கம் ஒன்றில்)	0	1	2	3	4
பக்கங்களின் எண்ணிக்கை	211	90	19	5	0

தீர்வு :

x_i	f_i	$f_i x_i$
0	211	0
1	90	90
2	19	38
3	5	15
4	0	0
	N = 325	$\sum fx = 143$

சராசரி $= \bar{x} = \frac{\sum fx}{N}$

$$= \frac{143}{325} = 0.44 = m$$

எனவே $e^{-m} \Rightarrow e^{-0.44} = 0.6440$

$$e^{-m} = e^{-0.44} = 0.6440$$

பாய்சான் நிகழ்தகவு திண்மச் சார்பு (mass function),

$$P(x) = e^{-m} \frac{m^{x}}{x!}$$

$x = 0$, எனில் $P(0) = e^{-0.44} \frac{44^{0}}{0!}$

$$= e^{-0.44}$$

$$= 0.6440$$

$$\therefore f(0) = N\ P(0)$$

$$= 325 \times 0.6440$$

$$= 209.43$$

மற்ற எதிர்பார்க்கப்படும் அலைவெண்களை மறுதரவு தொடர்பு மூலம் காணலாம்.

$f(x+1) = \frac{m}{x+1} f(x)$, இதில் $x = 0,1,2,3$ என மதிப்பிட்டு பிற எதிர்பார்க்கப்படும் அலைவெண்களைக் கணக்கிடலாம்.

$$f(1) = 0.44 \times 209.43 = 92.15$$

$$f(2) = \frac{0.44}{2} \times 92.15 = 20.27$$

$$f(3) = \frac{0.44}{3} \times 20.27 = 2.97$$

$$f(4) = \frac{0.44}{4} \times 2.97 = 0.33$$

						மொத்தம்
கண்டறியப்பட்ட அலைவெண்கள்	211	90	19	5	0	325
எதிர்பார்க்கப்படும் அலைவெண்கள்	210	92	20	3	0	325

எடுத்துக்காட்டு 12 :

குதிரைப் போர் வீரர் அணியிலிருந்து குதிரை ஏற்றத்தின் போது குதிரையால் உதைபட்டு, இறந்தவர்களின் எண்ணிக்கை கணக்கிடப்பட்டு 20 ஆண்டு விவரங்கள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. பாய்சான் பரவல் பயன்படுத்தி சராசரி மற்றும் மாறுபாடு காண்க.

X :	0	1	2	3	4	மொத்தம்
f :	109	65	22	3	1	200

தீர்வு :

x_i	f_i	f_ix_i	$f_ix_i^2$
0	109	0	0
1	65	65	65
2	22	44	88
3	3	9	27
4	1	4	16
மொத்தம்	N = 200	$\sum fx = 122$	$\sum fx^2 = 196$

$$\text{சராசரி} = \bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{N} = \frac{122}{200} = 0.61$$

$$\text{மாறுபாடு} = \sigma^2 = \frac{\sum f_i x_i^2}{N} - (\bar{x})^2 = \frac{196}{200} - (0.61)^2 = 0.61$$

இங்கு சராசரி = மாறுபாடு = 0.61

எடுத்துக்காட்டு 13 :

கார் ரேடியோக்கள் தயாரிக்கும் போது 100 ரேடியோக்களில் காணப்பட்ட குறைபாடுகளின் எண்ணிக்கை விவரம் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இதற்கு பாய்சான் பரவலைப் பொருத்துக.

குறைபாடுகள்	0	1	2	3	4
குறைபாடுகளுள்ள ரேடியோக்களின் எண்ணிக்கை	79	18	2	1	0

தீர்வு :

x	f	fx
0	79	0
1	18	18
2	2	4
3	1	3
4	0	0
	N = 100	$\sum fx = 25$

$$\text{சராசரி} = \bar{x} = \frac{\sum fx}{N}$$

$$= \frac{25}{100}$$

$$\therefore m = 0.25$$

$e^{-m} = e^{-0.25} = 0.7788 = 0.779$

பாய்சான் நிகழ்தகவுப் பரவல்,

$$P(x) = \frac{e^{-m} m^{x}}{x!}$$

$$P(0) = \frac{e^{-0.25}(0.25)^{0}}{0!} = (0.779)$$

$$\therefore f(0) = N.P(0) = 100 \times (0.779) = 77.9$$

மறுதரவு தொடர்பு மூலம் மற்ற எதிர்பார்க்கப்படும் அலைவெண்கள் கணக்கிடப்படுகிறது.

$$f(x+1) = \frac{m}{x+1} f(x).$$

இங்கு x = 0,1,2,3 என மதிப்பிட்டு பிற எதிர்பார்க்கப்படும் அலைவெண்கள் கீழ்கண்டவாறு கணக்கிடப்படுகிறது.

$$f(1) = f(0+1) = \frac{m}{0+1} f(0)$$

$$f(1) = \frac{0.25}{1}(77.9)$$

$$= 19.46$$

$$f(2) = \frac{0.25}{2}(19.46)$$

$$= 2.43$$

$$f(3) = \frac{0.25}{3}(2.43)$$

$$= 0.203$$

$$f(4) = \frac{0.25}{4}(0.203)$$
$$= 0.013$$

கண்டறியப்பட்ட அலைவெண்கள்	79	18	2	1	0	100
எதிர்பார்க்கப்படும் அலைவெண்கள்	78	20	2	0	0	100

எடுத்துக்காட்டு 14 :

குழந்தைகள் பிறப்பு கணக்கெடுக்கும் பொழுது, 80 பிரசவங்களில் ஒன்று இரட்டைக் குழந்தைகளாகப் பிறக்கிறது எனக் கொண்டால், 30 பிரசவங்களில் இரண்டும் அதற்கு மேலும் இரட்டைக் குழந்தைகளாகப் பிறப்பதற்கான நிகழ்தகவு காண்க. இதனை (i) ஈருறுப்புப் பரவல் மற்றும் (ii) பாய்சான் பரவலைக் கொண்டு ஒப்பிடுக.

தீர்வு :

(i) ஈருறுப்புப் பரவலை பயன்படுத்தி

x = இரட்டைக் குழந்தை பிரசவங்களின் எண்ணிக்கை என்க.

இரட்டைக் குழந்தை பிறப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$p = \frac{1}{80} = 0.0125$$

$$\therefore q = 1 - p = 1 - 0.0125$$
$$= 0.9875$$
$$n = 30$$

ஈருறுப்புப் பரவலின் நிகழ்தகவு திண்மச்சார்பு $P(x) = nC_x\, p^x\, q^{n-x}$

இரண்டும் இரண்டிற்கு மேலும் இரட்டைக் குழந்தைகளாகப் பிறப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$P(x \geq 2) = 1 - P(x < 2)$$
$$= 1 - \{P(x = 0) + P(x = 1)\}$$
$$= 1 - \{30C_0(0.0125)^0 (0.9875)^{30} + 30C_1(0.0125)^1(0.9875)^{29}\}$$
$$= 1 - \{1.1(0.9875)^{30} + 3\,(0.125)\,(0.9875)^{29}\}$$
$$= 1 - \{0.6839 + 0.2597\}$$
$$= 1 - 0.9436$$
$$P(x \geq 2) = 0.0564$$

(ii) பாய்சான் பரவலைப் பயன்படுத்தி

பாய்சான் பரவலின் நிகழ்தகவு திண்மச் சார்பு

$$P(x) = \frac{e^{-m} m^x}{x!}$$

சராசரி $= m = np$

$= 30(0.0125) = 0.375$

இரண்டும் இரண்டிற்கு மேலும் இரட்டைக் குழந்தைகளாகப் பிறப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$\begin{aligned} P(x \geq 2) &= 1 - P(x < 2) \\ &= 1 - \{P(x=0) + P(x=1)\} \\ &= 1 - \left\{\frac{e^{-0.375}(0.375)^0}{0!} + \frac{e^{-0.375}(0.375)^1}{1!}\right\} \\ &= 1 - e^{-0.375}(1 + 0.375) \\ &= 1 - (0.6873)(1.375) = 1 - 0.945 = 0.055 \end{aligned}$$

3.3 இயல்நிலைப் பரவல்

3.3.0 அறிமுகம் :

தனித்த மாறிப் பரவல்களான ஈருறுப்புப் பரவல் மற்றும் பாய்சான் பரவல் இரண்டையும் இதற்கு முந்தய பகுதியில் நாம் விளக்கமாக அறிந்தோம். இப்பகுதியில் முக்கியமான தொடர் மாறிப் பரவலைப் பற்றிக் காண்போம். இத்தொடர் மாறிப்பரவலை "இயல்நிலை நிகழ்தகவுப் பரவல் அல்லது "இயல்நிலைப் பரவல்" என்று அழைக்கிறோம். புள்ளியியல் கோட்பாடுகளில் முக்கியப்பங்கு வகிப்பதால் இப்பரவல் மிகவும் முக்கியத்துவம் வாய்ந்தது.

முதன் முதலாக 1733ல் ஆங்கில கணிதமேதை டீ மாய்வர் என்பவர் ஈருறுப்புப் பரவலின் எல்லை நிலையாகக் கொண்ட இயல்நிலைப் பரவலைக் கண்டுபிடித்தார். பின்னர் பிரான்சு கணிதமேதை லாப்லாஸ் என்பவரால் 1777ல் பொது மற்றும் சமூக அறிவியலில் இப்பரவல் பயன்படுத்தப்பட்டது. கார்ல் பிரிடெரிக் காஸியன் (1809) என்பவர் இப்பரவலை உருவாக்கியதால் அவருக்கு மரியாதை செலுத்தும் வகையில் அவர் பெயரிலேயே "காஸியன் பரவல்" என்றும் இயல்நிலைப் பரவலை அழைக்கப்பட்டது.

3.3.1 வரையறை :

x என்ற தொடர் சமவாய்ப்பு மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} ; -\infty < x < \infty, -\infty < \mu < \infty, \sigma > 0.$$

எனில் x ன் சார்பானது சராசரி = μ மற்றும் திட்டவிலக்கம் = σ ஐ உடையதாக அமையும் போது இப்பரவலை இயல்நிலைப் பரவல் என்று அழைக்கிறோம்.

குறிப்பு :

சராசரி μ, திட்டவிலக்கம் σ ஆகியவை இயல்நிலைப் பரவலின் பண்பளவைகளாக அமைகிறது. எனவே இயல்நிலைப் பரவலை $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ என்று குறிக்கப்படும்.

3.3.2 இயல்நிலைப் பரவலின் நிபந்தனைகள் :

ஈருறுப்பு பரவலின் எல்லை நிலையாக இயல்நிலைப் பரவல் அமைகிறது என கீழ் காணும் நிபந்தனைகள் மூலம் பெறலாம்.

அ) முயற்சிகளின் எண்ணிக்கை n ஆனது மிகப்பெரிய முடிவறா எண் (ie., $n \to \infty$) ஆக அமைகிறது மற்றும்

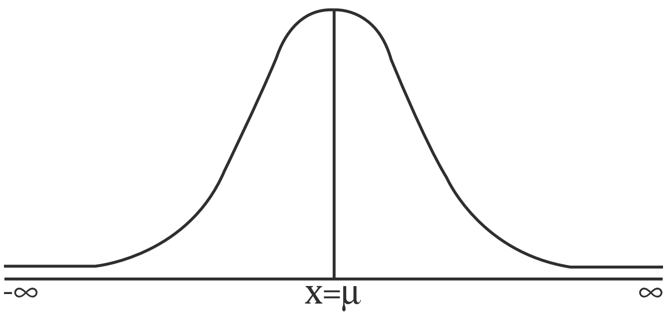
ஆ) p ம் q ம் மிகச்சிறியது அல்ல.

அதே போல் பாய்சான் பரவலின் நெருக்கமாக (எல்லை நிலையாக) அதன் பண்பளவை m ன் மதிப்பு அதிகமாகும் போது (ie $m \to \infty$) இது இயல்நிலைப் பரவல் ஆகிறது.

இ) இயல்நிலைப் பரவலின் மாறிலியாக சராசரி = μ மாறுபாடு = σ^2 மற்றும் திட்டவிலக்கம் = σ ஆக அமைகின்றன.

3.3.3 இயல்நிலை நிகழ்தகவு வளைகோடு :

இயல்நிலைப் பரவலை அளிக்கக் கூடிய 'வளைகோடு இயல்நிலை நிகழ்தகவு வளைகோடு' என்றழைக்கப்படும். இவ்வளைகோடு சராசரி μ விற்கு இருபுறமும் சமச்சீராகவும், மணி வடிவத்தில் அமைகிறது. இருபுறமும் வலது மற்றும் இடது இறுதி முடிவிலி (∞) வரை செல்லும். இவ்வளை கோட்டின் வடிவம் கீழ்காணும் படம் மூலம் அறியலாம்.



3.3.4 இயல்நிலைப் பரவலின் பண்புகள் :

1. இயல்நிலை வளைகோடு மணி வடிவம் உடையது மற்றும் சராசரி μ விற்கு இருபுறமும் சமச்சீர் ஆக அமைகிறது.
2. பரவலின் சராசரி, இடைநிலை மற்றும் முகடு மூன்றும் ஒன்றுகின்றன. (ஒரே மதிப்புடையது)

   i.e. : சராசரி = இடைநிலை = முகடு = μ
3. $x = \mu$ என்ற புள்ளியில் ஒரே ஒரு முகடு மட்டும் உண்டு.
4. இப்பரவல் சமச்சீர் வடிவம் கொண்டதால் கோட்ட அளவை = $\beta_1 = 0$, மற்றும் தட்டையளவு = $\beta_2 = 3$ ஆக அமைகிறது.
5. வளைவரையின் வளைவு மாற்று புள்ளிகள் $x = \mu \pm \sigma$ -ல் அமையும்.
6. வளைவரையின் மீப்பெரு உயரம் (உச்சம்) $x = \mu$ ல் அமையும்

$\therefore$ மீப்பெரு நிலைத்தூரம் (உயரம்) = $\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$

7. x – அச்சானது வளைவரைக்கு தொலை தொடுகோடாக அமைகிறது.

   (i.e. வளைகோடானது x – அச்சினை தொடர்ந்து சென்றாலும் x அச்சினை தொடாமல் இணையாக செல்லும்)

8. முதல் மற்றும் மூன்றாம் கால்மானங்கள் இடைநிலை அளவிலிருந்து சம தூரத்தில அமையும்.

9. சராசரியிலிருந்து கணக்கிடப்பட்ட சராசரி விலக்கம் = (4/5) σ ஆகும்.

10. கால்மான விலக்கம் = (2/3) σ

11. x மற்றும் y என்ற சார்பற்ற இரு இயல்நிலை மாறிகளின் சராசரிகள் μ_1 மற்றும் μ_2 மற்றும் மாறுபாடுகள் σ_1^2 மற்றும் σ_2^2 முறையே இருப்பின் (x + y) என்ற இயல்நிலை மாறியின் சராசரி $(\mu_1 + \mu_2)$ மற்றும் மாறுபாடு $(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)$ ஆகவும் அமையும்.

12. பரப்பளவு பண்புகள்

   $P(\mu - \sigma < x < \mu + \sigma) = 0.6826$

   $P(\mu - 2\sigma < x < \mu + 2\sigma) = 0.9544$

   $P(\mu - 3\sigma < x < \mu + 3\sigma) = 0.9973$

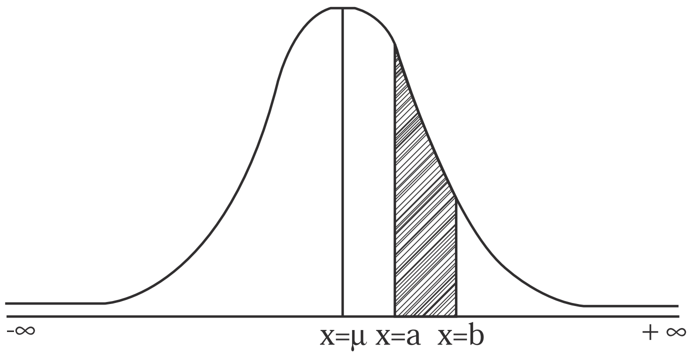
3.3.5 திட்ட இயல்நிலைப் பரவல் :

சமவாய்ப்பு மாறி X ன் இயல்நிலைப் பரவலின் சராசரி μ மற்றும் மாறுபாடு σ^2 என இருந்தால் சராசரி μ = 0 மற்றும் திட்டவிலக்கம் σ = 1 ஐ கொண்ட இயல்நிலைப் பரவலை திட்ட இயல்நிலைப் பரவல் என்று அழைக்கிறோம். இதன் மாறி Z = $\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ என வரையறுக்கப்படுகிறது. திட்ட இயல்நிலைப் பரவலின் சார்பு $\phi(z) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2}z^2}$; $-\infty < z < \infty$ ஆகும்.

இப்பரவலுக்கு பண்பளவைகள் ஏதும் இல்லை என்பதால் இது மிகவும் முன்னேற்றமுடையப் பரவலாகும். எனவே, Z ன் வாயிலாக இயல்நிலை வளைகோட்டின் கீழ் அமையும் பரப்புகளைக் கொண்டு நிகழ்தகவுகள் கணக்கிடப்படுகிறது.

3.3.6 இயல்நிலைப் பரவலின் பரப்பளவு பண்புகள் :

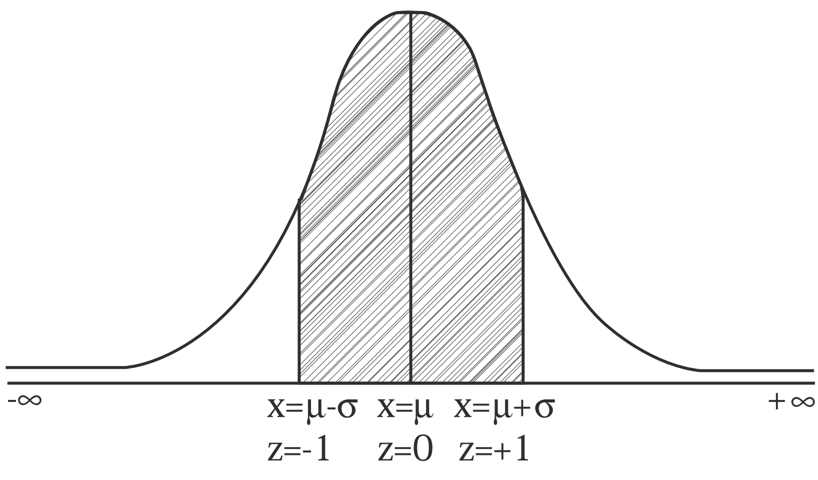
X அச்சின் மீது அமையும் இயல்நிலை நிகழ்தகவு வளைகோட்டின் மொத்த பரப்பளவின் மதிப்பு ஒன்று ஆகும். மேலும் இவ்வளைகோடு "திட்ட நிகழ்தகவு வளைகோடு" என்றும் அழைக்கப்படும். x = a மற்றும் x = b என்ற (a < b) நிலைக்கோடுகளுக்கு இடையே உள்ள பரப்பானது ; x ன் மதிப்புகளான x = a மற்றும் x = b இவைகளுக்கு இடையில் அமையும் நிகழ்தகவுகளைக் குறிக்கும். (i.e. $P(a \le x \le b)$ என்பதை கீழ்காணும் படத்தின் மூலம் அறியலாம்.



x ன் எந்த ஒரு மதிப்பிற்கும் நிகழ்தகவு காண வேண்டுமெனில், முதலில் திட்ட இயல்நிலை மாறி $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ க்கு மாற்ற வேண்டும். பின்னர் Z க்கு உரிய பரப்பினை அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி காண வேண்டும்.

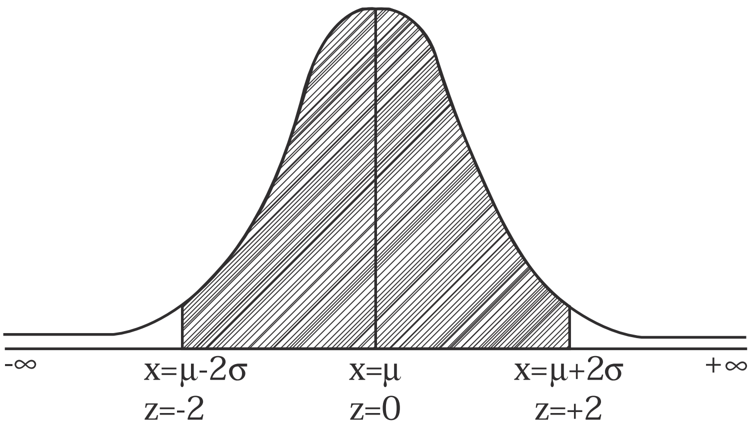
எடுத்துக்காட்டாக, இயல்நிலை மாறி x ன் மதிப்புகள் $(\mu - \sigma\ ,\ \mu + \sigma)$ என்ற இடைவெளியில் அமையும் போது நிகழ்தகவு,

$$\begin{aligned} P(\mu - \sigma < x < \mu + \sigma) &= P(-1 \leq z \leq 1) \\ &= 2P(0 < z < 1) \\ &= 2(0.3413) \\ &= 0.6826 \end{aligned}$$



குறிப்பு : $x = \mu \pm \sigma$ ல் அமையும் புள்ளிகள் வளைவுமாற்று புள்ளிகள் எனப்படும்.

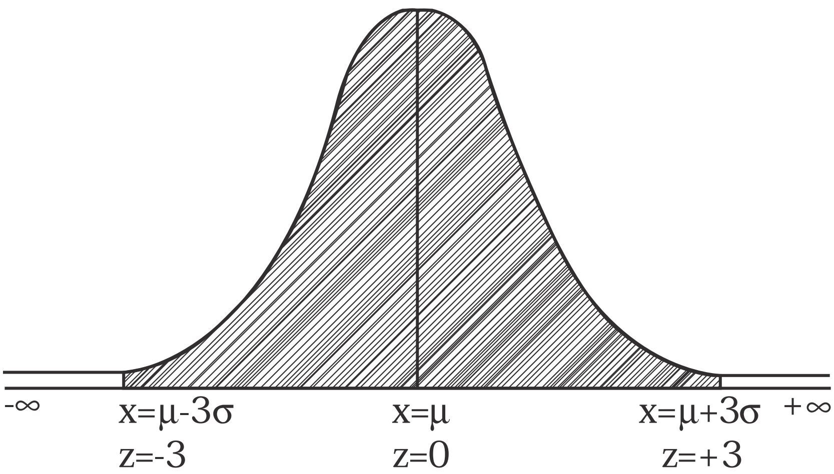
அது போல $$\begin{aligned} P(\mu - 2\sigma < x < \mu + 2\sigma) &= P(-2 < z < 2) \\ &= 2P(0 < z < 2) \\ &= 2(0.4772) = 0.9544 \end{aligned}$$



$$P(\mu - 3\sigma < x < \mu + 3\sigma) = P(-3 < z < 3)$$

$$= 2P(0 < z < 3)$$

$$= 2\,(0.49865) = 0.9973$$



இயல்நிலை மாறி x ன் மதிப்புகள் $\mu \pm 3\sigma$ என்ற எல்லைக்கு வெளியில் அமையும் போது அதன் நிகழ்தகவு

$$P(|x - \mu| > 3\sigma) = P(|z| > 3)$$

$$= 1 - P(-3 \le z \le 3)$$

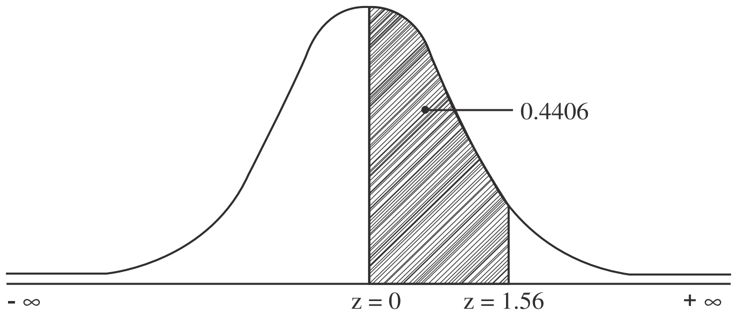
$$= 1 - 0.9773 = 0.0027$$

எனவே கோட்டிபாட்டின் படி இயல்நிலை நிகழ்தகவு வளைகோட்டின் எல்லை $-\infty$ முதல் ∞ வரை இருந்தாலும் மதிப்புகள் (நிகழ்தகவுகள்) வளைவரையின் $\mu \pm 3\sigma$ எல்லைக்குள் அமைவதாக எதிர் பார்க்கப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 15 :

திட்ட இயல்நிலை மாறியின் மதிப்பு **0** மற்றும் **1.56** க்கு இடையில் அமையும் எனில் அதன் நிகழ்தகவு காண்க.

தீர்வு :

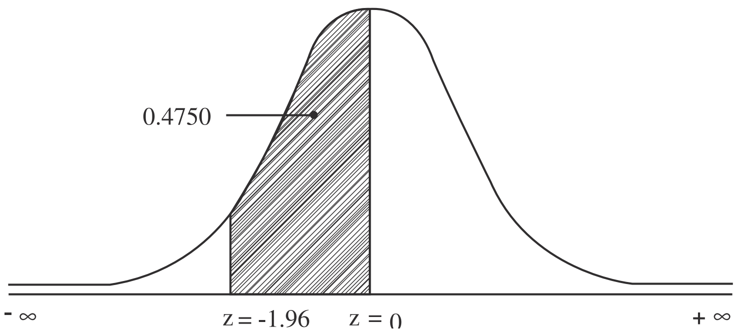


$P(0 < z < 1.56)$ என்பது $z = 0$ மற்றும் $z = 1.56$ இடையே உள்ள பரப்பானது 0.4406 ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 16 :

$z = -1.96$ லிருந்து $z = 0$ வரையுள்ள திட்ட இயல் நிலை மாறியின் பரப்பு காண்க.

தீர்வு :



$z = 1.96$ லிருந்து $z = 0$ வரையுள்ள திட்ட இயல்நிலை மாறியின் பரப்பு என்பது $z = -1.96$ லிருந்து $z = 0$ வரையுள்ள பரப்பிற்கு சமம்.

அதாவது $P(-1.96 < z < 0) = P(0 < z < 1.96)$ (சமச்சீர்)

$$= 0.4750$$

எடுத்துக்காட்டு 17 :

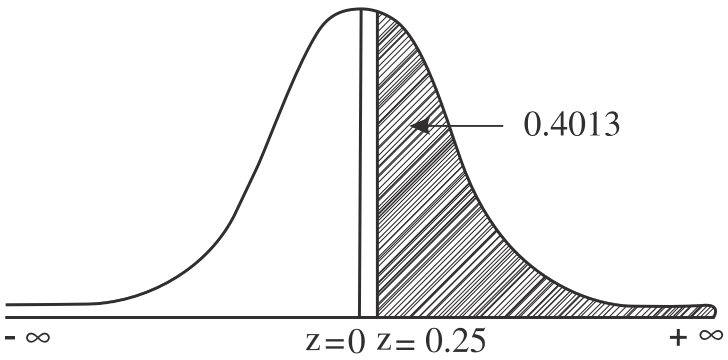
$z = 0.25$ க்கு வலப்புறம் அமையும் பரப்பு காண்க.

தீர்வு :

$$P(z > 0.25) = P(0 < z < \infty) - P(0 < z < 0.25)$$

$$= 0.5000 - 0.0987$$

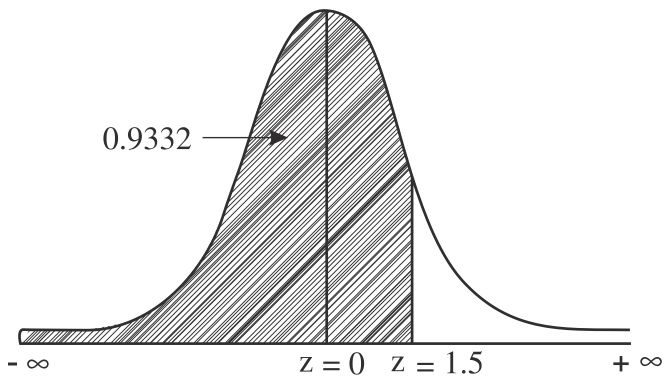
$$= 0.4013$$



எடுத்துக்காட்டு 18 :

z = 1.5 க்கு இடப்புறம் அமையும் பரப்பைக் காண்க.

தீர்வு :



$$P(z < 1.5) = P(-\infty < z < 0) + P(0 < z < 1.5)$$

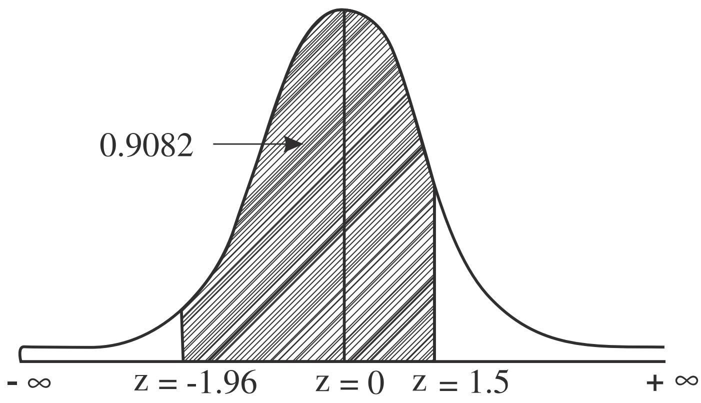
$$= 0.5 + 0.4332$$

$$= 0.9332$$

எடுத்துக்காட்டு 19 :

திட்ட இயல்நிலை மாறியின் மதிப்பு = –1.96 மற்றும் 1.5 க்கு இடைபட்ட பரப்பைக் காண்க.

தீர்வு :



$P(-1.96 < z < 1.5) = P(-1.96 < z < 0) + P(0 < z < 1.5)$

$= P(0 < z < 1.96) + P(0 < z < 1.5)$ **(சமச்சீர்)**

$= 0.4750 + 0.4332$

$= 0.9082$

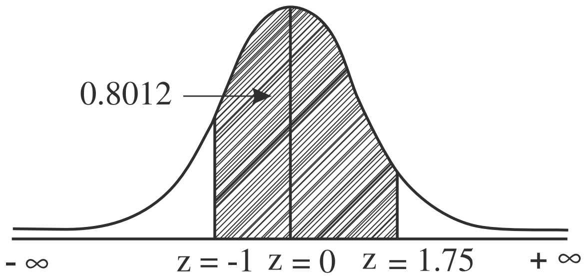
எடுத்துக்காட்டு 20 :

$\mu = 50$ மற்றும் $\sigma = 8$ ஐ கொண்ட இயல்நிலைப் பரவலில் x ன் மதிப்பு **42** மற்றும் **64**க்கு இடையில் அமைவதற்கான நிகழ்தகவு காண்க.

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்டவை $\mu = 50$ மற்றும் $\sigma = 8$

திட்ட இயல்நிலை மாறி $z = \dfrac{x - \mu}{\sigma}$



X = 42 எனில் $Z_1 = \dfrac{42-50}{8} = \dfrac{-8}{8} = -1$

X = 64 எனில் $Z_2 = \dfrac{64-50}{8} = \dfrac{14}{8} = 1.75$

$\therefore P(42 < x < 64) = P(-1 < z < 1.75)$

$= P(-1 < z < 0) + P(0 < z < 1.95)$

$= P(0 < z < 1) + P(0 < z < 1.75)$ **(சமச்சீர்)**

$= 0.3413 + 0.4599$

$= 0.8012$

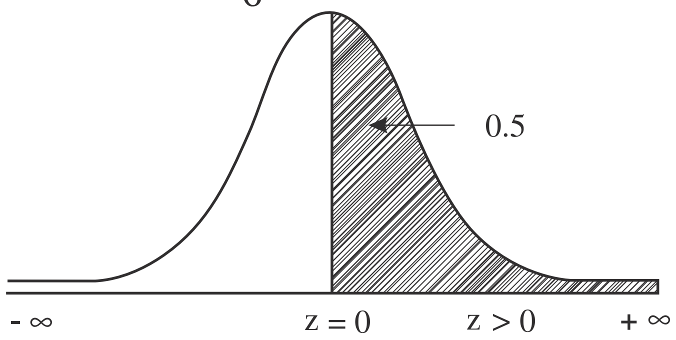
எடுத்துக்காட்டு 21 :

ஒரு வகுப்பில் உள்ள மாணவர்களுக்கு திறமைக்கான சோதனை கொடுக்கப்பட்டது. அவர்களுடைய மதிப்பெண்களின் பரவல், சராசரி **60** ம், திட்டவிலக்கம் **5**ம் கொண்ட இயல்நிலைப் பரவலைச் சார்ந்துள்ளதாகத் தெரிய வருகிறது. எத்தனை சதவீதம் மாணவர்கள் i) **60**க்கு மேற்பட்ட மதிப்பெண்களும் (ii) **56**க்கு கீழ் மதிப்பெண்களும் (iii) **45** மற்றும் **65** மதிப்பெண்களுக்கு இடையில் பெற்றுள்ளனர் எனக் காண்க.

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்டவை, சராசரி $\mu = 60$ மற்றும் திட்டவிலக்கம் $\sigma = 5$

திட்ட இயல் நிலை மாறி $Z = \dfrac{x - \mu}{\sigma}$



$$X = 60 \text{ எனில் } Z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{60-60}{5} = 0$$

$$\therefore P(x > 60) = P(z > 0)$$

$$= P(0 < z < \infty) = 0.5000$$

எனவே **60** மதிப்பெண்களுக்கு மேல் வாங்கிய மாணவர்களின் சதவீதம் $0.5000(100) = 50\ \%$

$$X = 56, \text{ எனில் } Z = \frac{56-60}{5} = \frac{-4}{5} = -0.8$$

$$P(x < 56) = P(z < -0.8)$$

$$= P(-\infty < z < 0) - P(-0.8 < z < 0)$$

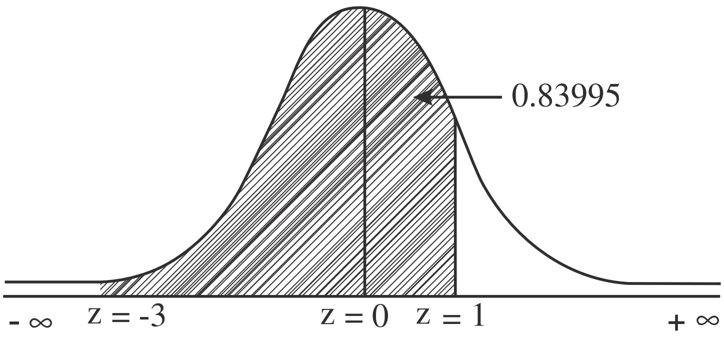
$$= P(0 < z < \infty) - P(0 < z < 0.8) \text{ (சமச்சீர்)}$$

$$= 0.5 - 0.2881$$

$$= 0.2119$$

எனவே, **56** மதிப்பெண்களுக்கு கீழ் உள்ள மாணவர்களின் சதவீதம் $0.2119(100) = 21.19\ \%$

$$X = 45, \text{ எனில் } Z = \frac{45-60}{5} = \frac{-15}{5} = -3$$



$X = 65$ எனில் $z = \frac{65-60}{5} = \frac{5}{5} = 1$

$$P(45 < x < 65) = P(-3 < z < 1)$$

$$= P(-3 < z < 0) + P(0 < z < 1)$$

$$= P(0 < z < 3) + P(0 < z < 1) \quad \text{(சமச்சீர்)}$$

$$= 0.4986 + 0.3413$$

$$= 0.8399$$

45 மற்றும் **65** மதிப்பெண்களுக்கு இடையில் உள்ள மாணவர்களின் சதவீதம் = 0.8399 (100) = 83.99 %

எடுத்துக்காட்டு 22 :

சராசரி **2** மற்றும் திட்டவிலக்கம் **3** எனக் கொண்ட இயல்நிலைப் பரவலை x தழுவுகிறது. x ஆனது நிகழ்தகவு 0.4115 ஐ ஏற்கின்ற நிலையில் மாறி x ன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்டவை, $\mu = 2$, $\sigma = 3$. z ஐ தேவையான திட்டநிலை மதிப்பாகக் கொள்வோம். எனவே, அட்டவணையிலிருந்து 0.4115 என்ற பரப்பிற்கு உரிய சரியான z ன் மதிப்பு **1.35** ஆகும். அதாவது z = 1.35

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

$$1.35 = \frac{x-2}{3}$$

$$x = 3(1.35) + 2$$

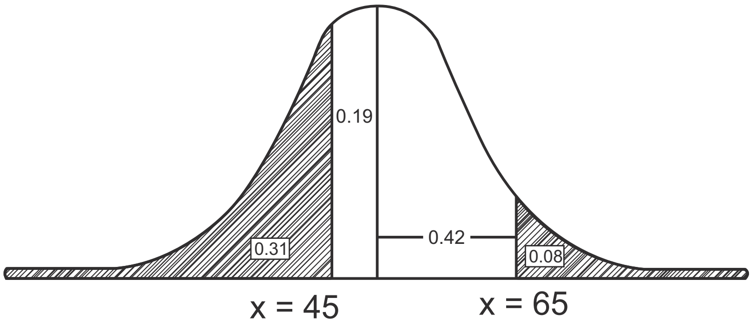
$$= 4.05 + 2 = 6.05$$

எடுத்துக்காட்டு 23 :

ஓர் இயல் நிலைப் பரவலில் 31 % உறுப்புகள் 45க்கு கீழும் 8 % உறுப்புகள் **64**க்கு மேலும் உள்ளன. அதன் சராசரி மற்றும் மாறுபாடு காண்க.

தீர்வு :

இயல்நிலைப் பரவலில் சராசரி μ மற்றும் திட்டவிலக்கம் σ என்றும் உறுப்புகள் x என குறிப்பதாகக் கொள்வோம்.



$x = 45,\ z = \dfrac{x-\mu}{\sigma} = \dfrac{45-\mu}{\sigma} = -z_1$ என்க.

படத்தின் வாயிலாக x = 45 மற்றும் x = 64 ஐ குறிக்கப்பட்டிருப்பதை அறியலாம்.

31 % உறுப்புகள் x = 45 க்கீழ் அமைவதால், x ன் நிலையானது $x = \mu$ என்ற நிலைக்கோட்டிற்கு இடதுபுறம் அமைகிறது.

8 % உறுப்புகள் x = 64 க்கு மேல் அமைவதால், x ன் நிலையானது $x = \mu$ என்ற நிலைக்கோட்டிற்கு வலதுபுறம் அமைகிறது.

ஏனெனில் x ன் மதிப்பு $x = \mu$ க்கு இடப்புறம் உள்ளதால் z_1 ன் மதிப்பு எதிர் எண்ணாக $(-z_1)$ எடுக்கப்படுகிறது.

மேலும் படத்தின் மூலமாக

$$P(x < 45) = 0.31$$

$$P(z < -z_1) = 0.31$$

$$P(-z_1 < z < 0) = P(-\infty < z < 0) - p(-\infty < z < z_1)$$

$$= 0.5 - 0.31 = 0.19$$

$$P(0 < z < z_1) = 0.19 \text{ (சமச்சீர்)}$$

$$z_1 = 0.50 \text{ (அட்டவணையிலிருந்து)}$$

$$P(x > 64) = 0.08$$

$$P(0 < z < z_2) = P(0 < z < \infty) - P(z_2 < z < \infty)$$

$$= 0.5 - 0.08 = 0.42$$

$$z_2 = 1.40 \text{ (அட்டவணையிலிருந்து)}$$

z_1 மற்றும் z_2 ன் மதிப்புகளை பிரதியிட,

எனவே

$$\frac{45-\mu}{\sigma} = -0.50 \text{ மற்றும் } \frac{64-\mu}{\sigma} = 1.40$$

$$\mu - 0.50\,\sigma = 45 \text{ ----- } (1)$$

$$\mu + 1.40\,\sigma = 64 \text{ ----- } (2)$$

$$(2) - (1) \Rightarrow 1.90\,\sigma = 19 \Rightarrow \sigma = 10$$

திட்டவிலக்கம் $\sigma = 10$ ஐ (1) ல் பிரதியிட

$$\mu = 45 + 0.50\,(10)$$

$$= 45 + 5 = 50$$

சராசரி $\mu = 50$ மற்றும் மாறுபாடு $\sigma^2 = 100$

பயிற்சி – 3

I. **சரியான விடையைத் தேர்ந்தெடுக்கவும்** :

1. ஈருறுப்புப் பரவலின் பயன்பாட்டிற்குரியது

அ) அரிய நிகழ்ச்சிகள்

ஆ) திரும்ப திரும்ப நடைபெறும் இரு நிகழ்ச்சிகள்

இ) **3** நிகழ்ச்சிகள்

ஈ) நடைபெறாத நிகழ்ச்சிகள்

2. ஈருறுப்புப் பரவலின் வெற்றிக்கான நிகழ்தகவு p மற்றும் தோல்விக்கான நிகழ்தகவு q எனில் சராசரி மற்றும் மாறுபாடு இரண்டிற்கும் இடையே உள்ள உறவு

அ) சராசரி < மாறுபாடு ஆ) சராசரி > மாறுபாடு

இ) சராசரி = மாறுபாடு ஈ) சராசரி ≤ மாறுபாடு

3. ஈருறுப்புப் பரவலின் மாறுபாடானது

அ) npq ஆ) np இ) $\sqrt{npq}$ ஈ) 0

4. ஈருறுப்புப் பரவல் $15C_x\left(\frac{2}{3}\right)^x\left(\frac{1}{3}\right)^{15-x}$ எனில் சராசரியானது

அ) 5 ஆ) 10 இ) 15 ஈ) 3

5. ஈருறுப்புப் பரவலின் சராசரி **8** மற்றும் மாறுபாடு **4** எனில் $P(x = 1)$ ன் மதிப்பானது

அ) $\frac{1}{2^{12}}$ ஆ) $\frac{1}{2^{4}}$ இ) $\frac{1}{2^{6}}$ ஈ) $\frac{1}{2^{8}}$

6. ஈருறுப்பு பரவலில் $n = 4$ மற்றும் $P(x = 2) = 3P(x = 3)$ அமையும் பொழுது p ன் மதிப்பானது

அ) $\frac{9}{11}$ ஆ) 1 இ) $\frac{1}{3}$ ஈ) இதில் ஏதுமில்லை

7. சராசரி **10**ம் முயற்சிகளின் எண்ணிக்கை **30**ம் உடைய ஈருறுப்புப் பரவலில் தோல்விக்கான நிகழ்தகவு

அ) 0.25 ஆ) 0.333 இ) 0.666 ஈ) 0.9

8. ஈருறுப்புப் பரவலின் மாறுபாடு **2** எனில் அதன் திட்டவிலக்கம்

அ) 2 ஆ) 4 இ) 1/2 ஈ) $\sqrt{2}$

9. ஈருறுப்புப் பரவலில் சார்பற்ற முயற்சிகளின் எண்ணிக்கை n எனில் n வெற்றிகளுக்கான நிகழ்தகவு

அ) $nC_x p^x q^{n-x}$ ஆ) 1 இ) p^n ஈ) q^n

10. ஈருறுப்புப் பரவலை முழுமையாக நிர்ணயிக்க இவை தெரிந்தால் போதும்

அ) p மட்டும் ஆ) q மட்டும் இ) p மற்றும் q ஈ) p மற்றும் n

11. ஈருறுப்புப் பரவலில் முயற்சிகளானது

அ) ஒன்றை ஒன்று விலக்குவன ஆ) ஒன்றை ஒன்று விலக்காதவை

இ) சார்பற்றவை ஈ) சார்பற்றவை அல்ல

12. ஒன்றை ஒன்று சாராத இரு மாறிகள் x மற்றும் y ஆகியவற்றின் ஈருறுப்புப் பரவல்களின் பண்பளவைகளாக (n_1, p) மற்றும் (n_2, p) முறையே இருந்தால் அவைகளின் கூடுதல் $(x + y)$ இன் ஈருறுப்பு பரவலின் பண்பளவையானது

அ) $(n_1 + n_2, 2p)$ ஆ) (n, p) இ) $(n_1 + n_2, p)$ ஈ) $(n_1 + n_2, p + q)$

13. பாய்சான் பரவலில்

அ) சராசரி $>$ மாறுபாடு ஆ) சராசரி $=$ மாறுபாடு

இ) சராசரி $<$ மாறுபாடு ஈ) சராசரி $\neq$ மாறுபாடு

14. பாய்சான் பரவலுடன் தொடர்புடையவை

அ) அரிய நிகழ்ச்சிகள் ஆ) குறிப்பிட்ட நிகழ்ச்சிகள்

இ) நடைபெற முடியாத நிகழ்ச்சிகள் ஈ) பெரும்பாலும் நிச்சயமான நிகழ்ச்சிகள்

15. m_1 மற்றும் m_2 என்பன x மற்றும் y என்ற பாய்சான் மாறிகளின் பண்பளவைகள் எனில் (x + y) என்ற பாய்சான் மாறியின் பண்பளவையானது,

அ) m_1m_2 ஆ) $m_1 + m_2$ இ) $m_1 - m_2$ ஈ) m_1/m_2

16. பாய்சான் பரவல் ஒரு

அ) தொடர்ச்சியான பரவல்

ஆ) தனித்த பரவல்

இ) தொடர்ச்சியாக அல்லது தனித்த பரவலாக

ஈ) தொடர்ச்சியும் அல்ல தனித்த பரவலும் அல்ல

17. ஈருறுப்பு பரவலின் எல்லை நிலையாகப் பாய்சான் பரவல் அமைவதற்கு தேவையான நிபந்தனை

அ) $n \to \infty$; $p \to 0$ மற்றும் $np = \sqrt{m}$ ஆ) $n \to 0$; $p \to \infty$ மற்றும் $p=1/m$

இ) $n \to \infty$; $p \to \infty$ மற்றும் $np = m$ ஈ) $n \to \infty$; $p \to 0$ மற்றும் $np = m$

18. பாய்சான் பரவலின் எதிர்பார்க்கப்படும் சராசரி மதிப்பானது **1** எனில் $P(x < 1)$ ன் மதிப்பு

அ) e^{-1} ஆ) $1\text{-}2e^{-1}$ இ) $1\text{-} 5/2e^{-1}$ ஈ)இதில் ஏதுமில்லை

19. இயல்நிலைப் பரவல், ஈருறுப்புப் பரவலின் எல்லை நிலையாக தேவையான நிபந்தனை

அ) $n \to \infty$ $p \to 0$ ஆ) $n \to 0$, $p \to q$

இ) $n \to \infty$, $p \to n$ ஈ) $n \to \infty$ மற்றும் p ம் q ம் சிறியதல்ல

20. இயல்நிலைப் பரவலில் கோட்ட அளவு

அ) ஒன்று ஆ) பூச்சியம்

இ) ஒன்றை விட பெரியது ஈ) ஒன்றை விட சிறியது

21. இயல்நிலைப் பரவலின் முகடு

அ) σ ஆ) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ இ) μ ஈ) 0

22. திட்ட இயல்நிலைப் பரவலை இவ்வாறு குறிப்பிடலாம்

அ) N (0,0) ஆ) N(1,1) இ) N(1,0) ஈ) N(0,1)

23. இயல்நிலை நிகழ்தகவு வளைகோட்டின் கீழ் அமையும் மொத்த பரப்பு

அ) ஒன்றை விட சிறியது ஆ) ஒன்று

இ) ஒன்றை விட பெரியது ஈ) பூச்சியம்

24. சமவாய்ப்பு மாறி x ன் மதிப்புகள் $(\mu - 2\sigma\ ,\ \mu + 2\sigma)$ என்ற இடைவெளிக்குள் ஏற்படுத்தும் நிகழ்தகவு

அ) 0.9544 ஆ) 0.6826 இ) 0.9973 ஈ) 0.0027

25. $P(-\infty < z < 0)$ இன் பரப்பளவு

அ) 1 ஆ) 0.1 இ) 0.5 ஈ) 0

26. திட்ட இயல்நிலைப் பரவலில்

அ) $\mu = 1, \sigma = 0$ ஆ) $\mu = 0, \sigma = 1$ இ) $\mu = 0, \sigma = 0$ ஈ) $\mu = 1, \sigma = 1$

27. சமவாய்ப்பு மாறி x ன் இயல்நிலைப் பரவல் $f(x) = C.e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-100)^2}{25}}$ எனில் C ன் மதிப்பு

அ) $5\sqrt{2\pi}$ ஆ) $\frac{1}{5\sqrt{2\pi}}$ இ) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ ஈ) 5

28. இயல்நிலைப் பரவலுக்கு

அ) முகடு இல்லை ஆ) ஒரே ஒரு முகடு உண்டு

இ) இரு முகடுகள் உண்டு ஈ) பல முகடுகள் உண்டு

29. இயல்நிலைப் பரவலுக்கு

(a) சராசரி = இடைநிலை = முகடு (b) சராசரி < இடைநிலை < முகடு

(c) சராசரி > இடைநிலை > முகடு (d) சராசரி > இடைநிலை < முகடு

30. இயல்நிலைப் பரவலின் நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பு $P(X = x) = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-30)^2}{25}}$; $-\alpha<x<\alpha$ எனில் சராசரி மற்றும் மாறுபாடு

(a) சராசரி = 30 மாறுபாடு = 5 (b) சராசரி = 0, மாறுபாடு = 25

(c) சராசரி = 30 மாறுபாடு = 25 (d) சராசரி = 30, மாறுபாடு = 10

31. இயல்நிலைப் பரவலின் சராசரி = **60** எனில் இதன் முகடு ஆனது

அ) 60 ஆ) 40 இ) 50 ஈ) 30

32. இயல்நிலை மாறி x க்கு $\mu = 100$ மற்றும் $\sigma^2 = 25$ எனில் $P(90 < x < 120)$ இன் மதிப்பு

அ) $P(-1 < z < 1)$ ஆ) $P(-2 < z < 4)$

இ) $P(4 < z < 4.1)$ ஈ) $P(-2 < z < 3)$

33. x என்ற மாறியானது N(6, 1.2) மற்றும் $P(0 \le z \le 1) = 0.3413$ எனில் $P(4.8 \le x \le 7.2)$ இன் மதிப்பு

அ) 0.3413 ஆ) 0.6587 இ) 0.6826 ஈ) 0.3174

II. கோடிட்ட இடங்களை நிரப்புக :

34. நாணயத்தை தொடர்ந்து சுண்டுவதால் தலை கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு __________ ஆகும்.

35. ஈருறுப்பு பரவலின் சராசரி = 4 மற்றும் மாறுபாடு = 2 எனில் பண்பளவைகளானது ___________ ஆகும்.

36. $\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)^9$ என்பது ஈருறுப்பு பரவலை குறிக்கும் போது இதன் திட்டவிலக்கம் __________ ஆகும்.

37. ஈருறுப்பு பரவலில் முயற்சிகளின் எண்ணிக்கை மிகப் பெரியதாகவும், வெற்றிக்கான நிகழ்தகவு பூச்சியமாகவும் அமைந்த நிலையில் இப்பரவல் _________ ஆகும்.

38. பாய்சான் பரவலில் சராசரி மற்றும் மாறுபாடு ________ ஆகும்.

39. பாய்சான் பரவலின் சராசரி = 0.49 எனில் திட்டவிலக்கம் _________ ஆகும்.

40. பாய்சான் பரவலில், எதிர்பார்க்கப்படும் நிகழ்வெண் காண பயன்படுத்தப்படும் மறுதரவு தொடர்பானது _______ ஆகும்.

41. $\frac{\sum fx^2}{N}-(\bar{x})^2$ என்ற வாய்ப்பாடு மூலம் _________ கண்டறியலாம்.

42. இயல்நிலைப் பரவலில் சராசரியானது ___________முதல் _________ வரை மதிப்புகளைப் பெறும்.

43. $\mu = 0$ மற்றும் $\sigma = 1$ எனில் இயல்நிலைப் பரவல் _________ என அழைக்கப்படும்.

44. $P(-\infty < z < 0)$ எடுத்து கொள்ளும் பரப்பளவு ______ ஆகும்.

45. $\mu = 1200$ மற்றும் $\sigma = 400$ எனில் $x = 800$ க்குரிய திட்ட இயல்நிலை மாறி z ன் மதிப்பு __________ ஆகும்.

46. $x = \mu \pm \sigma$ என்ற புள்ளிகள் ___________ என்றழைக்கப்படும்.

47. $P(-3 < z < 3)$ ன் மதிப்பு ___________ ஆகும்.

48. இயல்நிலை வளைகோட்டிற்கு x அச்சு _________ ஆகும்.

III. பின்வரும் வினாக்களுக்கு விடையளி.

49. ஈருறுப்புப் பரவலில் சராசரி = 7 மற்றும் மாறுபாடு = 16 என்ற கூற்றை விளக்குக.

50. சராசரி 3 மற்றும் மாறுபாடு 2 எனக் கொண்ட ஈருறுப்பு பரவலைக் காண்க.

51. ஈருறுப்புப் பரவலின் சராசரி மற்றும் திட்டவிலக்கம் முறையே 12 மற்றும் 2 எனில் n மற்றும் p ன் மதிப்புகளைக் காண்க.

52. இரு பகடைகள் 4 முறை வீசப்படுகின்றன. ஒரே மாதிரியான எண்கள் இருபகடையில் கிடைத்தலை வெற்றி எனக் கொண்டால், 2 வெற்றிகள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு காண்க.

53. ஈருறுப்புப் பரவல் – விளக்குக.

54. ஈருறுப்புப் பரவலின் பண்புகளை விவரிக்கவும்.

55. ஈருறுப்புப் பரவலின் மாறிகளின் நிபந்தனைகளைக் கூறுக.

56. ஈருறுப்புப் பரவலைப் பொருத்துதல் பற்றி விவரிக்கவும்.

57. $(0.68 + 0.32)^{10}$ என்ற ஈருறுப்புப் பரவலின் கீழ் இரு வெற்றிகள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவை காண்க.

58. ஈருறுப்பு பரவலில் ஓர் நிகழ்ச்சி நடைபெற நிகழ்தகவு = 1/5 மற்றும் முயற்சிகளின் எண்ணிக்கை 100 எனில் அதன் சராசரி என்ன ?

59. துறைமுகம் ஒன்றில் 10 கப்பல்களில் சராசரியாக 8 கப்பல்கள் பாதுகாப்பான முறையில் வந்தடைகின்றன. 1600 கப்பல்களில் பாதுகாப்பான முறையில் வந்தடைவதற்கான சராசரி மற்றும் திட்டவிலக்கம் காண்க.

60. கல்லூரிகளில் மாலை நேரக்கல்வி பெறும் மாணவர்களில் இளநிலை பட்டம் பெறுபவர்களின் நிகழ்தகவு = 0.4 எனில் 5 மாணவர்களில் (i) ஒருவரும் இல்லை (ii) ஒருவர் மட்டும் (iii) குறைந்தது ஒருவர் மட்டும் பட்டம் பெறுவதற்கான நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

61. நன்கு நாணயங்கள் ஒரே சமயத்தில் சுண்டப்படுகின்றன எனில் i) 2 தலைகள் மற்றும் 2 பூக்கள் ii) குறைந்தது 2 தலைகள் iii) குறைந்தது ஒரு தலை கிடைக்க நிகழ்தகவு காண்க.

62. ஒரு தானியங்கி இயந்திரத்தின் 10% குறைபாடுள்ளவையாக கண்டறியப்படுகிறது. 20 திருகாணிகள் சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கும் போது i) சரியாக 2 மட்டும் குறைபாடாக ii) அதிகபட்சம் 3 குறைபாடாக iii) குறைந்தது 2 குறைபாடாக இருக்க நிகழ்தகவு காண்க.

63. 5 பகடைகள் ஒன்று சேர 96 முறைகள் வீசப்படுகின்றன. இதில் 4, 5 அல்லது 6 கிடைப்பதற்கான அலைவெண்கள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. எதிர்பார்க்கப்படும் அலைவெண்கள் காண்க. மற்றும் கண்டறியப்பட்ட மற்றும் எதிர்பார்க்கப்படும் அலைவெண்களுக்கு திட்டவிலக்கத்தை கணக்கிட்டு ஒப்பிடுக.

4, 5 (அ) 6 கிடைத்தல்	:	0	1	2	3	4	5
அலைவெண்	:	1	10	24	35	18	8

64. கீழ்வரும் விவரங்களுக்கு ஈருறுப்புப் பரவலைப் பொருத்துக.

X :	0	1	2	3	4
f	18	35	30	13	4

65. 8 நாணயங்கள் ஒரு சேர 256 முறை சுண்டப்படுகின்றன. தலை விழுதலுக்கான எண்ணிக்கை கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. எதிர்பார்க்கப்படும் அலைவெண்களைக்

காண்க. எதிர்பார்க்கப்படும் அலைவெண்களுக்கு சராசரி மற்றும் திட்டவிலக்கம் காண்க. மேலும் கண்டறியப்பட்ட அலைவெண்களுக்கு சராசரி மற்றும் திட்டவிலக்கம் காண்க.

தலைகளின் எண்ணிக்கை	:	0	1	2	3	4	5	6	7	8
அலைவெண்கள்	:	2	6	30	52	67	56	32	10	1

66. பாய்சான் பரவல் பற்றி விவரிக்கவும்.

67. பாய்சான் பரவலுக்கு எடுத்துக்காட்டுகள் இரண்டைத் தருக.

68. பாய்சான் பரவலின் பண்புகளைக் கூறவும்.

69. பாய்சான் பரவலைப் பொருத்துதல் பற்றி விவரிக்கவும்.

70. பாய்சான் பரவலில் மாறி x ன் சராசரி 6 எனில் i) $P(x = 0)$ மற்றும் ii) $P(x = 2)$ மதிப்புகளைக் காண்க.

71. பாய்சான் பரவலின் மாறுபாடு 0.5 எனில் $P(x = 3)$ ன் மதிப்பு காண்க. $[e^{-0.5} = 0.6065]$

72. பாய்சான் பரவலின் கீழ் சமவாய்ப்பு மாறி x க்கு $P(x =1) = P(x = 2)$ எனில் பரவலின் சராசரி மற்றும் $P(x = 0)$ ன் மதிப்பு காண்க. $[e^{-2} = 0.1353]$

73. ஒரு நிறுவனத்தால் தயாரிக்கப்படும் விளக்குகளில் 3% குறைபாடாக உள்ளது 100 விளக்குகள் கொண்ட ஒரு கூறில் சரியாக 5 விளக்குகள் குறைபாடாக இருக்க நிகழ்தகவு காண்க.

74. ஒரு தொழிற்பேட்டையில் கடந்த கால அனுபவத்தின் மூலமாக மாதம் ஒன்றிற்கு சராசரியாக 4 தொழிற்சாலை விபத்துகள் நடைபெறுவதாகக் கணக்கிடப்படுகிறது. கொடுக்கப்பட்ட ஓர் ஆண்டில் 3க்கும் குறைவான விபத்துகள் ஏற்படுவதற்கான நிகழ்தகவு காண்க. இதற்கு பாய்சான் பரவலைப் பயன்படுத்துக. $[e^{-4} = 0.0183]$

75. தொலைக்காட்சிப் பெட்டிகள் தயாரிக்கும் போது அதில் சராசரியாக 5% குறைபாடுள்ளவையாகத் தெரிகிறது. 100 அடங்கிய ஒரு தொகுதியினை விற்பனை செய்யும் போது 4க்கு மேல் குறைபாடு இல்லை என உறுதி அளிக்கின்றனர். அந்த உறுதி மொழியை நிறைவு செய்ய முடியாமல் போவதற்கான நிகழ்தகவு காண்க. $[e^{-5} = 0.0067]$

76. ஒரு கூர்கத்தி உற்பத்திச் செய்யும் தொழிற்சாலையில் உற்பத்தியின் போது 1/5% குறைபாடுள்ளவையாக இருக்கிறது. 10 கூர்கத்திகள் கொண்ட பெட்டிகளாக விற்கப்படுகின்றன. பாய்சான் பரவலைப் பயன்படுத்தி 1,00,000 அடங்கிய பெட்டிகளில் (i) ஒன்று குறைபாடாக (ii) இரண்டு குறைபாடாக இருக்க நிகழ்தகவு காண்க.

77. அதிகபேர் வேலை செய்யும் ஒரு தொழிற்சாலையில், ஒரு வேலைப் பருவத்தில் சராசரியாக 3 பேர் விடுப்பில் உள்ளனர். ஒரு குறித்த பருவத்தில் i) சரியாக இருவர் (ii) நான்கு நபர்களுக்கு மேல் விடுப்பில் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு காண்க.

78. மருந்து புட்டிகளை தயாரிக்கும் ஒருவர் தமது தயாரிப்பில் 0.1% புட்டிகள் குறைபாட உள்ளதைக் காண்கிறார். அவைகள் 500 புட்டிகள் கொண்டதாக பெட்டிகளில் அடைக்கப்படுகின்றன. மருந்து விற்பனையாளர் 100 பெட்டிகளை வாங்குகிறார். பாய்சான் பரவலைப் பயன்படுத்தி எத்தனைப்

பெட்டிகள் (i) குறைபாடில்லாத ii) சரியாக இரண்டு குறைபாடுள்ளவை (iii) குறைந்தது 2 குறைபாடுள்ள பெட்டிகள் இருக்கும் எனக் காண்க.

79. தட்டச்சு செய்யும் போது ஏற்படும் தட்டச்சுப் பிழைகளின் எண்ணிக்கையின் பரவல் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இதற்கு பாய்சான் பரவலைப் பொருத்துக.

ஒரு பக்கத்தில் உள்ள							
பிழைகளின் எண்ணிக்கை	:	0	1	2	3	4	5
பக்கங்களின் எண்ணிக்கை	:	142	156	69	57	5	1

80. கீழ்காணும் விவரங்களுக்கு பாய்சான் பரவலைப் பொருத்துக.

x : 0	1	2	3	4	5	6	7	8	மொத்தம்
f : 229	325	257	119	50	17	2	1	0	1000

81. ஒரு நகரில் 50 நாட்கள் கொண்ட ஒரு கால அட்டவணையின் போது ஏற்படும் விபத்துகளின் எண்ணிக்கை, நாட்கள் விவரம் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இதற்கான பாய்சான் பரவலைப் பொருத்துக.

விபத்துகளின் எண்ணிக்கை	:	0	1	2	3	4
ஏற்பட்ட நாட்களின் எண்ணிக்கை	:	21	18	7	3	1

82. திட்ட இயல்நிலை மாறியின் மதிப்பு $Z = 0.78$ மற்றும் $Z = 2.75$ இடைபட்ட மதிப்பின் நிகழ்தகவு காண்க.

83. இயல்நிலை திட்ட வளைகோட்டின் கீழ் $Z = 0$ மற்றும் $Z = 1.75$ இடைபட்ட பரப்பு காண்க.

84. இயல்நிலை திட்ட வளைவரைக்கு கீழ் $Z = -1.5$ மற்றும் $Z = 2.6$ இடைபட்ட பரப்பு காண்க.

85. $Z = 1.96$ க்கு இடப்புறம் அமையும் பரப்பைக் காண்க.

86. இயல்நிலை திட்ட வளைகோட்டின் கீழ் $Z = 2.70$ க்கு வலப்புறம் அமையும் பரப்பு காண்க.

87. சராசரி = 50 மற்றும் திட்டவிலக்கம் = 8 எனக் கொண்ட இயல் நிலைப் பரவலில் $x = 34$ மற்றும் $x = 62$ இடையே உள்ள நிகழ்தகவு காண்க.

88. இயல்நிலைப் பரவலின் சராசரி = 20 மற்றும் திட்டவிலக்கம் = 10 எனில் $x = 15$ மற்றும் $x = 40$க்கு இடைபட்ட பரப்பு யாது ?

89. சராசரி 30 ம் திட்டவிலக்கம் 5 எனவும் கொண்ட இயல்நிலை வளைகோட்டில் 26 மற்றும் 40க்கு இடைபட்ட பரப்பு காண்க.

90. ஒரு பல்பொருள் அங்காடியில் வாடிக்கையாளர்களின் நிலுவைத் தொகைகள் ரூ.1200ஐ சராசரியாகவும், ரூ.400 ஐ திட்டவிலக்கமாகவும் கொண்ட இயல் நிலைப் பரவலாக அமைகிறது எனில் (i) ரூ.1500க்கு அதிகமாக உள்ள நிலுவை கணக்குகளின் சதவீதம் (ii) ரூ.1000க்கும் ரூ.1500க்கும் இடையில் உள்ள நிலுவை கணக்குகளின் சதவீதம் iii) ரூ.1500க்கு குறைவான நிலுவை உள்ள கணக்குகளின் சதவீதம் காண்க.

91. தொழில நுட்ப நுழைவுத் தேர்விற்கு பயிற்சி வகுப்புகள் எடுக்கும் விரிவுரையாளர்கள் 100 பேர்களின் வாராந்திர ஊதியம் சராசரி ரூ.700ம் திட்டவிலக்கம் ரூ400மாக கொண்ட இயல்நிலைப் பரவலாகக் கொண்டது எனில் i) ரூ.720 மற்றும் ரூ.750க்கு இடையே பெறுபவர்கள் ii) ரூ.750க்கு மேல் பெறுபவர்கள் iii) ரூ.630க்கும் குறைவாக பெறுபவர்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

92. X ஐ மாறியாகக் கொண்ட இயல்நிலைப் பரவலில் சராசரி 12ம் திட்டவிலக்கம் 4ம் எனில்

i) $X \geq 20$ ii) $X \leq 20$ iii) $0 < x < 12$ க்கான மதிப்புகளுக்கு நிகழ்தகவு காண்க.

93. 100 உலர்மின் கலங்கள் அடங்கிய ஒரு மாதிரியில அவைகளின் பலன் தரும் காலங்களை சோதனையிட்டு கிடைப்பதை பின்வருமாறு தரப்பட்டுள்ளது.

சராசரி $\mu = 12$ மணிகள், திட்டவிலக்கம் $\sigma = 3$ மணிகள் இவ்விவரங்கள் இயல்நிலைப் பரவலைப் பெற்றுள்ளதாகக் கொண்டு எத்தனை சதவீதம் மின்கலங்கள் i) 15 மணி நேரத்திற்கு மேல் ii) 10 மற்றும் 14 மணி நேரத்திற்கு இடையில் iii) 6 மணி நேரத்திற்கு கீழ் பலன் தருபவையாக இருக்கும் எனக் காண்க.

94. ஒரு தேர்வில் 44 % மாணவர்கள் 55 மதிப்பெண்களுக்கு கீழும், 6 % மாணவர்கள் 80 மதிப்பெண்களுக்கு மேலும் பெற்றனர் எனில் அத்தேர்வு மதிப்பெண்களின் சராசரி மற்றும் திட்டவிலக்கம் காண்க.

95. ஓர் இயல்நிலைப் பரவலில் 7 % உறுப்புகள் 35க்கு கீழும் 89 % உறுப்புகள் 63க்கு கீழும் உள்ளன. அதன் சராசரி மற்றும் திட்டவிலக்கம் காண்க.

விடைகள்

I.

1. ஆ 2. ஆ 3. அ 4. ஆ 5. அ 6. இ 7. இ 8. ஈ 9. இ 10. ஈ 11. இ 12. இ

13. ஆ 14. அ 15. ஆ 16. ஆ 17. ஈ 18. அ 19. ஈ 20. ஆ 21. இ 22. ஈ 23. ஆ 24. அ

25. இ 26. ஆ 27. ஆ 28. ஆ 29. அ 30. இ 31. அ 32. ஆ 33. இ 34. $\frac{1}{2}$ 35. $(8, \frac{1}{2})$

36. $\sqrt{2}$ 37. பாய்சான் பரவல் 38. சமம் 39. 0.7 40. $f(x+1) = \frac{m}{x+1} f(x)$

41. மாறுபாடு 42. $-\infty, +\infty$ 43. திட்ட இயல்நிலைப் பரவல் 44. 0.5 45. – 1

46. வளைவு மாற்று புள்ளிகள் 47. 0.9973 48. தொலைத் தொடுகோடு

49. இது ஏற்க முடியாத விவரம், ஏனெனில் $q = \frac{16}{7} > 1$

50. $\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right)^9, p = \frac{2}{3}, q = \frac{1}{3}$ மற்றும் $n = 9$

51. $n = 18, p = \frac{2}{3}$ 52. $\frac{25}{216}$ 57. $10C_2\,(0.32)^2 + (0.68)^8$ 58. 20

59. 1280 60. i) 0.08 ii) 0.259 iii) 0.92 61. i) $\frac{3}{8}$ ii) $\frac{11}{16}$ iii) $\frac{15}{16}$

62. (i) $190 \times \frac{9^{18}}{10^{20}}$ (ii) $\frac{1}{10^{20}}\,[9^{20} + 20 \times 9^{19} + 190 \times 9^{18} + 1140 \times 9^{17}]$

(iii) $1 - \frac{1}{10^{20}}\,[9^{20} + 20 \times 9^{19} + 190 \times 9^{18}]$

63. கண்டறியப்பட்ட திட்டவிலக்கம் = 1.13 எதிர்பார்க்கப்படும் திட்டவிலக்கம் = 1.12

65. கண்டறியப்பட்ட சராசரி = 4.0625 திட்டவிலக்கம் = 1.462

70. i) 0.00279 ii) 0.938 71. 0.0126

72. a) சராசரி = 2 b) $P\,(x = 0) = 0.1353$

73. $P(x = 5) = 0.1008$ 74. 0.2379 75. 0.9598

76. i) 98,020 ii)1960 iii) 20 77. i) 0.2241 ii) 0.1846

78. i) 61 ii) 76 iii) 9 79. $P(x) = \frac{e^{-1}1^x}{x!}$ 80. $P(x) = \frac{e^{-1.5}(1.5)^x}{x!}$

81. $P(x) = \frac{e^{-0.9}(0.9)^x}{x!}$ 82. 0.2147

83. 0.4599 84. 0.9285

85. 0.9750 86. 0.0035

87. 0.9104 88. 0.6687

89. 0.7653 90. i) 22.66 % ii) 46.49 % iii) 77.34 %

91. i) 16 ii)16 iii) 8 92. i) 0.0228 ii) 0.9772 iii) 0.4987

93. i) 15.87 % ii) 49.72 % iii) 2.28 % 94. சராசரி = 57.21 திட்டவிலக்கம் = 14.71

95. சராசரி = 50.27 திட்டவிலக்கம் = 10.35

4. சிறப்புகாண் சோதனைகள் (பொதுக் கோட்பாடுகள்)

4.0 அறிமுகம் :

முழுமைத் தொகுதியைப் பற்றி எல்லா விவரங்களும் சேகரித்தல் என்பது எளிதானதல்ல. ஏனெனில் முழுமைத் தொகுதியின் பண்புகள் (முடிவுறு அல்லது முடிவுறா) முழுவதும் அறிய இயலாமல் போவதற்கான காரணங்களாக அமைவன காலம், செலவினம் மற்றும் வேறு இடர்பாடுகளும் ஆகும். ஆதலால் அதிலிருந்து மாதிரிகள் (கூறுகள்) எடுக்கப்படுகிறது. மாதிரி (கூறு) என்பது புள்ளியியல் மாறியின் தனித்தன்மையுடையதாகவும் அத்தொகுதியின் முடிவுறு உட்கணமாகவும் அமைகிறது. மாதிரியில் உள்ள தனித்த உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையே அம்மாதிரியின் "மாதிரி அளவு" (கூறு அளவு) எனப்படும்.

அன்றாட வாழ்க்கையில் நாம் மாதிரி எடுத்தல் என்பது அடிக்கடி பயன்படுத்தக் கூடியதொன்றாகும். எடுத்துக்காட்டாக ஒரு கடையில் உள்ள, அரிசி, கோதுமை மற்றும் வேறு எந்த ஒரு பொருள்களின் தரத்தை நாம் அறிந்து கொள்ள விரும்பினால் பையிலிருந்து ஒரு கைப்பிடி எடுத்துப் பார்க்கிறோம். அதன் பிறகே அதனை வாங்குவதா அல்லது இல்லையா என்பதை தீர்மானிக்கின்றோம்.

4.1 முழுமைத் தொகுதிப்பண்பளவை மற்றும் புள்ளியியல் அளவை :

முழுமைத் தொகுதியில் உள்ள அனைத்து உறுப்புகளையும் எடுத்துக் கொண்டு கணக்கிடப்படும் புள்ளியியல் மாறிலிகளான சராசரி (μ), மாறுபாடு (σ^2), ஒட்டுறவுக் கெழு (ρ) மற்றும் முழுமைத் தொகுதி விகிதசமம் (P) ஆகியவைகள் முழுமைத் தொகுதியின் பண்பளவைகள் என அழைக்கப்படும்.

முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட மாதிரிகளுக்கு கணக்கிடப்படும் புள்ளியியல் மாறிலிகளான சராசரி ($\bar{x}$), மாறுபாடு (S^2), மாதிரி ஒட்டுறவுக்கெழு (r) விகித சமம் (p) ஆகியவைகள் மாதிரிப் புள்ளியியல் அளவைகள் என அழைக்கப்படும்.

பண்பளவைகள் அனைத்தும் முழுமைத் தொகுதி மதிப்புகளின் சார்பாகவும், மாதிரிப் புள்ளியியல் அளவைகள் மாதிரி மதிப்புகளின் சார்பாகவும் அமைகிறது. பொதுவாக முழுமைத் தொகுதியின் பண்பளவைகள் தெரியாத நிலையில், மாதிரிப் புள்ளியியல் அளவைகள் அவற்றின் மதிப்பீடுகளாகப் பயன்படுத்தப்படுகிறது.

4.2 மாதிரிப் பரவல் :

N அளவு கொண்ட முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட n அளவு கொண்ட அனைத்து மாறிகளின் புள்ளியியல் அளவையின் பரவலே அந்த புள்ளியியல் அளவையின் மாதிரிப் பரவல் என்று அழைக்கப்படும். (டேனியல் மற்றும் பெர்ரல்). முழுமைத் தொகுதியில் N மதிப்புக்கள் உள்ளதாகக் கருதுவோம். இம்முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து n அளவுடைய சமவாய்ப்பு மாதிரி எடுக்கப்படுகிறது எனில் கிடைக்கப்பெறும் மாதிரிகளின் எண்ணிக்கை $NC_n = \frac{N!}{n!(N-n)!} = K$ ஆகும். இவ்வாறு கிடைக்கப்பெற்ற K மாதிரிகள் ஒவ்வொன்றிலிருந்தும் புள்ளியியல் அளவைகள் (சராசரி, மாறுபாடு, ஒட்டுறவுக்கெழு, கோட்ட அளவை மற்றும் பல)

கணக்கிடப்பட்டு அந்த K மதிப்புகளுக்கு ஒரு அலைவெண் பரவல் அமைக்கலாம். அவ்வாறு அமைக்கப்பட்ட அலைவெண் பரவலே அப்புள்ளியியல் அளவையின் மாதிரிப்பரவல் எனப்படும். எடுத்துக்காட்டாக நாம் $t = t(x_1, x_2,\ldots..x_n)$ என்ற புள்ளியியல் அளவையை இந்த K மாதிரிகளுக்கு கண்டுபிடிக்கலாம். பிறகு அந்த புள்ளியியல் அளவை t –ன் மதிப்புகளான t_1, t_2 ….., t_k மாதிரிப் பரவலை நிர்ணயம் செய்கிறது. இந்த புள்ளியியல் அளவை t ஒரு சமவாய்ப்பு மாறியாகவும், அது பெறும் மதிப்புகள் t_1, t_2 ….., t_k எனவும் கருதலாம். அந்த மாதிரிப் பரவலுக்கு பல்வேறான புள்ளியியல் மாறிலிகளாக சராசரி, மாறுபாடு, கோட்டளவை, தட்டையளவை மற்றும் பல கணக்கிடலாம்.

t –ன் மாதிரிப் பரவலின் சராசரியானது

$$\bar{t} = \frac{1}{K}[t_1 + t_2 + \ldots\ldots.. + t_k] = \frac{1}{K}\sum_{i=1}^{k} t_i$$

மற்றும் t ன் மாறுபாடு $= \frac{1}{K}[(t_1 - \bar{t})^2 + (t_2 - \bar{t})^2 + \ldots\ldots. + (t_k - \bar{t})^2]$

$$= \frac{1}{K}\sum(t_i - \bar{t})^2$$

4.3 திட்டப்பிழை :

ஒரு புள்ளியியல் அளவையின் மாதிரிப் பரவலின் திட்டவிலக்கமே திட்டப்பிழை எனப்படும். இதனை S.E. எனக் குறிக்கப்படும். எடுத்துக்காட்டாக சராசரி $\bar{x}$ ன் மாதிரிப் பரவலின் திட்ட விலக்கம் அச்சராசரியின் திட்டப்பிழை ஆகும்.

இங்கு,

$$v(\bar{x}) = v\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots\ldots x_n}{n}\right)$$

$$= \frac{v(x_1)}{n^2} + \frac{v(x_2)}{n^2} + \ldots\ldots + \frac{v(x_n)}{n^2}$$

$$= \frac{\sigma^2}{n^2} + \frac{\sigma^2}{n^2} + \ldots\ldots.. + \frac{\sigma^2}{n^2} = \frac{n\sigma^2}{n^2}$$

$\therefore$ சராசரியின் திட்டப்பிழை = $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

பெருங்கூறுகளல் அதிக அளவில் பயன்படுத்தப்படும் நன்கு அறிந்த புள்ளியியல் அளவைகளின் திட்டப்பிழைகள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இதில் n என்பது மாதிரியின் அளவு, σ^2 என்பது முழுமைத் தொகுதியின் மாறுபாடு மற்றும் P என்பது முழுமைத் தொகுதியின் விகிதசமம் ஆகும். மேலும் Q = 1-P. n_1 மற்றும் n_2 என்பன இரு மாதிரிகளின் அளவுகளாகும்.

வ.எண்	புள்ளியியல் அளவை	திட்டப்பிழை
1.	மாதிரியின் சராசரி $\bar{x}$	$\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
2.	கண்டறியப்பட்ட மாதிரி விகித சமம் p	$\sqrt{\frac{PQ}{n}}$
3.	இரு மாறிகளின் சராசரிகளின் வித்தியாசம் $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$	$\sqrt{\frac{\sigma_1^{2}}{n_1}+\frac{\sigma_2^{2}}{n_2}}$
4.	இரு மாதிரிகளின் விகித சமங்களின் வித்தியாசம் $(p_1 - p_2)$	$\sqrt{\frac{P_1Q_1}{n_1}+\frac{P_2Q_2}{n_2}}$

திட்டப் பிழையின் பயன்பாடுகள் :

1) திட்டபிழையானது பெருங்கூறு கோட்பாடுகளிலும், எடுகோள் சோதனைகளுக்கு அடிப்படையாகவும் பயன்படுகிறது.
2) பண்பளவையின் மதிப்பீட்டின் நுண்மையின் அளவீடாக செயல்படுகிறது.
3) திட்டப்பிழையின் தலைகீழியை மாதிரியின் நுண்மை அல்லது நம்பகத் தன்மையின் அளவாக கொள்ளலாம்.
4) திட்டப்பிழையானது முழுமைத் தொகுதியின் பண்பளவை அமைவதற்கான நிகழ்தகவு எல்லைகளைக் கண்டுபிடிக்க ஏதுவாக அமைகிறது.

குறிப்பு :

ஒரு மாதிரியின் அளவையை அதிகரித்து புள்ளியியல் அளவையின் திட்டப்பிழையைக் குறைக்கலாம். ஆனால் இம்முறையில் செலவு, உழைப்பு, மற்றும் நேரம் ஆகியவை அதிகரிக்கின்றன.

4.4 இல் எனும் எடுகோள் மற்றும் மாற்று எடுகோள் :

முழுமைத் தொகுதியின் பண்பளவையில் ஊகத்தின் அடிப்படையில் மேற்கொள்ளப்படும் சோதனையே எடுகோள் எனப்படும்.

ஏதேனும் ஒரு காரணத்தின் அடிப்படையில் ஏற்படுத்தப்படும் ஊகமே எடுகோள் எனலாம். ஒரு முழுமைத் தொகுதியின் பண்பளவையின் ஊகத்தின் அடிப்படையில் அமைக்கப்படும் எடுகோளானது, மரபு சார்ந்த அணுகு முறையில் ஒரே ஒரு எடுகோளாக அமைக்கப்படுவதில்லை. அதற்கு பதிலாக இரு வேறு எடுகோள்கள் அமைக்கப்படுகின்றன. அதில் ஒன்றை ஏற்றுக் கொள்ளும் எடுகோளாகவும் மற்றொன்றை மறுக்கப்படுவதற்கான எடுகோளாகவும் அமைக்கப்படுகின்றன. இதை நேர் எதிர்மாறாகவும் (vice versa) அமைக்கலாம்.

இல் எனும் எடுகோள் :

எந்த வேறுபாடும் இல்லை என்ற எடுகோளே "இல் எனும் எடுகோள்" எனப்படும். இதனை வழக்கமாக H_0 என குறிக்கப்படும்.

“உண்மை என எடுக்கப்பட்ட எடுகோளை மறுப்பதற்கான சோதனைக்குரிய எடுகோளே “இல் எனும் எடுகோள்” என்பது பேராசிரியர் ஃபிஷரின் கூற்றாகும். சிறப்பு காண் சோதனைகளுக்கு இது மிகவும் உபயோகமான கருவியாக அமைகிறது. எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு நிறுவனம் அது தயாரிக்கும் மின்விளக்குகள் சராசரியாக 1000 மணி நேரம் எரியுமென விளம்பரம் செய்கிறது. இவ்விளம்பரம் ஏற்று கொள்வதா இல்லையா என்பதை அறிய விரும்பினால் இங்கு இல் எனும் எடுகோள் (H_0) ஆனது, நிறுவனம் தயாரிக்கும் மின்விளக்குகளின் சராசரியாக எரியும் நேரம் 1000 மணி என அமைத்துக் கொள்கிறோம்.

மாற்று எடுகோள் :

இல் எனும் எடுகோளுக்கு எந்த ஒரு எடுகோளானது நிரப்புப் பண்பாக (complementary) அல்லது எதிராக அமைகிறதா அந்த எடுகோளை "மாற்று எடுகோள்" என்று அழைக்கப்படுகிறது. அது வழக்கமாக H_1 என்று குறிக்கப்படும். எடுத்துக்காட்டாக, முழுமைத் தொகுதயின் சராசரி μ யின் குறிப்பிட்ட மதிப்பு μ_0 என்றுள்ளவாறு இல் எனும் எடுகோள் சோதனை செய்ய வேண்டுமெனில்,

படி : 1 இல் எனும் எடுகோள் : $H_0: \mu = \mu_0$ என்றும்,

படி : 2 மாற்று எடுகோள் : H_1 என்பதை கீழ்வருமாறு எடுக்கலாம்.

i) $H_1 : \mu \neq \mu_0$ (ie $\mu > \mu_0$ or $\mu < \mu_0$)

ii) $H_1 : \mu > \mu_0$

iii) $H_1 : \mu < \mu_0$

இவைகளில் (i) இல் குறிப்பிட்டுள்ள மாற்று எடுகோளானது இருமுனை மாற்று எடுகோள் என்றும், (ii) இல் கூறப்பட்டது வல முனை மாற்று எடுகோள் என்றும் மற்றும் (iii) இல் கூறப்பட்டது இட முனை மாற்று எடுகோள் என்றும் அழைக்கப்படும். இவ்வாறு அமைக்கப்படும் மாற்று எடுகோளின் உதவியால் நாம் பயன்படுத்தக் கூடிய சோதனை, ஒரு முனை (வல மற்றும் இட முனை) சோதனையா அல்லது இரு முனை சோதனையா என முடிவு எடுக்க பெரும் உதவியாக இருக்கும்.

4.5 சிறப்பு காண் மட்டம் மற்றும் தீர்மான மதிப்பு :

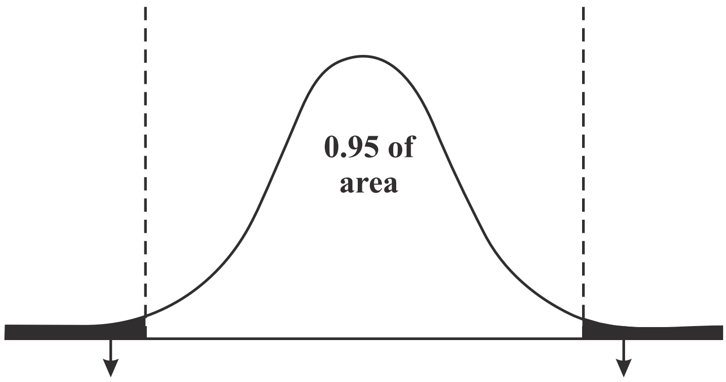
சிறப்பு காண் மட்டம் :

கொடுக்கப்பட்ட எடுகோள் சோதனை செய்யும் போது ஏற்படும் இழப்பை ஏற்று கொள்ளும் அதிகப்படியான நிகழ்தகவு அச்சோதனையின் சிறப்பு காண் மட்டம் எனப்படும். இந்த நிகழ்தகவு பொதுவாக α என குறிக்கப்படும். பொதுவாக மாதிரிகள் எடுப்பதற்கு முன்னதாகவே α குறிப்பிடப்படுகிறது.

சிறப்பு தன்மை சோதனை செய்யும் போது வழக்கமாக கையாளப்படும் (எடுத்துக் கொள்ளப்படும்) சிறப்பு காண் மட்டம் 0.05 (அல்லது 5 %) மற்றும் 0.01 (அல்லது 1 %) ஆகும். எடுத்துக்காட்டாக ஒரு எடுகோள் சோதனையின் போது சிறப்பு காண் மட்டம் 0.05 (அல்லது 5%) என எடுத்துக் கொள்வோம் எனில் இது 100 வாய்ப்புகளில் ஏற்று கொள்ள வேண்டியவற்றில் 5 வாய்ப்புக்களை நாம் மறுப்போம் என்பதாகும். நாம் எடுத்துள்ள மதிப்புகளில் 95 % சரியானதாக எடுத்துள்ளோம் என்ற நம்பிக்கை உண்டாகிறது. இந்த நிலைகளில் 5 % சிறப்பு காண் மட்ட எல்லையில் மறுக்கப்படுகிறது என்பதாகும். அதாவது நமது முடிவில் தவறு ஏற்படுவதற்கான நிகழ்தகவு 0.05 ஆகும் எனக் கூறலாம்.

5 % சிறப்பு காண் மட்ட நிலையில் இரு முனை சோதனை செய்யும் போது இல் எனும் எடுகோளை நாம் ஏற்கும் மற்றும் மறுக்கும் பகுதியினை கீழ்க்காணும் படம் விளக்கக் காண்போம்.

மாதிரிப் புள்ளியியல் அளவையின் இல்
எனும் எடுகோளினை ஏற்குமெனில் அது
இப்பகுதியில் அமையும்



மாதிரிப் புள்ளியியல் அளவையின் இல் எனும்
எடுகோளினை மறுக்கப்படுகிறது எனில்
இவ்விரு பகுதியில் அமையும்

குறிப்பு :

மறுக்கப்படும் பகுதி (தீர்வு கட்ட பகுதி)

கூறு வெளியில் இல் எனும் சோதனை H_0 ஐ எந்தளவு மறுக்கப்படுகிறதோ அந்த அளவே தீர்வு கட்ட பகுதி அல்லது மறுக்கப்படும் பகுதி எனப்படும்.

தீர்மான மதிப்பு :

சோதனை புள்ளியியல் அளவையின் எந்த மதிப்பானது ஏற்றுக் கொள்ளும் பகுதி மற்றும் மறுக்கப்படுவதற்கான பகுதியினைப் பிரிக்கிறதோ அம்மதிப்பே சிறப்பு காண் மட்டம் அல்லது தீர்மான மதிப்பு என்றழைக்கப்படும்.

இது i) சிறப்பு காண் மட்டம் பயன்படுத்துவதைப் பொறுத்தும்,

ii) மாற்று எடுகோளாகிய இரு முனை சோதனை மற்றும் ஒரு முனை சோதனைகளை பொறுத்தும் அமைகிறது.

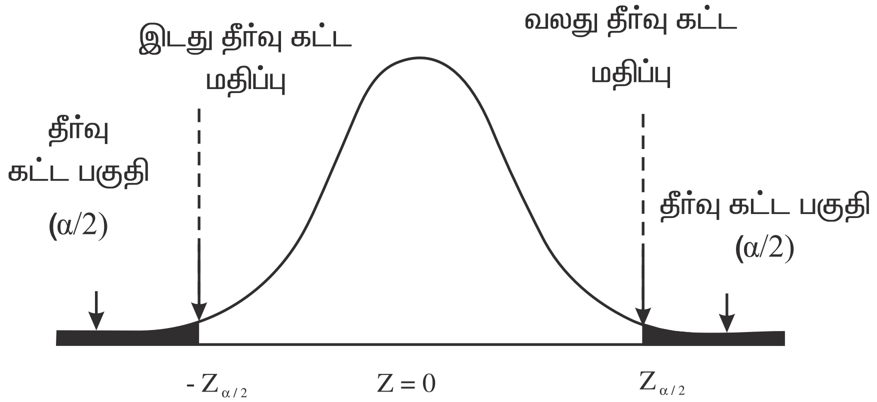
பெருங்கூறுகளில் t புள்ளியியல் அளவையின் திட்ட இயல்நிலை மாறியானது, $n \to \infty$ என்ற நீள்போக்கு நிலையில் $Z = \left| \dfrac{t - E(t)}{S.E.(t)} \right| \sim N(0,1)$ ஆகும்.

இல் எனும் எடுகோளின் கீழ் z ன் மதிப்பே சோதனை புள்ளியியல் அளவை எனப்படும். இரு முனை சோதனையில் சிறப்பு காண் மட்டம் α அளவில் திட்ட மதிப்பானது $Z_{\alpha/2}$ எனவும், ஒரு முனைச் சோதனையில் தீர்மான மதிப்பு Z_α எனவும் குறிக்கப்படுகிறது.

இங்கு Z_α ஐ நிர்ணயிக்கும் சமன்பாடு, $P(|Z| > Z_\alpha) = \alpha$, இரு முனைகளிலும் உள்ள மொத்த தீர்வுகட்ட பகுதியானது α என இருக்குமாறு Z_α என்ற மதிப்பு கண்டுபிடிக்கப்படுகிறது. ஆகவே

$\therefore P(Z > Z_\alpha) = \frac{\alpha}{2}$. ஒவ்வொரு முனையின் பரப்பு $\frac{\alpha}{2}$ ஆகும்.

வலது முனை பரப்பு மற்றும் இடது முனை பரப்பு $\frac{\alpha}{2}$ இருக்குமாறு 'Z_α' மற்றும் $-Z_\alpha$ ஆகியவை அமையும் என்பதை கீழ்க்காணும் படத்தில் காட்டப்படுகிறது.



4.6 ஒரு முனை மற்றும் இரு முனை சோதனைகள்:

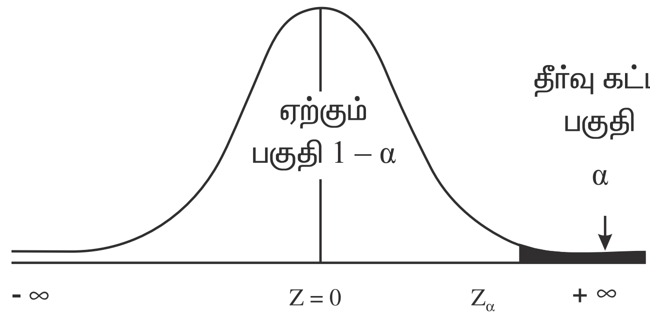
எந்த ஒரு சோதனையானாலும் தீர்மானிக்கும் பகுதியானது புள்ளியியல் அளவைக்குரிய மாதிரி பரவலின் நிகழ்தகவு வளைகோட்டின் கீழ் உள்ள ஒரு பகுதியின் பரப்பைக் குறிப்பிடுவதாகும்.

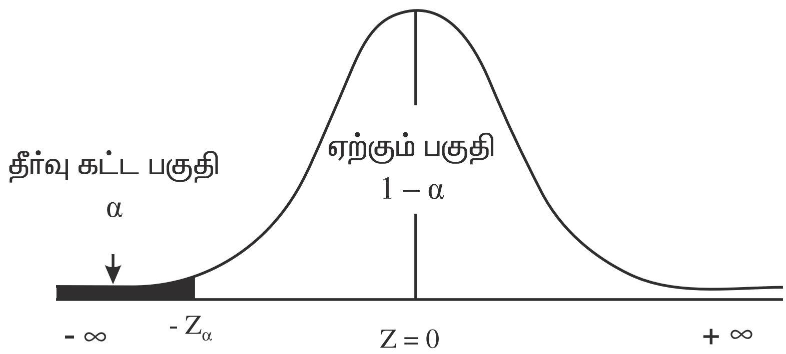
ஒரு முனை சோதனை :

எத்தகைய புள்ளியியல் எடுகோள் சோதனையானாலும் மாற்று எடுகோளானது ஒரு முனை (இட முனை அல்லது வல முனை)யில் இருந்தால் அது ஒரு முனை சோதனை என்றழைக்கப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக, முழுமைத் தொகுதியின் சராசரி சோதனையில்

$H_0: \mu = \mu_0$, க்கு எதிரான மாற்று எடுகோள் $H_1: \mu > \mu_0$ (வலமுனை) அல்லது $H_1: \mu < \mu_0$ (இட முனை) எனும் ஒரு முனை சோதனையாக அமைகிறது. அதாவது சராசரி $\bar{x}$ ன் மாதிரி பரவலின் தீர்வு கட்ட பகுதியானது முழுவதும் வல முனையில் அமைகிறது. இதனை $H_1: \mu > \mu_0$ என குறிக்கப்படும். இது வல முனை சோதனை என்றழைக்கப்படும். இதே போல் தீர்வு கட்ட பகுதி முழுவதும் இடமுனையில் அமையுமானால் $H_1: \mu < \mu_0$ ஐ இட முனை சோதனை என்றழைக்கப்படும்.





இரு முனை சோதனை :

புள்ளியியல் சோதனையில் இல் எனும் எடுகோள் H_0 : $\mu = \mu_0$ என்பதற்கு எதிரான மாற்று எடுகோள் H_1: $\mu \neq \mu_0$ ($\mu > \mu_0$ மற்றும் $\mu < \mu_0$) என செய்யப்படும் சோதனை இரு முனை சோதனை எனப்படும். இந்நிலையில் தீர்வுகட்ட பகுதியானது புள்ளியியல் சோதனையின் நிகழ்தகவு வளைகோட்டின் இருபுறமும் முனைப்பகுதியில் அமைகிறது. எடுத்துக்காட்டாக, இரு வகையில் தயாரிக்கப்படும் சலவை இயந்திரங்கள் (Washing machines) எடுத்துக் கொள்வோம். அவைகளில் ஒன்று சாதாரண தரத்துடன் (சராசரி உழைப்பு காலம் μ_1) தயாரிக்கப்படுகிறது. மற்றொன்று சில புதிய தொழில் நுட்ப (சராசரி உழைப்பு காலம் μ_2) தரத்துடன் தயாரிக்கப்படுகிறது. இவ்விரு சலவை இயந்திரங்களின் சராசரி உழைப்பு (கெடு) காலத்தின் வேறுபாட்டின் சிறப்புத் தன்மையைச் சோதிக்க வேண்டுமானால்

இல் எனும் எடுகோள் : $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ என்றும் மற்றும்

மாற்று எடுகோள் : H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$ என்றும் எடுத்துக் கொள்வோம்.

இது ஓர் இரு முனை சோதனையைக் கொடுக்கிறது. இவ்வாறு இருப்பினும், புதிய தொழில் நுட்பத்துடன் தயாரிக்கப்பட்ட சலவை இயந்திரத்தின் சராசரி உழைப்பு காலம் சாதாரண தரத்துடைய இயந்திரத்தை விட அதிகம் எனக் கொள்வோம் எனில்

இல் எனும் எடுகோள் $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ க்கு எதிரான

மாற்று எடுகோள் $H_1 : \mu_1 < \mu_2$ என கிடைக்க பெறுவது இட முனை சோதனை ஆகும்.

இதே போன்று புதிய தொழில் நுட்பத்துடன் தயாரிக்கப்பட்ட இயந்திரத்தின் சராசரி உழைப்பு காலம் சாதாரண தரத்துடன் தயாரிக்கப்பட்ட இயந்திரத்தின் சராசரி உழைப்பு காலத்தை விட குறைவு எனக் கொண்டால்

இல் எனும் எடுகோள் $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ க்கு எதிரான

மாற்று எடுகோள் $H_1 : \mu_1 > \mu_2$ என்பது

வல முனை சோதனையாக அமைகிறது. ஆதலால் இரு முனை சோதனையானாலும் அல்லது ஒரு முனை சோதனை (வல அல்லது இடமுனை) ஆனாலும் இவைகளை அமைப்பது என்பது எடுக்க வேண்டிய தீர்மானங்களை பொறுத்தே அமையும்.

Z **–ன் தீர்மான மதிப்புகள் :**

சிறப்பு காண் மட்டம் α	0.05 (அ) 5%		0.01 (அ) 1%	
	இடது	வலது	இடது	வலது
ஒரு முனை சோதனைகளில் Z_α ன் தீர்மான மதிப்பு	– 1.645	1.645	– 2.33	2.33
இரு முனை சோதனைகளில் $Z_{\alpha/2}$ ன் தீர்வு கட்ட பகுதி	– 1.96	1.96	– 2.58	2.58

4.7 முதல் வகை (Type I Error) மற்றும் இரண்டாம் வகை (Type II Error) பிழைகள் :

புள்ளியியல் சார்ந்த எடுகோள் சோதனை செய்யும் போது நான்கு வகையான வாய்ப்புகள் அமைவதைக் காண்கிறோம். அவைகள் :

1. எடுகோள் சரியாக (உண்மையாக) இருந்து நமது சோதனை மறுக்கப்படுவது (முதல் வகை பிழை)
2. எடுகோள் தவறாக இருந்து நமது சோதனை ஏற்கப்படுதல் (இரண்டாம் வகை பிழை)
3. எடுகோள் சரியாக இருந்து நமது சோதனை ஏற்றுக் கொள்வது (சரியான முடிவு)
4. எடுகோள் தவறாக இருந்து நமது சோதனை மறுக்கப்படுதல் (சரியான முடிவு)

மேற்கண்ட இந்த நான்கில் முதல் இரண்டும், பிழைகளை ஏற்படுத்தும் வாய்ப்புகளாக அமைகிறது.

புள்ளியியல் சார்ந்த சோதனையின் போது இல் எனும் எடுகோள் சரியாக இருந்து நமது சோதனையானது மறுக்கப்படுவதால் உண்டாகும் "பிழையே முதல் வகை பிழை" எனப்படும். மாறாக இல் எனும் எடுகோள் பிழையாக இருந்து நமது சோதனையானது ஏற்று கொள்ளும் போது உண்டாகும் பிழையே "இரண்டாம் வகை பிழை" எனப்படும்.

இதனை $\alpha = P$ (முதல் வகை பிழை) = P (H_0 – ஐ மறுக்கப்படுவது | H_0 சரியானது)

$\beta = P$ (இரண்டாம் வகை பிழை) = P (H_0 ஐ ஏற்கப்படுவது | H_0 தவறானது)

செயல் முறையில் பார்க்கும் போது முதல் வகை பிழையானது குவியல் தரமாக இருந்தும் அதனை மறுக்கப்படுவதாகவும் மற்றும், இரண்டாம் வகை பிழையானது தரமில்லாத குவியலை ஏற்று கொள்ளப்படுவதாகவும் அமைகிறது. இச்சூழல்களை விளக்கும் வகையில் கீழ் உள்ள அட்டவணை அமைந்துள்ளது.

	H_0 ஐ ஏற்றல்	H_0 ஐ மறுத்தல்
H_0 சரியானது	சரியான முடிவு	முதல் வகை பிழை
H_0 பிழையானது	இரண்டாம் வகை பிழை	சரியான முடிவு

4.8 சோதனைக்கான வழிமுறைகள் :

எடுகோள் சோதனை மேற்கொள்ளும் போது பயன்படுத்தும் படிகள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. (பெருங்கூறு மற்றும் சிறுகூறு சோதனைகளுக்கு ஏற்புடையது)

1. இல் எனும் எடுகோள் : இல் எனும் எடுகோள் H_0 ஐ அமைக்கவும்.
2. மாற்று எடுகோள் : H_0 க்கு நிரப்பியாக அமையுமாறு மாற்று எடுகோள் H_1 ஐ அமைக்கவும். இது ஒரு முனை (இட அல்லது வல சோதனை) அல்லது இரு முனை சோதனையாக அமையும்.
3. சிறப்பு காண் மட்டம் : பொருத்தமான சிறப்பு காண் மட்டம் α ஐ முன்னதாக தீர்மானித்துக் கொள்ளவும்.
4. சோதனை புள்ளியியல் அளவை : இல் எனும் எடுகோள் H_0 ன் கீழ் புள்ளியியல் சோதனை அளவையின் மதிப்பு $Z = \frac{t - E(t)}{S.E.(t)}$ ஐ கணக்கிடுக. இங்கு t என்பது புள்ளியியல் அளவையாகும்.
5. முடிவு : கண்டறியப்பட்ட Z_0 ன் மதிப்பை அட்டவணையிலுள்ள Z_α (ஒரு முனை) அல்லது $Z_{\alpha/2}$ (இரு முனைச் சோதனை) இவற்றுடன் ஒப்பிட்டு அதற்கேற்ப இல் எனும் எடுகோளை ஏற்று கொள்ளுதல் அல்லது மறுத்தல் என முடிவு மேற்கொள்ளப்படுகிறது.

   i) $Z_0 > Z_\alpha$ எனில் இல் எனும் எடுகோள் α மட்ட அளவில் மறுக்கப்படுகிறது.

   ii) $Z_0 < Z_\alpha$ எனில் இல் எனும் எடுகோள் மட்ட அளவில் ஏற்று கொள்ளப்படுகிறது.

குறிப்பு :

பெருங்கூறு (பெரிய மாதிரி) : ஓர் மாதிரியானது **30** ம், அதற்கு மேற்பட்ட உறுப்புகளையும் கொண்டிருக்குமானால் அது பெருங்கூறு என்று அழைக்கப்படும்.

சிறு கூறு (சிறிய மாதிரி) : ஓர் மாதிரியானது **30** க்கு கீழ் உறுப்புக்களைக் கொண்டிருந்தால் அதனை சிறுகூறு என்று அழைக்கப்படும்.

பயிற்சி – 4

I. **மிகச்சரியான விடையைத் தேர்ந்தெடுக்கவும் :**

1. மாதிரி அளவையின் பண்புகளாகிய $\bar{x}$ அல்லது S ஐ இவ்வாறு அழைக்கப்படும்.

   அ) முழுமைத் தொகுதி ஆ) புள்ளியியல் அளவை

   இ) பேரண்டம் ஈ) சராசரி

2. சராசரியின் திட்டப்பிழை

   அ) σ^2 ஆ) $\frac{\sigma}{n}$ இ) $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ஈ) $\frac{\sqrt{n}}{\sigma}$

3. கண்டறியப்பட்ட மாதிரியின் விகிதம் "P" ன் திட்டப்பிழை

அ) $\sqrt{\frac{P(1-Q)}{n}}$ ஆ) $\sqrt{\frac{PQ}{n}}$ இ) $\sqrt{\frac{(1-P)Q}{n}}$ ஈ) $\frac{PQ}{n}$

4. மாற்று எடுகோள் என்பது

அ) எப்போதும் இட முனை ஆ) எப்போதும் வல முனை

இ) எப்போதும் ஓர் முனை ஈ) ஒரு முனை அல்லது இரு முனை

5. தீர்வு கட்ட பகுதி என்பது

அ) மறுக்கும் பகுதி ஆ) ஏற்கும் பகுதி

இ) நிகழ்தகவு ஈ) சோதனைப் புள்ளியியல் மதிப்பு

6. சிறப்பு காண் மட்டம் α வில் இரு முனை சோதனையின் தீர்வு கட்ட மதிப்பு

அ) $Z_{\alpha/2}$ ஆ) Z_{α} இ) $Z_{2\alpha}$ ஈ) $Z_{\alpha/4}$

7. வலமுனை சோதனையில் தீர்வு கட்ட பகுதி

அ) 0 ஆ) 1

இ) முழுவதும் வல முனையில் அமையும் ஈ) முழுவதும் இட முனையில் அமையும்

8. 5% சிறப்பு காண் மட்ட அளவில் இருமுனை சோதனைக்கான தீர்வு கட்ட மதிப்பு $|Z_{\alpha}|$ ஆனது

அ) 1.645 ஆ) 2.33 இ) 2.58 ஈ) 1.96

9. இல் எனும் எடுகோளின் கீழ் சோதனை புள்ளியியல் அளவை Z ன் மதிப்பு

அ) $\frac{t-S.E.(t)}{E(t)}$ ஆ) $\frac{t+E(t)}{S.E.(t)}$ இ) $\frac{t-E(t)}{S.E.(t)}$ ஈ) $\sqrt{\frac{PQ}{n}}$

10. மாற்று எடுகோள் $H_1: \mu \neq \mu_0$ ($\mu > \mu_0$ அல்லது $\mu < \mu_0$) ஏற்கும் தீர்வுகட்ட பகுதி

அ) வல முனை மட்டும் ஆ) வலது மற்றும் இட முனை பகுதிகள்

இ) இட முனை மட்டும் ஈ) ஏற்றுக் கொள்ளும் பகுதி

11. எடுகோள் என்பதை இவ்வாறு வகைப்படுத்தலாம்

அ) எளியதாக ஆ) கலவையாக

இ) இல் எனுமாறு ஈ) மேற்குறித்த அனைத்தும்

12. சோதனையானது ஒரு முனை அல்லது இரு முனை என்பது இதனை பொறுத்ததாகும்.

அ) மாற்று எடுகோள் ஆ) கலப்பு எடுகோள்

இ) இல் எனும் எடுகோள் ஈ) எளிய எடுகோள்

13. இல் எனும் எடுகோள் H_0 ஐ பற்றி தவறான முடிவு எடுத்தல் என்பது

அ) முதல் வகை பிழை ஆ) இரண்டாம் வகை பிழை

இ) மூன்றாம் வகை பிழை ஈ) நான்காம் வகை பிழை

14. தீர்வு கட்ட பகுதியின் பரப்பானது இதனைச் சார்ந்துள்ளது

அ) முதல் வகை பிழையின் அளவு

ஆ) இரண்டாம் வகை பிழையின் அளவு

இ) புள்ளியியல் அளவையின் மதிப்பு

ஈ) கண்டறிந்த எண்ணிக்கை

15. $H_0 : \mu = 70$ எனும் எடுகோளுக்கு எதிரான $H_1 = \mu > 70$ என்ற எடுகோள்

அ) ஒரு முனை – இட முனை சோதனை ஆ) ஒரு முனை – வல முனை சோதனை

இ) இரு முனை சோதனை ஈ) ஏதும் இல்லை

16. $H_0 : \mu = 1500$ என்ற எடுகோளுக்கு மாறாக $\mu < 1500$ என்ற சோதனை

அ) ஒரு முனை – இட முனை சோதனை ஆ) ஒரு முனை – வல முனை சோதனை

இ) இரு முனை சோதனை ஈ) மேற் குறித்த அனைத்தும்

17. $H_0 : \mu = 100$ க்கு மாறாக $H_1 : \mu \neq 100$ என்ற சோதனை

அ) ஒரு முனை – வல முனை சோதனை ஆ) ஒரு முனை – இட முனை சோதனை

இ) இரு முனை சோதனை ஈ) ஏதும் இல்லை

II. **கோடிட்ட இடங்களை நிரப்புக.**

18. n_1 மற்றும் n_2 என்பன ஒன்றை ஒன்று சாரா (சமவாய்ப்பு மாறி) மாதிரிகளின் __________ ஆகும்.

19. கண்டறியப்பட்ட மாதிரி விகித சமம் p ன் திட்டப்பிழை ________ ஆகும்.

20. எடுகோள் உண்மையாக இருந்து சோதனை மறுக்கப்படும் போது அது ________ ஆகும்.

21. எடுகோள் பிழையாக இருந்து சோதனை ஏற்கப்படும் போது அது ________ என்றழைக்கப்படும்.

22. புள்ளியியலில் அளவை Z ன் மதிப்பு காணும் வாய்ப்பாடு __________ ஆகும்.

III. **கீழ்க்காணும் வினாக்களுக்கு விடை தருக.**

23. மாதிரிப் பரவலை வரையறை செய்க.

24. புள்ளியியல் அளவை மற்றும் தொகுதிப் பண்பளவை வரையறு.

25. திட்டப்பிழை வரையறுக்க.

26. இரு மாதிரி விகித சமங்களின் வித்தியாசத்திற்கான திட்டப்பிழையைத் தருக.

27. இல் எனும் எடுகோள் மற்றும் மாற்று எடுகோள் வரையறு.

28. "தீர்வு கட்ட மதிப்பு" விவரி.

29. சிறப்பு காண் மட்டம் பற்றி நீவிர் அறிவது யாது ?

30. "முதல் வகைப்பிழை மற்றும் இரண்டாம் வகை பிழை" இவற்றை தெளிவாக விவரி.

31. எடுகோள் சோதனையின் போது பொதுவாக பின்பற்றப்படும் வழிமுறைகள் யாவை ?

32. "எடுகோள் சோதனை" பற்றி நீவிர் அறிவது யாது ?

33. ஒரு முனை மற்றும் இரு முனை சோதனைகளைப் பற்றி விரிவான விடைத் தருக.

விடைகள்

I.

1. ஆ)	2. இ)	3. ஆ)	4. ஈ)	5. அ)	6. அ)
7. இ)	8. ஈ)	9. இ)	10 ஆ)	11.ஈ)	12.அ)
13.ஆ)	14.அ)	15.ஆ)	16.அ)	17.இ)	

II.

18. அளவு (அல்லது எண்ணிக்கை)

19. $\sqrt{\frac{PQ}{n}}$

20. முதல் வகை பிழை

21. இரண்டாம் வகை பிழை

22. $z = \frac{t - E(t)}{S.E.(t)}$

5. சிறப்பு காண் சோதனை (பெருங்கூறுகள்)

5.0 அறிமுகம் :

செய்முறை கணக்குகளில் புள்ளியியலாளர்கள் மாதிரிகள் தரும் விவரங்களைக் கொண்டு ஒரு தற்காலிகமான கணக்கிடுதலைச் செய்ய வேண்டியிருக்கிறது.

எடுத்துக்காட்டாக,

(அ) பள்ளி மாணவர்களின் சராசரி எடை 35 கிலோ

(ஆ) நாணயம் ஒரு தலைசார்பற்றது.

எனவே அவற்றைத் தீர்மானிப்பதற்கு முழுமைத் தொகுதியின் பண்பளவையைப் பற்றி சில அனுமானங்களை மேற்கொள்ள வேண்டியுள்ளது. அவ்வாறு ஏற்படும் அனுமானமே புள்ளியியல் எடுகோள் ஆகும். மாதிரியை ஆராய்வதன் மூலம் இதன் நம்பகத்தன்மை சோதிக்கப்படுகிறது. இந்தப் புள்ளியியல் எடுகோள்கள் சரியானவையா, தவறானவையா எனச் சோதிக்கப் பயன்படும் முறையே சிறப்பு காண் சோதனை (Test of significance) எனப்படும்.

நாம் ஒரு மதிப்பை முழுமைத் தொகுதியின் கூட்டு சராசரி என எடுத்துக் கொள்வோம். நமது அனுமானம் சரியானதா என சோதனை செய்ய மாதிரி விவரம் சேகரித்து அதற்கான கூட்டு சராசரியின் எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பு மற்றும் உண்மையான மதிப்புகளுக்கான வித்தியாசத்தை கண்டறிய வேண்டும். அந்த வித்தியாசம் சிறப்பானதாக இல்லையா என நாம் முடிவெடுக்க வேண்டும்.

வித்தியாசம் சிறியதானால் கூட்டுசராசரிக்கான எதிர்பார்க்கப்படும் நிகழும் தன்மை அதிகமாகும் மேலும் வித்தியாசம் அதிகமானால் கூட்டுசராசரிக்கான எதிர்பார்க்கப்படும் நிகழும் தன்மை குறையும்.

5.1 பெருங்கூறுகள் ($n \geq 30$):

பெருங்கூறுகளுக்கான அனுமானம் சிறு கூறுகளுக்கான அனுமானத்தை விட வித்தியாசமானது. எனவே, அவற்றுக்கான சிறப்பு காண் சோதனை முறைகளும் மாறுபடுகின்றன. பெருங்கூறுகளின் கணக்குகளுக்கு கீழ்க்காணும் அனுமானங்கள் ஏற்படுத்தப்பட்டுள்ளது.

(i) அநேகமாக அனைத்து மாதிரிப் பரவல்களும் தொடர்ந்து இணையாது இயல்நிலைப் பரவலை அணுகிச் செல்கின்றன.

(ii) அனைத்து மாதிரி மதிப்புகளும் தோராயமாக முழுமைத் தொகுதியின் மதிப்புகளுக்கு அருகில் உள்ளது.

கீழ்க்காணும் சோதனைகள், பெருங்கூறு சோதனை முறையில் சோதனை செய்யப்படுகிறது. அவையாவன,

(i) விகிதசமங்களுக்கான சிறப்பு காண் சோதனை

(ii) இரு மாதிரிகளின் விகிதசம வித்தியாசத்திற்கான சிறப்பு காண் சோதனை

(iii) கூட்டு சராசரிக்கான சிறப்பு காண் சோதனை

(iv) இரு மாதிரிகளின் கூட்டு சராசரிகளின் வித்தியாசத்திற்கான சிறப்பு காண் சோதனை

5.2 விகிதசமங்களுக்கான சிறப்பு காண் சோதனை :

சோதனை வழிமுறைகள் :

இல் எனும் எடுகோள் : $H_0 : P = P_0$

மாற்று எடுகோள் : $H_1 = P \neq P_0$ ($P > P_0$ அல்லது $P < P_0$)

சிறப்பு காண் மட்டம் : $\alpha = 0\ .05$ அல்லது 0.01

புள்ளியியல் அளவை கணக்கிடுதல் :

H_0 ன் கீழ், சோதனை புள்ளியியல் அளவையானது,

$$Z_0 = \left| \frac{p - P}{\sqrt{\frac{PQ}{n}}} \right|$$

எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பு :

$$Z_e = \left| \frac{p - P}{\sqrt{\frac{PQ}{n}}} \right| \sim N(0, 1)$$

$= 1.96, \alpha = 0.05$ –க்கு (1.645) (ஒரு முனை)

$= 2.58\ \alpha = 0.01$ –க்கு (2.33) (ஒரு முனை)

முடிவு :

$Z_0 \leq Z_e$ எனில், H_0 ஏற்று கொள்ளப்படுகிறது. எனவே மாதிரியானது P_0 எனும் விகிதத்தை உடைய முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்டது என முடிவு செய்யப்படுகிறது.

$Z_0 > Z_e$ எனில், H_0 மறுக்கப்படுகிது. எனவே மாதிரியானது P_0 எனும் விகிதத்தை உடைய முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்படவில்லை என முடிவு செய்யப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

ஒரு மிகப் பெரிய முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து **400** பேரை சமவாய்ப்பு மாதிரி முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டதில் **120** பேர் பெண்கள். எனவே முழுமைத் தொகுதியில் ஆண்களும், பெண்களும் 5:3 என்ற விகிதத்தில் உள்ளனர் எனச் சொல்லலாமா **?** (சிறப்பு காண் மட்டம் 1%)

தீர்வு :

நமக்குக் கொடுக்கப்பட்டவை

$$n = 400$$

x = மாதிரியில் உள்ள மொத்த பெண்கள் $= 120$

p = மாதிரியில் உள்ள பெண்களின் விகிதம் $= \frac{120}{400} = 0.30$

இல் எனும் எடுகோள் :

முழுமைத் தொகுதியில் ஆண்களும் பெண்களும் உள்ள விகிதம் 5:3

அதாவது, H_0: P = முழுமைத் தொகுதியில் உள்ள பெண்களின் விகிதம் $= \frac{3}{8} = 0.375$

மாற்று எடுகோள் :

$H_1 : P \neq 0.375$ (இரு முனை)

சிறப்பு காண் மட்டம் :

$\alpha = 1\ \%$ அல்லது 0.01

புள்ளியியல் அளவை கணக்கிடுதல் :

H_0 - ன் கீழ், சோதனை புள்ளியியல் அளவையானது,

$$Z_0 = \left|\frac{p-P}{\sqrt{\frac{PQ}{n}}}\right|$$

$$= \left|\frac{0.300-0.375}{\sqrt{\frac{0.375\times0.625}{400}}}\right|$$

$$= \frac{0.075}{\sqrt{0.000586}} = \frac{0.075}{0.024} = 3.125$$

எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பு :

$$Z_e = \left|\frac{p-P}{\sqrt{\frac{PQ}{n}}}\right| \sim N(0,1) = 2.58$$

முடிவு :

இங்கு $Z_0 > Z_e$ என்பதால், 1% சிறப்பு காண் மட்டத்தில் H_0 மறுக்கப்படுகிறது. ஆகவே முழுமைத் தொகுதியில் ஆண்களும் பெண்களும் 5:3 என்ற விகிதத்தில் இல்லை என முடிவு செய்யப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

ஒரு தொழிற்சாலையில் தயாரிக்கப்படும் பாகங்களில் **400** பாகங்களை மாதிரியாக எடுத்துக் கொள்ளப்படுகிறது. அதில் **30** பாகங்கள் பழுதடைந்துள்ளது. ஆனால் அந்த நிறுவனம் அவர்கள் தயாரிப்பில் 5% மட்டுமே பழுதடைந்துள்ள பாகங்கள் உள்ளன என அறிவிக்கிறது. அந்த அறிவிப்பு ஏற்கக் கூடியதா **?**

தீர்வு :

நமக்குக் கொடுக்கப்பட்டவை

$n = 400$

x = மாதிரியில் உள்ள குறையுள்ள பாகங்கள் $= 30$

p = மாதிரியில் உள்ள குறையுள்ள பாகங்களின் விகிதம் $= \frac{x}{n} = \frac{30}{400} = 0.075$

இல் எனும் எடுகோள் :

$H_0: P = 0.05$ நிறுவனத்தின் அறிவிப்பு ஏற்கக் கூடியது.

மாற்று எடுகோள் :

$H_1 : P > 0.05$ (வல முனை)

சிறப்பு காண் மட்டம் :

$\alpha = 5\%$ என்க

புள்ளியியல் அளவை கணக்கிடுதல் :

H_0 ன் கீழ், சோதனைப் புள்ளியியல் அளவையானது,

$$Z_0 = \left| \frac{p - P}{\sqrt{\frac{PQ}{n}}} \right|$$

$$= \left| \frac{0.075 - 0.050}{\sqrt{\frac{0.05 \times 0.95}{400}}} \right|$$

$$= \frac{0.025}{\sqrt{0.0001187}} = 2.27$$

எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பு :

$$Z_e = \left| \frac{p - P}{\sqrt{\frac{PQ}{n}}} \right| \sim N(0,1)$$

$$= 1.645$$

முடிவு :

இங்கு $Z_0 > Z_e$ என்பதால், 5% சிறப்பு காண் மட்டத்தில் எடுகோள் மறுக்கப்படுகிறது. ஆகவே நிறுவனத்தின் அறிவிப்பை ஏற்க இயலாது என முடிவு மேற்கொள்ளப்படுகிறது.

5.3 இரு மாதிரிகளின் விகிதசம வித்தியாசத்திற்கான சிறப்பு காண சோதனை:

சோதனை வழிமுறைகள் :

இல் எனும் எடுகோள் :

$H_0 : P_1 = P_2 = P$ (என்க)

மாற்று எடுகோள் :

$H_1 : P_1 \neq P_2$ ($P_1 > P_2$ அல்லது $P_1 < P_2$)

சிறப்பு காண் மட்டம் :

$\alpha = 0.05$ அல்லது 0.01

புள்ளியியல் அளவை கணக்கிடுதல் :

H_0 ன் கீழ், சோதனைப் புள்ளியியல் அளவையானது,

$$Z_0 = \left| \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{\frac{P_1Q_1}{n_1} + \frac{P_2Q_2}{n_2}}} \right| \quad (P_1, P_2 \text{ தெரிந்த நிலையில்})$$

$$= \left| \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{\hat{P}\hat{Q}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \right| \quad (P_1, P_2 \text{ தெரியாத நிலையில்})$$

இங்கு $\hat{P} = \frac{n_1p_1 + n_2p_2}{n_1 + n_2} = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2}$

$\hat{Q} = 1 - \hat{P}$

எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பு :

$$Z_e = \left| \frac{p_1 - p_2}{S.E(p_1 - p_2)} \right| \sim N(0,1)$$

முடிவு :

(i) $Z_0 \leq Z_e$ எனில், H_0 ஏற்கப்படுகிறது. விகித சம வித்தியாசத்திற்கா மாதிரித் தேர்வில் ஏற்றத்தாழ்வுகளைப் பொறுத்ததாகும்.

(ii) $Z_0 > Z_e$ எனில், H_0 மறுக்கப்படுகிறது. எனவே விகித சம வேற்றுமைகள் மாதிரித் தேர்வில் ஏற்றத்தாழ்வுகளைப் பொறுத்ததாகாது.

எடுத்துக்காட்டு 3 :

ஒரு பல்கலைக்கழக மாணவர்களிடையே வாக்கெடுப்பு நடத்தியதில் 850 மாணவர்களும் 550 மாணவிகளும் வாக்களித்தனர். மாணவர்களில் 530 பேரும் மாணவியரில் 310 பேரும் "ஆம்" என வாக்களித்தனர். மாணவர்களுக்கும் மாணவியருக்கும் இடையேயான கருத்து வேறுபாடு சிறப்பு வாய்ந்ததா எனக் குறிப்பிடுக.

தீர்வு :

நமக்குக் கொடுக்கப்பட்டவை

$n_1 = 850$ $\quad n_2 = 550$ $\quad x_1 = 530$ $\quad x_2 = 310$

$$p_1 = \frac{530}{850} = 0.62 \qquad p_2 = \frac{310}{550} = 0.56$$

$$\hat{p} = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2} = \frac{530 + 310}{1400} = 0.60$$

$$\hat{Q} = 0.40$$

இல் எனும் எடுகோள் :

$H_0 : P_1 = P_2$ அதாவது கொடுக்கப்பட்ட விவரங்கள் மாணவருக்கும் மாணவியருக்கும் இடையேயான கருத்து வேறுபாடு சிறப்பு வாய்ந்ததில்லை எனக் கொள்ளப்படுகிறது.

மாற்று எடுகோள் :

$H_1 : P_1 \neq P_2$ (இரு முனை)

சிறப்பு காண் மட்டம் :

$\alpha = 0.05$ என்க

புள்ளியியல் அளவை கணக்கிடுதல் :

H_0–ன் கீழ், சோதனைப் புள்ளியியல் அளவையானது

$$Z_0 = \left| \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{\hat{P}\hat{Q}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \right|$$

$$= \left| \frac{0.62 - 0.56}{\sqrt{0.6 \times 0.4 \left(\frac{1}{850} + \frac{1}{550} \right)}} \right|$$

$$= \frac{0.06}{0.027} = 2.22$$

எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பு :

$$Z_e = \left| \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{\hat{P}\hat{Q}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}} \right| \sim N(0,1) = 1.96$$

முடிவு :

இங்கு $Z_0 > Z_e$ என்பதால் 5% சிறப்பு காண் மட்டத்தில் இல் எனும் எடுகோள் மறுக்கப்படுகிறது. ஆகவே கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களிலிருந்து மாணவருக்கும் மாணவியருக்கும் இடையேயான கருத்து வேறுபாடு சிறப்பு வாய்ந்தவை எனக் கொள்ளப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 4 :

ஒரு குறிப்பிட்ட நகரத்தில் 500 ஆண்களில் 125 பேர் சுயதொழில் செய்பவர்கள் மற்றொரு நகரத்தில் 1000 ஆண்களில் 375 பேர் சுயதொழில் செய்பவர்கள். இது முதல் நகரத்தை விட இரண்டாவது நகரத்தில் சுயதொழில் செய்பவர் அதிகம் உள்ளனர் என்பதைக் காட்டுகிறதா **?**

தீர்வு :

நமக்குக் கொடுக்கப்பட்டவை

$n_1 = 500$ $\quad n_2 = 1000$ $\quad x_1 = 125$ $\quad x_2 = 375$

$$p_1 = \frac{125}{500} = 0.25 \qquad p_2 = \frac{375}{1000} = 0.375$$

$$\hat{P} = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2} = \frac{125 + 375}{500 + 1000}$$

$$= \frac{500}{1500} = \frac{1}{3}$$

$$\hat{Q} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

இல் எனும் எடுகோள் :

$H_0 : P_1 = P_2$ இரு முழுமைத் தொகுதி விகித சமங்களுக்கிடையேயான வித்தியாசம் சிறப்பு வாய்ந்ததில்லை.

மாற்று எடுகோள் :

$H_1 : P_1 < P_2$ (வல முனை)

சிறப்பு காண் மட்டம் :

$\alpha = 0.05$ என்க

புள்ளியியல் அளவை கணக்கிடுதல் :

H_0–ன் கீழ், சோதனைப் புள்ளியியல் அளவையானது

$$Z_0 = \left| \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{\hat{P}\hat{Q}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \right|$$

$$= \left| \frac{0.25 - 0.375}{\sqrt{\frac{1}{3} \text{ x } \frac{2}{3}\left(\frac{1}{500} + \frac{1}{1000}\right)}} \right| = \frac{0.125}{0.026} = 4.8$$

எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பு :

$$Z_e = \left| \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{\hat{P}\hat{Q}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \right| \sim N(0,1) = 1.645$$

முடிவு :

இங்கு $Z_0 > Z_e$ என்பதால், 5% சிறப்பு காண் மட்டத்தின் கீழ் இல் எனும் எடுகோள் மறுக்கப்படுகிறது. ஆகவே இரு முழுமைத் தொகுதி விகித சமங்களுக்கிடையேயான வித்தியாசம் சிறப்பு வாய்ந்தது.

எடுத்துக்காட்டு 5 :

200 பேருக்கு சிவில் சர்வீஸ் தேர்வு நடந்தது. அவர்களின் மொத்த மதிப்பெண்களைக் கணக்கில் கொண்டு அவர்களை முதல் 30% நபர்கள் மற்றும் பின்னால் உள்ள 70% நபர்கள் என்றும் பிரிக்கப்படுகின்றனர். ஒரு குறிப்பிட்ட வினாவிற்கு முதல் பகுதியில் 40 பேரும் மற்றும் கீழ்ப்பகுதியில் 80 பேரும் சரியாக விடையளித்தனர். இதனை அடிப்படையாகக் கொண்டு இரு பிரிவுகளின் திறமையை சோதிக்க இவ்வினா பயன்படுமா **?**

தீர்வு :

நமக்குக் கொடுக்கப்பட்டவை

$$n_1 = \frac{30 \times 200}{100} = 60 \qquad n_2 = \frac{70 \times 200}{100} = 140$$

$$x_1 = 40 \qquad x_2 = 80$$

$$p_1 = \frac{40}{60} = \frac{2}{3} \qquad p_2 = \frac{80}{140} = \frac{4}{7}$$

$$\hat{P} = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2} = \frac{40+80}{60+140}$$

$$= \frac{120}{200} = \frac{6}{10}$$

$$\hat{Q} = 1 - \hat{P} = 1 - \frac{1}{6} = \frac{4}{10}$$

இல் எனும் எடுகோள் :

$H_0 : P_1 = P_2$ இரண்டு நிலைகளில் உள்ள நபர்களின் திறமையின் வித்தியாசம் அறிய குறிப்பிட்ட வினா பயன்படவில்லை.

மாற்று எடுகோள் :

$H_1 : P_1 \neq P_2$ (இரு முனை)

சிறப்பு காண் மட்டம் :

$\alpha = 0.05$ என்க

புள்ளியியல் அளவை கணக்கிடுதல் :

H_0–ன் கீழ், சோதனைப் புள்ளியியல் அளவையானது

$$Z_0 = \left| \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{\hat{P}\hat{Q}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \right|$$

$$= \left| \frac{\frac{2}{3} - \frac{4}{7}}{\sqrt{\frac{6}{10} \times \frac{4}{10}\left(\frac{1}{60} + \frac{1}{140}\right)}} \right|$$

$$= \frac{10}{\sqrt{21}\sqrt{3}} = 1.3$$

எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பு :

$$Z_e = \left| \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{\hat{P}\hat{Q}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \right| \sim N(0,1)$$

$$= 1.96$$

முடிவு :

இங்கு $Z_0 < Z_e$ என்பதால், 5% சிறப்பு காண் மட்டத்தின் கீழ் இல் எனும் எடுகோள் ஏற்கப்படுகிறது. ஆகவே இரண்டு நிலைகளில் உள்ள நபர்களின் திறமையின் வித்தியாசம் அறிய அந்த குறிப்பிட்ட வினா பயன்படவில்லை.

5.4 கூட்டு சராசரிக்கான சிறப்பு காண் சோதனை :

σ^2 மாறுபாட்டளவை என உள்ள முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து n மாதிரி எடுக்கப்பட்டது. அவை x_i (i = 1, 2….. n) அதன் மாதிரியின் கூட்டு சராசரி $\bar{x}$ ஆனது கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + ...x_n)$$

$$E(\bar{x}) = \mu$$

$$V(\bar{x}) = V\left[\frac{1}{n}(x_1 + x_2 + ...x_n)\right]$$

$$= \frac{1}{n^2}[(V(x_1) + V(x_2) + ...V(x_n)]$$

$$= \frac{1}{n^2} n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$\therefore S.E(\bar{x}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

சோதனை வழி முறைகள் :

இல் எனும் எடுகோள் மற்றும் மாற்று எடுகோள் :

$H_0 : \mu = \mu_0$.

$H_1 : \mu \neq \mu_0$ ($\mu > \mu_0$ அல்லது $\mu < \mu_0$)

சிறப்பு காண் மட்டம் :

$\alpha = 0.05$ அல்லது 0.01

புள்ளியியல் அளவை கணக்கிடுதல் :

H_0–ன் கீழ், சோதனைப் புள்ளியியல் அளவையானது

$$Z_0 = \left|\frac{\bar{x} - E(\bar{x})}{S.E(\bar{x})}\right| = \left|\frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}\right|$$

எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பு :

$$Z_e = \left|\frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}\right| \sim N(0,1)$$

$= 1.96, (\alpha = 0.05)$ அல்லது $= 2.58, (\alpha = 0.01)$

முடிவு :

$Z_0 \leq Z_e$ எனில், இல் எனும் எடுகோள் ஏற்றுக் கொள்ளப்படுகிறது. ஆகவே மாதிரியானது கூட்டு சராசரி $\mu = \mu_0$ எனக் கொண்ட முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்டதாகும் என முடிவு செய்யப்படுகிறது.

$Z_0 > Z_e$ எனில், இல் எனும் எடுகோள் மறுக்கப்படுகிறது. ஆகவே மாதிரியானது கூட்டு சராசரி $\mu = \mu_0$ எனக் கொண்ட முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்படவில்லை என முடிவு செய்யப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 6 :

ஒரு கம்பெனி உற்பத்தி செய்த 100 ஒளிரும் ஒளி விளக்குகளின் சராசரி ஆயுட்காலம் 1570 மணி நேரம் மற்றும் அதன் திட்ட விலக்கம் 120 மணி நேரம் ஆகும். அந்த கம்பெனி தயாரித்த அனைத்து விளக்குகளின் சராசரி ஆயுட்காலம் μ எனில் எடுகோள் $\mu = 1600$ மணி நேரம் என்பதை அதற்கு எதிரான மாற்று எடுகோள் $\mu \neq 1600$ மணி நேரத்துக்கு, 5% சிறப்பு காண் மட்டத்தில் சோதனை செய்க.

தீர்வு :

நமக்குக் கொடுக்கப்பட்டவை

$\bar{x} = 1570$ மணி நேரம் $\quad$ $\mu = 1600$ மணி நேரம்

$s = 120$ மணி நேரம் $\quad$ $n = 100$

இல் எனும் எடுகோள் :

$H_0 : \mu = 1600$ மாதிரியின் சராசரிக்கும் முழுமைத் தொகுதியின் சராசரிக்கும் சிறப்பான வித்தியாசம் இல்லை.

மாற்று எடுகோள் :

$H_1 : \mu \neq 1600$ (இரு முனை)

சிறப்பு காண் மட்டம் :

$\alpha = 0.05$ என்க

புள்ளியியல் அளவை கணக்கிடுதல் :

H_0–ன் கீழ், சோதனைப் புள்ளியியல் அளவையானது

$$Z_0 = \left|\frac{\bar{x} - \mu}{s / \sqrt{n}}\right|$$

$$= \left|\frac{1570 - 1600}{\frac{120}{\sqrt{100}}}\right|$$

$$= \frac{30 \times 10}{120}$$

$$= 2.5$$

எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பு :

$$Z_0 = \left|\frac{\bar{x} - \mu}{s / \sqrt{n}}\right| \sim N(0, 1)$$

$$= 1.96$$

முடிவு :

இங்கு $Z_0 < Z_e$ என்பதால், இல் எனும் எடுகோள் ஏற்றுக் கொள்ளப்படுகிறது. ஆகவே மாதிரியானது கூட்டு சராசரி $\mu = 1600$ உடைய முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்டதாகும் என முடிவு செய்யப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 7 :

தற்போது உபயோகத்தில் இருக்கும் காரை விட தாங்கள் புதியதாக அறிமுகம் செய்த காரின் பெட்ரோல் உபயோகம் குறைவு என ஒரு கார் உற்பத்தி செய்யும் நிறுவனம் அறிவிப்பு செய்தது. 50 புதிய கார்கள் மாதிரியாக எடுத்து அதன் பெட்ரோல் உபயோகம் குறித்து சோதனை செய்யப்பட்ட போது அது சராசரியாக ஒரு லிட்டருக்கு 30 கி.மீ மற்றும் 1 லிட்டருக்கு அதன் திட்டவிலக்கம் 3.5 கி.மீ என அறியப்பட்டது. புதிய காரின் சராசரி பெட்ரோல் உபயோகம் லிட்டருக்கு 28 கி.மீ என்ற நிறுவனத்தின் அறிவிப்பை ஏற்றுக் கெள்ளலாமா என 5% சிறப்பு காண் மட்டத்தின் கீழ் சோதனை செய்.

தீர்வு :

நமக்குக் கொடுக்கப்பட்டவை

$\bar{x} = 30$; $\mu = 28$; $n = 50$; $s = 3.5$

இல் எனும் எடுகோள் :

$H_0 : \mu = 28$ அதாவது புதிய காரின் பெட்ரோல் உபயோகம் சராசரியாக லிட்டருக்கு 28 கி.மீ என்ற நிறுவனத்தின் அறிவிப்பு ஏற்றுக் கொள்ளப்பட்டது.

மாற்று எடுகோள் :

$H_1 : \mu < 28$ (இடது முனை)

சிறப்பு காண் மட்டம் :

$\alpha = 0.05$ என்க

புள்ளியியல் அளவை கணக்கிடுதல் :

H_0–ன் கீழ், சோதனைப் புள்ளியியல் அளவையானது

$$Z_0 = \left|\frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}}\right|$$

$$= \left|\frac{30-28}{\frac{3.5}{\sqrt{50}}}\right|$$

$$= \frac{2 \times \sqrt{50}}{3.5}$$

$$= 4.04$$

எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பு :

$$Z_e = \left|\frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}}\right| \sim N(0,1)$$

$$= 1.645$$

முடிவு :

இங்கு $Z_0 > Z_e$ என்பதால், 5% சிறப்பு காண் மட்டத்தில் இல் எனும் எடுகோள் மறுக்கப்படுகிறது. எனவே நிறுவனத்தின் அறிவிப்பை ஏற்றுக் கொள்ள முடியாது.

5.5 இரு மாதிரிகளின் கூட்டு சராசரிகளின் வித்தியாசத்திற்கான சிறப்பு காண் சோதனை :

சோதனை வழிமுறை

இல் எனும் எடுகோள் :

$H_0: \mu_1 = \mu_2$

மாற்று எடுகோள் :

$H_1: \mu_1 \neq \mu_2$ ($\mu_1 > \mu_2$ அல்லது $\mu_1 < \mu_2$)

சிறப்பு காண் மட்டம் :

α % என்க

புள்ளியியல் அளவை கணக்கிடுதல் :

H_0–ன் கீழ், சோதனைப் புள்ளியியல் அளவையானது

$$Z_0 = \left|\frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\right|$$

$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ அதாவது மாதிரிகள் இரண்டும் பொதுவான திட்டவிலக்கம் σ உடைய ஒரே முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்டால் $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ –ன் கீழ்

$$Z_0 = \left|\frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}\right|$$

எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பு :

$$Z_e = \left|\frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{S.E(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}\right| \sim N(0,1)$$

முடிவு :

$Z_0 \leq Z_e$ H_0 ஏற்கப்படுகிறது.

$Z_0 > Z_e$ H_0 மறுக்கப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 8 :

இரண்டு வகையான கேபிள்களின் உடையும் தன்மையை சோதனை செய்ய $n_1=n_2= 100$ என்ற அளவில் இரண்டு வகையிலும் ஒவ்வொரு மாதிரி எடுக்கப்படுகிறது.

கேபிள் I	கேபிள் II
$\bar{x}_1 =1925$	$\bar{x}_2 = 1905$
$\sigma_1= 40$	$\sigma_2 = 30$

இரண்டு கேபிள்களின் உடையும் தன்மையின் வித்தியாசத்தைக் காண கொடுக்கப்பட்ட விவரங்கள் போதுமான சான்று தருகிறதா **?** 1% சிறப்பு காண் மட்டத்தைப் பயன்படுத்துக.

தீர்வு :

நமக்குக் கொடுக்கப்பட்டவை

$\bar{x}_1 =1925$ $\bar{x}_2 = 1905$ $\sigma_1 = 40$ $\sigma_2 = 30$

இல் எனும் எடுகோள் :

H_0: $\mu_1 = \mu_2$ இரண்டு கேபிள்களின் சராசரி உடையும் தன்மையின் வித்தியாசம் சிறப்பு வாய்ந்ததல்ல.

மாற்று எடுகோள் :

$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ (இரு முனை)

சிறப்பு காண் மட்டம் :

$\alpha = 0.01$ அல்லது 1%

புள்ளியியல் அளவை கணக்கிடுதல் :

H_0–ன் கீழ், சோதனைப் புள்ளியியல் அளவையானது

$$Z_0 = \left|\frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^{\,2}}{n_1} + \frac{\sigma_2^{\,2}}{n_2}}}\right|$$

$$= \left|\frac{1925 - 1905}{\sqrt{\frac{40^2}{190} + \frac{30^2}{100}}}\right| = \frac{20}{5} = 4$$

எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பு :

$$Z_e = \left|\frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^{\,2}}{n_1} + \frac{\sigma_2^{\,2}}{n_2}}}\right| \sim N(0,1) = 2.58$$

முடிவு :

இங்கு $Z_0 > Z_e$, என்பதால் H_0 மறுக்கப்படுகிறது. அதாவது இரண்டு கேபிள்களின் சராசரி உடையும் தன்மையின் வித்தியாசம் சிறப்பு வாய்ந்தது.

எடுத்துக்காட்டு 9 :

முறையே **1000, 2000** எண்ணிக்கையுடைய மிகப் பெரிய மாதிரிகளின் கூட்டுச்சராசரி முறையே **67.5** செ.மீ மற்றும் **68.0** செ.மீ ஆகும். திட்டவிலக்கம் **2.5** செ.மீ உடைய முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து மாதிரிகள் எடுக்கப்பட்டன என்பதை 5% சிறப்பு காண் மட்ட அளவில் சோதனை செய்க.

தீர்வு :

நமக்குக் கொடுக்கப்பட்டவை

$n_1 = 1000$; $n_2 = 2000$ $\bar{x}_1 = 67.5$ செ.மீ ; $\bar{x}_2 = 68.0$ செ.மீ $\sigma = 2.5$ செ.மீ

இல் எனும் எடுகோள் :

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$ அதாவது ஒரே முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து மாதிரிகள் எடுக்கப்பட்டன.

மாற்று எடுகோள் :

$H_1: \mu_1 \neq \mu_2$ (இரு முனை)

சிறப்பு காண் மட்டம் :

$\alpha = 5\%$

புள்ளியியல் அளவை கணக்கிடுதல் :

H_0–ன் கீழ், சோதனைப் புள்ளியியல் அளவையானது

$$Z_0 = \left| \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \right|$$

$$= \left| \frac{67.5 - 68.0}{2.5\sqrt{\frac{1}{1000} + \frac{1}{2000}}} \right|$$

$$= \frac{0.5 \times 20}{2.5\sqrt{3/5}}$$

$$= 5.1$$

எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பு :

$$Z_e = \left| \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \right| \sim N(0,1) = 1.96$$

முடிவு :

இங்கு $Z_0 > Z_e$ என்பதால், 5% சிறப்பு காண் மட்டத்தில் H_0 மறுக்கப்படுகிறது. எனவே ஒரே முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து மாதிரிகள் எடுக்கப்படவில்லை என முடிவு செய்யப்படுகிறது.

பயிற்சி – 5

I. சரியான விடையை தெரிவு செய்க :

1. வெற்றிகளின் எண்ணிக்கைக்கான திட்டப்பிழையானது

   அ) $\sqrt{\dfrac{pq}{n}}$ ஆ) $\sqrt{npq}$ இ) npq ஈ) $\sqrt{\dfrac{np}{q}}$

2. பெருங்கூற்றுக் கோட்பாட்டைப் பயன்படுத்துவது எப்போது எனில்

   அ) $n > 30$ ஆ) $n < 30$ இ) $n < 100$ ஈ) $n < 1000$

3. இரண்டு சராசரிகளுக்கு இடையேயான வித்தியாசத்திற்கான புள்ளியியல் சோதனையானது

   அ) $\dfrac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ ஆ) $\dfrac{p-P}{\sqrt{\dfrac{PQ}{n}}}$

   இ) $\dfrac{\bar{x}_1-\bar{x}_2}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$ ஈ) $\dfrac{p_1-p_2}{\sqrt{PQ\left(\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}\right)}}$

4. விகித சம வித்தியாசத்திற்கான $(p_1 - p_2)$ திட்டபிழையானது, எடுகோள் $H_0 : p_1 = p_2$ என உள்ள போது

   அ) $\sqrt{\hat{p}\hat{q}\left(\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}\right)}$ ஆ) $\sqrt{\hat{p}\left(\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}\right)}$

   இ) $\hat{p}\hat{q}\sqrt{\left(\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}\right)}$ ஈ) $\dfrac{p_1q_1}{n_1}+\dfrac{p_2q_2}{n_2}$

5. புள்ளியியல் அளவை $z = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$ பயன்படுத்தப்படும் இல் எனும் எடுகோளானது

அ) $H_0: \mu_1 + \mu_2 = 0$ ஆ) $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$

இ) $H_0: \mu = \mu_0$ (ஒரு மாறிலி) ஈ) மேற்கூறியவற்றில் எவையும் இல்லை

II. கோடிட்ட இடங்களை நிரப்புக :

6. $\hat{P} = \frac{2}{3}$ எனில், $\hat{Q}$ = _________.

7. $z_0 < z_e$ எனில், இல் எனும் எடுகோளானது ____________

8. வித்தியாசமானது __________ எனில், இல் எனும் எடுகோள் மறுக்கப்படுகிறது.

9. இரு விகித சமங்களுக்கு இடையே உள்ள வித்தியாசத்திற்கான புள்ளியியல் சோதனையானது ________.

10. கூட்டு சராசரியின் மாறுபாடானது ________.

III. **கீழ்க்காணும் வினாக்களுக்கு விடை தருக :**

11. ஒரு சோதனையில் $z_0 \leq z_e$ எனும் பொழுது, இல் எனும் எடுகோளைப் பற்றி நீவிர் எடுக்கும் முடிவு என்ன ?

12. புள்ளியியல் சோதனை அளவீடுகள் தருக.

அ) விகித சமம்

ஆ) சராசரி

இ) இரு கூட்டு சராசரிகளுக்கான வித்தியாசம்

ஈ) இரு விகித சம வித்தியாசம்

13. இரு விகித சம வித்தியாசங்களின் மாறுபாட்டை எழுதுக.

14. விகித சமத்தின் திட்டபிழையை எழுதுக.

15. கீழ்க்கண்டவற்றின் சிறப்பு காண் சோதனைக்கான வழிமுறைகளை எழுதுக.

அ) விகித சமம் ஆ) கூட்டு சராசரி இ) இரு விகித சம வித்தியாசம்

ஈ) இரு கூட்டு சராசரிகளுக்கான வித்தியாசம்

16. ஒரு நாணயம் 400 முறைகள் சுண்டப்படுகிறது. மற்றும் அதில் 216 முறை தலை விழுகிறது. நாணயம் நடுநிலை மாறாததற்கான எடுகோளைச் சோதிக்கவும்.

17. ஒருவர் 10 பகடைகளை 500 முறை வீசும் போது அதில் 2560 முறை 4, 5 அல்லது 6 கிடைக்கின்றது. இது மாதிரி தேர்வின் ஏற்றத்தாழ்வுகளுக்கு காரணமாக உள்ளதா ?

18. ஒரு மருத்துவமனையில் ஒரு வாரத்தில் 480 பெண் மற்றும் 520 ஆண் குழந்தைகள் பிறக்கின்றன. இந்த எண்ணிக்கையானது ஆண் மற்றும் பெண் குழந்தைகளின் பிறப்பு சமமாக உள்ளது என்ற எடுகோளை உறுதிப்படுத்துகின்றதா ?

19. ஒரு பெரிய நகரத்தில் 600 ஆண்களில் 325 பேர் சுயதொழில் செய்பவர்கள். இந்தச் செய்தியை ஆதாரமாகக் கொண்டு இந்த நகரத்தில் உள்ள பெரும்பான்மையான ஆண்கள் சுயதொழில் செய்பவர் என முடிவு செய்யலாமா ?

20. ஒரு இயந்திரம் 500 மாதிரிகளில் 16 குறைபாடுள்ள பொருள்களை தயாரிக்கிறது. இயந்திரத்தை பழுதுபார்த்த பிறகு 100க்கு 3 குறைபாடுள்ள பொருளைத் தருகின்றது. இயந்திரத்தில் ஏதேனும் முன்னேற்றம் உள்ளதா ?

21. 1000 நபர்கள் உள்ள நகரம் A–ல் எடுக்கப்பட்ட சமவாய்ப்பு மாதிரியில் 400 நபர்கள் கோதுமை உணவு சாப்பிடுபவர்கள். 800 நபர்கள் கொண்ட நகரம் B –யில் எடுக்கப்பட்ட மாதிரியில் 400 நபர்கள் கோதுமை உணவு சாப்பிடுபவர்கள். கொடுக்கப்பட்ட விவரம், நகரம் A மற்றும் B யின் விகித சம வித்தியாசம் சிறப்பு வாய்ந்தது என்பதை வெளிப்படுத்துகிறதா ?

22. தொழிற்சாலை A யில் தயாரிக்கப்பட்ட 1000 பொருள்களில் 3% பழுதுள்ளவை தொழிற்சாலை B யில் தயாரிக்கப்பட்ட 1500 பொருள்களில் 2% பழுதுள்ளவை. இரண்டாவது தொழிற்சாலையில் தயாரிக்கப்பட்ட பொருள்களை விட முதல் தொழிற்சாலையில் தயாரிக்கப்பட்ட பொருளின் தரம் குறைந்தது என முடிவெடுக்கலாமா ?

23. ஒரு கல்லூரியில் படிக்கும் 600 மாணவர்களில் 400 பேர் நீல நிற மையைப் பயன்படுத்துகின்றனர். மற்றொரு கல்லூரியில் படிக்கும் 900 பேரில் 450 பேர் நீல நிற மையைப் பயன்படுத்துகின்றனர். நீல நிற மையைப் பயன்படுத்துவதில் இரண்டு கல்லூரிகளுக்கும் இடையே உள்ள வித்தியாசம் சிறப்பு வாய்ந்ததா எனச் சோதனை செய்க.

24. ஒரு சமவாய்ப்பு மாதிரியில் எடுக்கப்பட்ட 100 டயர்களின் சராசரி ஆயுட்காலம் 15269 கி.மீ என உரிமை கொண்டாடப்படுகிறது. இந்த மாதிரி எடுக்கப்பட்ட முழுமைத் தொகுதி டயர்களின் சராசரி ஆயுட்காலம் 15200 கி.மீ மற்றும் அதன் திட்டவிலக்கம் 1248 கி.மீ ஆகும். அந்த உரிமையின் நியாயத்தை சோதனை செய்க.

25. 400 மாதிரிகளின் கூட்டு சராசரி 99. இந்த மாதிரி கூட்டு சராசரி 100 மற்றும் மாறுபாடு 64 உள்ள இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்டதா என 5% சிறப்பு காண் மட்டத்தின் மூலம் சோதனை செய்க.

26. மிகப் பெரிய முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட 100 எண்ணிக்கை கொண்ட மாதிரியின் கூட்டு சராசரி 52 ஆகும். முழுமைத் தொகுதியின் திட்டவிலக்கம் 7 எனில், முழுமைத் தொகுதியின் சராசரி 55 எனக் கொண்ட எடுகோளுக்கு எதிராக மாற்று எடுகோளின் சராசரி 55 அல்ல என்பதை சோதனை செய்க. 5% சிறப்பு காண் மட்டத்தைப் பயன்படுத்துக.

27. ஒரு நிறுவனம் தயாரித்த ஒளி விளக்குகளின் முழுமைத் தொகுதியின் சராசரி ஆயுட்காலம் 1200 மணி நேரம், அதன் திட்டவிலக்கம் 125 மணி நேம், 100 விளக்குகள் மாதிரியாக எடுக்கப்பட்டு சோதனை செய்ததில் அதன் சராசரி ஆயுட்காலம் 1150 மணி நேரம் எனக் கிடைக்கப் பெற்றது. முழுமைத் தொகுதி மற்றும் மாதிரியின் கூட்டு சராசரிகளுக்கு இடையே உள்ள வித்தியாசம் புள்ளியியல் ரீதியாக சிறப்பு வாய்ந்ததா என 5% சிறப்பு காண் மட்டத்தின் மூலம் சோதனையிடுக.

28. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களுக்கு மாதிரிகளின் கூட்டு சராசரிகளுக்கிடையே உள்ள வித்தியாசத்திற்கான சிறப்பு காண் சோதனையை மேற்கொள்ளவும்.

	மாதிரியின் எண்ணிக்கை	சராசரி	திட்டவிலக்கம்
மாதிரி A	100	50	4
மாதிரி B	150	51	5

29. முறையே 40 மற்றும் 50 மாணவர்கள் கொண்ட இரண்டு வகுப்புகளுக்கு ஒரு தேர்வு நடத்தப்பட்டது. முதல் வகுப்பின் சராசரி மதிப்பெண் 74, அதன் திட்ட விலக்கம் 8, இரண்டாம் வகுப்பின் சராசரி 78, அதன் திட்ட விலக்கம் 7. இரண்டு வகுப்புகளுக்கு நடந்த தேர்வின் செய்கைகளுக்கு இடையே ஏதேனும் வித்தியாசம் உள்ளதா என 0.05 சிறப்பு காண் மட்டத்தில் சோதனை செய்க.

30. M.A. பொருளாதாரம் படிக்கும் 60 மாணவர்களின் சராசரி உயரம் 63.60 அங்குலங்கள் மற்றும் 50 M.Com படிக்கும் மாணவர்களின் சராசரி உயரம் 69.51 அங்குலங்கள். பொருளாதாரம் படிக்கும் மாணவர்களை விட வணிகவியல் படிக்கும் மாணவர்கள் அதிக உயரம் உடையவர்கள் என நீவிர் முடிவெடுக்கலாமா ? முதுகலை மாணவர்களின் திட்டவிலக்க உயரம் 2.48 அங்குலங்கள் என எடுத்து கொள்ளவும்.

விடைகள் :

I.

1. அ) 2. அ) 3. இ) 4. அ) 5. ஆ)

II.

6. $\frac{1}{3}$ 7.ஏற்றுக் கொள்ளப்படும் 8. சிறப்பு வாய்ந்தது

9. $\frac{p_1 - p_2}{\sqrt{\hat{P}\hat{Q}\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}$ 10. $\frac{\sigma^2}{n}$

III.

16. $z = 1.6$ H_0 ஏற்கப்படுகிறது.

17. $z = 1.7$ H_0 ஏற்கப்படுகிறது.

18. $z = 1.265 H_0$ ஏற்கப்படுகிறது.

19. $z = 2.04$ H_0 ஏற்கப்படுகிறது.

20. $z = 0.106$ H_0 ஏற்கப்படுகிறது.

21. z = 4.17 H_0 மறுக்கப்படுகிறது.

22. z = 1.63 H_0 ஏற்கப்படுகிறது.

23. z = 6.38 H_0 மறுக்கப்படுகிறது.

24. z = 0.5529 H_0 ஏற்கப்படுகிறது.

25. z = 2.5 H_0 மறுக்கப்படுகிறது.

26. z = 4.29 H_0 மறுக்கப்படுகிறது.

27. z = 4 H_0 மறுக்கப்படுகிறது.

28. z = 1.75 H_0 ஏற்கப்படுகிறது.

29. z = 2.49 H_0 மறுக்கப்படுகிறது.

30. z = 12.49 H_0 மறுக்கப்படுகிறது.

6. சிறப்பு காண் சோதனை (சிறு கூறுகள்)

6.0 அறிமுகம் :

பெருங்கூறுகள் சம்மந்தப்பட்ட கணக்குகளை இதற்கு முந்தைய பாடத்தில் நாம் பார்த்தோம். பெருங்கூறு கோட்பாடுகள் இரண்டு முக்கிமான அனுமானத்தின் அடிப்படையில் அமைந்துள்ளன. அவையாவன

(a) புள்ளியியல் அளவையின் சமவாய்ப்பு மாதிரி பரவலானது, தோராயமாக இயல்நில பரவலைச் சாரும். மற்றும்,

(b) ஒரு மாதிரி விவரத்திலிருந்து கிடைத்த மதிப்புகள் போதுமான அளவு முழுமைத் தொகுதியின் மதிப்புகளுக்கு அருகில் உள்ளது.

எனவே திட்டப் பிழையை வரையறுக்கும் கணக்கீடுகளுக்கு அந்த மதிப்பு பயன்படுத்தப்படுகிறது.

மேற்கண்ட அனுமானங்கள் சிறு கூறுகள் முறைகளுக்கு பொருந்தாது. ஆகவே, சிறு கூறுகளைக் கையாள்வதற்கு ஒரு புதிய முறை தேவைப்படுகிறது. மாதிரியின் எண்ணிக்கை 30–க்கும் குறைவாக இருக்குமாயின் அது சிறு கூறு எனப்படும். ($n< 30$)

பல கணக்குகளில் குறைந்த எண்ணிக்கையிலான மாதிரிகள் எடுக்க வேண்டியிருக்கிறது. எனவே, சிறு கூறுகளைக் கையாளுவதற்கு பொருத்தமான சோதனைகளை மேம்படுத்த போதிய கவனம் செலுத்தப்பட்டது. இவ்வாறுள்ள சிறு கூறுகளின் கோட்பாடுகள் பற்றி அறிவதில் பங்கு ஆற்றியவர்கள் சர்.வில்லியம் காசெட் மற்றும் பேராசிரியர் R.A. பிஷர் ஆவார். சர்.வில்லியம் காசெட் தனது கண்டுபிடிப்புகளை "ஸ்டூடண்ட்" என்ற புனைப் பெயரில் 1905–ல் வெளியிட்டார். பிறகு பேராசிரியர் R.A.பிஷர் அவர்களால் விரிவாக்கப்பட்டது. அவர் கண்டுபிடித்த சோதனை புகழ்பெற்ற ‘t சோதனை’ ஆகும்.

6.1 t - புள்ளியியல் அளவை வரையறை :

ஒரு இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ என்ற n அளவுகள் கொண்ட ஒரு சம வாய்ப்பு மாதிரி எடுக்கப்படுகின்றது. அதன் சராசரி μ மற்றும் மாறுபாடு σ^2 எனில் ஸ்டூடண்ட் t – புள்ளியியல் அளவை கீழ்க்கண்டவாறு வரையறுக்கப்படுகிறது.

$$t = \frac{\bar{x}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$ இங்கு $\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$ என்பது மாதிரியின் சராசரி மற்றும் $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum(x-\bar{x})^2$

என்பது முழுமைத் தொகுதியின் மாறுபாடு, σ^2 இன் பிழையற்ற மதிப்பீடாகும். இது ஸ்டூடண்டின் பரவலை $\nu = n-1$ வரையற்ற பாகைகளோடு தழுவுகிறது.

6.1.1 t - சோதனைக்கான அனுமானங்கள்:

1. மாதிரி எடுக்கப்பட்ட முழுமைத் தொகுதியானது இயல்நிலை ஆகும்.

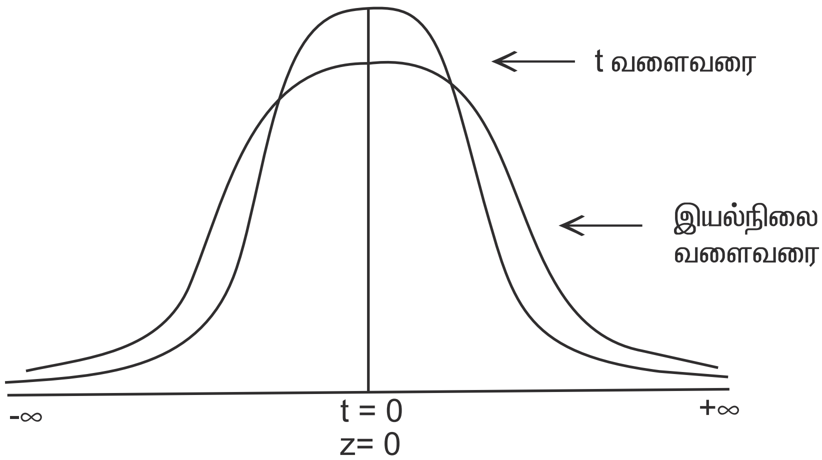
2. கண்டறிந்த மாதிரியின் மதிப்புகள் யாவும் சமவாய்ப்புடையவை மற்றும் சார்பற்றவை.

3. முழுமைத் தொகுதியின் திட்டவிலக்கம் σ தெரியாத நிலை.

6.1.2 t- பரவலின் பண்புகள் :

1. இயல்நிலை மாறியைப் போல, t-மாறியும் $-\infty$ க்கும், ∞ க்கும் இடையில் அமையும்.
2. இயல்நிலைப் பரவலைப் போல t – பரவலும் சமச்சீராக இருக்கும் மற்றும் அதன் சராசரி பூஜ்ஜியம் ஆகும்.
3. திட்ட இயல்நிலைப் பரவலை விட t – பரவல் அதிக விலக்கத்தைப் பெற்றிருக்கும்.
4. மாதிரி உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை 30–க்கும் மேல் இருக்கும் போது t – பரவல் இயல்நிலை பரவலை அணுகுகிறது.

இயல்நிலை வளைவரை மற்றும் t – வளைவரைக்குமான ஒப்பீடு :



6.1.3 வரையற்ற பாகைகள் :

ஒருவரை ஏதாவது நான்கு எண்களை எழுதச் சொன்னால் அனைத்து எண்களும் அவருடைய தேர்வாக இருக்கும். நான்கு எண்களின் கூடுதல் 50 என்ற நிபந்தனைக்கு உட்படுத்தப்படும் போது இங்கே நாம் எண்களை 10, 15, 20 என தேர்வு செய்தால், நான்காவது எண் ஆனது $[50 - (10 + 15 + 20)] = 5$ ஆகும். அதாவது எண்களின் கூடுதல் 50 என்ற நிபந்தனை விதிப்பதனால் நாம் தேர்ந்தெடுக்கும் உரிமையில் ஒன்று குறையும் மற்றும் வரையற்ற பாகை 3 ஆகும். கட்டுப்பாடுகள் அதிகரிக்கும் போது உரிமை குறைகிறது.

புள்ளியியல் அளவையை உருவாக்கும் சார்பற்ற மாறிகளின் எண்ணிக்கையே வரையற்ற பாகைகள் எனப்படும். அது பொதுவாக ν (நியூ) எனக் குறிக்கப்படுகிறது.

n கண்டறிந்த மதிப்புகளின் வரையற்ற பாகைகளின் எண்ணிக்கை n - k ஆகும். இங்கு k என்பது அவற்றின் மீது விதிக்கப்பட்ட சார்பற்ற நேர்க்கோட்டு நிபந்தனைகளின் எண்ணிக்கை ஆகும்.

ஸ்டூடண்ட் t – பரவலுக்கு வரையற்ற பாகையின் எண்ணிக்கை மாதிரிகளின் எண்ணிக்கையிலிருந்து ஒன்றைக் கழிக்க கிடைக்கும். அது $\nu = n - 1$ எனக் குறிக்கப்படுகிறது.

χ^2 சோதனைகளில் வரையற்ற பாகைகள் மிக முக்கிய பங்கு ஆற்றுகிறது. ஒரு பரவலைப் பொருத்தும் போது வரையற்ற பாகையின் எண்ணிக்கை $[n - k - 1]$ ஆகும். இதில் n என்பது கண்டறிந்த மதிப்பின் எண்ணிக்கை மற்றும் k என்பது கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களிலிருந்து

மதிப்பீடு செய்யப்பட்ட பண்பளவைகளின் எண்ணிக்கையாகும். உதாரணமாக பாய்சான் பரவலைப் பொருத்தும் போது அதன் வரையற்ற பாகை $\nu = n - 1 - 1$.

நேர்வுப் பட்டியலின் வரையற்ற பாகை $(r - 1)$ $(c - 1)$ ஆகும். இங்கு r நிரைகளின் எண்ணிக்கையையும் மற்றும் c நிரல்களின் எண்ணிக்கையையும் குறிக்கின்றன. ஆகவே 3×4 நேர்வுப் பட்டியலுக்கு வரையற்ற பாகையானது $(3 - 1)$ $(4 - 1) = 6$. நேர்வுப் பட்டியல் 2×2 வின் வரையற்ற பாகையானது $(2 - 1)$ $(2 - 1) = 1$ ஆகும்.

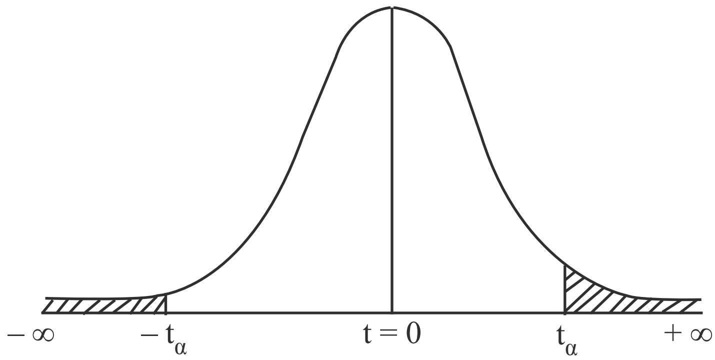
t –ன் தீர்வு கட்ட மதிப்பு :

t - அட்டவணையில் உள்பகுதியின் நிரல்கள் $t_{0.100}$, $t_{0.05}$, $t_{0.025}$, $t_{0.010}$ மற்றும் $t_{0.005}$. என்ற தலைப்புகளைப் பெற்றுள்ளன. இதில் உள்ள 0.10, 0.05 போன்ற எண்கள் "இறுதிப்" பகுதி பரப்பில் உள்ள பரவலின் விகிதங்களைக் கொடுக்கின்றன. இவ்விதமாக இருமுனை சோதனையில் 5% சிறப்பு காண் மட்டத்தில் ஒவ்வொன்றும் மொத்த பரப்பில் 2.5% இருக்குமாறு இருபுறமும் மறுக்கப்படும் பகுதிகள் உள்ளன.

எடுத்துக்காட்டாக :

ஒரு முனைச் சோதனையில் $t_{\nu\ (0.05)}$ = இரு முனைச் சோதனையில் $t_{\nu\ (0.25)}$ ஒரு முனைச் சோதனையில் $t_{\nu\ (0.01)}$ = இரு முனைச் சோதனையில் $t_{\nu\ (0.005)}$ இவ்விதமாக ஒரு முனை சோதனையில் 5% அளவில் மறுக்கும் பரப்பு என்பது பரவலின் ஓர் முனைப் பகுதியில் அமைவதாகும். இது $t_{0.05}$ என்ற தலைப்பில் அமைந்த நிரலின் கீழ் கிடைக்கும்.

t பரவலின் தீர்வு கட்ட மதிப்பு



6.1.4 பரவலின் பயன்பாடுகள் :

புள்ளியியல் ஆய்வில் t – பரவல் பல பயன்பாடுகளைப் பெற்றிருக்கின்றன. அவற்றைக் கீழ்வரும் பகுதியில் காணலாம்.

(i) முழுமைத் தொகுதியின் மாறுபாடு தெரியாத நிலையில் ஓர் மாதிரியின் சராசரிக்கான t-யின் சிறப்பு சோதனை.

(ii) முழுமைத் தொகுதிகளின் மாறுபாடுகள் சமம் மற்றும் தெரியாத நிலையில், இரண்டு மாதிரிகளின் சராசரிகளின் வேறுபாட்டுக்கான t – யின் சிறப்பு சோதனை,

அ) சார்பற்ற மாதிரிகள்

ஆ) சார்புள்ள மாதிரிகளுக்கான இணை t – சோதனை

6.2 கூட்டு சராசரிக்கான சிறப்பு காண் சோதனை :

இல் எனும் எடுகோள் மற்றும் மாற்று எடுகோட்களை அமைக்கவும்.

H_0 : $\mu = \mu_0$; மாதிரிச் சராசரிக்கும், முழுமைத் தொகுதி சராசரிக்கும் உள்ள வேறுபாடு சிறப்பு வாய்ந்தது அல்ல.

H_1: $\mu \neq \mu_0$ ($\mu < \mu_0$ அல்லது $\mu > \mu_0$)

சிறப்பு காண் மட்டம் :

5% அல்லது 1%

புள்ளியியல் அளவையைக் கணக்கிடுதல் :

H_0 ன் கீழ், சோதனை புள்ளியியல் அளவையானது

$$t_0 = \left| \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \right| \text{ அல்லது } \left| \frac{\bar{x} - \mu}{s / \sqrt{n-1}} \right|$$

இங்கு $\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$ என்பது மாதிரியின் சராசரி ஆகும்.

மற்றும் $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum (x - \bar{x})^2$ அல்லது $s^2 = \frac{1}{n} \sum (x - \bar{x})^2$

எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பு :

$t_e = \left| \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \right| \sim (n - 1)$ வரையற்ற பாகைகளைக் கொண்ட ஸ்டூடண்ட்டின் t – பரவல்

முடிவு :

$t_0 \leq t_e$ எனில், இல் எனும் எடுகோள் ஏற்கப்படும் பகுதியில் அமைகிறது. எனவே அது ஏற்கப்படுகிறது.

$t_o > t_e$ எனில், இல் எனும் எடுகோள் கொடுக்கப்பட்ட சிறப்பு காண் மட்டத்தில் மறுக்கப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

ஒரு வகை பூச்சிக்கொல்லி மருந்து இயந்திரத்தின் மூலம் பைகளில் நிரப்பப்படுகிறது. ஒரு சமவாய்ப்பு மாதிரி முறையில் 10 பைகள் எடுக்கப்பட்டு அதன் உள்ளே உள்ள பொருள்களின் எடைகள் (கி.கி.யில்) கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

50 49 52 44 45 48 46 45 49 45

நிரப்பப்படும் பைகளின் எடை **50** கி.கி இருக்கும் என எடுத்துக் கொண்டு சோதனை செய்க.

தீர்வு :

இல் என்னும் எடுகோள் :

$H_0 : \mu = 50$ கி.கி அதாவது நிரப்பப்பட்ட பையின் சராசரி எடை **50** கி.கி. என்க.

மாற்று எடுகோள் :

$H_1 : \mu \neq 50$ கி.கி. (இரு முனை)

சிறப்பு காண் மட்டம் :

$\alpha = 0.05$ என்க

மாதிரி சராசரி மற்றும் திட்ட விலக்கம் கணக்கிடுதல்

X	d = x – 48	d^2
50	2	4
49	1	1
52	4	16
44	– 4	16
45	– 3	9
48	0	0
46	– 2	4
45	– 3	9
49	+ 1	1
45	– 3	9
மொத்தம்	**– 7**	**69**

$$\bar{x} = A + \frac{\sum d}{n}$$

$$= 48 + \frac{-7}{10}$$

$$= 48 - 0.7 = 47.3$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\left[\sum d^2 - \frac{(\sum d)^2}{n}\right]$$

$$= \frac{1}{9}\left[69 - \frac{(7^2)}{10}\right]$$

$$= \frac{64.1}{9} = 7.12$$

புள்ளியியல் அளவையைக் கணக்கிடுதல் :

H_0 –ன் கீழ், சோதனை புள்ளியியல் அளவையானது

$$t_0 = \left| \frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{S^2 / n}} \right|$$

$$= \left| \frac{47.3 - 50.0}{\sqrt{7.12 / 10}} \right|$$

$$= \frac{2.7}{\sqrt{0.712}} = 3.2$$

எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பு :

$t_e = \left| \frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{S^2 / n}} \right|$ ஆனது (10 – 1 = 9) வரையற்ற பாகைகள் கொண்ட t – பரவலைத் தழுவுகிறது.

$= 2.262$

முடிவு :

இங்கு $t_0 > t_e$ என்பதால் 5% சிறப்பு காண் மட்டத்தில் இல் எனும் எடுகோள் மறுக்கப்படுகிறது. ஆகவே, நிரப்பப்பட்ட பையின் சராசரி எடை 50 கி.கி. இல்லை என முடிவு செய்யப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

ஒரு சோப்பு தயாரிக்கும் நிறுவனம், குறிப்பிட்ட வகை சோப்பை சில்லறை விற்பனைக் கடைகளின் மூலம் விற்கிறார்கள். விளம்பரம் செய்வதற்கு முன்பு ஒரு கடையின் சராசரி விற்பனை 140 டஜன்கள். விளம்பரம் செய்த பிறகு, 26 கடைகளை மாதிரியாக எடுத்ததில் சராசரி விற்பனை 147 டஜன்கள் மற்றும் அதன் திட்ட விலக்கம் 16. விளம்பரம் பயனுள்ளது என எண்ணுகிறாயா **?**

தீர்வு :

நமக்குக் கொடுக்கப்பட்டவை

$n = 26;$ $\bar{x} = 147$ டஜன்கள் $s = 16$

இல் என்னும் எடுகோள் :

$H_0: \mu = 140$ டஜன்கள். அதாவது விளம்பரம் செய்வதனால் விற்பனை அதிகரிக்கப்படுவதில்லை.

மாற்று எடுகோள் :

$H_1: \mu > 140$ டஜன்கள் (வல முனை)

சிறப்பு காண் மட்டம் :

$\alpha = 0.05$ என்க

புள்ளியியல் அளவையைக் கணக்கிடுதல் :

H_0 ன் கீழ், சோதனை புள்ளியியல் அளவையானது,

$$t_0 = \left| \frac{\bar{x} - \mu}{s / \sqrt{n-1}} \right|$$

$$= \left| \frac{147 - 140}{16 / \sqrt{25}} \right| = \frac{7 \times 5}{16} = 2.19$$

எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பு :

$t_e = \left| \dfrac{\bar{x} - \mu}{s / \sqrt{n-1}} \right|$ ஆனது (26 – 1 = 25) வரையற்ற பாகைகள் கொண்ட t - பரவலைத் தழுவுகிறது.

$= 1.708$

முடிவு :

இங்கு $t_0 > t_e$, என்பதால் 5% சிறப்பு காண் மட்டத்தில் இல் எனும் எடுகோள் மறுக்கப்படுகிறது. எனவே விளம்பரம் செய்வது விற்பனையை அதிகப்படுத்தும் என முடிவு செய்யப்படுகிறது.

6.3 இரண்டு சராசரிகளின் இடையே உள்ள வித்தியாசத்தின் சிறப்பு காண் சோதனை :

6.3.1 சார்பற்ற மாதிரிகள் :

மாறுபாடுகள் சமமாக உள்ள இரண்டு இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட இரண்டு சார்பற்ற மாதிரிகளின் சராசரிகள் சமம் என சோதனையிட வேண்டும் எனக் கருதுவோம். $x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}$ மற்றும் $y_1, y_2, \ldots\ldots, y_{n_2}$ இரண்டு சார்பற்ற சமவாய்ப்பு மாதிரிகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ள இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்டது என்க.

இல் என்னும் எடுகோள் :

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$ அதாவது இரண்டு மாதிரிகளும் சராசரிகள் சமமாக உள்ள இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்டன.

மாற்று எடுகோள் :

$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ ($\mu_1 < \mu_2$ அல்லது $\mu_1 > \mu_2$)

புள்ளியியல் அளவையைக் கணக்கிடுதல் :

H_0 ன் கீழ், சோதனை புள்ளியியல் அளவையானது

$$t_0 = \left| \frac{\bar{x} - \bar{y}}{S\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \right|$$

இங்கு $\bar{x} = \frac{\sum x}{n_1}; \bar{y} = \frac{\sum y}{n_2}$

மற்றும் $S^2 = \frac{1}{n_1 + n_2 - 2}[\sum(x-\bar{x})^2 + \sum(y-\bar{y})^2] = \frac{n_1 s_1{}^2 + n_2 s_2{}^2}{n_1 + n_2 - 2}$

எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பு :

$t_e = \left| \frac{\bar{x} - \bar{y}}{S\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \right|$ ஆனது $(n_1 + n_2 - 2)$ வரையற்ற பாகைகள் கொண்ட t - பரவலைத் தழுவுகிறது.

முடிவு :

$t_0 < t_e$ எனில் இல் எனும் எடுகோள் ஏற்றுக் கொள்ளப்படுகிறது. $t_0 > t_e$ எனில் இல் எனும் எடுகோள் மறுக்கப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 3 :

5 நோயாளிகள் கொண்ட ஒரு குழுவிற்கு A எனும் மருந்து கொடுத்ததில் அவர்களின் எடை 42, 39, 48, 60 மற்றும் 41 கி.கி. என இருக்கிறது. 7 நோயாளிகளைக் கொண்ட இரண்டாவது குழுவிற்கு B எனும் மருந்து கொடுத்ததில் அவர்களின் எடை 38, 42, 56, 64, 68, 69 மற்றும் 62 கி.கி. என இருக்கிறது. B எனும் மருந்து எடையை அதிகப்படுத்துகிறது என்பதை நீவிர் ஏற்றுக் கொள்வீரா ?

தீர்வு :

A மற்றும் B மருந்து கொடுத்து சிகிச்சையளித்ததில் நோயாளிகளின் எடை (கி.கி ல்) முறையே x மற்றும் y மாறிகள் மூலம் குறிக்கப்படுகின்றன என்க.

இல் என்னும் எடுகோள் :

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$ அதாவது மருந்து A மற்றும் B ஆகியவற்றின் எடையை அதிகப்படுத்தும் விளைவுகளில் சிறப்பான வேறுபாடு இல்லை.

மாற்று எடுகோள் :

$H_1 : \mu_1 < \mu_2$ அதாவது B எனும் மருந்து எடையை அதிகப்படுத்துகிறது.

சிறப்பு காண் மட்டம்:

$\alpha = 0.05$ என்க.

மாதிரி சராசரி மற்றும் திட்ட விலக்கம் கணக்கிடுதல்.

மருந்து A

X	$x - \bar{x}$ ($\bar{x} = 46$)	$(x - \bar{x})^2$
42	– 4	16
39	– 7	49
48	2	4
60	14	196
41	– 5	25
230	**0**	**290**

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n_1} = \frac{230}{5} = 46$$

மருந்து B

Y	$y - \bar{y}$ ($\bar{y} = 57$)	$(y - \bar{y})^2$
38	– 19	361
42	– 15	225
56	– 1	1
64	7	49
68	11	121
69	12	144
62	5	25
399	**0**	**926**

$$\bar{y} = \frac{\sum y}{n_2} = \frac{399}{7} = 57$$

$$S^2 = \frac{1}{n_1 + n_2 - 2}[\sum (x - \bar{x})^2 + \sum (y - \bar{y})^2]$$

$$= \frac{1}{10}[290 + 926] = 121.6$$

புள்ளியியல் அளவையைக் கணக்கிடுதல் :

H_0 ன் கீழ், சோதனை புள்ளியியல் அளவையானது

$$t_0 = \left| \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{S^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}} \right|$$

$$= \left| \frac{46 - 57}{\sqrt{121.6 \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} \right)}} \right|$$

$$= \frac{11}{\sqrt{121.6 \times \frac{12}{35}}}$$

$$= \frac{11}{6.57} = 1.7$$

எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பு :

$$t_e = \left| \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{S^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}} \right|$$ ஆனது (5 + 7 – 2) = 10 வரையற்ற பாகைகளைக் கொண்ட t - பரவலைத் தழுவுகிறது.

$=1.812$

முடிவு :

இங்கு $t_0 < t_e$ என்பதால், H_0 ஏற்றுக் கொள்ளப்படுகிறது. அதாவது மருந்து A மற்றும் B ஆகியவற்றின் எடையை அதிகரிக்கும் விளைவுகளில் சிறப்பான வேறுபாடு இல்லை.

எடுத்துக்காட்டு 4 :

இரண்டு வகையான மின்கலங்களின் ஆயுட்காலத்தை சோதனை செய்ததில் கீழ்கண்ட விவரங்கள் பெறப்பட்டன.

	மாதிரிகளின் எண்ணிக்கை	சராசரி ஆயுள் (மணி நேரம்)	மாறுபாடு
வகை A	9	600	121
வகை B	8	640	144

இரண்டு சராசரிகளுக்கு இடையே உள்ள வித்தியாசம் சிறப்பு வாய்ந்ததா **?**

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட விவரங்கள்

$n_1 = 9$; $\bar{x}_1 = 600$ மணி நேரம் ; $s_1^2 = 121$;

$n_2 = 8$; $\bar{x}_2 = 640$ மணி நேரம்; $s_2^2 = 144$

இல் என்னும் எடுகோள் :

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$; A மற்றும் B வகை மின்கலங்களின் சராசரி ஆயுட் காலங்களில் வித்தியாசமில்லை.

மாற்று எடுகோள் :

$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ (இரு முனை)

சிறப்பு காண் மட்டம்:

$\alpha = 0.05$ என்க

புள்ளியியல் அளவையைக் கணக்கிடுதல் :

H_0 ன் கீழ், சோதனை புள்ளியியல் அளவையானது

$$t_0 = \left| \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{S^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \right|$$

இங்கு $S^2 = \frac{n_1 s_1{}^2 + n_2 s_2{}^2}{n_1 + n_2 - 2}$

$$= \frac{9 \times 121 + 8 \times 144}{9 + 8 - 2}$$

$$= \frac{2241}{15} = 149.4$$

$$\therefore \; t_0 = \left| \frac{600 - 640}{\sqrt{149.4\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{8}\right)}} \right|$$

$$= \frac{40}{\sqrt{149.4\left(\frac{17}{72}\right)}} = \frac{40}{5.9391} = 6.735$$

எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பு :

$t_e = \left| \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{S^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \right|$ ஆனது $(9 + 8 - 2 = 15)$ வரையற்ற பாகைகளை கொண்ட t - பரவலைத் தழுவுகிறது.

$= 2.131$

முடிவு :

இங்கு $t_0 > t_e$ என்பதால் H_0 மறுக்கப்படுகிறது. ஆகவே இரண்டு வகை மின்கலங்களின் சராசரி ஆயுட்காலங்களிடையே சிறப்பான வேறுபாடு உள்ளது என முடிவு செய்யப்படுகிறது.

6.3.2 தொடர்புடைய மாதிரிகள் t –ன் இணை சோதனை :

சராசரிகளின் வித்தியாசத்திற்கான சோதனையில் இரண்டு மாதிரிகளும் ஒன்றுக்கொன்று சார்பற்றவை.

மாதிரிகளின் எண்ணிக்கைகள் சமமாக இருக்கும். அதாவது $n_1 = n_2 = n$ மற்றும் நாம்

இப்பொழுது ஒரு குறிப்பிட்ட சூழ்நிலைகளை எடுத்துக் கொள்வோம். அங்கு மாதிரிகளின் கண்டறிந்த விவரங்கள் ($x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$) மற்றும் ($y_1, y_2, \ldots\ldots y_n$) ஆகியன முற்றிலுமாக சார்பற்றவை அல்ல. ஆனால் அவற்றின் இணைகள் சார்புள்ளவை.

ஒரே நபருக்கு சிகிச்சைக்கு முன்பும், சிகிச்சைக்கு பின்பும் எடுக்கப்பட்ட விவரங்களின் இணைகளை எடுத்துக்காட்டாக கூறலாம். இதுபோலவே ஒரு மருந்து தயாரிக்கும் நிறுவனம் ஒரு குறிப்பிட்ட மருந்தின் விளைவை சோதனை செய்வாக கொள்வோம். அதாவது அம்மருந்து கொடுக்கப்பட்ட பின்னர் அது எவ்வாறு தூக்கத்தை தூண்டுகிறது என்பதை சோதனை செய்வது எனக் கொள்வோம். மேலே கூறப்பட்ட சூழ்நிலைகளுக்கு t–ன் இணை சோதனை ஏற்றது.

t – **இன் இணை சோதனை**:

di = Xi – Yi (i = 1, 2, ……n) என்பது i அளவின் இணை விவரங்களின் வேறுபாடு எனக் கொள்வோம்.

இல் என்னும் எடுகோள் :

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$ அதாவது உயர்வு தற்செயலானது.

மாற்று எடுகோள் :

$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ ($\mu_1 > \mu_2$ அல்லது $\mu_1 < \mu_2$)

புள்ளியியல் அளவையைக் கணக்கிடுதல் :

$$t_0 = \left| \frac{\bar{d}}{S/\sqrt{n}} \right|$$

இங்கு $\bar{d} = \frac{\sum d}{n}$ மற்றும் $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum(d-\bar{d})^2 = \frac{1}{n-1}\left[\sum d^2 - \frac{(\sum d)^2}{n}\right]$

எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பு :

$t_e = \left| \frac{\bar{d}}{S/\sqrt{n}} \right|$ ஆனது n – 1 வரையற்ற பாகைகளைக் கொண்ட t – பரவலைத் தழுவுகிறது.

முடிவு :

t_0, t_e ஆகியவற்றை தேவையான சிறப்பு காண் மட்டத்தில் ஒப்பிட்டு ஏற்கவோ அல்லது மறுக்கவோ செய்யலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 5 :

தட்டச்சர்கள் மேஜைகளில் ஒரு மாற்றம் செய்யும் தேவைக்கு ஒரு சோதனை வைக்கப்பட்டது. ஒரே வகையான தட்டச்சர்கள் தேர்வு செய்யப்பட்டு இரண்டு விதமான சோதனைக்குட்படுத்தப் பட்டனர். ஒன்று ஏற்கனவே உபயோகித்த மேஜைகள், மற்றொன்று புதிய வகை மேஜைகள். ஒரு நிமிடத்தில் தட்டச்சு செய்யப்பட்ட மொத்த வார்த்தைகளின் வித்தியாசங்கள் பதிவு செய்யப்பட்டன.

தட்டச்சர்கள்	A	B	C	D	E	F	G	H	I
அதிகரிக்கப்பட்ட எண்ணிக்கை	2	4	0	3	– 1	4	– 3	2	5

மேலே கொடுக்கப்பட்ட விவரங்கள் மூலம் மேஜையில் ஏற்பட்ட மாற்றம் தட்டச்சு வேகத்தை அதிகப்படுத்தியதா **?**

தீர்வு :

இல் என்னும் எடுகோள் :

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$ அதாவது மேஜையில் ஏற்பட்ட மாற்றம் தட்டச்சு வேகத்தை அதிகப்படுத்தவில்லை.

மாற்று எடுகோள் :

$H_1 : \mu_1 < \mu_2$ (இடது முனை)

சிறப்பு காண் மட்டம்:

$\alpha = 0.05$ என்க.

தட்டச்சர்	d	d2
A	2	4
B	4	16
C	0	0
D	3	9
E	–1	1
F	4	16
G	–3	9
H	2	4
I	5	25
	$\sum$**d = 16**	$\sum$**d² = 84**

$$\bar{d} = \frac{\sum d}{n} = \frac{16}{9} = 1.778$$

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\left[\sum d^2 - \frac{(\sum d)^2}{n}\right]}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{8}\left[84 - \frac{(16)^2}{9}\right]} = \sqrt{6.9} = 2.635$$

புள்ளியியல் அளவையைக் கணக்கிடுதல் :

H_0 **–**ன் கீழ், சோதனை புள்ளியியல் அளவையானது

$$t_0 = \left|\frac{\bar{d}.\sqrt{n}}{S}\right| = \frac{1.778 \times 3}{2.635} = 2.024$$

எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பு :

$t_e = \left|\frac{\bar{d}.\sqrt{n}}{S}\right|$ ஆனது $9 - 1 = 8$ வரையற்ற பாகைகள் கொண்ட t-பரவலைத் தழுவுகிறது.

$= 1.860$

முடிவு :

இங்கு $t_0 < t_e$ என்பதால், இல் என்னும் எடுகோள் ஏற்கப்படுகிறது. இங்கு கொடுக்கப்பட்ட விவரத்தின் மூலம் மேஜையில் ஏற்பட்ட மாற்றம் தட்டச்சு வேகத்தை அதிகப்படுத்தவில்லை என்பதைக் காட்டுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 6 :

5 நபர்களுக்கு பயிற்சி முன்பும், பின்பும் நுண்ணறிவு சோதனை செய்யப்பட்டது. அதன் முடிவுகள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

நபர்கள்	I	II	III	IV	V
பயிற்சிக்கு முன் நுண்ணறிவு	110	120	123	132	125
பயிற்சிக்குப் பின் நுண்ணறிவு	120	118	125	136	121

பயிற்சி திட்டத்திற்குப் பிறகு நுண்ணறிவில் ஏதாவது மாற்றம் உண்டா என்பதை 1% சிறப்பு காண் மட்ட அளவில் சோதிக்கவும்.

தீர்வு :

இல் என்னும் எடுகோள் :

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$ அதாவது பயிற்சிக்கு பின்பு நுண்ணறிவில் குறிப்பிடத்தக்க மாற்றம் இல்லை.

மாற்று எடுகோள் :

$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ (இரு முனை)

சிறப்பு காண் மட்டம்:

$$\alpha = 0.01$$

x	110	120	123	132	125	Total
y	120	118	125	136	121	-
$d = x - y$	– 10	2	– 2	– 4	4	– 10
d^2	100	4	4	16	16	140

$$\bar{d} = \frac{\sum d}{n} = \frac{-10}{5} = -2$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\left[\sum d^2 - \frac{(\sum d)^2}{n}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[140 - \frac{100}{5}\right] = 30$$

புள்ளியியல் அளவையைக் கணக்கிடுதல் :

H_0 –ன் கீழ் சோதனை புள்ளியியல் அளவையானது

$$t_0 = \left|\frac{\bar{d}}{S/\sqrt{n}}\right|$$

$$= \left|\frac{-2}{\sqrt{30/5}}\right|$$

$$= \frac{2}{2.45}$$

$$= 0.816$$

எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பு :

$t_e = \left|\frac{\bar{d}}{S/\sqrt{n}}\right|$ ஆனது 5 – 1 = 4 வரையற்ற பாகைகள் கொண்ட t – பரவலைத் தழுவுகிறது.

$= 4.604$

முடிவு :

இங்கு $t_0 < t_e$ என்பதால் 5% சிறப்பு காண் மட்டத்தில் இல் எனும் எடுகோள் எற்கப்படுகிறது. எனவே, பயிற்சிக்கு பின்பு நுண்ணறிவில் குறிப்பிடத்தக்க மாற்றம் இல்லை.

6.4 கை வர்க்க சோதனை :

முன்பு விவரித்த பலவிதமான சிறப்பு காண் சோதனைகள் எண் அளவை விவரங்களுக்கு மட்டுமே பயன்படுத்தப்படுகின்றன. மற்றும் பொதுவாக இயல்நிலைப் பரவலைக் கொண்ட விவரங்களுக்கு மட்டுமே பயன்படுத்தப்படுகின்றன. சில நேரங்களில் விவரங்கள் இயல்நிலைப் பரவலைத் தழுவாமல் இருக்கவும் நேரிடுகிறது. எனவே வேறு முறைகள் தேவைப்படுகிறது. இந்த முறைகள் எதிர்பார்க்கும் மற்றும் கண்டறிந்த அலைவெண்களுக்கு இடையே உள்ள வித்தியாசத்தை கண்டறிவதன் நோக்கத்திற்க பயன்படுகின்றன.

மற்றொரு முறையானது பண்பளவையைச் சாராத அல்லது பண்பளவை சாராத பரவல் முறை ஆகும். ஒரு பண்பளவையைச் சாராத புள்ளியியல் சோதனையில் பண்பளவைகளின் ஒரு குறிப்பிட்ட மதிப்பிற்கான எடுகோள்கள் அமைக்கப்படுவதில்லை. இந்த முறைகள் கண்டுபிடிப்பதற்கு எளிதாக இருப்பதால் புள்ளியியல் ஆய்வுகளில் அதிக முக்கியத்துவம் பெறுகின்றன.

6.4.1 வரையறை :

கை வர்க்க (χ^2) சோதனை மிகவும் எளியது மற்றும் மிக அதிக அளவில் புள்ளியியலில் பயன்படுத்தப்படும் சோதனைகளில், பண்பளவையை சாராத சோதனையாகும். 1900–ஆம் வருடம் χ^2 சோதனையானது கார்ல் பியர்சனால் முதன் முதலில் பயன்படுத்தப்பட்டது. χ^2 ன் அளவு கண்டறிந்த மதிப்பு மற்றும் எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பிற்கும் இடையே உள்ள முரண்பாடு ஆகும். இதனை கீழ்கண்டவாறு வரையறுக்கலாம்.

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{(Oi - Ei)^2}{Ei}\right]$$

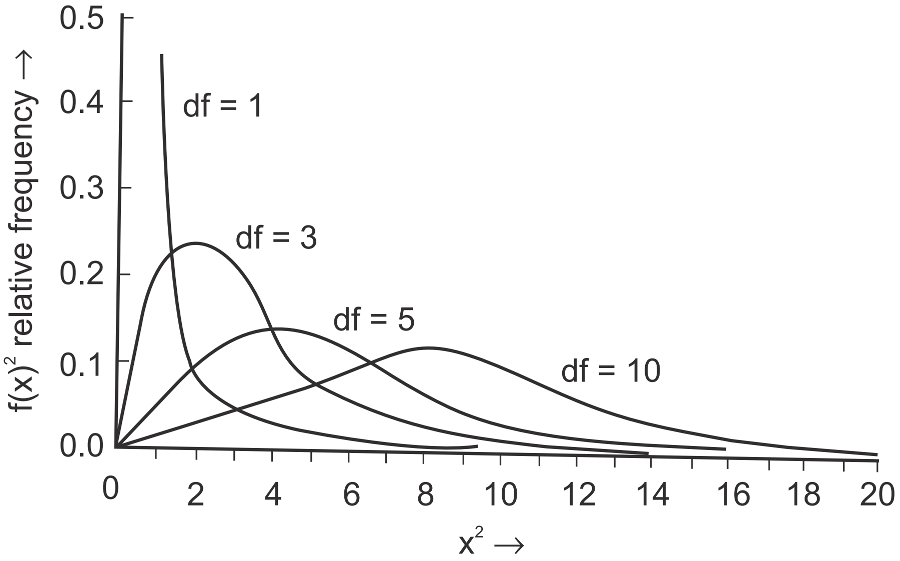
இங்கு O கண்டறிந்த அலைவெண்களையும் மற்றும் E எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்களையும் குறிக்கின்றன.

குறிப்பு :

χ^2 –ன் மதிப்பு பூஜ்ஜியமாக இருப்பின் கண்டறிந்த மற்றும் எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்கள் ஒன்றோடொன்று ஒன்றி இருக்கும். χ^2 –இன் மதிப்பு அதிகமாக இருந்தால் கண்டறியப்பட்ட மற்றும் எதிர்பார்க்கப்படும் அலைவெண்களுக்கு இடையே உள்ள முரண்பாடும் அதிகமாக இருக்கும்.

கை வர்க்கப் பரவல் :

திட்ட இயல்நிலை மாறியின் வர்க்கமே கை வர்க்க மாறியாகும். இதன் வரையற்ற பாகை 1 ஆகும். அதாவது X இயல்நிலையில் பரவியிருந்தால் அதன் சராசரி μ மற்றும் திட்டவிலக்கம் σ எனில் பிறகு $\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2$ என்பது வரையற்ற பாகை 1 எனக் கொண்ட கை வர்க்க மாறி ஆகும். இந்த கை வர்க்கப் பரவல் வரையற்றப் பாகையைச் சார்ந்து இருக்கும். ஒவ்வொரு வரையற்ற பாகையின் எண்ணிக்கைக்கும் வெவ்வேறு பரவல்கள் கிடைக்கும்.



6.4.2 கை வர்க்கப் பரவலின் பண்புகள் :

1. χ^2 பரவலின் சராசரி அதன் வரையற்ற பாகைகளுக்கு சமம். (n)
2. χ^2 பரவலின் மாறுபாடானது 2n
3. χ^2 பரவலின் இடைநிலை, வளைகோட்டுப் பரப்பை இரு சமமாகப் பிரிக்கிறது. ஒவ்வொரு பகுதியும் **0.5** ஆகும்.
4. χ^2 பரவலின் முகடு (n-2) ஆகும்.
5. கை வர்க்க மதிப்புகள் எப்பொழுதும் நேரிடை. எனவே, கை வர்க்க வரையரை எப்பொழுதும் நேர்க்கோட்டம் ஆக இருக்கும்.
6. வரையற்ற பாகைகள் அதிகரிக்க அதிகரிக்க கை வர்க்க மதிப்புகள் அதிகரிப்பதால் வரையற்ற பாகைகளின் ஒவ்வொரு அதிகரிப்பிற்கும் ஒரு புதிய கை வர்க்கப் பரவல் கிடைக்கிறது.
7. கை வர்க்கத்தின் மிகக் குறைந்த மதிப்பு **0.** மிக அதிக மதிப்பு ∞ ஆகும். $\chi^2 \geq 0$.
8. n_1, n_2 வரையற்ற பாகைகளாகக் கொண்ட χ_1^2, χ_2^2 என்பவை சார்பற்ற இரு கை வர்க்க பரவல்கள் எனில் அவைகளின் கூடுதல் $\chi_1^2 + \chi_2^2$ என்பது $(n_1 + n_2)$ வரையற்ற பாகைகளாகக் கொண்ட ஒரு கை வர்க்கப் பரவலாகும்.
9. வரையற்ற பாகைகள் $n > 30$ எனில் $\sqrt{2\chi^2}$ தோராயமாக இயல்நிலைப் பரவலை நெருங்குகிறது. $\sqrt{2\chi^2}$ இன் சராசரி $\sqrt{2n-1}$ திட்டவிலக்கம் **1** ஆகும்.

6.4.3 χ^2 பரவலைப் பயன்படுத்துவதற்கு பின்வரும் நிபந்தனைகள் நிறைவு செய்யப்பட வேண்டும்

1. N, அலைவெண்களின் கூடுதல், குறிப்பிடத்தக்க அளவிற்கு அதிகமாக **(50**க்கு மேல்) இருக்க வேண்டும்.
2. எந்தப் பிரிவின் கட்ட அலைவெண்ணும் **5**க்கு குறைவாக இருக்கக் கூடாது. அப்படி குறைவாக இருப்பின் மற்ற பிரிவு அலைவெண்களோடு இதனைச் சேர்த்துக் கூட்டி **5**க்கும் குறையாத அலைவெண்ணாக்க வேண்டும்.
3. இச்சோதனைக்குப் பயன்படுத்தப்படும் ஒவ்வொரு மாதிரி மதிப்பும் சார்பற்றதாக இருத்தல் வேண்டும்.
4. χ^2 சோதனை முழுமையும் வரையற்ற பாகைகளைச் சார்ந்திருக்கும்.

6.5 பொருத்துதலின் செம்மைச் சோதனை (ஈருறுப்பு மற்றும் பாய்சான் பரவல்) :

கார்ல் பியர்சன் என்பவர் **1900** இல் கண்டுபிடித்த மற்றும் எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்புகளின் முரண்பாடுகளுக்கான சோதனையை சில கோட்பாடுகள் அல்லது எடு கோள்களின் கீழ் விரிவுபடுத்தினார். இந்தச் சோதனையானது பொருத்துதலின் செம்மைக்கான χ^2-சோதனை எனப்படுகிறது. கண்டறியப்பட்ட மதிப்பிற்கும், எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்புகளுக்கும் இடையே உள்ள விலக்கம் இயல்பான வேறுபாட்டு வாய்ப்புகளாலா அல்லது கோட்பாட்டில் உள்ள விவரங்களின் பற்றாக்குறையினாலா என்பதை சோதனை செய்ய χ^2 உதவுகிறது. இங்கு கண்டறிந்த மற்றும் எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்புகளுக்கு இடையே உள்ள வித்தியாசம் குறிப்பிடத் தகுந்ததாக இல்லை என்பது இல் எனும் எடுகோளாக எடுத்துக் கொள்ளப்படுகிறது.

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{(Oi-Ei)^2}{Ei}\right]$$

$$= \frac{(O_1-E_1)^2}{E_1} + \frac{(O_2-E_2)^2}{E_2} + \ldots\ldots \frac{(O_n-E_n)^2}{E_n}$$

மேற்கண்ட χ^2அளவையானது $\nu = (n - k - 1)$ வரையற்ற பாகைகள் கொண்ட χ^2 பரவலைத் தழுவுகிறது என்று கார்ல் பியர்சன் நிரூபித்துள்ளார். இங்கு $0_1, 0_2, \ldots 0_n$ என்பன கண்டறியப்பட்ட அலைவெண்களையும் மற்றும் $E_1, E_2 \ldots E_n$, என்பது கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களிலிருந்து மதிப்பிட வேண்டிய அலைவெண்களையும் குறிக்கின்றது. இச்சோதனையின் மூலம் கணக்கிடப்பட்ட மதிப்புடன் தகுந்த வரையற்ற பாகைகளுக்கான χ^2 அட்டவணை மதிப்பை ஒப்பிட்டு முடிவுகள் மேற்கொள்ளப்படுகின்றன.

எடுத்துக்காட்டு 7 :

ஒரே நேரத்தில் 4 நாணயங்கள் சுண்டப்படும் போது ஒவ்வொரு முறையும் தலைகள் விழும் எண்ணிக்கை குறித்து வைக்கப்பட்டது. 240 முறை இந்த சோதனையை திரும்பச் செய்யும் போது கீழ்காணும் விவரங்கள் கிடைக்கின்றன.

தலைகளின் எண்ணிக்கை	0	1	2	3	4
எறியப்பட்ட எண்ணிக்கைகள்	13	64	85	58	20

இதற்கு ஓர் ஈருறுப்பு பரவலைப் பொருத்தி நாணயங்கள் பழுதற்றவை என்ற எடுகோளை சோதிக்கவும்.

தீர்வு :

இல் என்னும் எடுகோள் :

கொடுக்கப்பட்ட விவரங்கள் ஓர் ஈருறுப்புப் பரவலை பொருத்துகிறது. அதாவது நாணயங்கள் பழுதற்றவை.

$p = q = 1/2$ $n = 4$ $N = 240$

எதிர்பார்க்கப்படும் அலைவெண்களைக் கணக்கிடுதல்

தலைகளின் எண்ணிக்கை	$P(X = x) = 4C_x p^x q^{n-x}$	எதிர்பார்க்கப்படும் அலைவெண் $N. P(X = x)$
0	$4C_0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \left(\frac{1}{16}\right)$	$\left(\frac{1}{16}\right)\times 240 = 15$
1	$4C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{4}{16}\right)$	$\left(\frac{4}{16}\right)\times 240 = 60$

2	$4C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{6}{16}\right)$	$\left(\frac{6}{16}\right)\times 240=90$
3	$4C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1=\left(\frac{4}{16}\right)$	$\left(\frac{4}{16}\right)\times 240=60$
4	$4C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^0=\left(\frac{1}{16}\right)$	$\left(\frac{1}{16}\right)\times 240=15$
		240

கைவர்க்க மதிப்புகளைக் கணக்கிடுதல்

கண்டறிந்த அலைவெண் O	எதிர்பார்க்கப்படும் அலைவெண் E	$(O-E)^2$	$\left(\frac{(O-E)^2}{E}\right)$
13	15	4	0.27
64	60	16	0.27
85	90	25	0.28
58	60	4	0.07
20	15	25	1.67
			2.56

$$\chi_0{}^2=\Sigma\left(\frac{(O-E)^2}{E}\right)=2.56$$

எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பு :

$\chi_e{}^2=\Sigma\left(\frac{(O-E)^2}{E}\right)$ ஆனது $(n - k - 1)$ வரையற்ற பாகைகளைக் கொண்ட χ^2 பரவலைத் தழுவுகிறது.

$= 9.488$ ($v = 5 - 1= 4$ வரையற்ற பாகைகளுக்கு)

(இங்கே $k = 0$ ஏனென்றால் விவரங்களிலிருந்து எந்த பண்பளவையும் மதிப்பீடு செய்யப்படவில்லை)

முடிவு :

இங்கு $\chi_0{}^2 < \chi_e{}^2$ என்பதால், 5% சிறப்பு காண் மட்டத்தில் இல் எனும் எடுகோள் ஏற்றுக் கொள்ளப்படுகிறது. ஆகவே, கொடுக்கப்பட்ட விவரத்திற்கு ஈருறுப்புப் பரவல் பொருந்தியிருக்கிறது.

எடுத்துக்காட்டு 8 :

கீழே கொடுக்கப்பட்ட அட்டவணை கால்பந்து போட்டியில் கிடைத்த வெற்றிப்புள்ளிகளின் பரவலைக் காட்டுகிறது.

வெற்றிப் புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை	0	1	2	3	4	5	6	7
போட்டிகளின் எண்ணிக்கை	95	158	108	63	40	9	5	2

இவ்விவரத்திற்கு ஒரு பாய்சான் பரவலைப் பொருத்தி அதன் செம்மையை சோதனை செய்யவும்.

தீர்வு :

இல் என்னும் எடுகோள் :

கொடுக்கப்பட்ட விவரங்கள் பாய்சான் பரவலை பொருத்துகிறது.

சிறப்பு காண் மட்டம்:

$\alpha = 0.05$ என்க.

எதிர்பார்க்கப்படும் அலைவெண்களைக் கணக்கிடுதல்

$$m = \frac{812}{480} = 1.7$$

$$P(0) = e^{-1.7}\frac{(1.7)^0}{0!} = 0.183.$$

$$f(0) = N.P(0) = 480 \times 0.183 = 87.84$$

மீதி உள்ள எதிர்பார்க்கப்படும் அலைவெண்கள் மறுதரவு [recurrence relation] தொடர்பின் மூலம் கிடைக்கும்.

$$f(x+1) = \frac{m}{x+1}\text{ x } f(x)$$

சூத்திரத்தில் x = 0, 1, 2, ... எனப் பிரதியிட நமக்கு கீழ்காணும் அலைவெண்கள் கிடைக்கும்.

$$f(1) = 1.7 \times 87.84$$
$$= 149.328$$

$$f(2) = \frac{1.7}{2} \times 149.328$$
$$= 126.93$$

$$f(3) = \frac{1.7}{3} \times 126.93$$
$$= 71.927$$

$$f(4) = \frac{1.7}{4} \times 71.927$$
$$= 30.569$$
$$f(5) = \frac{1.7}{5} \times 30.569$$
$$= 10.393$$
$$f(6) = \frac{1.7}{6} \times 10.393$$
$$= 2.94$$
$$f(7) = \frac{1.7}{7} \times 2.94$$
$$= 0.719$$

வெற்றிப் புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை	0	1	2	3	4	5	6	7	மொத்தம்
எதிர்பார்க்கப்படும் அலைவெண்	88	149	127	72	30	10	3	1	480

கண்டறிந்த அலைவெண் O	எதிர்பார்க்கப்படும் அலைவெண் E	$(O-E)^2$	$\left(\frac{(O-E)^2}{E}\right)$
95	88	49	0.56
158	150	64	0.43
108	126	324	2.57
63	72	91	1.13
40	30	100	3.33
$\left.\begin{matrix}9\\5\\2\end{matrix}\right\}$ 16	$\left.\begin{matrix}10\\3\\1\end{matrix}\right\}$ 14	4	0.29
			8.31

புள்ளியியல் அளவையைக் கணக்கிடுதல் :

$$\chi_0{}^2 = \Sigma\left(\frac{(O-E)^2}{E}\right) = 8.31$$

எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பு :

$\chi_e^2 = \sum\left(\frac{(O-E)^2}{E}\right)$ ஆனது $\nu = 6 - 1 - 1 = 4$ வரையற்ற பாகைகளைக் கொண்ட χ^2 – பரவலைத் தழுவுகிறது.

= 9.488

முடிவு :

இங்கு $\chi_0^2 < \chi_e^2$ என்பதால், 5% சிறப்பு காண் மட்டத்தில் இல் எனும் எடுகோள் ஏற்கப்படுகிறது. ஆகவே கொடுக்கப்பட்ட விவரத்திற்கு பாய்சான் பரவல் பொருந்துகிறது.

6.6 சார்பற்ற தன்மைக்கான சோதனை :

கொடுக்கப்பட்ட N உறுப்புகளைக் கொண்ட முழுமைத் தொகுதி, பண்பு A ஐ அடிப்படையாகக் கொண்டு $A_1, A_2, \ldots, A_r$ என்ற ஒன்றையொன்று சேராத மற்றும் முழுமையான r பிரிவுகளாகப் பிரிக்கப்படுகிறது என்க. இதே போல அதே முழுமைத் தொகுதி உறுப்புகள் மற்றொரு பண்பு B ஐ அடிப்படையாகக் கொண்டு $B_1, B_2, \ldots, B_c$ என்ற c ஒன்றையொன்று சேராத மற்றும் முழுமையான பிரிவுகளாகப் பிரிக்கப்படுகின்றது என்க. $A_1, A_2, \ldots, A_r$ மற்றும் $B_1, B_2, \ldots, B_c$ பிரிவுகளைச் சார்ந்து இருக்கும் உறுப்புகளின் அலைவெண் – பரவல் கீழ்கண்ட பல்நோக்கு நேர்வு அட்டவணையாக கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

$r \times c$ **பல்நோக்கு நேர்வு அட்டவணை**

A \ B	B_1	B_2	…	B_j	…	B_c	Total
A_1	(A_1B_1)	(A_1B_2)	…	(A_1B_j)	…	(A_1B_c)	(A_1)
A_2	(A_2B_1)	(A_2B_2)	…	(A_2B_j)	…	(A_2B_c)	(A_2)
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
A_i	(A_iB_1)	(A_iB_2)	…	(A_iB_j)	…	(A_iB_c)	(A_i)
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
A_r	(A_rB_1)	(A_rB_2)	…	(A_rB_j)	…	(A_rB_c)	(A_r)
மொத்தம்	(B_1)	(B_2)	…	(B_j)	…	(B_c)	$\sum Ai = \sum Bj = N$

A_i, (i = 1, 2, … r) பண்பைக் கொண்ட நபர்களின் மொத்த எண்ணிக்கையை (A_i) குறிக்கும், B_j,(j = 1,2,3,….c) பண்பைக் கொண்ட நபர்களின் மொத்த எண்ணிக்கை (B_j) மற்றும் A_i , B_j (i = 1, 2, …r, j = 1,2,…c) இரு பண்புகளையும் கொண்ட மொத்த நபர்களின் எண்ணிக்கை $(A_i B_j)$ ஆகும்.

மேலும், $\sum A_i = \sum B_j = N$

A மற்றும் B என்ற இரு பண்புகள் சார்பற்றவை என்ற இல் எனும் எடுகோளின் கீழ் (A_iB_j) –ன் எதிர்பார்க்கப்படும்.

அலைவெண்ணானது $= \frac{(Ai)\ (Bj)}{N}$

புள்ளியியல் அளவையைக் கணக்கிடுதல் :

ஆகவே பண்புகளின் சார்பற்ற தன்மை என்ற இல் எனும் எடுகோளின் கீழ் மேலே கண்ட அட்டவணையின் ஒவ்வொரு கட்ட அலைவெண்களின் எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்களை கீழே உள்ள சூத்திரத்தின் மூலம் கணக்கிடலாம்.

$$\chi_0^{\ 2} = \Sigma\left(\frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}\right)$$

எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பு :

$\chi_e^{\ 2} = \Sigma\left(\frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}\right)$ ஆனது (r – 1) (c – 1) வரையற்ற பாகைகள் χ^2 பரவலைத் தழுவும்.

முடிவு :

$\chi_0^{\ 2}$ உடன் $\chi_e^{\ 2}$ –ஐக் குறிப்பிட்ட சிறப்பு காண்மட்டத்தின் கீழ் ஒப்பிட்டு நாம் இல் எனும் எடுகோளை ஏற்கவோ அல்லது மறுக்கவோ செய்யலாம்.

6.6.1 2 × 2 நேர்வு அட்டவணை :

பண்புகளின் சார்பற்ற தன்மைக்கான இல் எனும் எடுகோளின் கீழ் கீழ்க்கண்ட அட்டவணைக்கான χ^2 –ன் மதிப்பு

$$\chi_0^{\ 2} = \frac{N(ad - bc)^2}{(a+c)(b+d)(a+b)(c+d)}$$

2 × 2 நேர்வு அட்டவணை

			மொத்தம்
	a	b	a + b
	c	d	c + d
மொத்தம்	a + c	b + d	N

6.6.2 ஏட்சின் திருத்தம் :

ஒரு 2 × 2 நேர்வுப் பட்டியலில் வரையற்ற பாகைகளின் எண்ணிக்கை (2–1) (2–1)=1 ஆகும். ஏதாவரு ஒரு கட்டத்தில் எதிர்பார்க்கப்படும் அலைவெண் ஐந்தை விட குறைவாக இருப்பின் அந்த அலைவெண்ணை மற்றொரு கட்டத்தின் அலைவெண்ணோடு

கூட்டி எழுதுவதன் மூலம் வரையற்ற பாகையின் எண்ணிக்கை 0 ஆகி விடுகிறது. இது பொருளற்றதாகும்.

இந்நிலையில் F. ஏட்ஸ் (1934) என்பவரால் கொடுக்கப்பட்ட "தொடர்ச்சிக்கான ஏட்சின் திருத்தத்தை" நாம் பயன்படுத்துகிறோம். இம்முறைப்படி 5ஐ விட குறைவான கட்ட அலைவெண்ணோடு 0.5க் கூட்டி மற்ற அலைவெண்களைக் சரிசெய்கிறோம். இவ்விதம் திருத்தப்பட்ட χ^2 ன் மதிப்பு.

$$\chi^2 = \frac{N\left[\left(a \mp \frac{1}{2}\right)\left(d \mp \frac{1}{2}\right) - \left(b \pm \frac{1}{2}\right)\left(c \pm \frac{1}{2}\right)\right]^2}{(a+c)(b+d)(a+b)(c+d)}$$

எடுத்துக்காட்டு 9 :

ஒரு கல்லூரியில் பயிலும் 1000 மாணவர்கள், அவர்களின் நுண்ணறிவு மற்றும் வீட்டின் பொருளாதார நிலையை வைத்து தரம் பிரிக்கப்படுகின்றனர். χ^2 சோதனையைப் பயன்படுத்தி வீட்டின் பொருளாதார நிலைக்கும் நுண்ணறிவிற்கும் தொடர்பு இருக்கிறதா எனக் காண்க.

பொருளாதார நிலை	நுண்ணறிவு		மொத்தம்
	அதிகம்	குறைவு	
பணக்காரர்	460	140	600
ஏழை	240	160	400
மொத்தம்	700	300	1000

தீர்வு :

இல் என்னும் எடுகோள் :

வீட்டின் பொருளாதார நிலைக்கும், நுண்ணறிவிற்கும் தொடர்பு இல்லை. அதாவது அவை சார்பற்றவை.

$$E_{11} = \frac{(A)(B)}{N} = \frac{600 \times 700}{1000} = 420$$

எதிர்பார்க்கப்படும் அலைவெண்களின் அட்டவணை கீழ்கண்டவாறு

			மொத்தம்
	420	180	600
	280	120	400
மொத்தம்	700	300	1000

கண்டறிந்த அலைவெண் O	எதிர்பார்க்கப்படும் அலைவெண் E	$(O-E)^2$	$\left(\frac{(O-E)^2}{E}\right)$
460	420	1600	3.81
240	280	1600	5.714

140	180	1600	8.889
160	120	1600	13.333
			31.746

$$\chi_0^2 = \Sigma\left(\frac{(O-E)^2}{E}\right) = 31.746$$

எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பு :

$$\chi_e^2 = \Sigma\left(\frac{(O-E)^2}{E}\right)$$ ஆனது (2 – 1) (2 –1) = 1 வரையற்ற பாகைகள் கொண்ட χ^2- பரவலைத் தழுவுகிறது.

= 3.84

முடிவு :

இங்கு $\chi_0^2 > \chi_e^2$ என்பதால், 5% சிறப்பு காண் மட்டத்தில் இல் எனும் எடுகோள் மறுக்கப்படுகிறது. அதாவது வீட்டின் பொருளாதார நிலைக்கும், நுண்ணறிவிற்கும் தொடர்பு உள்ளது.

எடுத்துக்காட்டு 10 :

ஒரு கிராமத்தில் 120 பேரை மாதிரியாக எடுத்துக் கொண்டு அவர்களில் 76 பேருக்கு ஃபுளூ காய்ச்சலை தடுப்பதற்கான புதிய மருந்து கொடுத்தார்கள். அவர்களில் 24 பேரை அந்த காய்ச்சல் தாக்கியது. தடுப்பு மருந்து கொடுக்காதவர்களில் 12 பேருக்கு அந்த காய்ச்சல் வரவில்லை.

(i) கண்டறியப்பட்ட அலைவெண்களின் 2 × 2 அட்டவணையைத் தயார் செய்க.

(ii) புதிய மருந்து பயனளித்ததா இல்லையா என்பதை கண்டுபிடிக்க கை வர்க்க சோதனையைச் பயன்படுத்துக.

தீர்வு :

மேலே கொடுக்கப்பட்ட விவரம் 2 × 2 நேர்வு அட்டவணையில் கீழே அளிக்கப்படுகிறது.

கண்டறியப்பட்ட அலைவெண்களின் அட்டவணை

புதிய மருந்து	ப்ளூ காய்ச்சலின் விளைவு		மொத்தம்
	காய்ச்சல் தாக்கியவர்	காய்ச்சல் தாக்காதவர்	
கொடுக்கப்பட்டவர்கள்	24	76 – 24 = 52	76
கொடுக்கப்படாதவர்கள்	44 – 12 = 32	12	120 – 76 = 44
மொத்தம்	120 – 64 = 56 24 + 32 = 56	52 + 12 = 64	120

இல் என்னும் எடுகோள் :

ப்ளூ காய்ச்சலும், புதிய மருந்து கொடுத்தலும் சார்பற்றவை.

சிறப்பு காண் மட்டம்:

$\alpha = 0.05$ என்க.

புள்ளியியல் அளவையைக் கணக்கிடுதல் :

$$\chi_0{}^2 = \frac{N(ad - bc)^2}{(a+c)(b+d)(a+b)(c+d)}$$
$$= \frac{120(24 \times 12 - 52 \times 32)^2}{56 \times 64 \times 76 \times 44}$$
$$= \frac{120(-1376)^2}{56 \times 64 \times 76 \times 44} = \frac{120(1376)^2}{56 \times 64 \times 76 \times 44}$$
$$= \text{Antilog}\,[\log 120 + 2\log 1376 - (\log 56 + \log 64 + \log 76 + \log 44)]$$
$$= \text{Antilog}(1.2777) = 18.95$$

எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பு :

$\chi_e{}^2 = \Sigma\left(\frac{(O-E)^2}{E}\right)$ ஆனது (2 – 1) (2 – 1) வரையற்ற பாகைகள் கொண்ட χ^2 பரவலைத் தழுவுகிறது.

$= 3.84$

முடிவு :

இங்கு $\chi_0{}^2 > \chi_e{}^2$ என்பதால், 5 % சிறப்பு காண் மட்டத்தில் H_0 மறுக்கப்படுகிறது. எனவே புதிய மருந்து ஃப்ளூ காய்ச்சலைக் கட்டுப்படுத்துகிறது என முடிவு செய்யப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 11 :

இரண்டு ஆராய்ச்சியாளர்கள் வெவ்வேறு வகையான மாதிரிக் கணிப்பு முறைகளை பயன்படுத்தி ஒரே குழுவில் உள்ள மாணவர்களின் வெவ்வேறு நுண்ணறிவு மட்ட அளவுகளைக் கண்டுபிடித்தனர். அதன் முடிவுகள் கீழ்க்கண்டவாறு.

ஆராய்ச்சி யாளர்கள்	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை				மொத்தம்
	சராசரிக்கும் கீழே	சராசரி	சராசரிக்கும் மேலே	மிக்க அறிவுத்திறன்	
X	86	60	44	10	200
Y	40	33	25	2	100
மொத்தம்	126	93	69	12	300

இரு ஆராய்ச்சியாளர்கள் கையாண்ட மாதிரிக் கணிப்பு முறைகள் சார்பற்றவை.

தீர்வு :

இல் என்னும் எடுகோள் :

இரு ஆராய்ச்சியாளர்கள் மேற்கொண்ட மாதிரிக்கணிப்பு முறைகள் சார்பற்றவை.

சிறப்பு காண் மட்டம்:

$\alpha = 0.05$ என்க.

புள்ளியியல் அளவையைக் கணக்கிடுதல் :

$$E(86) = \frac{126 \times 200}{300} = 84$$

$$E(60) = \frac{93 \times 200}{300} = 62$$

$$E(44) = \frac{69 \times 200}{300} = 46$$

எதிர்பார்க்கப்படும் அலைவெண்கள் அட்டவணை.

	சராசரிக்கும் கீழே	சராசரி	சராசரிக்கும் மேலே	மிக்க அறிவுத்திறன்	மொத்தம்
X	84	62	46	200 – 192 = 8	200
Y	126 –84 = 42	93 – 62 = 31	69 – 46 = 23	12 – 8 = 4	100
மொத்தம்	126	93	69	12	300

கை வர்க்க புள்ளியியல் அளவைக் கணக்கிடல்:

கண்டறியப்பட்ட அலைவெண் O	எதிர்பார்க்கப்படும் அலைவெண் E	(O – E)	$(O-E)^2$	$\left(\frac{(O-E)^2}{E}\right)$
86	84	2	4	0.048
60	62	– 2	4	0.064
44	46	– 2	4	0.087
10	8	2	4	0.500
40	42	– 2	4	0.095
33	31	2	4	0.129
$\begin{bmatrix}25\\2\end{bmatrix} 27$	$\begin{bmatrix}23\\4\end{bmatrix} 27$	0	0	0
300	300	0		0.923

$$\chi_o^2 = \Sigma\left(\frac{(O-E)^2}{E}\right) = 0.923$$

எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பு :

$$\chi_e^2 = \Sigma\left(\frac{(O-E)^2}{E}\right)$$ ஆனது (4 – 1) (2 – 1) = 3 – 1 = 2 வரையற்ற பாகைகள் கொண்ட χ^2 பரவலைத் தழுவுகிறது.

$$= 5.991$$

முடிவு :

இங்கு $\chi_0^2 < \chi_e^2$ ஆகையால், 5 % சிறப்புக் காண் மட்டத்தில் இல் என்னும் எடுகோள் ஏற்கப்படுகிறது. எனவே இரு ஆராய்ச்சியாளர்கள் மேற்கொண்ட மாதிரிக் கணிப்பு முறைகள் சார்பற்றவை.

6.7 முழுமைத் தொகுதி மாறுபாட்டிற்கான சோதனை :

கொடுக்கப்பட்ட இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதி ஒரு குறிப்பிட்ட மாறுபாடு $\sigma^2 = \sigma_o^2$ ஐக் கொண்டுள்ளது எனச் சோதனை செய்ய விரும்பினால்

இல் என்னும் எடுகோள் :

$H_o : \sigma^2 = \sigma_o^2$

சிறப்பு காண் மட்டம்:

α = 5% அல்லது 1%

புள்ளியியல் அளவையைக் கணக்கிடுதல் :

$$\chi_0^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{\sigma_0^2} = \frac{ns^2}{\sigma_0^2}$$

இங்கு $s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$

எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பு :

$$\chi_e^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{\sigma_0^2}$$ ஆனது (n – 1) வரையற்ற பாகைகளைக் கொண்ட χ^2– பரவலைத் தழுவுகிறது.

முடிவு :

$\chi_0^2 \leq \chi_e^2$ எனில் இல் எனும் எடுகோளை ஏற்கிறோம் மாறாக $\chi_0^2 > \chi_e^2$ எனில் நாம் இல் எனும் எடுகோளை மறுக்கிறோம்.

எடுத்துக்காட்டு 12 :

மாதிரியின் திட்டவிலக்கம் **6** என கொண்டுள்ள **20** எண்ணிக்கை உடைய ஒரு சமவாய்ப்பு மாதிரி ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்படுகிது. அந்த முழுமைத் தொகுதியின் திட்டவிலக்கம் **9** என்பதைச் சோதனை செய்க.

தீர்வு :

நமக்குக் கொடுக்கப்பட்டவை

$n = 20$ மற்றும் $s = 6$

இல் என்னும் எடுகோள் :

H_0 முழுமைத் தொகுதியின் திட்டவிலக்கம் $\sigma = 9$.

சிறப்பு காண் மட்டம்:

$\alpha = 5\ \%$ என்க.

புள்ளியியல் அளவையைக் கணக்கிடுதல் :

H_0 –ன் கீழ், புள்ளியியல் சோதனை அளவையானது

$$\chi_0{}^2 = \frac{ns^2}{\sigma^2} = \frac{20 \times 36}{9 \times 9} = 8.89$$

எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பு :

$\chi_e{}^2 = \dfrac{ns^2}{\sigma^2}$ ஆனது $(20 - 1 = 19)$ வரையற்ற பாகைகள் கொண்ட χ^2 – பரவலைத் தழுவுகிறது.

$= 30.144$

முடிவு :

இங்கு $\chi_0{}^2 < \chi_e{}^2$ என்பதால், 5 % சிறப்பு காண் மட்டத்தில் இல் எனும் எடுகோள் ஏற்கப்படுகிறது. அதனால் முழுமைத் தொகுயின் திட்டவிலக்கம் **9** என முடிவெடுக்கப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 13 :

10 மாணவர்களின் எடை (கி.கில்) கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

38, 40, 45, 53, 47, 43, 55, 48, 52 மற்றும் 49.

மேற்கண்ட மாதிரி எடுக்கப்பட்ட அனைத்து மாணவர்களின் எடைகளின் பரவலின் மாறுபாடு **20** கி.கி. எனச் சொல்லலாமா **?**

தீர்வு :

இல் என்னும் எடுகோள் :

$H_0 : \sigma^2 = 20$ அதாவது அனைத்து மாணவர்களின் எடைகளின் பரவலின் மாறுபாடு **20** எனக் கொள்ளலாம்.

சிறப்பு காண் மட்டம் : $\alpha = 0.05$ என்க

மாதிரி வேறுபாடு கணக்கிடுதல்

எடை (கி.கி.) x	$x - \bar{x} = x - 47$	$(x - \bar{x})^2$
38	– 9	81
40	– 7	49
45	– 2	4
53	6	36
47	0	0
43	– 4	16
55	8	64
48	1	1
52	5	25
49	2	4
		280

மாதிரி கூட்டு சராசரியானது

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{470}{10} = 47$$

புள்ளியியல் அளவையைக் கணக்கிடுதல் :

சோதனை புள்ளியியல் அளவையானது

$$\chi_o^2 = \frac{ns^2}{\sigma^2} = \frac{\sum(x - \bar{x})^2}{\sigma^2} = \frac{280}{20} = 14$$

எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பு :

$\chi_e^2 = \frac{ns^2}{\sigma^2}$ ஆனது $(10 - 1 = 9)$ வரையற்ற பாகைகள் கொண்ட χ^2 பரவலைத் தழுவுகிறது.

$= 16.919$

முடிவு :

இங்கு $\chi_0^2 < \chi_e^2$ ஆகையால், H_o ஏற்கப்படுகிறது. எனவே முழுமைத் தொகுதியில் உள்ள அனைத்து மாணவர்களின் எடைகளின் பரவலின் மாறுபாடு 20 கி.கி என நாம் முடிவுக்கு வரலாம்.

6.8 F – புள்ளியியல் அளவை : வரையறை

X என்பது ஒரு n_1 வரையற்ற பாகைகள் கொண்ட χ^2 மாறி மற்றும் Y ஒரு சார்பற்ற n_2 வரையற்ற பாகைகள் கொண்ட χ^2 மாறி.

பிறகு F - அளவையானது $F = \dfrac{X / n_1}{Y / n_2}$.

அதாவது F - அளவையானது இரண்டு சார்பற்ற கை வர்க்க மாறிகளை முறையே அதன் வரையற்ற பாகைகளால் வகுக்கக் கிடைக்கும் விகிதம் ஆகும். இந்த புள்ளியியல் அளவையானது ஸ்நெடகரின் (n_1, n_2) வரையற்ற பாகைகளைக் கொண்ட F – பரவலாகும்.

6.8.1 மாறுபாடுகளின் விகிதத்தை சோதித்தல் :

$x_1, x_2, x_3 \ldots.. x_{n1}$ என்ற n_1 எண்ணிக்கைகள் கொண்ட ஒரு சமவாய்ப்பு மாதிரியானது $\sigma_1{}^2$ என்ற மாறுபாடு கொண்ட முதல் முழுமைத் தொகுதியிலிருந்தும், மற்றும் $y_1, y_2, y_3 \ldots y_{n2}$ என்ற n_2 எண்ணிக்கைகள் கொண்ட ஒரு சமவாய்ப்பு மாதிரியானது, $\sigma_2{}^2$ என்ற மாறுபாடு கொண்ட இரண்டாவது முழுமைத் தொகுதியிலிருந்தும் எடுக்கப்படுகின்றன. இரு மாதிரிகளும் சார்பற்றவையாக உள்ளன என்பது தெளிவு.

இல் என்னும் எடுகோள் :

$H_0 = \sigma_1{}^2 = \sigma_2{}^2 = \sigma^2$ அதாவது முழுமைத் தொகுதி மாறுபாடுகள் சமம்.

புள்ளியியல் அளவையைக் கணக்கிடுதல் :

H_0 –ன் கீழ், சோதனை புள்ளியியல் அளவையானது

$$F_0 = \frac{S_1{}^2}{S_2{}^2}$$

இங்கு

$$S_1{}^2 = \frac{1}{n_1 - 1}\sum(x - \bar{x})^2 = \frac{n_1 s_1{}^2}{n_1 - 1}$$

$$S_2{}^2 = \frac{1}{n_2 - 1}\sum(y - \bar{y})^2 = \frac{n_2 s_2{}^2}{n_2 - 1}$$

F–விகிதத்தில் எப்போதும் தொகுதியில் உள்ள எண் பகுதியில் உள்ள எண்ணை விட அதிகமாக இருக்கும்.

$$F = \frac{\text{பெரிய மாறுபாடு}}{\text{சிறிய மாறுபாடு}}$$

ν_1 = பெரிய மாறுபாடு உள்ள மாதிரியின் வரையற்ற பாகை

ν_2 = சிறிய மாறுபாடு உள்ள மாதிரியின் வரையற்ற பாகை

எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பு :

$F_e = \dfrac{S_1{}^2}{S_2{}^2}$ ஆனது $(\nu_1 = n_1 - 1 , \nu_2 = n_2 - 1)$ வரையற்ற பாகைகள் கொண்ட

F – பரவலைத் தழுவுகிறது.

முடிவு :

F–ன் கண்டறியப்பட்ட மதிப்பு (ν_1, ν_2) –விற்குரிய F அட்டவணை மதிப்போடு 5% அல்லது 1% சிறப்பு காண் மட்டத்தில் ஒப்பிடப்படுகிறது. அதில் $F_0 > F_e$ எனில் H_0 மறுக்கப்படுகிறது. $F_0 < F_e$ எனில் ஏற்கப்பட்டு இரண்டு மாதிரிகளும் ஒரே மாறுபாடு உள்ள முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்டன என்று முடிவெடுக்கப்படுகிறது. F – சோதனை மாறுபாட்டளவையின் விகிதமாக உள்ளதால் இதனை மாறுபாட்டு விகித சோதனை என்கிறோம்.

எடுத்துக்காட்டு 14 :

இரண்டு இயல் நிலை முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து இரண்டு சமவாய்ப்பு மாதிரிகள் எடுக்கப்பட்டன.

மாதிரி I: 20	16	26	27	22	23	18	24	19	25		
மாதிரி II: 27	33	42	35	32	34	38	28	41	43	30	37

முழுமைத் தொகுதி மாறுபாட்டின் மதிப்பீடுகளைக் கண்டுபிடித்து, அந்த இரண்டு முழுமைத் தொகுதிகளும் ஒரே மாறுபாடு கொண்டனவா என்பதை 5% சிறப்பு காண் மட்டத்தில் சோதனை செய்க.

தீர்வு :

இல் என்னும் எடுகோள் :

H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ அதாவது இரண்டு முழுமைத் தொகுதிகளும் ஒரே மாறுபாட்டைக் கொண்டுள்ளன.

மாற்று எடுகோள்:

H_1: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ (இரு முனை)

தொகுதி மாறுபாடு கணக்கிடுதல் :

$$\overline{x_1} = \frac{\sum x_1}{n_1} = \frac{220}{10} = 22$$

$$\overline{x_2} = \frac{\sum x_2}{n_2} = \frac{420}{12} = 35$$

x_1	$x_1-\bar{x}_1$	$(x_1-\bar{x}_1)^2$	x_2	$x_2-\bar{x}_2$	$(x_2-\bar{x}_2)^2$
20	– 2	4	27	– 8	64
16	– 6	36	33	– 2	4
26	4	16	42	7	49
27	5	25	35	0	0
22	0	0	32	– 3	9
23	1	1	34	– 1	1
18	– 4	16	38	3	9
24	2	4	28	– 7	49
19	– 3	9	41	6	36
25	3	9	43	8	64
220	**0**	**120**	30	– 5	25
			37	2	4
			420	**0**	**314**

சிறப்பு காண் மட்டம்:

$\alpha = 5\ \%$ என்க.

F –புள்ளியியல் அளவை கீழ்க்காணும் விகிதமாக வரையறுக்கப்படுகிறது.

$$F_0 = \frac{S_1^2}{S_2^2}$$

இங்கு $S_1^2 = \frac{\sum(x_1 - \bar{x}_1)^2}{n_1 - 1} = \frac{120}{9} = 13.33$

$$S_2^2 = \frac{\sum(x_2 - \bar{x}_2)^2}{n_2 - 1} = \frac{314}{11} = 28.54$$

$S_2^2 > S_1^2$ எனவே, பகுதியில் பெரிய மாறுபாடும் தொகுதியில் சிறிய மாறுபாடும் பிரதியிட வேண்டும்.

$$\therefore F_0 = \frac{28.54}{13.33} = 2.14$$

எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பு :

$F_e = \frac{S_2^2}{S_1^2}$ ஆனது ($\nu_1 = 12 - 1 = 11$; $\nu_2 = 10 - 1 = 9$) வரையற்ற பாகைகள் கொண்ட F- பரவலைத் தழுவுகிறது.

$= 3.10$

முடிவு :

இங்கு $F_0 < F_e$ ஆகையால், 5% சிறப்பு காண் மட்டத்தில் இல் எனும் எடுகோள் ஏற்கப்படுகிறது. எனவே ஒரே மாறுபாடு உடைய முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து இரு மாதிரிகளும் எடுக்கப்பட்டன என முடிவெடுக்கிறோம்.

எடுத்துக்காட்டு 15 :

A மற்றும் B என்ற இரு விவசாய நிலங்கள் சமமான சிறு பாத்திகளாகப் பிரிக்கப்பட்டு அதில் கிடைக்கும் கோதுமையின் விளை பலன்கள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. நிலம் A ஐப் போல நிலம் B யிலும் ஒரே மாதிரி உரங்கள் பயன்படுத்தப்பட்டன.

	பாத்திகளின் எண்ணிக்கை	சராசரி விளைபலன்	மாறுபாடு
பகுதி A	8	60	50
பகுதி B	6	51	40

இரண்டு பகுதிகளின் மாறுபாடுகளுக்கு இடையே உள்ள வித்தியாசம் சிறப்பு வாய்ந்ததா என F சோதனையைப் பயன்படுத்தி கண்டுபிடிக்கவும்.

தீர்வு :

நமக்குக் கொடுக்கப்பட்டவை

$n_1 = 8$ $n_2 = 6$ $\bar{x}_1 = 60$ $\bar{x}_2 = 51$ $s_1^2 = 50$ $s_2^2 = 40$

இல் என்னும் எடுகோள் :

$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ அதாவது கோதுமையின் விளைபலன்களின் மாறுபாட்டு வித்தியாசம் சிறப்பு வாய்ந்ததல்ல.

மாற்று எடுகோள் :

$H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ (இரு முனை)

சிறப்பு காண் மட்டம்:

$\alpha = 0.05$ என்க

புள்ளியியல் அளவையைக் கணக்கிடுதல் :

$$S_1^2 = \frac{n_1 s_1^2}{n_1 - 1} = \frac{8 \times 50}{7}$$
$$= 57.14$$
$$S_2^2 = \frac{n_2 s_2^2}{n_2 - 1} = \frac{6 \times 40}{5}$$
$$= 48$$

$S_1^2 > S_2^2$ எனவே,

$$F_0 = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{57.14}{48} = 1.19$$

எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பு :

$F_e = \frac{S_1^2}{S_2^2}$ ஆனது ($\nu_1 = 8 - 1 = 7$; $\nu_2 = 6 - 1 = 5$) வரையற்ற பாகைகள் கொண்ட F-பரவலைத் தழுவுகிறது.

$= 4.88$

முடிவு :

இங்கு $F_0 < F_e$ என்பதால், இல் எனும் எடுகோள் ஏற்கப்படுகிறது. அதாவது கோதுமையின் விளைபலன்களின் மாறுபாட்டின் வித்தியாசம் சிறப்பு வாய்ந்ததல்ல.

பயிற்சி– 6

I. **சரியான விடையைத் தேர்ந்தெடுக்கவும்** :

1. ஸ்டூடண்ட் t – பரவலின் முன்னோடி

   அ) கார்ல் பியர்ஸன் ஆ) லாப்லாஸ்

   இ) R.A. பிக்ஷர் ஈ) வில்லியம் S. காஸெட்

2. t - பரவலின் வீச்சு

   அ) $-\infty$ இல் இருந்து 0 ஆ) 0 இல் இருந்து ∞

   இ) $-\infty$ இல் இருந்து ∞ ஈ) 0 இல் இருந்து 1

3. சிறு கூறுகளில் இரு சராசரிகளுக்கிடையிலான வேறுபாடு இவ்வாய்பாட்டால் சோதிக்கப்படுகிறது.

   அ) $t = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{s}$ ஆ) $t = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{s} \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 + n_2}}$

   இ) $t = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{s} \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}}$ ஈ) $t = \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}}$

4. இரு சிறு கூறுகளின் சராசரிளுக்கிடையே உள்ள வேறுபாட்டிற்கான சிறப்பு சோதனையின் போது வரையற்ற பாகைகளின் எண்ணிக்கை

   அ) $n_1 + n_2$ ஆ) $n_1 + n_2 - 1$ இ) $n_1 + n_2 - 2$ ஈ) $n_1 + n_2 + 2$

5. கண்டறியப்பட்ட இரு கூறுகளுக்கு இணைக்கப்பட்ட t சோதனையை பயன்படுத்தும் பொழுது அவை _________ இருக்கும்.

அ) இணையாக ஆ) ஒட்டுறவாக

இ) உறுப்புகளின் எண்ணிக்கைக்கு சமமாக ஈ) இவை அனைத்துமாக

6. 9 இணை மதிப்புகளின் மதிப்புகளில் சராசரிகளுக்கிடையிலான வித்தியாசம் 15 மற்றும் திட்டவிலக்கம் 5.0 எனில் சோதனை அளவை t –ன் மதிப்பு

அ) 27 ஆ) 9 இ) 3 ஈ) 0

7. கண்டறியப்பட்ட மற்றும் எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்புகள் முழுவதும் சமம் எனில் χ^2 ன் மதிப்பு

அ) -1 ஆ) $+1$

இ) ஒன்றைவிட அதிகம் ஈ) 0

8. $\nu = 2$ எனில் $\chi^2_{0.05}$ ன் மதிப்பு

அ) 5.9 ஆ) 5.99 இ) 5.55 ஈ) 5.95

9. கணக்கீடு செய்யப்பட்ட χ^2 –ன் மதிப்பு

அ) எப்பொழுதும் மிகை எண் ஆ) எப்பொழுதும் குறை எண்

இ) மிகை அல்லது குறை எண் ஈ) இவற்றில் எதுவும் இல்லை

10. கட்ட அலைவெண் ________ இருக்கும் போது ஏட்சின் திருத்தம் பயன்படுகிறது.

அ) 5 ஆ) < 5 இ) 1 ஈ) 4

11. χ^2 சோதனையைக் கண்டுபிடித்தவர்

அ) R.A. பிஷர் ஆ) காஸ் இ) கார்ல் பியர்சன் ஈ) லேப்லாஸ்

12. கைவர்க்க சோதனையில் 4×3 தேர்வுப் பட்டியலின் வரையற்ற பாகை

அ) 12 ஆ) 9 இ) 8 ஈ) 6

13. F – அளவையில் வழக்கமாக பெரிய மாறுபாடு ________ ல் இருக்கும்.

அ) தொகுதியில் ஆ) பகுதியில் இ) இரண்டிலும் ஈ) இவை எதுவுமில்லை

14. $F = \dfrac{S_1^2}{S_2^2}$ என்ற சோதனை புள்ளியியல் அளவை _________ ஐ சோதனை செய்யப் பயன்படுகிறது.

அ) $H0 : \mu_1 = \mu_2$ ஆ) $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ இ) $H_0 : \sigma_1 = \sigma$ ஈ) $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$

15. F - அளவையின் கீழ் முழுமைத் தொகுதி சராசரிக்கும் மாதிரி சராசரிக்கும் இடையே உள்ள வித்தியாசத்தை சோதனையிட உதவும் மாதிரி சராசரியின் திட்டப்பிழை

அ) $\dfrac{\sigma^2}{\sqrt{n}}$ ஆ) $\dfrac{s}{\sqrt{n}}$ இ) $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ஈ) $\dfrac{s}{n}$

II. **கோடிட்ட இடத்தை நிரப்புக** :

16. t – சோதனையில் முழுமைத் தொகுதியின் திட்டவிலக்கம் ____________

17. t- மதிப்புகள் ____________ இடையில் இருக்கும்.

18. இணைக்கப்பட்ட t- சோதனை மாதிரி எண்ணிக்கைகள் ______________ ஆக இருக்கும் போது பயன்படுத்தப்படும்.

19. ஸ்டூடண்ட்டின் t– சோதனையை மாதிரிகள்____________ ஆக இருக்கும் போது பயன்படுத்தலாம்.

20. χ^2 புள்ளியியல் அளவையின் மதிப்பு ___________ மற்றும் __________ அலைவெண்களின் வித்தியாசங்களுக்கு மத்தியில் அமையும்.

21. χ^2 ன் மதிப்பு ____________ க்கும் ____________ க்கும் இடையில் அமையும்.

22. இரண்டு முழுமைத் தொகுதி மாறுபாட்டின் சமத்துவம் ____________ –ன் மூலம் சோதனை செய்யப்படும்.

23. χ^2 சோதனையானது எளிமையாகவும் அதிக அளவில் பயன்படக் கூடியதுமான _________ சோதனை.

24. கண்டறியப்பட்ட மற்றும் எதிர்பார்க்கப்படும் அலைவெண்களின் முரண்பாடு அதிகப்படின் χ^2 ன் மதிப்பும் _________.

25. சார்பு அட்டவணையில் ν =_________.

26. χ^2 ன் பரவல் ___________ ஐச் சார்ந்து இருக்கும்.

27. χ^2 பரவலின் மாறுபாட்டு அளவை வரையற்ற பாகையின் ________ மடங்காக இருக்கும்.

28. χ^2 சோதனையின் ஒரு நிபந்தனையானது, எந்த கட்ட அலைவெண்ணும் _________ ஆக இருக்கக் கூடாது.

29. 3×2 சார்பு அட்டவணையில் _________ கட்டங்கள் உள்ளன.

30. F- சோதனை ___________ விகித சோதனை எனப்படும்.

III. **கீழ்க்கண்ட வினாக்களுக்கு விடையளிக்கவும்.**

31. ஸ்டூடண்ட்டின் t – புள்ளியியல் மாறியை வரையறை செய்க.

32. ஸ்டூடண்ட்டின் t – சோதனை கோட்பாடுகளை எழுதுக.

33. t – பரவலின் பண்புகளைக் குறிப்பிடுக.

34. t – பரவலின் பயன்பாடுகள் யாவை ?

35. சிறு கூறுகளின் சராசரியின் சிறப்பு காண் சோதனையின் வழிமுறைகளை விளக்குக.

36. இணைக்கப்பட்ட t – சோதனையிலிருந்து நீவிர் அறிவதென்ன ? அவற்றின் கோட்பாடுகள் யாவை ?

37. இணைக்கப்பட்ட t – சோதனையின் சோதனை வழிமுறைகளை விளக்குக.

38. கை வர்க்க சோதனையை வரையறு.

39. கை வர்க்கப் பரவலை வரையறு.

40. χ^2 சோதனையின் பொருத்துதலின் செம்மை என்றால் என்ன ?

41. χ^2 சோதனையை பயன்படுத்தும் போது கவனத்தில் கொள்ள வேண்டியவை எவை ?

42. ஏட்சின் திருத்தம் – ஒரு சிறு குறிப்பு வரைக.

43. வரையற்ற பாகைகள் என்ற பதத்தை விளக்குக.

44. பண்பளவை சாரா சோதனையை வரையறுக்கவும்.

45. முழுமைத் தொகுதி மாறுபாட்டிற்கான χ^2 சோதனையை வரையறுக்கவும்.

46. ஒரு தொகுதியிலிருந்து சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட பூத்தண்டுகளின் உயரங்கள் (செ.மீல்) கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

    63 , 63, 66, 67, 68, 69, 70, 70, 71 மற்றும் 71 தொகுதியின் சராசரி உயரம் 66 செ.மீ இருக்க முடியுமா என ஆராய்க.

47. ஒரு இயந்திரம் சராசரியாக 0.025 செ.மீ பருமன் உள்ள மின்சாரப் பொருளுக்குப் பயன்படுத்தும் மின்கடத்தா வாஷர்களை வடிவமைத்து உற்பத்தி செய்கிறது. ஒரு சமவாய்ப்பு முறையில் எடுக்கப்பட்ட 10 மாதிரி வாஷர்களின் சராசரி பருமன் 0.024 செ.மீ மற்றும் அதன் திட்ட விலக்கம் 0.002 செ.மீ சராசரிக்கான சிறப்புக் காண் சோதனை செய்க.

48. முறையே 5 மற்றும் 7 நோயாளிகளின் எடையைக் குறைக்க இரண்டு வகை மருந்துகள் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. A வகை மருந்து வெளிநாட்டில் தயாரிக்கப்பட்டது. B வகை மருந்து நமது நாட்டில் தயாரிக்கப்பட்டது. ஆறு மாதங்கள் அந்த மருந்தை உட்கொண்டதில் அவர்களின் எடையில் ஏற்பட்ட குறைவு பின்வருமாறு :

மருந்து A :	10	12	13	11	14		
மருந்து B :	8	9	12	14	15	10	9

    இரண்டு மருந்துகளின் எடையை குறைக்கும் விளைவுகளின் இடையேயான வித்தியாசம் சிறப்பு வாய்ந்ததா ? இல்லையா ? என்பதை சோதனை செய்க.

49. ஒரு நாளில் இரண்டு இயந்திரங்கள் மூலம் உற்பத்தி செய்த பொருள்களின் சராசரி எண்ணிக்கை 200 மற்றும் 250. அதன் திட்ட விலக்கங்கள் முறையே 20 மற்றும் 25 ஆகும். இந்த மதிப்புகள் 25 நாட்கள் உற்பத்தி செய்த குறிப்புகளின் அடிப்படையில் காணப்பட்டது. இரண்டு இயந்திரங்களும் ஒரே மாதிரி திறமை வாய்ந்தது என 1% சிறப்பு காண் மட்டத்தில் முடிவு செய்யலாமா ?

50. ஒரு குறிப்பிட்ட மருந்து 10 நோயாளிகளுக்குக் கொடுக்கப்பட்டதில் கீழ்க்கண்டவாறு இரத்த அழுத்தத்தில் மாறுதல் ஏற்பட்டது. 3, 6, -2 , +4, -3, 4, 6, 0, 0, 2 இந்த மருந்து இரத்த அழுத்தத்தை மாற்றவல்லது என நினைக்க வாய்ப்பு உள்ளதா ?

51. சிறப்பு விற்பனை திட்டத்திற்கு முன்பும் பின்பும் எடுக்கப்பட்ட 6 கடைகளின் விற்பனை விவரம் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

கடைகள் :	A	B	C	D	E	F
திட்டத்திற்கு முன்பு :	53	28	31	48	50	42
திட்டத்திற்கு பின்பு :	58	29	30	55	56	45

சிறப்பு விற்பனை திட்டம் வெற்றி எனக் கணிக்கலாமா ? 5% சிறப்பு காண் மட்டத்தில் சோதனை செய்க.

52. ஒவ்வொன்றும் 5 குழந்தைகளைக் கொண்ட 320 குடும்பங்களின் விவரம் பின்வருமாறு

ஆண் குழந்தைகளின் எண்ணிக்கை	5	4	3	2	1	0
பெண் குழந்தைகளின் எண்ணிக்கை	0	1	2	3	4	5
குடும்பங்களின் எண்ணிக்கை	14	56	110	88	40	12

ஆண் மற்றும் பெண் குழந்தை பிறப்பதற்கு சமவாய்ப்பு உள்ளது என்று இவ்விவரத்திலிருந்து கூற இயலுமா ?

53. ஒரு புத்தகத்தில் ஒரு பக்கத்தில் உள்ள பிழைகள் பின்வருமாறு

ஒரு பக்கத்தில் உள்ள பிழைகளின் எண்ணிக்கை	0	1	2	3	4	மொத்தம்
பக்கங்களின் எண்ணிக்கை	211	90	19	5	0	325

பாய்சான் பரவலைப் பொருத்தி அதன் பொருத்துதலின் செம்மையைச் சோதனை செய்.

54. 800 பேர்களில் 25% பேர் படித்தவர்கள். இதில் 300 பேர் அவர்களின் மாவட்டத்திற்கும் அப்பால் பயணம் செய்தவர்கள். படித்தவர்களில் 40% பேர் பயணம் செய்யாதவர்கள். பயணத்திற்கும், படிப்பறிவிற்கும் ஏதேனும் தொடர்பு இருக்கிறதா என்று 5% சிறப்புக் காண் மட்டத்தில் சோதனை செய்க.

55.

தந்தைகள்	புத்தி கூர்மை உடைய மகன்கள்	புத்தி கூர்மை அற்ற மகன்கள்	மொத்தம்
திறமை உடையவர்கள்	24	12	36
திறமை அற்றவர்கள்	32	32	64
மொத்தம்	56	44	100

இவ்விவரமானது திறமையுடைய தந்தைகளுக்கு புத்திசாலி மகன்கள் இருப்பார்கள் என்ற எடுகோளை உறுதிப்படுத்துமா என்று சோதனை செய்க.

56. ஒரு இயல்நிலை தொகுதியிலிருந்து சமவாய்ப்பு முறையில் எடுக்கப்பட்ட 10 மாதிரிகளின் மதிப்புகள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

65 , 72, 68, 74, 77, 61,63, 69 , 73, 71

தொகுதி மாறுபாடு 32 என்ற எடுகோளை சோதனை செய்.

57. 15 எண்ணிக்கையுடைய ஒரு மாதிரியின் திட்டவிலக்கம் 6.4 எனக் காட்டுகிறது. இயல்நிலை தொகுதியாக இருப்பின் அதன் திட்டவிலக்கம் 5 என்ற எடுகோள் சரி என ஒப்புக் கொள்ள முடியுமா ?

58. 8 உறுப்புகளுள்ள ஒரு மாதிரி சராசரியிலிருந்து உறுப்புகளின் விலக்கங்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதல் 94.5 ஆகும் . 10 உறுப்புகளுள்ள இன்னொரு மாதிரியில் இம்மதிப்பு 101.7 ஆகும். மாறுபாடுகளுக்கு இடையே உள்ள வித்தியாசம் சிறப்பு வாய்ந்ததா என்பதை 5% மட்டத்தில் சோதனை செய்க.

59. 9 மற்றும் 13 எண்ணிக்கை கொண்ட ஒரு மாதிரிகளின் திட்டவிலக்கங்கள் முறையே 2 மற்றும் 1.8 ஆகும். இரு மாதிரிகளும் சம திட்டவிலக்கம் உள்ள இயல் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்டிருப்பதாகக் கருத முடியுமா ?

60. இரு இயல்நிலைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட சமவாய்ப்பு மாதிரிகளின் மதிப்புகள் பின்வருமாறு

A	66	67	75	76	82	84	88	90	92	-	-
B	64	66	74	78	82	85	87	92	93	95	97

இரு தொகுதிகளுக்கும் சம மாறுபாடு உள்ளதா என்பதை 5% சிறப்பு காண் மட்டத்தில் சோதிக்கவும்.

61. ஒரு மோட்டார் வண்டி தயாரிக்கும் நிறுவனம் ஒரு புதிய வகை காரை அறிமுகப்படுத்தியது. அந்த கார் குறிப்பிட்ட வயதுடையோர் அல்லது அனைத்து வயதினருக்கும் ஏற்புடையதா என்பதை அறிவதற்காக ஒரு விளம்பர முகாம் நடத்தியது. புதிய காரின் முன்னோட்டத்தில் கலந்து கொண்டவர்களிடையே மாதிரி எடுத்து கிடைத்த விவரம் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

	வயது				
	20க்கும் கீழ்	20-39	40-50	60க்கும் மேல்	மொத்தம்
காரை விரும்புபவர்கள்	146	78	48	28	300
காரை விரும்பாதவர்கள்	54	52	32	62	200
மொத்தம்	200	130	80	90	500

மேலே கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரத்திலிருந்து நீவீர் என்ன முடிவு செய்வீர் ?

விடைகள் :

I.

1. (ஈ)	2.(இ)	3. (இ)	4. (இ)	5. (ஈ)	6. (ஆ)
7. (ஈ)	8. (ஆ)	9. (அ)	10. (இ)	11 (இ)	12. (ஈ)
13. (அ)	14. (ஆ)	15. (ஆ)			

II.

16. தெரியாது

17. - ∞ இல் இருந்து ∞

18. இணையாக

19 சிறியதாக

20.கண்டறியப்பட்ட, எதிர்பார்க்கப்பட்ட

21. 0, ∞

22. F- சோதனை

23. பண்பளவை சாரா

24. அதிகம்

25. (r – 1) ((–1))

26. வரையற்ற பாகை

27. எண்ணிக்கைக்குச்

28. 5 க்கும் குறைவாக

29. 6   30. மாறுபாட்டு

III.

46. t = 1.891 H_0 ஏற்றுக் கொள்ளப்படுகிறது

47. t = 1.5 H_0 ஏற்றுக் கொள்ளப்படுகிறது

48. t = 0.735 H_0 ஏற்றுக் கொள்ளப்படுகிறது

49. t = 7.65 H0 மறுக்கப்படுகிறது

50. t = 2, H_0 ஏற்றுக் கொள்ளப்படுகிறது

51. t = 2.58 H_0 மறுக்கப்படுகிறது

52. χ^2 = 7.16 H_0 ஏற்றுக் கொள்ளப்படுகிறது

53. χ^2 = 0.068 H_0 ஏற்றுக் கொள்ளப்படுகிறது

54. χ^2 = 0.016 H_0 ஏற்றுக் கொள்ளப்படுகிறது

55. χ^2 = 2.6 H_0 ஏற்றுக் கொள்ளப்படுகிறது

56. χ^2 = 7.3156 H_0 ஏற்றுக் கொள்ளப்படுகிறது

57. χ^2 = 24.58 H_0 மறுக்கப்படுகிறது

58. χ^2 = 24.576 H_0 மறுக்கப்படுகிறது

59. F = 1.41 H_0 ஏற்றுக் கொள்ளப்படுகிறது

60. F = 1.415 H_0 ஏற்றுக் கொள்ளப்படுகிறது

61. χ^2 = 7.82 , H_0 மறுக்கப்படுகிறது

7. மாறுபாட்டு பகுப்பாய்வு

7.0 அறிமுகம் :

மாறுபாட்டு பகுப்பாய்வு என்பது சிறப்புச் சோதனைகளுக்கான ஒரு பலம் வாய்ந்த புள்ளியியல் கருவியாகும். மாறுபாட்டு பகுப்பாய்வு என்ற பதம் பேராஃபிஷரால் விவசாயத் துறை ஆய்வுப் பணிகளை கையாள்வதற்காக அறிமுகப்படுத்தப்பட்டது. t - பரவலைச் சார்ந்த சிறப்புச் சோதனையானது இரண்டு மாதிரி சராசரிகளின் வித்தியாசங்களின் சிறப்பை சோதனை செய்வதற்கு மட்டுமே பயன்படுத்துவதற்கு ஏதுவான வழி முறையாகும். ஒரே நேரத்தில் மூன்று அல்லது அதற்கு அதிகமான மாதிரிகளை கையாளக் கூடிய தருணத்தில் எல்லா மாதிரிகளும் ஒரே முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து பெறப்பட்டனவா அதாவது எல்லா மாதிரிகளும் ஒரே சராசரியை பெற்றனவா என்ற எடுகோள் சோதனை செய்வதற்கு நமக்கு வேறொரு வழி முறை தேவைப்படுகிறது. உதாரணமாக நான்கு பகுதிகளாகப் பிரிக்கப்பட்ட நிலத்தில் ஒவ்வொரு பகுதியிலும் ஐந்து வகை உரங்களை பயன்படுத்தி பயிரிடப்பட்ட கோதுமையின் விளைச்சல் (ஒவ்வொரு பகுதி நிலத்திலும்) கொடுக்கப்பட்டால் நமது நோக்கமானது கோதுமையின் விளைச்சலில் இந்த ஐந்து வகை உரங்களின் விளைவுகள் சிறப்பான வித்தியாசமுடையனவா அல்லது இந்த மாதிரிகள் ஒரே இயல்நிலை பரவலிலிருந்து பெறப்பட்டவையா என்பதை அறிவதே ஆகும். இதற்கான பதிலை நமக்கு மாறுபாட்டு பகுப்பாய்வு முறை அளிக்கிறது. ஆகவே மாறுபாட்டு பகுப்பாய்வின் அடிப்படை நோக்கமானது பல சராசரிகளின் சீரான்மையை சோதனை செய்வதாகும்.

கண்டறிந்த மதிப்புகள் வேறுபட்டு அமைவதென்பது இயல்பான தொன்றாகும். ஒரு எண் விவர மதிப்புகளின் தொகுதியின் மொத்த மாறுபாட்டைப் பல காரணிகள் ஏற்படுத்தியிருக்க கூடும். அவற்றைக் கீழ்க்கண்டவாறு பாகுபாடு செய்யலாம்.

(i) குறிப்பிடத் தக்க காரணங்களால் ஏற்படுபவை

(ii) இயல்பான வேறுபாட்டால் ஏற்படுபவை

குறிப்பிடத் தக்க காரணங்களால் ஏற்படும் மாறுபாடுகள் கண்டுபிடிக்கப்பட்டு அவற்றை அளவிட முடியும். ஆனால் இயல்பான வேறுபாட்டால் ஏற்படும் மாறுபாடுகளை தனியாகப் பிரித்தெடுப்பது என்பது மனித முயற்சிக்கு அப்பாற்பட்டது.

7.1 வரையறை :

ஃபிஷரின் கூற்றுப்படி மாறுபாட்டு பகுப்பாய்வானது ஒரு குழு (Group) காரணங்களைச் சார்ந்த மாறுபாடுகளை மற்ற குழு காரணங்களைச் சார்ந்த மாறுபாடுகளினின்று பிரித்தெடுக்கும் முறையாகும். மாதிரி விவரங்களின் மொத்த மாறுபாட்டை எதிர்மறை அல்லாத பிரிவுகளின் தொகுப்பாக வெளிப்படுத்துதல் இம்முறையில் சாத்தியமாகும்.

இங்கு ஒவ்வொரு பிரிவும் ஒரு குறிப்பிட்ட சார்பில்லா தோற்றுவாய் அல்லது காரணி அல்லது காரணத்தால் ஏற்படும் மாறுபாடுகளின் அளவீட்டளவாகும்.

7.2 அனுமானங்கள் :

மாறுபாட்டு பகுப்பாய்வில் F - சோதனையின் ஏற்புடைமைக்கு கீழ்க்கண்ட அனுமானங்களை செய்ய வேண்டும்.

(i) கண்டறிந்த விவரங்கள் யாவும் சார்பற்றவை.

(ii) எடுக்கப்பட்ட விவரங்கள் இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து பெறப்பட்டவை மற்றும்

(iii) வேறுபட்ட நடத்து முறைகள் மற்றும் சுற்றுச் சூழல் விளைவுகள் யாவும் கூட்டுத் தன்மையை கொண்டுள்ளது.

7.3 ஒரு வழி பாகுபாடு :

x என்ற சமவாய்ப்பு மாறியின் N கண்டறிந்த மதிப்புகள் x_{ij}, i = 1, 2, …… k ; j = 1,2….n_i) ஐ முறையே n_1, n_2 , …..n_k $\left(N = \sum_{i=1}^{k} n_i\right)$ அளவுகள் கொண்ட k வகுப்புகளாக வகைப்படுத்தப்பட்டு கீழே காட்டப்பட்டுள்ளது.

	சராசரி	மொத்தம்
x_{11} x_{12} ... x_1n_1	$\bar{x}_1.$	T_1
x_{21} x_{22} ... x_2n_2	$\bar{x}_2.$	T_2
. . .	.	.
. . .	.	.
. . .	.	.
x_{i1} x_{i2} ... x_in_i	$\bar{x}_i.$	T_i
. . .	.	.
. . .	.	.
. . .	.	.
x_{k1} x_{k2} ... x_kn_k	$\bar{x}_k.$	T_k
		G

கண்டறிந்த மதிப்புகள் x_{ij} ன் மொத்த மாறுபாட்டளவை கீழ்க்கண்ட இரண்டு பிரிவுகளாக பிரிக்கப்படுகின்றன.

(i) வகுப்புகளின் இடையே உள்ள மாறுபாடு அல்லது வேறுபட்ட அடிப்படைகள் கொண்ட பாகுபாடுகளால் உண்டாகும் மாறுபாடு. அவை பொதுவாக நடத்து முறைகள் என அறியப்படும்.

(ii) வகுப்புகளுக்குள்ளேயே இருக்கும் மாறுபாடு அதாவது ஒரு வகுப்பின் கண்டறிந்த மதிப்புகளுக்குள் இயற்கையாகவே உள்ளடங்கிய மாறுபாடுகள்.

இதில் முதல் வகை மாறுபாடு ஆனது குறிப்பிடத்தக்க காரணங்களால் ஏற்படுபவை அவை மனித சக்தியால் கண்டுபிடிக்கப்பட்டு கட்டுப்படுத்தப்படும். இரண்டாம் வகை மாறுபாடு இயல்பான வேறுபாட்டால் ஏற்படுபவை. அவற்றை கட்டுபடுத்துதல் என்பது மனித முயற்சிக்கு அப்பாற்பட்டவை.

குறிப்பாக k வேறுபட்ட உணவுகள் அளிக்கப்படும் ஒரே இன N மாடுகள் k பிரிவுகளாக பிரிக்கப்பட்டு ஒவ்வொரு பிரிவும் முறையே n_1, n_2 , ...n_k அளவுகள் உடையன என்றால் அவற்றின் பால் உற்பத்தியில் k வேறுபட்ட உணவுகளின் விளைவுகள் கணக்கில் கொள்ளப்படுகின்றன. இங்கு $N = \sum_{i=1}^{k} n_i$ எனவே, மாறுபாடுகளின் தோற்றுவாய்கள் ஆவன :

(i) வேறுபட்ட உணவுகளின் விளைவுகள்

(ii) பல்வகை காரணங்களால் உண்டாகும் இயல்பான வேறுபாடுகள் அவை அடையாளம் காணப்பட்டு கண்டறிய முடியாதவை.

7.4 சோதனை வழிமுறை :

பகுப்பாய்வைச் செய்வதற்கான பல்வேறு படிகள்

1) **இல் எனும் எடுகோள்** :

முதல் படியானது இல் எனும் எடுகோளை அமைப்பதாகும்.

H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_k$

மாற்று எடுகோள் :

H_1: எல்லா μ_i களும் சமமல்ல. ($i = 1, 2, \ldots, k$)

2) **சிறப்பு காண் மட்டம்**:

α : 0.05 என்க.

3) **சோதனை புள்ளியியல் அளவை** :

பல்வேறு வர்க்கங்களின் கூடுதல்களைக் கீழ்க்கண்டவாறு பெறலாம்.

அ) கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களின் N உறுப்புகளின் மொத்தத்தைக கண்டுபிடித்து அதனை G என்று குறிப்பிடுக. பிறகு திருத்தக் காரணியானது (C.F) = $\frac{G^2}{N}$

ஆ) எல்லா தனித்த உறுப்புகள் (x_{ij}) இன் வர்க்கங்களின் கூடுதலை கண்டுபிடித்து பிறகு மொத்த வர்க்கங்களின் கூடுதல் (TSS) ஆனது

$$TSS = \sum\sum x_{ij}^2 - \text{திருத்தக் காரணி}$$

இ) எல்லா வகுப்பு மொத்தங்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதல் (அல்லது ஒவ்வொரு நடத்து முறை மொத்தத்தின் வர்க்கங்களின் கூடுதல்) T_i (i:1,2,....k) கண்டுபிடித்து, பிறகு பிரிவுகளின்

இடையேயான வர்க்கங்களின் கூடுதல் அல்லது நடத்து முறையின் இடையேயான வர்க்கங்களின் கூடுதல் (SST) ஆனது

$$SST = \sum_{i=1}^{k} \frac{T_i^2}{n_i} - \text{திருத்தக் காரணி}$$

இங்கு n_i (i: 1, 2, ….. k) என்பன i ஆவது வகுப்பின் கண்டறிந்த விவரங்கள் அல்லது i ஆவது நடைமுறையை ஏற்கும் கண்டறிந்த விவரங்கள் ஆகும்.

ஈ) வகுப்புகளுக்குள்ளேயே உள்ள வர்க்கங்களின் கூடுதல் அல்லது பிழையால் உண்டாகும் வர்க்கங்களின் கூடுதலைக் (SSE) கழித்தலின் வழியாக காண வேண்டும்.

அதாவது SSE = TSS – SST

4) **வரையற்ற பாகைகள்** (d.f):

மொத்த வர்க்கங்களின் கூடுதலுக்குரிய (TSS) வரையற்ற பாகைகள் (N-1) ஆகும். நடத்து முறைகளின் இடையேயான வர்க்கங்களின் கூடுதலுக்குரிய (SST) வரையற்ற பாகைகள் (k - 1) ஆகும். மேலும் பிழையின் வர்க்கங்களின் கூடுதலுக்குரிய (SSE) வரையற்ற பாகைகள் (N - k) ஆகும்.

5) **வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை சராசரி** :

நடத்து முறைகளின் வர்க்கங்களின் கூடுதலின் சராசரியானது, $\frac{SST}{k-1}$ மேலும் பிழைகளுக்குரிய வர்க்கங்களின் கூடுதலின் சராசரியானது $\frac{SSE}{N-k}$.

6) **மாறுபாட்டு பகுப்பாய்வு அட்டவணை :**

மேற்கண்ட வர்க்கங்களின் கூடுதல்கள் அவற்றிற்குரிய வரையற்ற பாகைகள் மற்றும் வர்க்கங்களின் கூடுதல்களின் சராசரிகள் ஆகியவை சுருக்கமாக கீழ்க்கண்ட அட்டவணையில் தரப்பட்டுள்ளன.

ஒரு வழி பாகுப்பாட்டிற்குரிய மாறுபாட்டு பகுப்பாய்வு அட்டவணை :

மாறுபாட்டின் மூலம்	வரையற்ற பாகைகள்	வர்க்கங்களின் கூடுதல்	வர்க்கங்களின் கூடுதலின் சராசரி	F விகித மதிப்பு
நடத்து முறைகளின் இடையே	K – 1	SST	$\frac{SST}{k-1} = MST$	$\frac{MST}{MSE} = F_T$
பிழை	N – k	SSE	$\frac{SSE}{N-k} = MSE$	
மொத்தம்	N – 1			

மாறுபாட்டு விகித கணக்கீடு :

F –இன் மாறுபாட்டு விகிதமானது அதிக மாறுபாட்டு அளவிற்கும் குறைந்த மாறுபாட்டளவிற்கும் இடையே உள்ள விகிதமாகும்.

$$F = \frac{\text{நடத்து முறைகளின் இடையே உள்ள மாறுபாடு}}{\text{நடத்து முறைகளுக்கு உள்ளே உள்ள மாறுபாடு}}$$

$$= \frac{MST}{MSE}$$

நடத்து முறைகளுக்குள்ளே இருக்கும் மாறுபாடு நடத்து முறைகளுக்கிடையே உள்ள மாறுபாட்டை விட அதிகமாக இருந்தால் பகுதி தொகுதி மாற்றிக் கொண்டு அவற்றின் வரையற்ற பாகைகளையும் ஏற்றவாறு மாற்றிக் கொள்ள வேண்டும்.

7) F **இன் தீர்மான மதிப்பு அல்லது** F **இன் அட்டவணை மதிப்பு** :

F அட்டவணையிலிருந்து (k-1, N-k) வரையற்ற பாகைகளுக்குரிய 5% சிறப்பு காண் மட்ட அளவு F –ன் தீர்மான மதிப்பு அல்லது F –ன் அட்டவணை மதிப்பை பெறலாம்.

8) **முடிவு** :

கண்டுபிடிக்கப்பட்ட F –ன் மதிப்பு அட்டவணை F –ன் மதிப்பை விட குறைவாக இருந்தால் நாம் இல் எனும் எடுகோளை ஏற்றுக் கொள்ளலாம். மேலும் நடத்து முறைகளின் இடையேயான வித்தியாசம் சிறப்பு வாய்ந்தவை அல்ல என்று கூறலாம்.

கண்டுபிடிக்கப்பட்ட F–ன் மதிப்பு அட்டவணை F–ன் மதிப்பை விட அதிகமாக இருந்தால் நாம் இல் எனும் எடுகோளை H_0 நிராகரித்து விடலாம். மேலும் நடத்து முறைகளுக்கிடையேயான வித்தியாசம் சிறப்பு வாய்ந்தது என்று கூறலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

மூன்று செய்முறைகள் A, B மற்றும் C ஆகியவற்றின் வெளியீடுகள் சமானமானவையா என சோதனை செய்யப்படுகிறது. அவற்றின் வெளியீடுகளின் கண்டறிந்த மதிப்புகள் கீழே உள்ளன.

A	10	12	13	11	10	14	15	13
B	9	11	10	12	13			
C	11	10	15	14	12	13		

மாறுபாட்டு பகுப்பாய்வை நடத்தி முடிவுகளைக் கூறுக.

தீர்வு :

மாறுபாட்டு பகுப்பாய்வை நடத்திட கீழ்க்கண்ட அட்டவணைகளை அமைக்க வேண்டும்.

									மொத்தம்	வர்க்கங்கள்
A	10	12	13	11	10	14	15	13	98	9604
B	9	11	10	12	13				55	3025
C	11	10	15	14	12	13			75	5625
									G = 228	

வர்க்கங்கள் :

A	100	144	169	121	100	196	225	169
B	81	121	100	144	169			
C	121	100	225	196	144	169		
					மொத்தம் = 2794			

சோதனை வழிமுறை :

இல் எனும் எடுகோள் :

$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$

அதாவது மூன்று செய்முறைகளுக்கிடையேயான வித்தியாசம் சிறப்பானதல்ல.

மாற்று எடுகோள்

$H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \neq \mu_3$

சிறப்பு காண் மட்டம் :

α : 0.05 என்க

சோதனை புள்ளியியல் அளவை :

திருத்தக் காரணி $(c.f) = \frac{G^2}{N}$

$= \frac{228^2}{19}$

$= \frac{51984}{19}$

$= 2736$

மொத்த வர்க்கங்களின் கூடுதல் (TSS) $= \sum\sum x_{ij}^2 - C.F$

$= 2794 - 2736$

$= 58$

செய்முறைகளுக்கான வர்க்கங்களின் கூடுதல் = (SST)

$$= \frac{\sum_{i=1}^{3} T_i^2}{n_i} - C.F$$

$$= \frac{9604}{8} + \frac{3025}{5} + \frac{5625}{6} - 2736$$

$$= (1200.5 + 605 + 937.5) - 2736$$

$$= 2743 - 2736$$

$$= 7$$

பிழைக்கான வர்க்கங்களின் கூடுதல் (SSE) $= TSS - SST$

$= 58 - 7 = 51$

மாறுபாட்டு பகுப்பாய்வு அட்டவணை :

மாறுபாட்டின் மூலம்	வரையற்ற பாகைகள்	வர்க்கங் களின் கூடுதல்	வர்க்கங்களின் கூடுதலின் சராசரி	F விகித மதிப்பு F_0
செய்முறைகளுக்கு இடையே	$3 - 1 = 2$	7	$\frac{7}{2} = 3.50$	$\frac{3.5}{3.19} = 1.097$
பிழை	16	51	$\frac{51}{16} = 3.19$	
மொத்தம்	$19 - 1 = 18$			

அட்டவணை மதிப்பு :

(2, 16) வரையற்ற பாகைகளுக்குரிய 5% சிறப்பு காண் மட்ட Fஅட்டவணை மதிப்பானது $F_e = 3.63$.

முடிவு :

கண்டுபிடிக்கப்பட்ட F_0 அட்டவணை மதிப்பு F_e ஐ விட குறைவாக உள்ளதால் இல் எனும் எடுகோளை ஏற்றுக் கொண்டு மூன்று செய்முறைகளுக்கிடையேயான வித்தியாசம் சிறப்பு வாய்ந்ததல்ல என்று கூறலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

ஒரு நகரத்தில் மூன்று பள்ளிகளில் ஐந்தாம் வகுப்பு மாணவர்கள் ஐந்தைந்து பேரை சமவாய்ப்பாக தேர்ந்தெடுத்து ஒரு சோதனை தரப்படுகிறது. தனி நபர் எண்ணிக்கைகள் (Scores) ஆவன.

பள்ளி I	9	7	6	5	8
பள்ளி II	7	4	5	4	5
பள்ளி III	6	5	6	7	6

மாறுபாட்டு பகுப்பாய்வை நடத்துக.

தீர்வு :

மாறுபாட்டு பகுப்பாய்வை நடத்திட கீழ்க்கண்ட அட்டவணைகள் அமைக்க வேண்டும்.

						மொத்தம்	வர்க்கங்கள்
பள்ளி I	9	7	6	5	8	35	1225
பள்ளி II	7	4	5	4	5	25	625
பள்ளி III	6	5	6	7	6	30	900
					மொத்தம்	G = 90	2750

வர்க்கங்கள் :

பள்ளி I	81	49	36	25	64
பள்ளி II	49	16	25	16	25
பள்ளி III	36	25	36	49	36
				மொத்தம் = 568	

சோதனை வழிமுறை :

இல் எனும் எடுகோள் :

$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$

அதாவது பள்ளிகளின் செய்முறைகளுக்கு இடையே உள்ள வித்தியாசம் சிறப்பு வாய்ந்ததல்ல.

மாற்று எடுகோள்

$H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \neq \mu_3$

சிறப்பு காண் மட்டம் :

α : 0.05 என்க

சோதனை புள்ளியியல் அளவை :

திருத்தக் காரணி (c.f) $= \frac{G^2}{N}$

$$= \frac{90^2}{15}$$

$$= \frac{8100}{15} = 540$$

மொத்த வர்க்கங்களின் கூடுதல் (TSS) $= \sum\sum x_{ij}^2 - C.F$

$$= 568 - 540 = 28$$

பள்ளிகளுக்கிடையேயான வர்க்கங்களின் கூடுதல் $= \frac{\sum T_i^2}{n_i} - C.F$

$$= \frac{2750}{5} - 540$$

$$= 550 - 540 = 10$$

பிழைக்கான வர்க்கங்களின் கூடுதல் (SSE) $= TSS - SST$

$$= 28 - 10 = 18$$

மாறுபாட்டு பகுப்பாய்வு அட்டவணை :

மாறுபாட்டின் மூலம்	வரையற்ற பாகைகள்	வர்க்கங் களின் கூடுதல்	வர்க்கங்களின் கூடுதலின் சராசரி	F விகித மதிப்பு F_0
பள்ளிகளுக்கு இடையே	$3-1=2$	10	$\frac{10}{2}=5.0$	$\frac{5}{1.5}=3.33$
பிழை	12	18	$\frac{18}{12}=1.5$	
மொத்தம்	$15-1=14$			

அட்டவணை மதிப்பு :

(2,12) வரையற்ற பாகைகளுக்குரிய 5% சிறப்பு மட்ட அளவு F –ன் அட்டவணை மதிப்பானது Fe = 3.8853

முடிவு :

கண்டுபிடிக்கப்பட்ட F_0 அட்டவணை மதிப்பு F_e ஐ விட குறைவாக உள்ளதால் நாம் இல் எனும் எடுகோளை ஏற்றுக் கொண்டு பள்ளிகளின் செயல்மறைகளுக்கிடையேயான வித்தியாசம் சிறப்பு வாய்ந்ததல்ல என்று கூறலாம்.

7.5 இரு வழி பாகுபாடு :

மாறிகளின் மதிப்புகள் x_{ij}, இரண்டு காரணிகளால் பாதிக்கப்படுகின்றன என்று நாம் கருத்தில் கொள்வோம். உதாரணமாக பாலின் உற்பத்தி அளவு வேறுபட்ட நடத்து முறைகள் அதாவது உணவு வகை வித்தியாசங்களால் பாதிக்கப்படுதல், அதே வேளை வேறுபட்ட வகைகள் அதாவது மாடுகளின் இனங்களின் வித்தியாசங்களால் பாதிக்கப்படுதல். நாம் இப்பொழுது N மாடுகளை அவற்றின் இனங்களின் வகைகளை கொண்டு h வேறுபட்ட பிரிவுகளாகவும் ஒவ்வொரு பிரிவிலும் K மாடுகள் உள்ளவாறும் பிரித்து பின்பு பாலின் உற்பத்தி மீது K நடத்து முறைகளின் விளைவுகளை (அதாவது ஒவ்வொரு பிரிவு மாடுகளுக்கும் வேறுபட்ட உணவு வகைகளை சமவாய்ப்பாக அளித்தல்) கருத்தில் கொள்வோம்.

பின்னிணைப்பு 'i' நடத்து முறைகளை (உணவு வகைகள்) குறிக்கின்றன என்றும், 'j' வகைகளை (மாடுகளின் இனங்கள்) குறிக்கின்றன என்றும் கொண்டால், நடத்து முறைகளை (உணவு வகைகள்) ஒப்புமை செய்வதற்குரிய $N = h \times k$ மாடுகளின் பால் உற்பத்தி விவரங்கள் x_{ij} (i:1,2, …..k; j:1,2….h) கீழே காட்டப்பட்டுள்ளன. பால் உற்பத்தி அளவுகள் மாறிகளின் மதிப்புகளாக கீழே உள்ள $k \times h$ இரு வழி அட்டவணையில் வெளிப்படுத்தப்பட்டுள்ளன.

	சராசரிகள்	மொத்தம்
x_{11} x_{12} $x_{1j} \ldots x_{1h}$	$\bar{x}_{1.}$	T_1
x_{21} x_{22} $x_{2j} \ldots x_{2h}$	$\bar{x}_{2.}$	T_2
. . . .	. . .	. . .
x_{i1} x_{i2} $x_{ij} \ldots x_{ih}$	$\bar{x}_{i.}$	T_i
. . . .	. . .	. . .
x_{k1} x_{k2} $x_{kj} \ldots x_{kh}$	$\bar{x}_{k.}$	T_k
சராசரி $\bar{x}_{.1}.$ $\bar{x}_{.2}$ $\bar{x}_{.j} \ldots \bar{x}_{.h}$	$\bar{x}$	
மொத்தம் $T_{.1}$ $T_{.2}. \ldots\ldots T_{.j} \ldots\ldots T_{.h}$		G

கண்டுபிடிக்கப்பட்ட விவரங்கள் x_{ij} இன் மாறுபாட்டின் மொத்தம் கீழ்க்கண்ட மூன்று பிரிவுகளாக பிரிக்கப்படுகின்றன.

(i) நடத்து முறைகளுக்கு (உணவு வகை) இடையே காணப்படும் மாறுபாடுகள்

(ii) வகைகளுக்கு (மாடுகளின் இனம்) இடையே காணப்படும் மாறுபாடுகள்

(iii) நடத்துமுறை விவரங்களுள்ளேயும் மற்றும் இன வகை விவரங்களுக்குள்ளேயும் உள்ளடங்கிய மாறுபாடுகள்

முதல் இரு வகை மாறுபாடுகள் குறிப்பிடத்தக்க காரணங்களால் ஏற்படுபவை. அவை மனித சக்தியால் கண்டுபிடிக்கப்பட்டு கட்டுப்படுத்தப்படுவன. மூன்றாம் வகை மாறுபாடு இயல்பான வேறுபாட்டால் ஏற்படுபவை. அவை மனித முயற்சிக்கு அப்பாற்பட்டவை.

7.6 இரு வழி பகுப்பாய்விற்கான சோதனை வழி முறை :

பகுப்பாய்வை நடத்துவதற்கான படிகளாவன :

1. இல் எனும் எடுகோள் :

முதற் படியானது இல் எனும் எடுகோளை அமைத்தல் ஆகும்.

$H_o : \mu_{1.} = \mu_{2.} = \ldots\ldots \mu_{k.} = \mu$

$H_o : \mu_{.1} = \mu_{.2} = \ldots \mu_{.h} = \mu$

அதாவது உணவு முறைகளின் (நடத்து முறைகளின்) இடையே உள்ள வேறுபாடுகள் சிறப்பானதல்ல மற்றும் வகைகளின் (மாடுகளின் இனங்கள்) இடையே உள்ள வேறுபாடுகள் சிறப்பானதல்ல.

2. சிறப்பு காண் மட்டம் : $\alpha : 0.05$

3. சோதனை புள்ளியியல் அளவை :

பல்வேறு வர்க்கங்களின் கூடுதல்களை கீழ்க்கண்டவாறு பெறலாம்.

அ) கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் விவரங்களின் எல்லா மதிப்புகள் $N (k \times h)$ இன் மொத்தத்தையும் கண்டுபிடித்து அதை G என குறியிடுக.

பிறகு திருத்த காரணி $(C.F) = \dfrac{G^2}{N}$.

ஆ) எல்லா தனித்த மதிப்புக்கள் (x_{ij}) வர்க்கங்களின் கூடுதலைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

பிறகு மொத்த வர்க்கங்களின் கூடுதல் $(TSS) = \sum_{i-1}^{k}\sum_{j-1}^{k} x^2_{ij} - C.F$

இ) நடத்து முறைகளின் (உணவு முறைகள்) மொத்தங்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதல் அதாவது $h \times k$ இரு வழி அட்டவணையின் நிரைகளின் (rows) மொத்தங்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதலை காண்க. பிறகு நடத்து முறைகளுக்கிடையேயான வர்க்கங்களின் கூடுதல் அல்லது நிரைகளின் இடையேயான வர்க்கங்களின் கூடுதலானது

$$SST = SSR = \sum_{i-1}^{k} \frac{Ti.^2}{h} - C.F$$

இங்கு h என்பது ஒவ்வொரு நிரையிலும் உள்ள கண்டுபிடிக்கப்பட்ட விவரங்கள் ஆகும்.

ஈ) வகைகளின் (மாடுகளின் இனங்கள்) மொத்தங்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதல் அதாவது $h \times k$ இரு வழி அட்டவணையின் நிரல்களின் (Columns) மொத்தங்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதலை காண்க. பிறகு வகைகளின் இடையேயான வர்க்கங்களின் கூடுதல் அல்லது நிரல்களின் இடையேயான வர்க்கங்களின் கூடுதலானது

$$SSV = SSC = \frac{\sum_{j-1}^{k} T^2.j}{k} - C.F$$

இங்கு k என்பது ஒவ்வொரு நிரலிலும் உள்ள கண்டுபிடிக்கப்பட்ட விவரங்கள் ஆகும்.

உ) பிழைகளினால் உண்டாகும் வர்க்கங்களின் கூடுதலை கழித்தலின் வழியாக காண வேண்டும்.

அதாவது $SSE = TSS - SSR - SSC$

4. வரையற்ற பாகைகள் :

(i) மொத்த வர்க்கங்களின் கூடுதலுக்குரிய வரையற்ற பாகைகள் $N - 1 = h \times k - 1$ ஆகும்.

(ii) நடத்து முறைகளின் இடையேயான வர்க்கங்களின் கூடுதலுக்குரிய வரையற்ற பாகைகள் $(k - 1)$ ஆகும்.

(iii) வகைகளின் இடையேயான வர்க்கங்களின் கூடுதலுக்குரிய வரையற்ற பாகைகள் $(h - 1)$ ஆகும்.

(iv) பிழைக்கான வர்க்கங்களின் கூடுதலுக்குரிய வரையற்ற பாகைகள் $(k - 1)(h - 1)$ ஆகும்.

5. வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை சராசரி :

(i) நடத்து முறைகளின் வர்க்கங்களின் கூடுதலின் சராசரி (MST) $\frac{SST}{k-1}$ ஆகும்.

(ii) வகைகளின் வர்க்கங்களின் கூடுதலின் சராசரி (MSV) $\frac{SSV}{h-1}$ ஆகும்.

(iii) பிழையின் வர்க்கங்களின் கூடுதலின் சராசரி (MSE) $\frac{SSE}{(h-1)(k-1)}$ ஆகும்.

6. மாறுபாட்டு பகுப்பாய்வு அட்டவணை

மேற்கண்ட வர்க்கங்களின் கூடுதல்கள், அவற்றிற்குரிய வரையற்ற பாகைகள் மற்றும் வர்க்கங்களின் கூடுதல்களின் சராசரிகள் ஆகியவை சுருக்கமாக கீழ்க்கண்ட அட்டவணையில் தரப்பட்டுள்ளன. இருவழி பாகுபாட்டிற்குரிய மாறுபாட்டு பகுப்பாய்வு அட்டவணை

மாறுபாட்டின் மூலம்	வரையற்ற பாகைகள்	வர்க்கங்களின் கூடுதல்	வர்க்கங்களின் கூடுதலின் சராசரி	F விகித மதிப்பு F_0
நடத்து முறைகளின் இடையே	$k - 1$	SST	MST	$\frac{MST}{MSE} = F_R$
வகைகளின் இடையே	$h - 1$	SSV	MSV	$\frac{MSV}{MSE} = F_c$
பிழை	$(h - 1)(k - 1)$	SSE	MSE	
மொத்தம்	$N - 1$			

7. F இன் தீர்மான மதிப்பு அல்லது F இன் அட்டவணை மதிப்பு :

(i) நடத்து முறைகளுக்கிடையேயான F–இன் தீர்மான மதிப்பு அல்லது அட்டவணை மதிப்பை F – அட்டவணையிலிருந்து [(k –1, (k – 1) (h – 1)] வரையற்ற பாகைகளுக்கான 5% சிறப்பு காண் மட்ட அளவு மூலம் பெற வேண்டும்.

(ii) வகைகளுக்கிடையிலேயான F –ன் தீர்மான மதிப்பு அல்லது அட்டவணை மதிப்பை F- அட்டவணையிலிருந்து [(h – 1), (k –1) (h – 1)] வரையற்ற பாகைகளுக்கான 5% சிறப்பு காண் மட்ட அளவு மூலம் பெற வேண்டும்.

8. முடிவு :

(i) நடத்து முறைகளுக்கு இடையேயான கண்டுபிடிக்கப்பட்ட F_0 மதிப்பு, அட்டவணை மதிப்பு F_e ஐ விட குறைவாகவோ அல்லது அதிகமாகவோ இருந்தால் அதற்கேற்றவாறு H_0 ஐ ஏற்றுக் கொள்ளுதல் அல்லது நிராகரித்தல் செய்ய வேண்டும்.

(ii) வகைகளுக்கு இடையேயான கண்டுபிடிக்கப்பட்ட F_0 மதிப்பு அட்டவணை F_e ஐ விட குறைவாகவோ அல்லது அதிகமாகவோ இருந்தால் அதற்கேற்றவாறு H_0 ஐ ஏற்றுக் கொள்ளுதல் அல்லது நிராகரித்தல் செய்ய வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 3 :

மூன்று வகை நிலக்கரிகள் அவற்றில் சாம்பல் கலந்துள்ள அளவிற்கான நான்கு வேதியியலாளர்களால் பகுப்பாய்வு செய்யப்பட்டு அவற்றின் அளவுகள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

	வேதியியலாளர்கள்			
வகைகள்	1	2	3	4
A	8	5	5	7
B	7	6	4	4
C	3	6	5	4

பகுப்பாய்வை நடத்திடுக.

தீர்வு :

மாறுபாட்டு பகுப்பாய்வை நடத்திட கீழ்க்கண்ட அட்டவணைகள் அமைப்போம்.

வேதியியலாளர்கள்						
வகைகள்	1	2	3	4	மொத்தம்	வர்க்கம்
A	8	5	5	7	25	625
B	7	6	4	4	21	441
C	3	6	5	4	18	324
மொத்தம்	18	17	14	15	**G = 64**	1390
வர்க்கம்	324	289	196	225	1034	

தனித்த உறுப்புகளின் வர்க்கங்கள்

வேதியியலாளர்கள்				
வகைகள்	1	2	3	4
A	64	25	25	49
B	49	36	16	16
C	9	36	25	16

மொத்தம் = 366

சோதனை வழிமுறை :

1. இல் எனும் எடுகோள் :

$H_o : \mu_1. = \mu_2. = \mu_3. = \mu$

$H_o : \mu_{.1} = \mu_{.2} = \mu_{.3} = \mu_{.4} = \mu$

(i) வகைகள் (நிரைகள்) இடையே உள்ள வித்தியாசம் சிறப்பு வாய்ந்ததல்ல.

(ii) வேதியியலாளர்களால் (நிரல்கள்) இடையே உள்ள வித்தியாசம் சிறப்பு வாய்ந்ததல்ல.

மாற்று எடுகோள் :

(i) எல்லா $\mu_{i.}$ – களும் சமமல்ல.

(ii) எல்லா $\mu_{.j}$ – களும் சமமல்ல.

2. சிறப்பு காண் மட்டம் :

$\alpha : 0.05$ என்க.

3. சோதனை புள்ளியியல் அளவை :

திருத்தக் காரணி $(c.f) = \frac{G^2}{N} = \frac{G^2}{h \times k}$

$$= \frac{(64)^2}{3 \times 4} = \frac{(64)^2}{12}$$

$$= \frac{4096}{12} = 341.33$$

மொத்த வர்க்கங்களின் கூடுதல் $(TSS) = \sum_{i-1}^{k} \sum_{j-1}^{k} x^2{}_{ij} - C.F$

$$= 366 - 341.33$$

$$= 24.67$$

வகைகளின் இடையேயான வர்க்கங்களின் கூடுதல்

$$= \frac{\sum T_{.i}^2}{4} - C.F$$

$$= \frac{1390}{4} - 341.33$$

$$= 347.5 - 341.33$$

$$= 6.17$$

வேதியியலாளர்களின் இடையேயான வர்க்கங்களின் கூடுதல்

$$= \frac{\Sigma T_{.j}^2}{3} - C.F$$

$$= \frac{1034}{3} - 341.33$$

$$= 344.67 - 341.33$$

$$= 3.34$$

பிழையான வர்க்கங்களின் கூடுதல் (SSE)

$$= TSS - SSR - SSC$$

$$= 24.67 - 6.17 - 3.34$$

$$= 24.67 - 9.51$$

$$= 15.16$$

மாறுபாட்டு பகுப்பாய்வு அட்டவணை :

மாறுபாட்டின் மூலம்	வரையற்ற பாகைகள்	வர்க்கங் களின் கூடுதல்	வர்க்கங்களின் கூடுதலின் சராசரி	F விகித மதிப்பு F_0
வகைகளுக் கிடையேயான	3 – 1 = 2	6.17	3.085	$\frac{3.085}{2.527} = 1.22$
வேதியியலாளர் களுக்கிடையே	4 – 1 = 3	3.34	1.113	$\frac{2.527}{1.113} = 2.27$
பிழை	6	15.16	2.527	
மொத்தம்	12 – 1 = 11			

அட்டவணை மதிப்பு :

(i) 2, 6 வரையற்ற பாகைகளுக்குரிய 5% சிறப்பு காண் மட்ட F அட்டவணை மதிப்பானது $F_e = 5.14$

(ii) (6, 3) வரையற்ற பாகைகளுக்குரிய 5% சிறப்பு காண் மட்ட F அட்டவணை மதிப்பானது $F_e = 8.94$

முடிவு :

(i) கண்டுபிடிக்கப்பட்ட F_0 மதிப்பானது அட்டவணை மதிப்பு F_e – ஐ விட குறைவாக உள்ளதால் நாம் H_0 –ஐ ஏற்று கொண்டு வகைகளுக்கு இடையேயான வித்தியாசம் சிறப்பானதல்ல என்று கூறலாம்.

(ii) கண்டுபிடிக்கப்பட்ட F_0 மதிப்பானது அட்டவணை மதிப்பு F_e – ஐ விட குறைவாக உள்ளதால் நாம் H_0 –ஐ ஏற்று கொண்டு வேதியியலாளர்களுக்கு இடையேயான வித்தியாசம் சிறப்பானதல்ல என்று கூறலாம்.

பயிற்சி – 7

I. **கீழ்க்கண்டவற்றுள் சரியான விடையை தேர்ந்தெடுக்கவும்** :

1. பல இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதி சராசரிகளின் சமநிலையை அறிய செய்யப்படும் சோதனை

அ) பார்ட்லெட் சோதனை ஆ) F - சோதனை இ) χ^2 - சோதனை ஈ) t- சோதனை

2. மாறுபாட்டு பகுப்பாய்வு முறைகளை விரிவுபடுத்தியவர்

அ) S. D. பாய்சான் ஆ) கார்ல் – பியர்ஸன்

இ) R.A. ஃபிஷர் ஈ) W. S. காசெட்

3. மாறுபாட்டு பகுப்பாய்வு முறை தொடங்கப்பட்ட களமானது

அ) விவசாயம் ஆ) தொழில் இ) உயிரியல் ஈ) மரபியல்

4. மாறுபாட்டு பகுப்பாய்விற்குரிய அனுமானங்களில் ஒன்றான எடுக்கப்பட்ட கூறுகள் பெறப்பட்ட முழுமைத் தொகுதியானது

அ) ஈருறுப்பு ஆ) பாய்சான் இ) கை–வர்க்கம் ஈ) இயல்நிலை

5. ஒரு வழி பாகுபாட்டில் மொத்த மாறுபாட்டின் பிரிவுகளின் எண்ணிக்கையானது

அ) இரண்டு பிரிவுகள் ஆ) மூன்று பிரிவுகள்

இ) நான்கு பிரிவுகள் ஈ) ஒரே ஒரு பிரிவு

6. N கண்டறிந்த மதிப்புகள் மற்றும் t நடத்து முறைகளும் கொண்ட ஒரு வழி பாகுபாட்டில் பிழைக்கான வரையற்ற பாகைகளானவை

அ) N-1 ஆ) t -1 இ) N - t ஈ) Nt

7. t – நடத்து முறைகள் கொண்ட ஒரு வழி பாகுபாட்டில் நடத்து முறைகளின் வர்க்கங்களின் கூடுதலுக்கான சராசரியானது

அ) SST/N-1 ஆ) SST/ t-1 இ) SST/N-t ஈ) SST/t

8. r நிரைகள் மற்றும் c நிரல்கள் கொண்ட இருவழி பாகுபாட்டில் பிழைக்கான வரையற்ற பாகைகளானவை

அ) (rc) – 1 ஆ) (r-1).c இ) (r-1) (c-1) ஈ) (c-1).r

9. இருவழி பாகுபாட்டில் மொத்த மாறுபாட்டிற்கு (TSS) சமமானது

அ) SSR + SSC + SSE ஆ) SSR - SSC + SSE

இ) SSR + SSC – SSE ஈ) SSR + SSC.

10. TSS, SSR மற்றும் SSC முறையே 90, 35, 25 கொண்ட இருவழி பாகுபாட்டில் SSE ஆனது

அ) 50 ஆ) 40 இ) 30 ஈ) 20

II. **கோடிட்ட இடங்களை பூர்த்தி செய்க.**

11. மாறுபாட்டு பகுப்பாய்வு முறையை விரிவுபடுத்தியவர் ____________.

12. மாறுபாட்டு பகுப்பாய்வின் அனுமானங்களில் ஒன்று கண்டறிந்த மதிப்புகள் __________.

13. இருவழி பாகுபாட்டில் மொத்த மாறுபாடு ____________ பிரிவுகளாக பிரிக்கப்படும்.

14. 30 கண்டறிந்த மதிப்புக்கள் மற்றும் 5 நடத்து முறைகளும் கொண்ட ஒரு வழி பாகுபாட்டில் SSE க்குரிய வரையற்ற பாகைகள் _____________.

15. TSS, SSC மற்றும் SSE முறையே 120, 54 மற்றும் 45 என்று உள்ள இரு வழி பாகுபாட்டில் SSR ஆனது _____________.

III. **கீழ்க்கண்ட கேள்விகளுக்கு பதிலளிக்கவும்** :

16. மாறுபாட்டு பகுப்பாய்வு என்றால் என்ன ?

17. இரண்டு சராசரிகளுக்கு இடையேயான வித்தியாசத்திற்குரிய t-சோதனை மற்றும் மாறுபாட்டு பகுப்பாய்வு இவற்றை வேறுபடுத்திக் காட்டுக.

18. மாறுபாட்டு பகுப்பாய்வு முறையில் உள்ளடக்கிய அனுமானங்களை கூறு.

19. ஒரு வழி பாகுபாட்டின் கட்டமைப்பை விளக்குக.

20. ஒரு வழி பாகுபாட்டிற்குரிய மாறுபாட்டுப் பகுப்பாய்வு அட்டவணையை எழுதுக.

21. ஒரு வழி பகுபாடு மற்றும் இரு வழி பாகுபாடு இவற்றை வேறுபடுத்திக் காட்டுக.

22. இரு வழி பாகுபாட்டு விவரங்களின் கட்டமைப்பை விளக்குக.

23. ஒரு வழி பாகுபாட்டில் பல்வேறு வர்க்கங்களின் கூடுதல்களை அடையும் வழிமுறைகளை விளக்குக.

24. இருவழி பாகுபாட்டிற்குரிய மாறுபாட்டு பகுப்பாய்வு அட்டவணையை எழுதுக.

25. இரு வழி பாகுபாட்டில் பல்வேறு வர்க்கங்களின் கூடுதல்களை அடையும் வழிமுறைகளை விளக்குக.

26. 5 பள்ளிகளில் எட்டாம் வகுப்பு படிக்கும் மாணவர்களில் சிலரை சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுத்து அவர்களுக்கு ஒரு சோதனை அளிக்கப்படுகிறது. அதில் அவர்கள் எடுத்த எண்ணிக்கைகள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

I	II	III	IV	V
8	9	12	10	12
9	7	14	11	11
10	11	15	9	10
7	12	12	12	9
8	13	11	10	13

மாறுபாட்டு பகுப்பாய்வை நடத்தி உன்னுடைய முடிவுகளை கொடுக்கவும்.

27. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள எண்கள் 14 பிரிவு நிலங்களில் பயிரிடப்பட்ட A, B மற்றும் C வகை கோதுமையின் உற்பத்தி அளவை (கிலோ கிராமில்) குறிக்கின்றன.

A:	20	18	19		
B:	17	16	19	18	
C:	20	21	20	19	18

மூன்று வகை கோதுமை உற்பத்தி அளவில் ஏதாவது சிறப்பான வித்தியாசம் உள்ளதா ?

28. A,B,C மற்றும் D என்ற நான்கு விவசாய நிலங்களில் ஒரு சிறப்பு வகை உரம் பயன்படுத்தப்பட்டது. ஒவ்வொரு நிலமும் நான்கு பிரிவுகளாக பிரிக்கப்பட்டு அவற்றின் மேல் உரம் இடப்படுகிறது. நான்கு நிலங்களின் விளைச்சல் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. நிலங்களின் சராசரி விளைச்சலின் வித்தியாசம் சிறப்பு வாய்ந்ததா அல்லது சிறப்பு வாய்ந்ததில்லையா என்பதை கண்டறிக.

விளைச்சல்

A	B	C	D
8	9	3	3
12	4	8	7
1	7	2	8
9	1	5	2

29. நான்கு நகரங்களில் சில கடைகள் சமவாய்ப்பாக தெரிவு செய்யப்பட்டு அக்கடைகளில் ஒரு குறிப்பிட்ட பொருளின் சில்லறை விலைகள் (ரூ. கிலோ கிராமுக்கு) கீழே உள்ள அட்டவணையில் தரப்பட்டுள்ளன.

	A	22	24	20	21
நகரங்கள்	B	20	19	21	22
	C	19	17	21	18
	D	20	22	21	22

நான்கு நகரங்களில் அப்பொருளின் விலையில் உள்ள வித்தியாசம் சிறப்பானதா என்பதை சோதனை செய்ய கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் விவரங்களை பகுப்பாய்வு செய்க.

30. ஒரு பொடியின் மாதிரியில் ஈரப்பசையின் அளவை கண்டறிய ஒவ்வொரு நபரும் ஆறு அனுப்பப்பட்ட சரக்குகளின் மாதிரிகளை எடுத்து சோதனை செய்தனர். அவர்களின் மதிப்பீடுகளின் ஆவன.

அனுப்பப்பட்ட சரக்குகள்

சோதிப்பவர்	1	2	3	4	5	6
1	9	10	9	10	11	11
2	12	11	9	11	10	10
3	11	10	10	12	11	10
4	12	13	11	14	12	10

இந்த விவரங்களுக்கு மாறுபாட்டு பகுப்பாய்வை நடத்தி அனுப்பப்பட்ட சரக்குகள் இடையே உள்ள வித்தியாசம் அல்லது சோதிப்பவர்கள் இடையே உள்ள வித்தியாசம் சிறப்பானதா என்பதை விவரிக்க.

31. நான்கு வெவ்வேறு இயந்திரங்களில் முறையே வேலை செய்யும் நான்கு இயக்குபவர்கள் உற்பத்தி செய்த பழுதுபட்ட சிறு துண்டுகளின் எண்ணிக்கை கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

இயக்குபவர்கள்

இயந்திரங்கள்	I	II	III	IV
A	3	2	3	2
B	3	2	3	4
C	2	3	4	3
D	3	4	3	2

சிறப்பு காண் மட்ட அளவில் மாறுபட்டுப் பகுப்பாய்வு சோதனை நடத்தி உற்பத்தியின் மாறுபாட்டிற்கு இயக்குபவர்களின் செயல் முறைகளில் உள்ள மாறுபாடு அல்லது இயந்திரங்களின் செயல்பாடுகளில் உள்ள மாறுபாடு இவற்றில் எது காரணம் என கண்டறிக.

32. 3 கட்டுகளில் பயிரிடப்பட்ட 4 வகை கோதுமைகளின் விளைச்சலின் விவரங்கள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

கட்டுகள்

வகைகள்	1	2	3
I	10	9	8
II	7	7	6
III	8	5	4
IV	5	4	4

இவற்றின் மேல் மாறுபாட்டுப் பகுப்பாய்வு முறையை பயன்பாடு செய்க.

33. ஒரே அளவு மற்றும் அமைப்பை உடைய ஐந்து பிரிவு நிலங்களில் நான்கு வகையான உருளை கிழங்குகள் பயிரிடப்படுகின்றன. மேலும் ஒவ்வொரு வகையும் ஐந்து வெவ்வேறு உரங்களினால் நடத்து முறை செய்யப்படுகின்றன. விளைச்சல் (டன் அளவுகளில்) கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

உரங்கள்

வகைகள்	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5
V_1	1.9	2.2	2.6	1.8	2.1
V_2	2.5	1.9	2.2	2.6	2.2
V_3	1.7	1.9	2.2	2.0	2.1
V_4	2.1	1.8	2.5	2.2	2.5

மாறுபாட்டு பகுப்பாய்வை நடத்தி வகைகளுக்கிடையே சிறப்பான வித்தியாசம் உள்ளதா மற்றும் உரங்களிடையே சிறப்பான வித்தியாசம் உள்ளதா என சோதனை செய்க.

34. மனித செயல்பாடுகளில் தட்ப வெப்ப நிலையின் விளைவுகளில் பரிசோதனையில் 4 தட்ப வெப்ப நிலைகளில் 8 நபர்களுக்கு ஒரு சோதனை தரப்படுகிறது. அந்த சோதனையில் அந்த நபர்கள் பெற்ற எண்ணிக்கைகள் கீழே அட்டவணைபடுத்தப்பட்டுள்ளன.

நபர்கள்

தட்ப வெப்பநிலை	1	2	3	4	5	6	7	8
1	70	80	70	90	80	100	90	80
2	70	80	80	90	80	100	90	80
3	75	85	80	95	75	85	95	75
4	65	75	70	85	80	90	80	75

மாறுபாட்டு பகுப்பாய்வை நடத்தி, நபர்களுக்கு இடையே ஏதாவது சிறப்பான வித்தியாசம் உள்ளதா மேலும் தட்ப வெப்ப நிலைகளுக்கு இடையே ஏதாவது சிறப்பான வித்தியாசம் உள்ளதா எனக் கூறுக.

35. மே, ஜுன், ஜுலை ஆகிய மூன்று மாதங்களில் 4 விற்பனையாளர்களால் விற்கப்பட்ட குளிர்சாதனப் பெட்டிகளின் எண்ணிக்கை கீழே உள்ள அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

விற்பனையாளர்

மாதங்கள்	A	B	C	D
மே	50	40	48	39
ஜுன்	46	48	50	45
ஜுலை	39	44	40	39

மாறுபாட்டு பகுப்பாய்வு நடத்தி மாதங்களுக்கு இடையே ஏதாவது சிறப்பான வித்தியாசம் உள்ளதா ? மேலும் விற்பனையாளர்களிடையே சிறப்பான வித்தியாசம் உள்ளதா எனக் கண்டறிக.

விடைகள்

I.

1. ஆ 2. இ 3. அ 4. ஈ 5. அ 6. இ 7. ஆ 8. இ 9. அ 10. இ

II.

11. ஃபிஷர் 12. சார்பற்றவை 13. மூன்று 14. 25 15. 21

III.

26. கணக்கிடப்பட்ட F = 4.56, அட்டவணை மதிப்பு F (4,20) = 2.866

27. கணக்கிடப்பட்ட F = 9.11, அட்டவணை மதிப்பு F (9,2) = 19.385

28. கணக்கிடப்பட்ட F = 1.76, அட்டவணை மதிப்பு F (12,3) = 8.74

29. கணக்கிடப்பட்ட F = 3.29, அட்டவணை மதிப்பு F (3,12) = 3.49

30. கணக்கிடப்பட்ட F_R = 5.03, அட்டவணை மதிப்பு F (3,15) = 3.29

கணக்கிடப்பட்ட F_C = 2.23, அட்டவணை மதிப்பு F (5,15) = 2.90

31. கணக்கிடப்பட்ட F_R = 2.76, F_C = அட்டவணை மதிப்பு F (9,3) = 8.81477

32. கணக்கிடப்பட்ட F_R = 18.23, அட்டவணை மதிப்பு F (3,6) = 4.77

கணக்கிடப்பட்ட F_C = 6.4, அட்டவணை மதிப்பு F (2,6) = 5.15

33. கணக்கிடப்பட்ட F_R = 1.32, அட்டவணை மதிப்பு F (3,12) = 3.49

கணக்கிடப்பட்ட F_C = 1.59, Fc = அட்டவணை மதிப்பு F (4,12) = 3.25

34. கணக்கிடப்பட்ட F_R = 3.56, அட்டவணை மதிப்பு F (3,21) = 3.07

கணக்கிடப்பட்ட F_C = 14.79, அட்டவணை மதிப்பு F (7,21) = 2.49

35. கணக்கிடப்பட்ட F_R = 3.33, அட்டவணை மதிப்பு F (2,6) = 5.15

கணக்கிடப்பட்ட F_C = 1.02, அட்டவணை மதிப்பு F (3,6) = 4.77

8. காலத்தொடர் வரிசை

8.0 அறிமுகம் :

புள்ளியியல் விவரங்களை கால வரிசையாக, அதாவது விவரங்கள் நிகழ்கின்ற, காலத்தைப் பொருத்து ஒழுங்குபடுத்துதலே "காலத்தொடர் வரிசை"யாகும். இத்தகைய தொடர்கள் பொருளாதாரம் மற்றும் வணிகப் புள்ளியியல் துறைகளில் ஒரு தனி முக்கியத்துவம் வாய்ந்த இடத்தை வகிக்கிறது. வரும் காலங்களின் மக்கள் தொகைப் பெருக்கத்திற்கேற்ப உணவு அளித்தல் மக்களுக்கான வேலை வாய்ப்பு இன்னும் இது போன்றவற்றை திட்டமிடுவதில் ஒரு பொருளியலான ஆர்வம் காட்டலாம். இது போலவே ஒரு வியாபாரி தனது பொருளின் வருங்காலத் தேவைக்கேற்ப உற்பத்தியை சரி செய்வதற்காக அதன் வருங்கால விற்பனை அளவைப் பற்றிய மதிப்பீடு காண விழையலாம். இதன் தொடர்பாக அடுத்தடுத்த கால இடைவெளிகளில் சேகரிக்கப்பட்டு பதியப்பட்ட புள்ளியியல் விவரங்களை ஒருவர் ஆராய வேண்டியுள்ளது. இத்தகைய விவரங்கள் பொதுவாக "காலத்தொடர் வரிசைகள்" என்று அழைக்கப்படுகின்றன.

8.1 வரையறை :

மூரிஸ் ஹம்பர்க் என்பவர் "காலத் தொடர் வரிசை" என்பது "காலவாரியாக ஒழுங்கு படுத்தப்பட்ட புள்ளியியல் விவரங்கள்" என்று வரையறுக்கிறார்.

"பொருளியியல் மாறி அல்லது கூட்டு மாறிகளின் வெவ்வேறு கால இடைவெளிகளில் நடைபெற்ற அளவீடுகளின் தொகுப்பு" என காலத்தொடர் வரிசையை யா–லூன்–சோ வரையறுக்கிறார்.

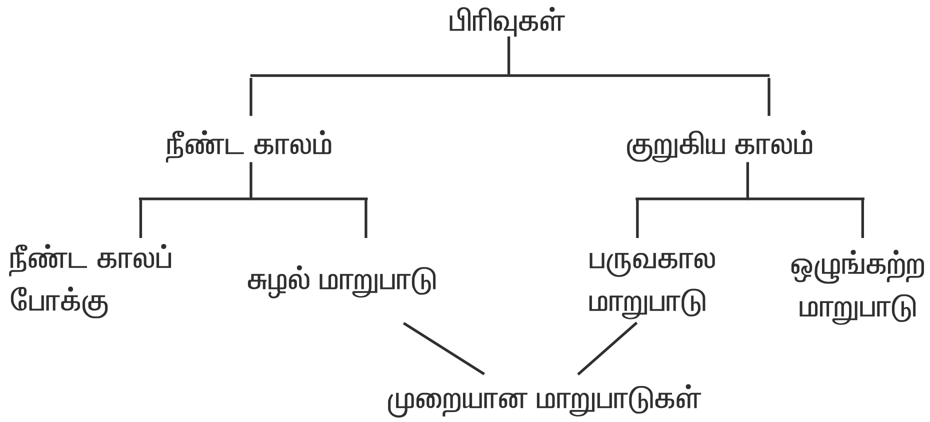
காலத்தொடர் வரிசை என்பது சமகால இடைவெளிகளில் நடைபெற்ற எண் விவரங்களின் தொகுப்பு ஆகும். இச்சம கால இடைவெளியானது மணியாகவோ, நாளாகவோ, மாதமாகவோ, வருடமாகவோ, வருடங்களின் தொகுப்பாகவோ இருக்கலாம். ஒரு இடத்தில் ஒரு நாளில் ஒரு மணி நேர இடைவெளியில் அளவிடப்பட்ட வெப்பநிலை அளவுகள், தினசரி விற்பனை, ஒரு தொழிற்சாலையின் மாதாந்திர உற்பத்தி, ஆண்டு தோறும் உள்ள விவசாய உற்பத்தி, பத்தாண்டுகளில் எடுக்கப்படும் மக்கள் கணக்கீட்டில் உள்ள மக்கள் தொகை வளர்ச்சி முதலியன காலத் தொடர் வரிசைகளாகும்.

எண்ணற்ற காரணிகள், தொடர்ச்சியாக காலத் தொடர் வரிசையின் அளவீடுகளைப் பாதிக்கின்றன. அவற்றில் சில சம இடைவெளிகளில் நிகழ்கின்றன. மற்றவை திடீர் நிகழ்வுகளால் ஏற்படுகின்றன. அக்காரணிகளைக் கண்டு பகுத்தாய்வு செய்து அதனை தெளிவாக பயன்படுத்துவதே "காலத் தொடர் வரிசை பகுப்பாய்வு" ஆகும்.

காலத்தொடர் வரிசையிலுள்ள விவரங்களில் காலப் போக்கிலேற்படுகின்ற மாறுதல்கள் பற்றிய ஒழுங்கு முறைகளைக் கண்டுபிடித்து அளவிடுதலே காலத்தொடர் வரிசையின் முக்கிய நோக்கமாகும். காலத்தொடர் வரிசையில் காணப்படுகின்ற பல்வேறு காரணிகளைத் தனித்தனியாகப் பிரித்து அவற்றை வணிக முடிவெடுத்தலுக்குப் பயன்படுத்துவதே இதன் மைய நோக்கமாகும்.

8.2 காலத்தொடர் வரிசையின் பிரிவுகள் :

காலத்தொடர் வரிசையில் உள்ள மாறுபாடுகளின் தேவைக்கேற்றவாறு பிரிப்பதே காலத் தொடர் வரிசையின் பிரிவுகள் ஆகும். அது கீழ்க்கண்டவாறு நான்கு பெரும் பிரிவுகளாகப் பிரிக்கப்படுகின்றன.



காலத்தொடர் பகுப்பாய்வில் இந்நான்கு பிரிவுகளுக்கிடையே ஒரு பெருக்கல் உறவு உள்ளதாகக் கருதப்படுகிறது.

குறியீட்டு முறையில், $Y = T \times S \times C \times I$

இங்கு Y என்பது நான்கு காரணிகளால் பெறப்படுகின்ற முடிவு. இங்கு T = நீண்ட கால போக்கு ; S = பருவ கால மாறுபாடு ; C = சுழல் மாறுபாடு ; I = ஒழுங்கற்ற மாறுபாடு

இப்பெருக்கல் முறையில் பல்வேறு காரணங்களால் ஏற்படுகின்ற நான்கு காரணிகளும் சார்பற்றவையாக இருக்க வேண்டிய அவசியமில்லை எனக் கருதப்படுகிறது.

மற்றொரு முறையில் காலத் தொடர் வரிசையில் காணப்படுகின்ற விவரங்கள் இந்நான்கு பிரிவின் கூடுதலாக எடுத்துக் கொள்ளப்படுகிறது. குறியீட்டில்,

$$Y = T + S + C + I$$

கூடுதல் முறையில் இந்நான்கு பிரிவுகளுமே ஒன்றை ஒன்று சார்ந்தவையல்ல என்று கருதப்படுகிறது.

காலத்தொடர் வரிசையின் நான்கு பிரிவுகள்

1) நீண்ட காலப் போக்கு அல்லது போக்கு
2) பருவ கால மாறுபாடு
3) சுழல் மாறுபாடு
4) ஒழுங்கற்ற அல்லது முறையற்ற மாறுபாடு

8.2.1 நீண்ட காலப் போக்கு :

காலத்தொடர் வரிசையில் இது ஒரு நீண்ட கால அசைவு ஆகும். ஒரு காலத்தொடரின் பல ஆண்டுகளுக்குரிய மதிப்புக்கள் பொதுவான ஏற்றத்துடனோ அல்லது இறக்கத்துடனோ

அல்லது நிலையாகவோ இருக்கும் இத்தன்மை நீண்டகாலப் போக்கு அல்லது எளிமையான போக்கு என்று அழைக்கப்படும். மக்கள் தொகைப் பெருக்கம், தொழில் நுட்ப முன்னேற்றத்தால் நுகர்வோர் விருப்பங்கள் மாறுபடுவதும் ஏறுகின்ற போக்கிற்கு காரணம் மருத்துவ வசதி அதிகரித்துள்ளதாலும் சுகாதார சூழ்நிலையாலும் இறப்பு வீதம் குறைந்து வருவதைக் காண இயலும். இதுவே போக்கின் இறக்கத்திற்கு காரணம். பொதுவாக காலத்தொடர் வரிசையின் இந்த ஏற்ற இறக்கங்கள் நீண்ட காலத்திற்கு இருக்கும்.

8.2.2 போக்கினை அளவிடும் முறைகள் :

போக்கு கீழ்க்கண்ட கணித முறைகளில் அளக்கப்படுகிறது.

1) வரைபட முறை

2) அரை சராசரி முறை

3) நகரும் சராசரி முறை

4) மீச்சிறு வர்க்க முறை

வரைபட முறை :

இம்முறையில் போக்கை அளப்பது மிகச் சுலபமும் எளிமையானதும் ஆகும். இதில் காலம் X - அச்சிலும் மதிப்புகள் Y - அச்சிலும் எடுக்கப்பட்டு கொடுக்கப்பட்ட விவரங்கள் வரைபடத்தின் புள்ளிகளாகக் குறிக்கப்படுகின்றன. புள்ளிகளை கையால் இணைத்து வளைவரை வரைய அது போக்கின் திசையைக் குறிக்கும்.

போக்குக் கோட்டை வரையும் பொழுது கீழ்க்கண்ட முக்கிய கருத்துகளை கவனத்தில் கொள்ள வேண்டும்.

(i) வளைவரை சீராக இருக்க வேண்டும்.

(ii) கூடிய வரையில் போக்குக் கோட்டிற்கு மேலும் கீழும் சம எண்ணிக்கை உள்ள புள்ளிகள் அமைய வேண்டும்.

(iii) புள்ளிகளிலிருந்து போக்குக் கோட்டிற்கு உள்ள செங்குத்து தூர வித்தியாசத்தின் வர்க்கங்களின் கூடுதல் இயன்ற வரையில் சிறியதாக இருக்க வேண்டும்.

(iv) சுழல் மாறுபாடுகள் இருக்குமானால் போக்கிற்கு மேலும் கீழும் சம அளவு சுழல் மாறுபாடுகள் இருக்க வேண்டும்.

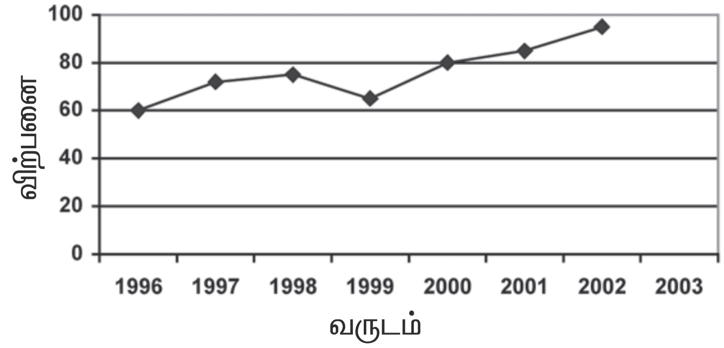
(v) கோட்டிற்கு மேலே உள்ள சுழல்களின் பரப்பளவும் கீழே உள்ள சுழல்களின் பரப்பளவும் சமமாக இருக்க வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

பின்வரும் விவரங்களுக்கு வரைபட முறையில் போக்குக் கோடு வரைக.

வருடம்	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002
விற்பனை (1000 ரூபாயில்)	60	72	75	65	80	85	95

தீர்வு :



நிறைகள் :

1. இது மிகவும் சுலபமானதும், எளிமையானதும் ஆகும். இது உழைப்பையும் நேரத்தையும்மிச்சப்படுத்துகிறது.
2. எல்லா வகைப் போக்குகளையும் விளக்குவதற்கு பயன்படுகிறது.
3. இது போக்கின் பயன்பாடுகளில் விரிவாக உபயோகப் படுத்தப்படுகிறது.

குறைகள் :

1. இது மிகவும் சார்புடையது. ஒரே மாதிரியான விவரங்களை வெவ்வேறு நபர்கள் வரையும் போது வெவ்வேறு போக்குக் கோடுகள் கிடைக்கின்றன.
2. இவ்வகைப் போக்குகளை முன்கணிப்பிற்கு பயன்படுத்துதல் விபரீத விளைவைக் கொடுக்கும்.
3. குறிப்பிட்ட அளவில் போக்கின் மதிப்பை கணக்கிட இயலாது.

அரை சராசரி முறை :

இம்முறையில் கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களை சம எண்ணிக்கை ஆண்டு மதிப்புகளுடன் கூடிய இரு அரைப்பகுதிகளாகப் பிரித்துக் கொள்ள வேண்டும். எடுத்துக்காட்டாக 1981–ல் இருந்து 1998 வரை உள்ள 18 வருடங்களுக்கான கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களை முதல் 9 வருட விவரங்கள் அதாவது 1981ல் இருந்து 1990 வரை ஒரு பகுதியாகவும் 1990ல் இருந்து 1998 வரை மற்றொரு பகுதியாகவும் இரு பகுதிகளாகப் பிரிக்கப்படுகிறது.

கொடுக்கப்பட்ட மதிப்புகள் ஒற்றை எண்ணிக்கையிலிருந்தால் நடு மதிப்பை நீக்கி விட்டு நடு மதிப்புக்கு மேலுள்ள மதிப்புகளை ஒரு பகுதியாகவும் நடுமதிப்புக்கு கீழுள்ள மதிப்புகளை மற்றொரு பகுதியாகவும் எடுத்துக் கொள்ள வேண்டும். எடுத்துக்காட்டாக 1991–ல் இருந்து 1997 வரை உள்ள 7 வருடங்களின் விவரங்கள் கொடுக்கப்பட்டால் 1994–ம் வருடத்தை நீக்கி விட்டு 1991 முதல் 1993 வரை உள்ள விவரங்களை ஒரு பகுதியாகவும், 1995 முதல் 1997 வரை உள்ள விவரங்களை மற்றொரு பகுதியாகவும் எடுத்துக் கொள்ள வேண்டும்.

விவரங்கள் இரு பகுதிகளாகப் பிரிக்கப்பட்ட பின் ஒவ்வொரு பகுதியின் சராசரியை தனித்தனியே காண வேண்டும். அச்சராசரி மதிப்புகளை அப்பகுதிகளின் பிரிவு இடைவெளிகளின் மத்தியில் குறித்துக் கொள்ள வேண்டும். அப்புள்ளிகள் நேர்கோட்டில் இணைக்கப்படும் பொழுது தேவையான போக்குக்கோடு கிடைக்கும். இக்கோட்டினை மேல்

நோக்கியும், கீழ் நோக்கியும் நீட்டுவதன் மூலம், இக்காலங்களுக்கு இடைப்பட்ட மதிப்புகளையும் வருங்கால மதிப்புகளையும் கணக்கிட இயலும்.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

அரை சராசரி முறையில் போக்குக் கோடு வரைக.

வருடம்	1991	1992	1993	1994	1995	1996
விற்பனை (1000 ரூபாயில்)	60	75	81	110	106	120

தீர்வு :

ஒவ்வொரு பகுதியிலும் 3 மதிப்புகள் இருக்குமாறு இரு பகுதிகளாகப் பிரிக்கவும்.

வருடம்	விற்பனை ரூ.	அரைப்பகுதியின் மொத்தம்	அரை சராசரி	போக்கு மதிப்புகள்
1991	60			59
1992	75	216	72	72
1993	81			85
1994	110			98
1995	106	333	111	111
1996	117			124

மைய ஆண்டுகளுக்கிடையேயான வேறுபாடு = 1995 –1992 = 3 வருடங்கள்

அரை சராசரிகளுக்கிடையே உள்ள வேறுபாடு = 111 –72 = 39

∴ வருடாந்திரப் போக்கு = 39/3 = 13

1991–ன் போக்கு = 1992–ன் போக்கு -13

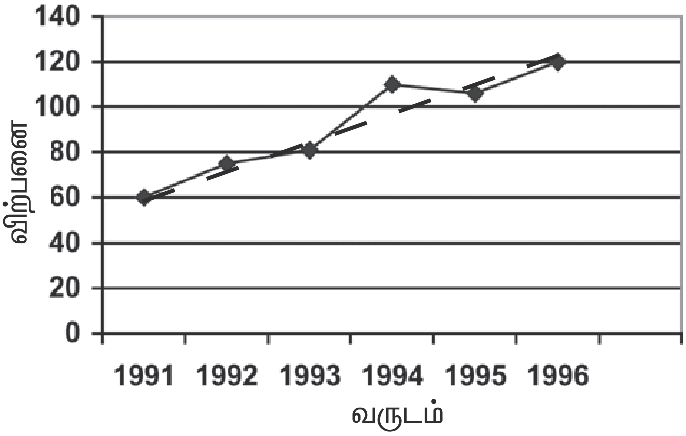
= 72 – 13 = 59

1993–ன் போக்கு = 1992–ன் போக்கு +13

= 72 + 13 = 85

இதே போல் மற்ற போக்கு மதிப்புகளைக் கணக்கிட வேண்டும்.

பின்வரும் வரைபடம் போக்குக் கோட்டினை தெளிவாக விளக்கும்.



எடுத்துக்காட்டு 3 :

பின்வரும் விவரங்களுக்கு அரை சராசரி முறையில் போக்கு மதிப்புகளைக் கணக்கிடுக.

வருடம்	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001
செலவினங்கள் ரூ. லட்சத்தில்	1.5	1.8	2.0	2.3	2.4	2.6	3.0

தீர்வு :

வருடம்	விற்பனை ரூ.	அரைப்பகுதியின் மொத்தம்	அரை சராசரி	போக்கு மதிப்புகள்
1995	1.5			1.545
1996	1.8	5.3	1.77	1.770
1997	2.0			1.995
1998	2.3			2.220
1999	2.4			2.445
2000	2.6	8.0	2.67	2.670
2001	3.0			2.895

மைய ஆண்டுகளுக்கிடையேயான வேறுபாடு = 2000 – 1996

= 4 வருடங்கள்

அரை சராசரிகளுக்கிடையே உள்ள வேறுபாடு = 2.67 - 1.77

= 0.9

∴ வருடாந்திர போக்கு மதிப்பு $= \frac{0.9}{4} = 0.225$

1995 –ன் போக்கு = 1996 –ன் போக்கு – 0.225

= 1.77 – 0.225

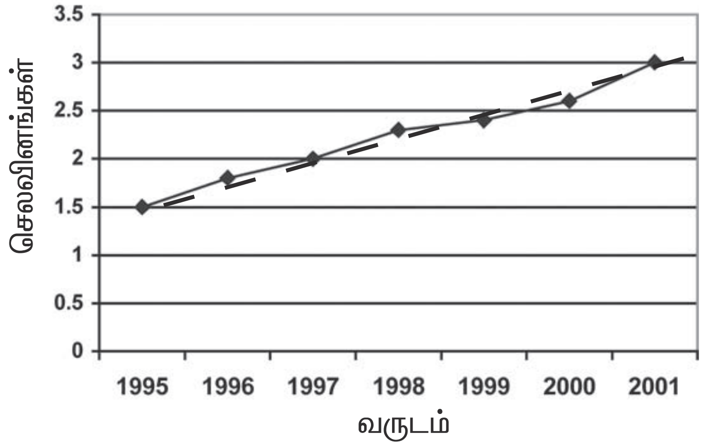
= 1.545

1996 –ன் போக்கு = 1.77

1997–ன் போக்கு = 1.77 + 0.225

= 1.995

இதே போல மற்ற மதிப்புகளைக் கணக்கிட வேண்டும்.



நிறைகள் :

1. இம்முறை மிக எளிமையானது மற்றும் கணக்கிட சுலபமானது.
2. இம்முறையில் ஒவ்வொருவரும் ஒரே ஒரு போக்குக் கோட்டினையே பெற முடியும்.
3. இக்கோட்டினை இரு வழிகளிலும் நீட்டும் பொழுது கடந்த கால மதிப்பீடுகளையும் வருங்காலமதிப்பீடுகளையும் காண இயலும்.

குறைகள் :

1. காலத்தொடர் வரிசையில் நேர்கோட்டுப் போக்கு இல்லாத பொழுது கூட அது இருக்கிறதென்ற தற்கோளின் அடிப்படையில் இம்முறை பயன்படுத்தப்படுகிறது.
2. இம்முறையில் பெறப்படும் போக்கு மதிப்புகள் நம்பகத்தன்மை உடையவை அல்ல.

நகரும் சராசரி முறை :

இம்முறை மிக எளிமையானது. இது கூட்டு சராசரியை அடிப்படையாகக் கொண்டது. ஒரு கால வட்டத்திற்குள்ளடங்குகின்ற எல்லா மதிப்புகளின் கூட்டுச் சராசரி கணக்கிடப்பட்டு அவற்றின் நடு மதிப்பிற்கு நேர் எழுத வேண்டும். பின் இரண்டாவது மதிப்பில் இருந்து ஒரு கால வட்டத்திற்குள்ளடங்குகின்ற மதிப்புகளின் கூட்டு சராசரியைக் கணக்கிட்டு அவற்றின் நடுமதிப்பிற்கு நேராக எழுத வேண்டும். இம்முறையைத் தொடர்ந்து இறுதி வரை செய்ய வேண்டும். இக்காலவட்டம் நகரும் சராசரி இடைவெளி என்று அழைக்கப்படும்.

ஒற்றையெண்ணிக்கை கால இடைவெளிக்கான நகரும் சராசரி முறை பின்வருமாறு **(3 அல்லது 5)**

3 ஆண்டுகளுக்கான நகரும் சராசரிகள் $\frac{a+b+c}{3}, \frac{b+c+d}{3}, \frac{c+d+e}{3}$ .... ஆகும்.

5 ஆண்டுகளுக்கான நகரும் சராசரிகள் முறையே $\frac{a+b+c+d+e}{5}, \frac{b+c+d+e+f}{5},$

$\frac{c+d+e+f+g}{5}$ .... ஆகும்.

நகரும் சராசரியின் கால வட்டம் ஒற்றையெண்ணிக்கை ஆண்டுகளாக இருந்தால் கணக்கிடுவதற்கான படிகள் (3 வருடங்கள்)

1. முதல் மூன்று வருடங்களுக்கான மொத்த மதிப்பை கணக்கிட்டு இரண்டாவது வருடத்திற்கு நேராக எழுத வேண்டும்.
2. முதல் மதிப்பை விடுத்து, அடுத்து வரும் மூன்று வருட மதிப்புகளைக் கூட்டி மூன்றாவது வருடத்திற்கு நேராக எழுத வேண்டும்.
3. கடைசி மதிப்பு எடுக்கப்படும் வரை இதே போல் தொடர்க.
4. ஒவ்வொரு மொத்த மதிப்பையும் **3** ஆல் வகுத்து அவையவற்றிற்கு நேராக அடுத்த நிரலில் எழுதுக.

இவையே நகரும் சராசரி முறையில் கணக்கிடப்பட்ட போக்கு மதிப்புகளாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 4 :

பின்வரும் விவரங்களுக்கு **3** வருடங்களுக்கான நகரும் சராசரி கணக்கிடுக.

வருடம்	1975	1976	1977	1978	1979	1980
உற்பத்தி (டன்களில்)	50	36	43	45	39	38

வருடம்	1981	1982	1983	1984
உற்பத்தி (டன்களில்)	33	42	41	34

தீர்வு :

வருடம்	உற்பத்தி டன்களில்	3 வருடங்களுக்கான நகரும் மொத்தம்	3 வருடங்களுக்கான நகரும் சராசரியே போக்கு மதிப்புகள்
1975	50	-	-
1976	36	129	43.0
1977	43	124	41.3
1978	45	127	42.3
1979	39	122	40.7
1980	38	110	36.7
1981	33	113	37.7
1982	42	116	38.7
1983	41	117	39.0
1984	34	-	-

நகரும் சராசரியின் காலவட்டம் இரட்டை எண்ணிக்கை ஆண்டுகளாக இருந்தால் :

ஒவ்வொரு தொகுதியின் மைய மதிப்பும் இரு காலப் புள்ளிகளுக்கு இடையில் அமையும். எனவே நகரும் சராசரிகளை மைய நிலைப்படுத்த வேண்டும்.

இதற்கான படிகள் பின்வருமாறு :

1. முதல் நான்கு வருட மதிப்புக்களின் கூடுதலைக் கணக்கிட்டு அதனை இரண்டாவது மற்றும் மூன்றாவது வருடத்தின் நடு பிரிவிற்கு நேராக மூன்றாவது நிரலில் எழுத வேண்டும்.
2. முதல் வருட மதிப்பை விடுத்து, அடுத்து வரும் 4 – வருட மொத்த மதிப்பையும் கணக்கிட்டு அதனை மூன்று மற்றும் நான்காவது வருடத்தின் நடுபிரிவிற்கு நேரே எழுத வேண்டும்.
3. கடைசி மதிப்பு எடுக்கப்படும் வரை இந்நிலையை தொடர வேண்டும்.
4. முதல் இரு நான்கு வருடக் கூடுதல்களின் மொத்தத்தை கணக்கிட்டு அதனை மூன்றாவது வருடத்திற்கு நேராக நான்காவது நிரலில் எழுத வேண்டும்.
5. முதல் நான்கு வருட கூடுதலை விடுத்து அடுத்து உள்ள இரு நான்கு வருடக் கூடுதல்களின் மொத்தத்தை கணக்கிட்டு 4–வது வருடத்திற்கு எதிராக எழுத வேண்டும்.
6. கடைசி 4–வருடக் கூடுதலைக் கணக்கில் எடுக்கும் வரை இந்நிலையைத் தொடர வேண்டும்.
7. 4–வது நிரலில் உள்ள ஒவ்வொரு கூடுதலையும் 8–ஆல் வகத்து (இது 8–வருடங்களுக்கான கூடுதல்) அதை 5–வது நிரலில் எழுதுக. இவையே போக்கு மதிப்புகளாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 5 :

இந்தியாவின் தேயிலை உற்பத்தி பின்வருமாறு 4 வருட நகரும் எண்களைக் கணக்கிடுக.

வருடம்	1993	1994	1995	1996	1997	1998
உற்பத்தி (டன்களில்)	464	515	518	467	502	540

வருடம்	1999	2000	2001	2002
உற்பத்தி (டன்களில்)	557	571	586	612

தீர்வு :

வருடம்	உற்பத்தி டன்களில்	4 வருட நகரும் மொத்தம்	மையநிலைப் படுத்தப்பட்ட நகரும் மொத்தம்	போக்க மதிப்புகள்
1993	464		-	-
		-		
1994	515			
		1964		
1995	518		3966	495.8
		2002		
1996	467		4029	503.6
		2027		
1997	502		4093	511.6
		2066		
1998	540		4236	529.5
		2170		
1999	557		4424	553.0
		2254		
2000	571		4580	572.5
		2326		
2001	586			
		-		
2002	612			

நிறைகள் :

1. மற்ற முறைகளோடு ஒப்பிடுகையில் இம்முறை புரிந்து கொள்வதற்கம் கையாள்வதற்கம் மிக எளிமையானது.
2. கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களுடன் இன்னும் சில விவரங்கள் சேர்க்கப்பட்டால் முழு கணக்கீடுகளிலும் மாற்றம் ஏற்படுவதில்லை. போக்கு மதிப்புகள் மட்டுமே அதிகரிக்கின்றன.
3. சுழல் மாறுபாடுகளின் ஒரு கால வட்டத்தை நகரும் சராசரி கால இடைவெளியாக எடுப்பதன் மூலம் முறையான சுழல் மாறுபாடுகள் முழுவதுமாக நீக்கப்படுகிறது.
4. குறிப்பாக தொடரின் போக்கு மதிப்புகள் ஒழுங்கற்றவையாக இருக்கும் பொழுது இம்முறை மிகவும் சிறப்பு வாய்ந்தது.

குறைகள் :

1. முன்கணிப்பும், வருங்காலப் போக்கினை அறிவதையும் முக்கிய நோக்கமாகக் கொண்ட போக்கு பகுப்பாய்வில் இம்முறை பயன்படுத்தப்படுவதில்லை.
2. சில சமயங்களில் நகரும் சராசரியின் காலத்தேர்வு சூழ்நிலையைப் பொறுத்தது.
3. பொதுவாக நகரும் சராசரிகள், முனை மதிப்புகளால் பாதிக்கப்படுகின்றன.
4. இது ஒழுங்கற்ற மாறுபாடுகளை முற்றிலுமாக நீக்குவதில்லை.

8.3 மீச்சிறு வர்க்கமுறை :

இம்முறை பரவலாகப் பயன்படுத்தப்பட்டு வருகிறது. பொருளாதார மற்றும் வணிக காலத் தொடர் வரிசைகளின் போக்கு மதிப்புகளைக் காண்பதில் இம்முறை முக்கிய பங்கு வகிக்கிறது. வருங்கால மதிப்பீட்டிற்கும், முன்கணிப்பிற்கும் இது பெரிதும் உதவுகிறது. இம்முறையில் பெறப்படும் போக்குக் கோடு மிக பொருத்தமான நேர்க்கோடு என்றழைக்கப்படுகிறது.

போக்கக் கோட்டின் சமன்பாடு $y = a + bx$, என்க. கொடுக்கப்பட்டுள்ள y மதிப்புகளுக்கும் இச்சமன்பாட்டின் மூலம் பெறப்படும் y மதிப்பீடுகளுக்கும் உள்ள வித்தியாசத்தின் வர்க்கங்களின் கூடுதலை மீச்சிறு மதிப்பு ஆக்க வேண்டும் என்ற அடிப்படையில் a, b என்ற மாறிலிகள் மதிப்பிடப்படுகின்றன.

இம்மாறிலிகள் பின்வரும் இயல்நிலை சமன்பாடுகளைத் தீர்ப்பதன் மூலம் கணக்கிடப்படுகின்றன.

$$\sum y = na + b\sum x \quad \ldots\ldots\ldots. (1)$$

$$\sum xy = a\sum x + b\sum x^2 \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

இங்கு x என்பது காலப் புள்ளிகளையும் y என்பது அதற்கான மதிப்புகளையும் குறிக்கின்றன. ‘ n’ என்பது கொடுக்கப்பட்ட ஜோடி மதிப்புகளின் எண்ணிக்கை.

வருடங்கள் ஒற்றை எண்ணிக்கையாக அமையும் பொழுது :

படி 1 : கொடுக்கப்பட்ட வருடங்களை நிரல் 1–லும் அதற்கொத்த மதிப்பினை நிரல் 2–லும் எழுத வேண்டும்.

படி 2 : 3–வது நிரலில், நிரல்–1ல் உள்ள வருடங்களுக்கு நேராக 0, 1, 2 .... என எழுதி அவற்றை X எனக் குறிக்க வேண்டும்.

படி 3 : அதன் நடு உறுப்பை A என குறிக்க வேண்டும்.

படி 4 : நடு உறுப்பு A –ல் இருந்து விலக்கம் u = X – A கணக்கிட்டு அதனை நிரல் 4–ல் குறிக்க வேண்டும்.

படி 5 : u^2 மதிப்பைக் கண்டுபிடித்து நிரல் 5–ல் எழுத வேண்டும்.

படி 6 : நிரல் 6–ல் உள்ள மதிப்புகள் பெருக்கல் uy ஐக் குறிக்க வேண்டும்.

இதற்கான இயல்நிலை சமன்பாடுகள் பின்வருமாறு

$\sum y = na + b\sum u$ .... (1) இங்கு u = X-A

$\sum uy = a\sum u + b\sum u^2$ .... (2)

$\sum u = 0$, என்பதால் சமன்பாடு (1) ன் மூலம்

$$a = \frac{\sum y}{n}$$

சமன்பாடு (2)–ன் மூலம்

$$\sum uy = b\sum u^2$$

$$\therefore \quad b = \frac{\sum uy}{\sum u^2}$$

மிகப் பொருத்தமான நேர்கோட்டின் சமன்பாடு

$y = a + bu = a + b (X - A)$

எடுத்துக்காட்டு 6 :

பின்வரும் விவரங்களுக்கு மீச்சிறு வர்க்க முறையைப் பயன்படுத்தி போக்கு மதிப்புகளைக் காண்க.

வருடம்	1990	1991	1992	1993	1994
உற்பத்தி டன்களில்	50	55	45	52	54

தீர்வு :

வருடம் (x)	உற்பத்தி (y)	X = x - 1990	u = x-A = x-2	u^2	uy	போக்கு மதிப்புகள்
1990	50	0	– 2	4	– 100	50.2
1991	55	1	– 1	1	– 55	50.7
1992	45	**2 A**	0	0	0	51.2
1993	52	3	1	1	52	51.7
1994	54	4	2	4	108	52.2
மொத்தம்	256			10	5	

A என்பது உத்தேச மதிப்பு

பொருத்தமான நேர்கோட்டின் சமன்பாடு

$$Y = a + bX$$

$$= a + bu \text{ , இங்கு } u = X - 2$$

இயல்நிலைச் சமன்பாடுகள் பின்வருமாறு

$$\sum y = na + b\sum u \ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\sum uy = a\sum u + b\sum u^2 \ldots..(2)$$

$\sum u = 0$ என்பதால், சமன்பாடு (1) இன் மூலம் $\sum y = na$

$$a = \frac{\sum y}{n}$$

$$= \frac{256}{5} = 51.2$$

சமன்பாடு (2) இன் மூலம்

$$\sum uy = b\sum u^2$$

$$5 = 10b$$

$$b = \frac{5}{10} = 0.5$$

பொருத்தமான நேர்கோட்டின் சமன்பாடானது

$$y = a + bu$$

$$y = 51.2 + 0.5\ (X\text{-}2)$$

$$y = 51.2 + 0.5X - 1.0$$

$$y = 50.2 + 0.5X$$

போக்கு மதிப்புகள்

50.2, 50.7, 51.2, 51.7, 52.2

1996ம் வருட உற்பத்தியை மதிப்பிட

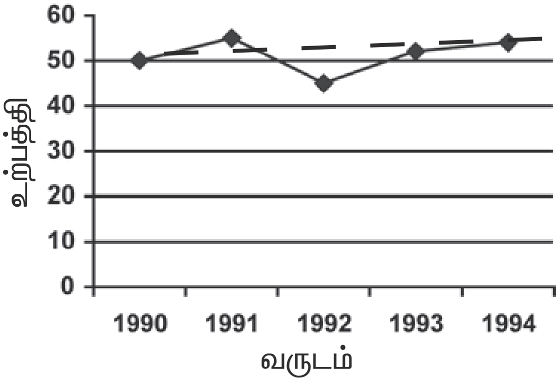
$X = x - 1990$ என பிரதியிடுக

$$X = 1996 - 1990 = 6$$

$$Y = 50.2 + 0.5X = 50.2 + 0.5(6)$$

$= 50.2 + 3.0 = 53.2$ டன்கள்

பின்வரும் வரைபடம் போக்குக் கோட்டைத் தெளிவாக விளக்குகிறது.



வருடங்கள் இரட்டையெண்ணிக்கையாக கொடுக்கப்பட்டுள்ள பொழுது

இங்கு X ல் நடுவில் உள்ள இரு மதிப்புகளின் சராசரியை A என எடுத்துக் கொள்ள வேண்டும். அப்பொழுது $u = \frac{X-A}{1/2} = 2\ (X\text{-}A)$ எனக் கிடைக்கும். வருடங்கள் ஒற்றை எண்ணிக்கையாக அமையும் பொழுது பின்பற்றிய மற்ற வழி முறைகளை இங்கும் பின்பற்ற வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 7 :

பின்வரும் விவரங்களுக்கு மீச்சிறு வர்க்க முறையில் போக்கக் கோட்டை பொருத்துக.

வருடம்	1983	1984	1985	1986	1987	1988
விற்பனை (லட்சங்களில்)	3	8	7	9	11	14

1991ம் வருட விற்பனை மதிப்பீடு காண்க.

தீர்வு :

வருடம் (x)	விற்பனை (y)	X = x-1983	u = 2X - 5	u^2	uy	போக்கு மதிப்புகள்
1983	3	0	– 5	25	–15	3.97
1984	8	1	– 3	9	– 24	5.85
1985	7	2	– 1	1	– 7	7.73
1986	9	3	1	1	9	9.61
1987	11	4	3	9	33	11.49
1988	14	5	5	25	70	13.37
மொத்தம்	52		0	70	66	

$$u = \frac{X-A}{1/2}$$
$$= 2(X-2.5) = 2X-5$$

நேர்கோட்டின் சமன்பாடானது

$$y = a + bX = a + bu$$

இயல்நிலைச் சமன்பாடுகளாவன

$$\sum y = na \ldots\ldots.(1)$$

$$\sum uy = b\sum u^2 \ldots\ldots(2)$$

சமன்பாடு **(1)** ன் மூலம் 52 = 6a

$$a = \frac{52}{6}$$
$$= 8.67$$

சமன்பாடு **(2)** ன் மூலம் 66 = 70 b

$$b = \frac{66}{70}$$
$$= 0.94$$

பொருத்தப்பட்ட நேர்கோட்டின் சமன்பாடானது

$$y = a + bu$$

$$y = 8.67+0.94(2X-5)$$

$$y = 8.67 + 1.88X - 4.7$$

$$y = 3.97 + 1.88X \text{ -----------}(3)$$

போக்கு மதிப்புகளானது போக்கு கோட்டில் பின்வரும் மதிப்புகளை X ற்கு மதிப்பிட கிடைக்கின்றன

X = 0, y = 3.97	X = 1, y = 5.85
X = 2, y = 7.73	X = 3, y = 9.61
X = 4, y = 11.49	X = 5, y = 13.37

1991ம் வருட விற்பனை மதிப்பீட்டை பெற

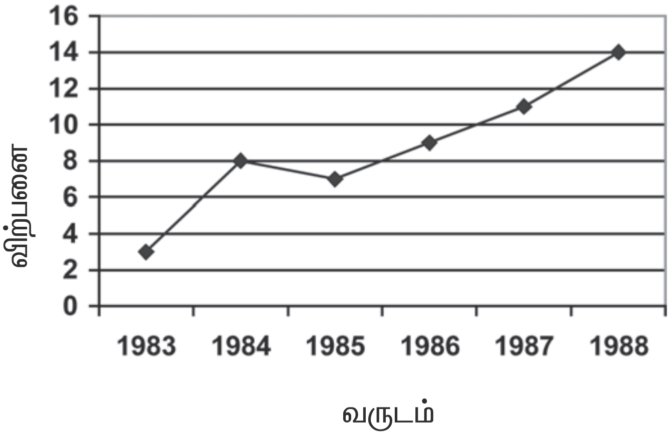
X = x –1983 என பிரதியிடுக

= 1991 – 1983 = 8

y = 3.97 + 1.88 × 8

= 19.01 லட்சங்கள்

கீழ்க்கண்ட வரைபடம் போக்கு கோட்டினைத் தெளிவாக காட்டுகிறது.



நிறைகள் :

1. இது ஒரு கணிதவியல் முறையாக இருப்பதால் இது எதைச் சார்ந்தும் அமையாது எனவே ஆய்வாளரின் சொந்த விருப்பு வெறுப்புகளை நீக்குகிறது.
2. இம்முறையில் வருங்கால மதிப்புகளை மதிப்பிடுவதோடு காலத் தொடர் வரிசையின் இடைப்பட்ட மதிப்புகளையும் மதிப்பிட இயலும்.
3. அனைத்து போக்கு மதிப்புகளையும் இம்முறையில் கணக்கிட இயலும்.

குறைகள் :

1. இது ஒரு கடினமான முறை சில மதிப்புகளை சேர்க்கும் பொழுது கணக்கீடுகளை மீண்டும் செய்ய வேண்டும்.
2. வணிக பொருளாதார காலத்தொடர்கள் நேர்க்கோட்டு போக்காக இருப்பதில்லை என்பதால் இவை நேர்க்கோட்டு போக்குடையவை என்று அனுமானித்து இப்போக்கு மதிப்புகளை கணக்கிட்டால் சில நேரங்களில் தவறுகள் ஏற்படலாம்.
3. இது சுழல், பருவகால மற்றும் முறையற்ற மாறுபாடுகளை கருத்தில் கொள்வதில்லை.
4. போக்கு மதிப்பீடுகளை அடுத்து வருகின்ற சில காலங்களுக்கு மட்டுமே மதிப்பிட இயலும். நீண்ட கால அளவில் பெறுகின்ற மதிப்பீடுகள் பொருத்தமாக இராது.

8.4 பருவகால மாறுபாடுகள் :

பருவகால மாறுபாடுகள் என்பது ஒரு வருடத்திற்குள் பருவத்திற்கேற்ப ஏற்படக்கூடிய ஏற்ற இறக்கங்களாகும். பருவகால மாறுபாடுகள் ஏற்படுவதற்கான காரண காரியங்களாவன

i) ஒரு இடத்தின் தட்ப வெப்பநிலை மற்றும் வானிலை

ii) மக்களின் தொன்று தொட்டு வரும் பழக்க வழக்கங்கள்

எடுத்துக்காட்டாக கோடை காலத்தில் ஐஸ்கிரீம் விற்பனை, மழை காலத்தில் குடை விற்பனை, குளிர்காலத்தில் கம்பளி ஆடைகள் விற்பனை மற்றும் சாகுபடி காலங்களில் விளைச்சல் போன்றவை அதிகரிக்கின்றன.

இரண்டாவதாக, திருமண காலங்களில் தங்கத்தின் விலை கூடுகிறது. பண்டிகை காலங்களில் பட்டாசு, புதுத்துணிகள் ஆகியவற்றின் விலை ஏறுகிறது.

எனவே உற்பத்தியாளர்கள், விற்பனையாளர்கள், வியாபாரிகள், வாடிக்கையாளர்கள் போன்ற அனைவருக்கும் வருங்காலத்தைப் பற்றி திட்டமிட பருவ கால மாறுபாடுகள் மிக முக்கியத்துவம் வாய்ந்தவை ஆகும்.

பருவ கால மாறுபாடுகளை அளவிடுவதன் நோக்கமானது அவற்றின் விளைவுகளைப் பற்றி அறிந்து மற்றும் அதன் விளைவைப் போக்கினின்று வேறுபடுத்துதல் ஆகும்.

பருவகால மாறுபாடுகளை அளவிடுதல் :

பருவ கால மாறுபாடுகளை அளவிடுவதில் பின்வரும் நான்கு முறைகளும் அதிக அளவு பயன்படுத்தப்படுகின்றன.

1. எளிய சராசரி முறை
2. போக்கு விகித முறை
3. நகரும் சராசரி விகித முறை
4. தொடர் உறவு முறை

மேற்கண்ட நான்கு முறைகளில் பருவ கால மாறுபாடுகளை அளவிடுவதற்கு எளிய சராசரி முறை மிக சுலபமானது.

8.4.1 எளிய சராசரி முறை :

இந்த முறையில் பருவ கால குறியீட்டை கணக்கிடுவதற்கான படிகள்

i) கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களை கால வாரியாக வரிசைபடுத்துக.

ii) ஒவ்வாரு பருவத்திற்கும் சராசரி கணக்கிடுக.

iii) பருவ கால சராசரிகளின் சராசரியை கணக்கிட வேண்டும். இது மொத்த சராசரி ஆகும்.

iv) பருவ கால சராசரியை மொத்த சராசரியின் சதவீதத்தில் எழுதுக. இது பருவ காலக் குறியீடு ஆகும்.

இப்பருவ கால குறியீடுகளின் மொத்தம் 100n. இங்கு ‘n’ என்பது ஒரு வருடத்தில் உள்ள பருவங்களின் எண்ணிக்கை ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 8 :

கீழே கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களுக்கு எளிய சராசரி முறையில் பருவ கால குறியீடுகள் காண்க.

காலாண்டு

வருடம்	I	II	III	IV
1989	30	40	36	34
1990	34	52	50	44
1991	40	58	54	48
1992	54	76	68	62
1993	80	92	86	82

தீர்வு :

காலாண்டு

வருடம்	I	II	III	IV
1989	30	40	36	34
1990	34	52	50	44
1991	40	58	54	48
1992	54	76	68	62
1993	80	92	86	82
மொத்தம்	238	318	294	270
சராசரி	47.6	63.6	58.8	54
பருவகால குறியீடுகள்	85	113.6	105	96.4

மொத்த சராசரி $= \dfrac{47.6 + 63.6 + 58.8 + 54}{4}$

$= \dfrac{224}{4} = 56$

முதல் காலாண்டிற்கான பருவகால குறியீடு =

$= \dfrac{\text{முதல் காலாண்டு சராசரி}}{\text{மொத்த சராசரி}} \times 100$

$= \dfrac{47.6}{56} \times 100 = 85$

இரண்டாவது காலாண்டிற்கான பருவகால குறியீடு =

$= \dfrac{\text{இரண்டாவது காலாண்டு சராசரி}}{\text{மொத்த சராசரி}} \times 100$

$$= \frac{63.6}{56} \times 100 = 113.6$$

மூன்றாவது காலாண்டிற்கான பருவகால குறியீடு =

$$= \frac{\text{மூன்றாவது காலாண்டு சராசரி}}{\text{மொத்த சராசரி}} \times 100$$

$$= \frac{58.8}{56} \times 100 = 105$$

நான்காவது காலாண்டிற்கான பருவகால குறியீடு =

$$= \frac{\text{நான்காவது காலாண்டு சராசரி}}{\text{மொத்த சராசரி}} \times 100$$

$$= \frac{54}{56} \times 100 = 96.4$$

எடுத்துக்காட்டு 9 :

பின்வரும் விவரங்களுக்கு எளிய சராசரி முறையில் பருவகால குறியீடுகளைக் காண்க.

வருடம்

காலாண்டு	1974	1975	1976	1977	1978
I	72	76	74	76	74
II	68	70	66	74	74
III	80	82	84	84	86
IV	70	74	80	78	82

தீர்வு :

காலாண்டு

வருடம்	I	II	III	IV
1974	72	68	80	70
1975	76	70	82	74
1976	74	66	84	80
1977	76	74	84	78
1978	74	74	86	82
மொத்தம்	372	352	416	384
சராசரி	74.4	70.4	83.2	76.8
பருவகால குறியீடுகள்	97.6	92.4	109.2	100.8

மொத்த சராசரி $= \frac{74.4+70.4+83.2+76.8}{4}$

$= \frac{304.8}{4} = 76.2$

முதல் காலாண்டிற்கான பருவகால குறியீடு =

$$= \frac{\text{முதல் காலாண்டு சராசரி}}{\text{மொத்த சராசரி}} \times 100$$

$$= \frac{74.4}{76.2} \times 100$$

$$= 97.6$$

இரண்டாவது காலாண்டிற்கான பருவகால குறியீடு =

$$= \frac{\text{இரண்டாவது காலாண்டு சராசரி}}{\text{மொத்த சராசரி}} \times 100$$

$$= \frac{70.4}{76.2} \times 100$$

$$= 92.4$$

மூன்றாவது காலாண்டிற்கான பருவகால குறியீடு =

$$= \frac{\text{மூன்றாவது காலாண்டு சராசரி}}{\text{மொத்த சராசரி}} \times 100$$

$$= \frac{83.2}{76.2} \text{ x}100$$

$$= 109.1$$

நான்காவது காலாண்டிற்கான பருவகால குறியீடு =

$$= \frac{\text{நான்காவது காலாண்டு சராசரி}}{\text{மொத்த சராசரி}} \times 100$$

$$= \frac{76.8}{76.2} \times 100$$

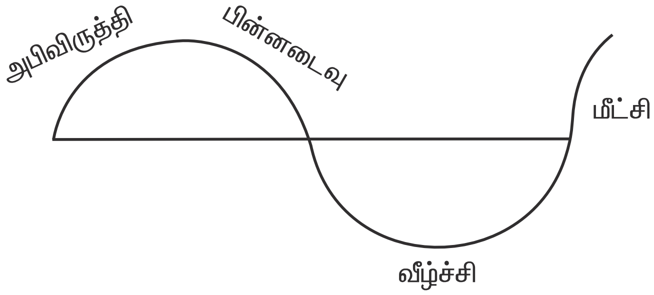
$$= 100.8$$

$= 97.6 + 92.4 + 109.2 + 100.8$

$= 400$ எனவே சரிபார்க்கப்பட்டது.

சுழல் மாறுபாடுகள் :

வழக்கமாக இரண்டு அல்லது இரண்டிற்கு மேற்பட்ட ஆண்டுகளில் காலத் தொடர் வரிசையில் திரும்ப திரும்ப ஏற்படும் மாறுபாடுகளை "சுழல்கள்" என்ற பதம் குறிக்கிறது. வணிகம் மற்றும் பொருளாதாரத்துடன் தொடர்புடைய காலத் தொடர் வரிசைகள் யாவும் சுழல் மாறுபாடுகளைப் பெற்றிருக்கும். வணிக செயல்பாடுகள் திரும்ப, திரும்ப ஏற்ற இறக்க அசைவுகளைப் பெறுவதே வியாபார சுழற்சியாகும். இச்சுழற்சி நான்கு பகுதிகளைக் கொண்டது. அவையாவன 1. அபிவிருத்தி 2. பின்னடைவு 3. வீழ்ச்சி 4. மீட்சி ஒவ்வொரு நிலையும் மெதுவாக மாறி மற்றொரு நிலையை அடைகிறது. பின்வரும் படம் ஒரு வணிக சுழலை தெளிவாக விளக்குகிறது.



ஒரு வியாபாரத்தை நிலை நிறுத்தத் தேவையான கொள்கை மாற்றங்களை உருவாக்குவதற்கு சுழல் மாறுபாடுகளைப் பற்றி அறிந்து கொள்வது மிக அவசியமாகிறது. வியாபாரிகள் அவர்களுடைய வணிகத்தின் வளர்ச்சி மற்றும் வீழ்ச்சி நிலைக் கேற்றவாறு அவர்களுடைய வியாபாரத்தை நிலைநிறுத்த தக்க நடவடிக்கைகள் எடுக்க சுழல் மாறுபாடுகள் உதவுகின்றன.

ஒழுங்கற்ற மாறுபாடுகள் :

ஒழுங்கற்ற மாறுபாடுகள் முறையற்ற மாறுபாடுகள் என்றும் அழைக்கப்படுகின்றன. இம்மாறுபாடுகள் முறையானவை அல்ல. இவை குறிப்பிட்ட வடிவத்தில் மீண்டும் மீண்டும் நிகழாது.

இம்மாறுபாடுகள் திடீரென ஏற்படும் போர், நிலநடுக்கம், வேலை நிறுத்தம், வெள்ளம் மற்றும் புரட்சி போன்றவற்றால் ஏற்படுகின்றன.

இம்மாறுபாடு ஒரு குறுகிய கால மாறுபாடு ஆகும். ஆனால் இது காலத் தொடர் வரிசையின் எல்லாப் பகுதிகளையும் பாதிக்கிறது. இம்முறையற்ற மாறுபாடுகளை அளவிடவோ, தனித்துப் பிரித்துக் கூறவோ எந்தவித புள்ளியியல் முறைகளும் இல்லை. ஒரு முறையான தொடர்புடைய பகுதிகள் அனைத்தையும் நீக்கிய பிறகு எஞ்சுகின்ற பகுதியே ஒழுங்கற்ற மாறுபாடுகளைக் குறிக்கிறது.

முன்கணிப்பு :

8.5 அறிமுகம் :

வருங்காலத்தின் வாய்ப்பு மதிப்புகளை முன்கணிப்பு செய்வதே காலத்தொடர் வரிசையின் முக்கிய பயனாகும். முன்கணிப்பு என்பது பெரும்பாலான நேரங்களில் மாறியின் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் மதிப்புகளுக்கு பொருத்திய நேர்கோட்டை போதுமான நீண்ட காலத்திற்கு விரிவாக்குவதே ஆகும். முன்கணிப்பு முறைகள் பற்றி விரிவாக

பின்னர் விவரிக்கப்படும். பருவகால மற்றும் சுழற்சி காரணிகளைச் சரிபடுத்துதல் மூலம் போக்கினை விரிவாக்கம் செய்வதை அடிப்படையாகக் கொண்டு, முன்கணிப்பு செய்தல் செம்மைப்படுத்தப்படுகிறது. வணிகம் மற்றும் பொருளாதாரத் துறைகளில் திட்டமிடுதலிலும் மதிப்பீடு செய்வதிலும் முன்கணிப்பு முக்கிய பங்கு வகிக்கிறது. சமூகம், அரசியல் மற்றும் அரசு கொள்கைகள் போன்ற பல்வேறு விஷயங்களைக் கருத்தில் கொண்டு பொருத்தமான புள்ளியியல் முறைகளை உட்படுத்தி பெறப்படும் முன்கணிப்பு, தீர்மானம் மேற்கொள்வதற்கு அத்தியாவசியமாகிறது.

வருங்கால மதிப்பீடுகளை கணிப்பதைப் பொறுத்தே ஒரு வணிகத்தின் வெற்றி அமைகிறது. இந்த மதிப்பீடுகளின் அடிப்படையில் ஒரு வணிகர் அவருடைய உற்பத்தி, இருப்பு, விற்பனைச் சந்தை, கூடுதல் நிதியை ஏற்படுத்திக் கொள்ளுதல் போன்றவற்றை திட்டமிட இயலும். முன்கணிப்பு என்பது முன்கூட்டி யூகித்தல் அல்லது முன்னதாக விரிவாக்கம் செய்தல் என்பதிலிருந்து வேறுபடுகிறது. உடன் தொடர்புப் பகுப்பாய்வு, காலத்தொடர் வரிசை பகுப்பாய்வு, குறியீட்டெண்கள் போன்றவற்றின் மூலம் வருங்கால மதிப்புகளை யூகித்தல் மற்றும் விரிவாக்கம் செய்ய முடியும்.

மாறாக கடந்த காலம் மற்றும் தற்கால விவரங்களை பொருளாதாரக் கொள்கை மற்றும் சூழ்நிலைகளுக்கேற்றவாறு பகுப்பாய்வு செய்து வணிக செயற்பாடுகள் எவ்வாறு அமைய வேண்டும் என்பதைப் பற்றி முன்கூட்டியே கூறும் முறை முன்கணிப்பு ஆகும். குறிப்பாக முன்கணிப்பு என்பது முன்னெச்சரிக்கையாகும். புள்ளியியல் பகுப்பாய்வினை அடிப்படையாக கொண்ட முன்கணிப்பு, யூகத்தின் அடிப்படையில் செய்யும் முன்கணிப்பை விட அதிக நம்பகத்தன்மை உடையது.

T.S. லெவிஸ் மற்றும் R.A. ஃபாக்ஸ் (T.A. Levis and R.A.Fox) என்பவர்களின் கூற்றுபடி "கடந்த கால விவரங்களில் இருந்து வருங்காலத்தில் ஏற்படும் மாற்றங்களை மதிப்பீடு செய்வதே முன்கணிப்பு ஆகும்."

8.5.1 வணிக முன்கணிப்பு முறைகள் :

வணிக முன்கணிப்பை அளவிடுவதில் மூன்று முறைகள் உள்ளன.

1. நேவி முறை (Naive)
2. பாரோமெட்ரிக் (Barometric)
3. பகுப்பு முறைகள் (Analytical)

1. **நேவி முறை** :

இது பொருளாதார ஏற்ற இறக்கக் கொள்கையை மட்டுமே கொண்டது.

2. **பாரோமெட்ரிக் முறைகள்** :

இது பின்வரும் முறைகளை உள்ளடக்கியது.

i) குறிப்பிட்ட வரலாற்று ஒப்புடைமை

ii) ஏற்ற – இறக்க உறவுகள்

iii) பரவுதல் முறை

iv) செயல் – எதிர்செயல் கொள்கை

3. **பகுப்பு முறைகள்** :

இது பின்வரும் முறைகளைக் கொண்டது.

i) காரணி பட்டியல் முறை

ii) குறுக்கு வெட்டுப் பகுப்பாய்வு

iii) அடுக்குக்குறி வளைவரையை சீராக்குதல்

iv) கணித சார் பொருளியியல் முறைகள்

பொருளாதார ஏற்ற இறக்கக் கொள்கை :

இம்முறையில் ஒரு உற்பத்தியாளர் தன் சொந்த நிறுவனத்தின் காலத் தொடர் வரிசை விவரங்களை ஆராய்ந்து அவற்றின் விரிவாக்கத்தை அடிப்படையாகக் கொண்டு முன்கணிப்பு செய்தல் ஆகும். இம்முறையில் பகுப்பாய்வு செய்யப்பட்ட விவரங்கள் ஒரு தனி நிறுவனத்திற்கு மட்டுமே பொருந்தும். மேலும், இம்முறையில் பெறப்பட்ட முன்கணிப்பு நம்பகத் தன்மை வாய்ந்தவை அல்ல.

வணிக முன்கணிப்பில் பரவுதல் முறை :

இந்த முறை, ஒரு வணிகத்தை பாதிக்கக் கூடிய வெவ்வேறு காரணிகள் ஒரே சமயத்தில் ஏற்றத்தையோ இறக்கத்தையோ அடைய இயலாது என்ற கொள்கையை அடிப்படையாகக் கொண்டது. அவற்றிற்கிடையே எப்பொழுதும் ஒரு காலத்தடை இருக்கும். எத்தொடர் முன்னோக்கி உள்ளது மற்றும் எது பின் தங்கி உள்ளது என்பதை சுட்டிக் காட்ட இயலும் வசதி இந்த முறையில் உள்ளது. தனித்தனி தொடர்களை மட்டும் கருதாமல் பல தொடர்களை ஒன்றாக சேர்த்து அவற்றின் மாற்றங்களை விரித்துரைப்பதே பரவுதல் முறை ஆகும். ஒரு குறிப்பிட்ட காலத்திற்குள் கொடுக்கப்பட்ட தொடர் தொகுதி எந்த வீதத்தில் விரிவடைகிறது என்பதைக் காட்டுகிறது. பரவல் குறியீட்டின் ஏற்ற இறக்கம் வணிக சுழற்சியின் ஏற்ற இறக்கத்தைக் குறிக்காது என்பதை கவனத்தில் கொள்ள வேண்டும். எல்லாத் தொடர்களும் ஒருமித்து விரியவோ சுருங்கவோ செய்யாது. கொடுக்கப்பட்ட காலத்தில் ஐம்பது சதவீதத்திற்கும் அதிகமான தொடர்கள் விரிவடையுமெனில் அவ்வணிகம் செழிப்பு நிலையில் உள்ளது எனலாம். மேலும் ஒரு வணிகம் செழிப்பு நிலையில் இருந்தால் ஐம்பது சதவீதத்திற்கும் மேலான தொடர்கள் விரிவடையும் எனலாம்.

பரவல் குறியீடு வழக்கமாக வரைபட முறையில் குறிப்பிடப்படுகிறது. விலைவாசி, முதலீடு, இலாபம் போன்ற வணிக மாறிகளுக்கு பரவல் குறியீடு அமைக்கப்படுகிறது.

வணிக முன்கணிப்பில் குறுக்கு வெட்டுக் கொள்கை :

இம்முறையில் நடைமுறைச் சூழலுக்கேற்ப அனைத்து காரணிகளிலும் முழுமையான பகுப்பாய்வு மேற்கொண்டு அக்காரணிகளால் ஏற்படும் கூட்டு விளைவுகள் மதிப்பீடு செய்யப்படுகின்றன. முன்கணிப்பு செய்வதற்கு முன்பாக இம்முறையில் நிர்வாக அலுவலர்கள், பொருளாதார வல்லுநர்கள், நுகர்வோர் போன்றோரின் கருத்துகள் கணக்கில் எடுத்துக் கெள்ளப்படுகிறது வணிகத்தின் வருங்கால நிலைமையை முன்கணிப்பு செய்வதற்கு எல்லா காரணிகளின் விளைவுகளின் மதிப்பிட்டை அடிப்படையாகக் கொள்ளலாம்.

பயிற்சி – 8

I. **சரியான விடையைத் தேர்வு செய்க** :

1. காலத்தொடர்வரிசையில் உள்ள பிரிவுகளின் எண்ணிக்கை

அ) இரண்டு ஆ) மூன்று இ) நான்கு ஈ) ஐந்து

2 கீழ்க்கண்டவற்றுள் எது பருவகால மாறுபாடுகள் உண்டாகக் காரணமானது

அ) தட்ப வெப்பநிலை ஆ) சமுதாய பழக்கங்கள்

இ) பண்டிகைகள் ஈ) இவை அனைத்தும்

3. கீழ்க்கண்டவற்றுள் எதனைக் கணக்கிட எளிய சராசரி முறை பயன்படுத்தப்படுகிறது

அ) போக்கு மதிப்புகள் ஆ) சுழல் மாறுபாடுகள்

இ) பருவகால குறியீடுகள் ஈ) இவற்றில் எதுவும் இல்லை

4. ஒழுங்கற்ற மாறுபாடுகள் என்பவை

அ) முறையானவை ஆ) சுழல் மாறுபாடுகள்

இ) முறையற்றவை ஈ) இவற்றில் எதுவும் இல்லை

5. போக்குக் கோட்டின் சாய்வு நேரிடை எனில் இது காட்டுவது **?**

அ) ஏறும் போக்கு ஆ) இறங்கும் போக்கு

இ) நிலைத்தன்மை ஈ) மேற்கூறியவற்றுள் எதுவும் இல்லை

6. ஒரு பல்பொருள் அங்காடியில் தீபாவளி சமயத்தில் ஆகும் விற்பனையானது பின்வரும் காலத் தொடர் வரிசையில் தொடர்புடைய பிரிவானது

அ) போக்கு ஆ) பருவ கால மாறுபாடுகள்

இ) ஒழுங்கற்ற மாறுபாடுகள் ஈ) மேற்கூறிய அனைத்தும்

7. காலத்தொடர் வரிசையில் "நீண்ட கால மாறுபாடு" என்பதின் தொடர்புடைய பிரிவானது

அ) சுழல் மாறுபாடு ஆ) பருவ கால மாறுபாடு

இ) ஒழுங்கற்ற மாறுபாடு ஈ) மேற்கூறிய அனைத்தும்

8. தொழில் முன்கணிப்பு என்பதனை மேற்கொள்ள அடிப்படையானது

அ) தற்கால விவரங்கள் ஆ) கடந்த கால விவரங்கள்

இ) சூழ்நிலைக் கொள்கைகள் ஈ) மேற்கூறப்பட்ட அனைத்தும்

9. கணிதம் சார் பொருளியியல் முறை உள்ளடக்கியது

அ) பொருளியியல் மற்றும் கணிதம்

ஆ) பொருளியியல் மற்றும் புள்ளியியல்

இ) பொருளியியல், புள்ளியியல் மற்றும் கணிதம்

ஈ) மேற்கூறியவற்றுள் எதுவும் இல்லை

10. பொருளாதார ஏற்ற இறக்கக் கோட்பாடு கொண்டுள்ள பிரிவின் வகையானது

அ) பகுப்பாய்வு முறைகள் ஆ) நேவி முறை

இ) அளவீட்டு முறைகள் ஈ) எதுவும் இல்லை

II. **கோடிட்ட இடங்களை நிரப்புக** :

11. "காலத் தொடர் வரிசை" என்பது கொடுக்கப்பட்ட மதிப்புகளை _________ ஒழுங்குபடுத்துவது ஆகும்.

12. ஒரு காலத் தொடர் வரிசையில் காணப்படும் காலாண்டு ஏற்ற இறக்கங்களை தெரிவு செய்வது ________ மாறுபாடு ஆகும்.

13. வணிகம் சார் காலத் தொடர் வரிசையில் மீண்டும் மீண்டும் ஏற்படும் மாறுபாடுகள் _________ என்று அழைக்கப்படுகின்றன.

14. ஒரு முழு சுழற்சியானது ______________ நிலைகளை கொண்டது.

15. காலத் தொடர் வரிசையின் முழுமையான ஏறுகின்ற அல்லது இறங்குகின்ற நிலை ____________ எனக் குறிப்பிடப்படுகிறது.

16. மீச்சிறு வர்க்க முறையினால் பெறப்படும் போக்குக் கோடு ____________ ஆகும்.

17. முன்கணிப்பு என்பது _________ மற்றும் __________ லிருந்து வேறுபட்டது.

18. __________ அளவிடுவதற்கு அல்லது தனிமைப்படுத்துவதற்கு புள்ளியியல் யுத்தி எதுவும் இல்லை.

III. **கீழ்க்கண்டவற்றிற்கு விடையளிக்க.**

19. காலத்தொடர் வரிசை என்றால் என்ன ?

20. காலத்தொடர் வரிசையின் பிரிவுகள் யாவை ?

21. பருவகால மாறுபாடுகளைப் பற்றி சுருக்கமாக கூறுக.

22. சுழல் மாறுபாடு என்றால் என்ன ?

23. போக்கினை அளவிடும் வெவ்வேறு முறைகளின் பெயர்களைக் கூறுக.

24. அரை சராசரியின் நிறை, குறைகளைக் கூறுக.

25. காலத் தொடர் பகுப்பாய்வின் கணிதவியல் முறைகளை விவரி.

26. காலத் தொடர் வரிசையில் உள் ஒழுங்கற்ற மாறுபாடுகள் பிரிவினை விவரி.

27. தொழில் முன்கணிப்பு பற்றி நீவிர் அறிந்தவற்றைப் பற்றி விவரி.

28. முன்கணிப்பை அளவிடும் வெவ்வேறு முறைகளை விவரி.

29. முன்கணிப்பை பற்றிய ஏதேனும் ஒரு முறை பற்றி சிறு குறிப்பு வரைக.

30. "யூகித்தல்" மற்றும் வெளிப்படுத்துதல் என்பவற்றிலிருந்து முன் கணிப்பு எவ்வாறு வேறுபடுகிறது.

IV. கணக்குகள்

31. வரைபடத்தின் உதவியுடன் போக்கு மதிப்புகளைக் காண்க.

வருடம்	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002
மதிப்பு	65	85	95	75	100	80	130

32. வரைபட முறையில் பின்வரும் விவரங்களுக்கு போக்குக் கோடு பொருத்துக.

வருடம்	1982	1983	1984	1985	1986	1987
மதிப்பு	24	22	25	26	27	26

33. அரை சராசரி முறையில் போக்குக் கோடு வரைக.

வருடம்	1993	94	95	96	97	98	99	2000
விற்பனை	210	200	215	205	220	235	210	235

34. ஒரு தொழிற்சாலையின் உற்பத்தி பின்வருமாறு அரை சராசரி முறையில் போக்குக் கோடு வரைக.

வருடம்	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002
வெளியீடு	600	800	1000	800	1200	1000	1400

35. பின்வரும் விவரங்களுக்கு 3–வருட நகரும் சராசரி கணக்கிடுக.

வருடம்	91	92	93	94	95	96	97	98	99	00
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	15	18	17	20	23	25	29	33	36	40

36. ஒரு வணிக நிறுவனத்தின் 8 வருடங்களுக்கான இலாப விவரங்கள் பின்வருமாறு இதற்கான 3 வருட நகரும் சராசரியைக் கணக்கிடுக.

வருடம்	இலாபம்	வருடம்	இலாபம்
1995	15,420	1999	26,120
1996	14,470	2000	31,950
1997	15,520	2001	35,370
1998	21,020	2002	35,670

37. பின்வரும் விவரங்களுக்கு மைய நிலைப்படுத்தப்பட்ட 4 வருட நகரும் சராசரி கணக்கிடுக.

வருடம்	1940	1950	1960	1970	1980	1990	2000
இறக்குமதி செய்யப்பட்ட பஞ்சு கொள்முதல் ('000)	129	131	106	91	95	84	93

38. பின்வரும் விவரங்களுக்கு 4 வருடம் நகரும் சராசரியையும் போக்கு மதிப்பையும் அளவிடுக. கொடுக்கப்பட்ட மதிப்புகளையும் போக்கு மதிப்புகளையும் வரைபடத்தில் குறித்து காட்டுக.

வருடம்	93	94	95	96	97	98	99	00	01	02
மதிப்பு	50	36.5	43	44.5	38.9	38.1	32.6	41.7	41.1	33.8

39. கீழே கொடுக்கப்பட்ட விவரத்திற்கு 5 வருட நகரும் சராசரியை கணக்கிடுக.

வருடம்	1987	88	89	90	91	92	93	94
உற்பத்தி டன்களில்	4	5	6	7	9	6	5	7

வருடம்	95	96	97	98	99	2000	01	02
உற்பத்தி டன்களில்	8	7	6	8	9	10	7	9

40. பின்வரும் விவரங்களுக்கு மீச்சிறு வர்க்க முறையில் பொருத்தமான நேர்க்கோடு வரைந்து போக்கு மதிப்புகளைக் காண்க.

வருடம்	1996	1997	1998	1999	2000
தொலைக்காட்சி பெட்டிகளின் விற்பனை (ரூ.'000)	4	6	7	8	10

41. ஒரு சர்க்கரை ஆலையின் உற்பத்தி விவரங்கள் 1000 குவிண்டால்களில் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. மீச்சிறு வர்க்க முறையில் போக்கு மதிப்புகளைக் காண்க.

வருடம்	1994	95	96	97	98	99	2000
உற்பத்தி டன்களில்	80	90	92	83	94	99	92

42. பின்வரும் விவரங்களுக்கு மீச்சிறு வர்க்க முறையில் பொருத்தமான நேர்க்கோடு வரைக.

வருடம்	1996	97	98	99	2000	2001
இலாபம்	300	700	600	800	900	700

43. பின்வரும் விவரங்களுக்கு மீச்சிறு வர்க்க முறையில் பொருத்தமான நேர்க்கோடு வரைக. 2002ம் வருடத்திற்கான ஊதிய விகிதத்தை மதிப்பிடுக.

வருடம்	1993	94	95	96	97	98	99	2000
ஊதியம்	38	40	65	72	69	60	87	95

44. பின்வரும் விவரங்களுக்கு சராசரி மாறுபாடு கணக்கிடுக.

காலாண்டு

வருடம்	I	II	III	IV
1999	3.5	3.9	3.4	3.6
2000	3.5	4.1	3.7	4.0
2001	3.5	3.9	3.7	4.2
2002	4.0	4.6	3.8	4.5
2003	4.1	4.4	4.2	4.5

45. பின்வரும் காலத் தொடர் வரிசையில் பருவ கால மாறுபாடுகளைக் காண்க. நான்கு வருடங்களின் நிலக்கரி காலாண்டு உற்பத்தி அளவு கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

வருடம்

காலாண்டு	2000	2001	2002	2003
I	65	58	70	60
II	58	63	59	55
III	56	63	56	51
IV	61	67	52	58

விடைகள்

I

1. (இ) 2.(ஈ) 3. (இ) 4. (இ) 5. (அ) 6. (ஆ) 7. (அ) 8.(ஈ) 9. (இ) 10.(ஆ)

II.

11. காலம் சார் 12. பருவ கால 13. சுழல்கள்

14. நான்கு 15. போக்கு 16. மிகப் பொருத்தமான நேர்கோடு

17. யூகித்தல், விரிவாக்குதல் 18. முறையற்ற மாறுபாடுகள்

III

33. போக்கு மதிப்புகளாவன 200.94, 205.31, 209.69, 214.06, 218.43, 222.80, 227.19, 231.56

34. 700, 800, 900, 1000, 1100, 1200, 1300

35. 16.7, 18.3, 20, 22.7, 25.7, 29, 32.7, 36.3

36. 15137, 17003, 20363, 26363, 31.147, 34330

37. 110.0, 99.88, 92.38

38. 42.1, 40.9, 39.8, 38.2, 38.1, 37.8,

39. 6.2, 6.6, 6.6, 6.8, 7.0, 6.6, 6.6, 7.2, 7.6, 8.0, 8.0

40. போக்கு மதிப்புகளாவன 4.2, 5.6, 7, 8.4, 9.8

41. 84, 86, 88, 90, 92, 94, 96

42. 446.67, 546.67, 626.67, 706.67, 786.67, 866.67

43. 40.06, 47.40, 54.74, 62.08, 69.42, 76.76, 84.10, 91.44

44. 94.18, 105.82, 95.19, 105.32

45. 106.4, 98.7, 94.9,100

9. பண்புசார் கோட்பாடுகள்

9.0 அறிமுகம் :

பொதுவாக புள்ளியியல் என்பது எண்ணளவை விவரங்களுடன் தொடர்புடையது. ஆனால் நடத்தை சார் அறிவியலில் எண் அளவுகள் மூலம் அளவிட இயலாத பண்புகளை மாறிகளாகக் கருத வேண்டியுள்ளது. சரியாக கூற வேண்டும் எனில் பண்பு என்பது தனி இயல்பு அல்லது குண நலனைக் குறிக்கின்றது. எண்சார் அளவீடுகளுடன் தொடர்பில்லாத பண்புசார் குணங்களைப் பற்றி தெரிந்து கொள்வதே "பண்பு சார் கோட்பாடு"களின் நோக்கமாகும். எடுத்துக்காட்டாக உடல் நலம், நேர்மை, குருட்டுத்தன்மை போன்ற பண்புகளை நேரிடையாக அளக்க இயலாது. ஆனால் இப்பண்புகள் ஒருவரிடம் உள்ளதா அல்லது இல்லையா என்பதை நம்மால் காண இயலும். பண்புசார் புள்ளியியல் என்பது பண்புகளின் விளக்கத் தன்மையை அடிப்படையாகக் கொண்டது.

9.1 குறியீடுகள் :

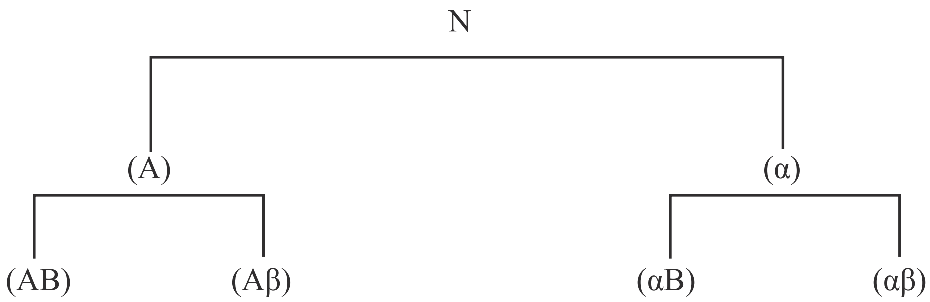
ஒரு குறிப்பிட்ட பண்பு "உண்டு" அல்லது "இல்லை" என்பதைப் பற்றி "பண்புகளின் உறவுகள்" என்ற தலைப்பில் படிக்கலாம். ஒரே ஒரு பண்பினை மட்டும் கருத்தில் கொண்டால் முழுமைத் தொகுதியானது, அந்த பண்பினைப் பொறுத்து அப்பண்பு உள்ள தொகுதி, பண்பு இல்லாத தொகுதி என இருபிரிவுகளாகப் பிரிக்கப்படுகிறது. மேலும் அத்தகைய பாகுபாடு "இரு பிரிவுப் பாகுபாடு"(dichotomy) எனப்படுகிறது.

இத்தகைய பிரிவு ஒன்றிற்கு மேற்பட்ட பண்புகளின் அடிப்படையில் பல பிரிவுகளாகப் பிரிக்கப்பட்டால் அத்தகைய பாகுபாடு "பல பண்புப் பாகுபாடு" (manifold attribute) என்று அழைக்கப்படுகிறது.

பொதுவாக பண்பினப் பாகுபாட்டில், இடம் பெறுகின்ற பண்புகள், உள்ள பிரிவுகளை "நேரிடைப் பிரிவுகள்" (Positive Classes) என்றும் அவை A,B,C…. என்ற ஆங்கிலப் பெரிய எழுத்துக்களாலும், அப்பண்புகள் இல்லாத பிரிவுகளை "எதிரிடைப் பிரிவுகள்" (Negative Classes) என்றும் அவை α, β, γ…. என்ற கிரேக்க எழுத்துக்களாலும் குறிக்கப்படுகின்றன. எடுத்துக்காட்டாக, A என்பது 'கல்வியறிவு' என்ற பண்பையும் B என்பது 'குற்றவாளி' என்பதையும் குறிப்பிட்டால் α, β என்பன முறையே 'கல்வியறிவற்ற' 'குற்றவாளி அல்ல' என்ற பண்புகளையும் குறிக்கின்றன.

9.2 பிரிவுகள் மற்றும் பிரிவு அலைவெண்கள் :

வெவ்வேறு பண்புகள், அவற்றின் உட்பிரிவுகள் மற்றும் அவற்றின் சேர்வுகள் ஆகியவை வெவ்வேறு பிரிவுகளாக கருதப்படுகின்றன. அவற்றிற்கு ஒதுக்கப்பட்ட கண்டறிந்த மதிப்புகள் அந்த பிரிவுகளின் அலைவெண்கள் என கருதப்படுகின்றன. இரு பண்புகளைப் பற்றி படிக்கும் பொழுது 9 பிரிவுகள் கிடைக்கின்றன. அதாவது, (A), (α), (B), (β), (A B) (A β), (α B), (α β), N, கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள படம் இதனை தெளிவாக்கும்.



ஒரு பிரிவில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை அதன் அலைவெண் என்றும், அப்பிரிவு அடைவு குறியீடு மூலமும் குறிப்பிடப்படுகிறது. அதாவது (A) என்பது A பண்பினைப் பெற்றவர்களின் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையையும், (AB) என்பது A, B என்ற இரு பண்புகளையும் ஒருங்கே பெற்றவர்களின் எண்ணிக்கையையும் குறிக்கின்றது. A, B என்ற இரு பண்புகளுக்கான நேர்வு பட்டியலில் கீழ்க்கண்டவாறு அட்டவணைப்படுத்தப்படுகிறது.

	A	α	மொத்தம்
B	(AB)	(αB)	(B)
β	(Aβ)	(αβ)	(β)
மொத்தம்	(A)	(α)	N

பிரிவு அலைவெண்களுக்கிடையிலான தொடர்பு :

எப்பொழுதும் மேல்நிலைப் பிரிவு அலைவெண்கள் மூலமாக கீழ்நிலைப் பிரிவு அலைவெண்களை எழுத இயலும்.

N = (A) + (α) = (B) + (β)

(A) = (AB) + (Aβ)

(α) = (αB) + (αβ)

(B) = (AB) + (α B)

(β) = (Aβ) + (α β)

பண்புகளின் எண்ணிக்கை 'n' எனில் 3^n என்ற பிரிவுகளும் 2^n என்ற கட்ட அலைவெண்களும் கிடைக்கும்.

9.3 புள்ளி விவரத்தின் பொருத்தமுடைமை :

கொடுக்கப்பட்ட புள்ளி விவரங்கள் பொருத்தமுடையனவா இல்லையா என்பதை அறிய ஒரு எளிய சோதனையை மேற்கொள்ள வேண்டும். கிடைக்கின்ற எல்லா பிரிவு அலைவெண்களில் ஒரு பிரிவு அலைவெண்ணோ ஒன்றிற்கு மேற்பட்ட பிரிவுகளின் அலைவெண்ணோ குறை எண்ணாக இருக்கின்றனவா என காண வேண்டும். குறை எண்ணை அலைவெண்ணாக உடைய எந்த ஒரு பிரிவும் இல்லையெனில் கொடுக்கப்பட்ட விவரங்கள் பொருத்தமுடையன (அதாவது எல்லா அலைவெண்களும் ஒன்றுடன் ஒன்று எவ்வகையிலும் முரண்படாது) மாறாக ஏதேனும் ஒரு பிரிவு அலைவெண் குறை எண்ணாக இருந்தால் கொடுக்கப்பட்ட விவரங்கள் பொருத்தமுடையவை இல்லை அல்லது முரணானவை என அறியலாம்.

எனவே ஒன்றையொன்று சாராத பிரிவுகளின் அலைவெண்கள் எதுவும் குறை எண்கள் இல்லை என்ற விவரங்கள் பொருத்தமுடைமைக்கு தேவையானதும் போதுமானதுமான நிபந்தனை ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1:

வழக்கமான குறியீடுகளின் படி N = 2500, (A) = 420, (AB) = 85, (B) = 670 என கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. விடுபட்ட மதிப்புகளைக் காண்க.

தீர்வு :

$N = (A) + (\alpha) = (B) + (\beta)$ .... (1)

$(A) = (AB) + (A\beta)$ .... (2)

$(\alpha) = (\alpha B) + (\alpha\beta)$ .... (3)

$(B) = (AB) + (\alpha B)$ .... (4)

$(\beta) = (A\beta) + (\alpha\beta)$

(2) லிருந்து $420 = 85 + (A\beta)$

$\therefore \quad (A\beta) = 420 - 85$

$(A\beta) = 335$

(4) லிருந்து $670 = 85 + (\alpha B)$

$\therefore \quad (\alpha B) = 670 - 85$

$(\alpha B) = 585$

(1) லிருந்து $2500 = 420 + (\alpha)$

$\therefore \quad (\alpha) = 2500 - 420$

$(\alpha) = 2080$

(1) லிருந்து $(\beta) = 2500 - 670$

$(\beta) = 1830$

(3) லிருந்து $= 2080 = 585 + (\alpha\beta)$

$\therefore (\alpha\beta) = 1495$

எடுத்துக்காட்டு 2:

வழக்கமான குறியீடுகளில் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களின் பொருத்தமுடைமையை ஆராய்க.

N = 1000, (A) = 600, (B) = 500, (AB) = 50

தீர்வு :

	A	α	மொத்தம்
B	50	450	500
β	550	– 50	500
மொத்தம்	600	400	1000

(αβ) = – 50 என்பது ஒரு குறை எண். எனவே கொடுக்கப்பட்ட விவரங்கள் பொருத்தமுடைமையில் இல்லை.

எடுத்துக்காட்டு 3:

கொடுக்கப்பட்ட விவரங்கள் பொருத்தமுடையனவா என ஆராய்க.

N = 60, (A) = 51, (B) = 32, (AB) = 25

தீர்வு :

	A	α	மொத்தம்
B	25	7	32
β	26	2	28
மொத்தம்	51	9	60

எல்லா அலைவெண்களும் மிகை எண்களாக இருப்பதால் கொடுக்கப்பட்ட விவரங்கள் பொருத்தமுடையவை ஆகும்.

9.4 பண்புகளின் சார்பற்ற தன்மை :

இரு பண்புகளுக்கிடையே தொடர்பு இல்லையெனில், அதாவது A, B என்ற பண்புகளில் 'A' என்ற பண்பு 'உண்டு' அல்லது 'இல்லை' என்பது மற்றொரு பண்பு B 'உண்டு' அல்லது 'இல்லை' என்பதைப் பொறுத்து அமையாது எனில் அவ்விரு பண்புகளும் சார்பற்றவை எனலாம். எடுத்துக்காட்டாக ஒருவரின் 'நிறம்' 'புத்தி கூர்மை' என்ற இரு பண்புகளும் சார்பற்ற பண்புகள் ஆகும். A, B என்ற இரு பண்புகளும் சார்பற்றவை எனில் A, B என்ற இரு பண்புகளும் ஒருங்கே நிகழ்வதற்குரிய அலைவெண், N ல் A பண்பு நிகழ்வதற்குரிய அலைவெண் × N ல் B பண்பு நிகழ்வதற்குரிய அலைவெண்ணிற்கு சமம்.

அதாவது (AB) ன் காணப்படுகின்ற அலைவெண் (AB) ன் எதிர்பார்க்கப்படும் அலைவெண்ணிற்கு சமம் எனில் A, B சார்பற்றவை ஆகும்.

அதாவது $(AB) = \frac{(A).(B)}{N}$

இதே போல் $(\alpha\ \beta) = \frac{(\alpha).(\beta)}{N}$

9.4.1 பண்புகளின் தொடர்பு (உறவு) :

A, B என்ற இரு பண்புகள் ஏதேனும் ஒரு விதத்தில் ஒன்றை ஒன்று சார்ந்து, அமையும் எனில் அதாவது ஒன்றுடன் ஒன்று தொடர்புடையது எனில், A, B பண்புகள் தொடர்புடையவை ஆகும்.

மேலும் $(AB) > \frac{(A).(B)}{N}$ எனில் A மற்றும் B ஆகியவை நேரிடையாகத் தொடர்புடையவை எனவும் $(AB) < \frac{(A).(B)}{N}$ எனில் அவை எதிரிடைத் தொடர்புடையவை எனவும் அழைக்கப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு 4:

கீழ்க்கண்ட விவரங்களிலிருந்து A, B என்ற பண்புகள் சார்பற்றவையா அல்லது நேரிடைத் தொடர்புடையவையா அல்லது எதிரிடைத் தொடர்புடையவா எனக் காண்க.

$(AB) = 128$, $(\alpha B) = 384$, $(A\beta) = 24$ $(\alpha\beta) = 72$

தீர்வு :

$$(A) = (AB) + (A\beta)$$
$$= 128 + 24$$
$$(A) = 152$$
$$(B) = (AB) + (\alpha B)$$
$$= 128 + 384$$
$$(B) = 512$$
$$(\alpha) = (\alpha B) + (\alpha\beta)$$
$$= 384 + 72$$
$$\therefore (\alpha) = 456$$
$$(N) = (A) + (\alpha)$$
$$= 152 + 456$$
$$= 608$$
$$\frac{(A)\times(B)}{N} = \frac{152\times 512}{608}$$
$$= 128$$
$$(AB) = 128$$
$$\therefore (AB) = \frac{(A)\times(B)}{N}$$

எனவே A யும் B யும் சார்பற்றவை ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 5:

பின்வரும் விவரங்களில் இருந்து A, B க்கிடையில் உள்ள உறவின் தன்மையைக் காண்க.

1) N = 200 (A) = 30 (B) = 100 (AB) = 15

2) N = 400 (A) = 50 (B) = 160 (AB) = 25

3) N = 800 (A) = 160 (B) = 300 (AB) = 50

தீர்வு :

1. (AB) ன் எதிர்பார்க்கப்படும் அலைவெண் (AB) $= \frac{(A).(B)}{N}$

$$= \frac{(30)(100)}{200} = 15$$

காணப்படும் அலைவெண் எதிர்பார்க்கப்படும் அலைவெண்ணிற்கு சமம். அதாவது 15 = 15

எனவே A மற்றும் B சார்பற்றவை ஆகும்.

2. (AB) ன் எதிர்பார்க்கப்படும் அலைவெண் (AB) $= \frac{(A).(B)}{N}$

$$= \frac{(50)(160)}{400} = 20$$

காணப்படுகின்ற அலைவெண் > எதிர்பார்க்கப்படும் அலைவெண் அதாவது 25 > 20

எனவே A, B நேரிடை தொடர்புடையவை ஆகும்.

3. (AB) ன் எதிர்பார்க்கப்படும் அலைவெண் (AB) $= \frac{(A).(B)}{N} = \frac{(160)(300)}{800} = 60$

காணப்படுகின்ற அலைவெண் < எதிர்பார்க்கப்படும் அலைவெண்

அதாவது 50 < 60

எனவே A, B எதிரிடைத் தொடர்புடையவை ஆகும்.

9.5 "யூலின்" தொடர்புக் (உறவு) கெழு :

மேலே கூறப்பட்ட எடுத்துக்காட்டு A, B க்கிடையே எவ்வகை உறவு உள்ளது என்பதை கூறுகிறதே தவிர அவ்வுறவின் அளவை விளக்கவில்லை. பேராசிரியர் G. ஊன்டி யூல் (G. Undy Yule) என்பவர் தொடர்பின் அளவை அளவிடுவதற்கு ஒரு வாய்பாட்டினைக் கூறினார். இது A, B பண்புகளுக்கிடையிலான 'சார்பு அளவை' ஆகும். A, B, α மற்றும் β என்பவற்றின் நான்கு வெவ்வேறு சேர்வுகள் (AB), (αB), (Aβ) மற்றும் ($\alpha\beta$) எனில் யூலின் பண்பு உறவுக்கெழு ஆனது

$$Q = \frac{(AB)(\alpha\beta) - (A\beta).(\alpha B)}{(AB)(\alpha\beta) + (A\beta).(\alpha B)}$$

குறிப்பு :

I. $Q = +1$ எனில் A, B க்கிடையே முழுமையான நேரிடை உறவு உள்ளது.

$Q = -1$ எனில் A, B க்கிடையே முழுமையான எதிரிடை உறவு உள்ளது.

$Q = 0$ எனில் A, B அவற்றிற்கிடையே உறவு இல்லை. அதாவது A மற்றும் B சார்பற்றவை.

2. இதை நினைவில் வைத்து கொள்வதற்கு கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள அட்டவணையைப் பயன்படுத்துகிறோம்.

	A	α
B	AB	αB
β	Aβ	αβ

எடுத்துக்காட்டு 6 :

கீழே கொடுக்கப்பட்ட விவரத்தில் இருந்து தந்தை மற்றும் மகன் கண்களின் கருமை நிறங்களுக்கிடையிலான உறவின் தன்மையை ஆராய்க.

கருமை நிறக் கண்களுடைய மகன்களைப் பெற்ற கருமை நிறக் கண்களுடைய தந்தையர் = 50

கருமை நிறமற்ற கண்களுடைய மகன்களைப் பெற்ற கருமை நிறக் கண்களுடைய தந்தையர் = 79

கருமை நிறக் கண்களுடைய மகன்கள், கருமை நிறமற்ற கண்களுடைய தந்தையர் = 89

கருமை நிறமற்ற கண்களுடைய மகன்கள், கருமை நிறமற்ற கண்களுடைய தந்தையர் = 782

தீர்வு :

'A' என்பது கருமை நிறக் கண்களைப் பெற்ற தந்தையும் 'B' என்பது கருமை நிறக் கண்களைப் பெற்ற மகன்களையும் குறிக்கட்டும்.

	A	α	மொத்தம்
B	50	89	139
β	79	782	861
மொத்தம்	129	871	1000

'யூல்' உறவு கெழு

$$Q = \frac{(AB)(\alpha\beta) - (A\beta).(\alpha B)}{(AB)(\alpha\beta) + (A\beta).(\alpha B)}$$

$$= \frac{50 \times 782 - 79 \times 89}{50 \times 782 + 79 \times 89}$$

$$= \frac{32069}{46131} = 0.69$$

∴ தந்தை மகன்களின் கண்களுக்கிடையே முழுமையான நேரிடை உறவு உள்ளது எனலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 7 :

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களைக் கொண்டு அம்மை குத்துதலை ஒரு தடுப்பு முறையாக ஏற்றுக் கொள்ளலாமா என ஆராய்க.

அம்மை நோயால் பாதிக்கக் கூடிய சூழ்நிலையில் உள்ள 1482 பேர்களில் 368 பேர் அம்மை நோயால் பாதிக்கப்பட்டனர். அந்த 1482 பேரில் 343 பேர் தடுப்பு ஊசி போடப்பட்டவர்கள். அவர்களில் 35 பேர்கள் அம்மையால் பாதிக்கப்பட்டனர்.

தீர்வு :

'A' என்பது அம்மை குத்தி கொண்டவர்களையும் 'B' என்பது அந்நோயால் பாதிக்கப்பட்டவர்களையும் குறிப்பதாகக் கொள்வோம்.

	A	α	மொத்தம்
B	35	333	368
β	308	806	1114
மொத்தம்	343	1139	1482

'யூல்' தொடர்பு கெழு

$$Q = \frac{(AB)(\alpha\beta) - (A\beta).(\alpha B)}{(AB)(\alpha\beta) + (A\beta).(\alpha B)}$$

$$= \frac{35 \times 806 - 308 \times 333}{35 \times 806 + 308 \times 333}$$

$$= \frac{-74354}{130774} = -0.57$$

அதாவது 'அம்மை குத்தலுக்கும்' பாதிக்கப்பட்டவர்களுக்கும் இடையே எதிரிடைத் தொடர்பு உள்ளது. இதையே 'அம்மை குத்தலுக்கும்' பாதிக்கப்படாமைக்கும் நேரிடையான தொடர்பு உள்ளது எனலாம். எனவே அம்மை குத்திக் கொள்வதன் மூலம் இந்நோயை தடுக்க இயலும் என்ற முடிவிற்கு வரலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 8 :

இருபாலர் பயிலும் ஒரு கல்வி நிலையத்தில் படிக்கும் 200 பேர்களில் 150 பேர் மாணவர்கள். அவர்களில் 120 பேர் தேர்வில் தேர்ச்சி அடைந்தனர். 10 மாணவிகள் தோல்வியுற்றனர். தேர்வில் வெற்றி பெற்றமைக்கும் பாலினத்திற்கும் இடையே ஏதேனும் தொடர்பு உள்ளதா என ஆராய்க.

தீர்வு :

N = 200 (A) = 150 (AB) = 120 (αβ) = 10

'A' என்பது மாணவர்களையும் 'α' என்பது மாணவியரையும் குறிக்கட்டும்.

'B' என்பது தேர்வில் வெற்றி பெற்றவரையும் 'β' என்பது தோல்வி அடைந்தவரையும் குறிக்கட்டும்.

நமக்கு கொடுக்கப்பட்டவை N = 200

மற்ற அலைவெண்களை கீழ்க்கண்ட அட்டவணை மூலம் கணக்கிடலாம்.

	A	α	மொத்தம்
B	120	40	160
β	30	10	40
மொத்தம்	150	50	200

'யூல்' தொடர்புக் கெழு

$$Q = \frac{(AB)(\alpha\beta) - (A\beta).(\alpha B)}{(AB)(\alpha\beta) + (A\beta).(\alpha B)}$$

$$= \frac{120 \times 10 - 30 \times 40}{120 \times 10 + 30 \times 40} = 0$$

எனவே, தேர்வில் வெற்றி பெறுதலுக்கும் 'பாலினத்திற்கம்' தொடர்பு இல்லை என அறியலாம்.

நினைவு கூர்க

(A), (B) என்பவை நேரிடை பண்புகள்

(α), (β) என்பவை எதிரிடை பண்புகள்

	A	α	மொத்தம்
B	(AB)	(αB)	(B)
β	(Aβ)	(αβ)	(β)
மொத்தம்	(A)	(α)	N

மொத்தம் நேர்குத்தாக	மொத்தம் கிடையாக
(AB) + (Aβ) = (A)	(AB) + (αB) = B
(αB) + (αβ) = (α)	(Aβ) + (αβ) = β
(B) + (β) = N	(A) + (α) = N

உறவுகளின் தன்மைகள்

$$(AB) > \frac{(A).(B)}{N}$$ எனில் நேரிடைத் தொடர்பு

$$(AB) < \frac{(A).(B)}{N}$$ எனில் எதிரிடைத் தொடர்பு

$$(AB) = \frac{(A).(B)}{N}$$ எனில் அவை சார்பற்றவை

'யூல்' தொடர்புக் கெழு

$$Q = \frac{(AB)(\alpha\beta) - (A\beta).(\alpha B)}{(AB)(\alpha\beta) + (A\beta).(\alpha B)}$$

பயிற்சி – 9

I. **சரியான விடையைத் தெரிந்து எடுக்கவும்** :

1. 'உறவுகளின் அளவை' என்பது வழக்கமாக கீழ்க்கண்டவற்றுள் எதனுடன் தொடர்புடையவை.

   அ) பண்புகள் ஆ) எண்சார் காரணிகள்

   இ) மாறிகள் ஈ) எண்கள்

2. ஒரு பிரிவின் அலைவெண் என்பது எப்பொழுதும் எவ்வரிசை அலைவெண்களின் கூடுதலைக் கொண்டது

   அ) கீழ்வரிசை பிரிவுகள் ஆ) மேல்வரிசை பிரிவுகள்

   இ) பூஜ்ஜிய வரிசை பிரிவுகள் ஈ) இவற்றில் எதுவும் இல்லை

3. இரு பண்புகளைக் கருதும் போது பிரிவு அலைவெண்களின் எண்ணிக்கை

   அ) இரண்டு ஆ) நான்கு இ) எட்டு ஈ) ஒன்பது

4. A, B என்ற இரு பண்புகளுக்கு $(AB) > \frac{(A).(B)}{N}$ எனில் அவ்விரு பண்புகளும்

   அ) சார்பற்றவை ஆ) நேரிடைத் தொடர்பு உடையவை

   இ) எதிரிடைத் தொடர்பு உடையவை ஈ) ஒரு முடிவிற்கும் வர இயலாது

5. A, B என்ற இரு பண்புகளுக்கு $(AB) = 0$ எனில் Q ன் மதிப்பு

   அ) 1 ஆ) -1 இ) 0 ஈ) $-1 \leq Q \leq 1$

II. **கோடிட்ட இடங்களை நிரப்புக** :

6. ஒரு பண்பு இரு பிரிவுகளை கொண்டிருந்தால் அது __________ என்று அழைக்கப்படும்.

7. விவரங்கள் பொருத்தமுடைமை பெற்றிருப்பின் எந்த பிரிவு அலைவெண்ணும் _________ இருக்க இயலாது.

8. A, B என்ற பண்புகள் ஒன்றை ஒன்று சாராதவை எனில் யூலின் கெழுவானது ________

9. A, B என்பவை எதிரிடைப் பண்புகளைப் பெற்றிருப்பின் __________

10. N = 500, (A) = 300, (B) = 250 மற்றும் (AB) = 40 என்ற விவரங்கள் ________

III. **கீழ்க்கண்டவற்றிற்கு விடையளி** :

11. பண்பின பாகுபாட்டில் பயன்படுத்தப்படும் குறியீடுகளைப் பற்றி சுருக்கமாக கூறுக.

12. பலவித பண்புகளின் அலைவெண்கள் எவ்விதம் நேர்வு பட்டியலில் அமைக்கப்படுகின்றன ?

13. 'பொருத்தமுடைமை' விவரங்கள் பற்றி நீவிர் புரிந்து கொண்டது என்ன ?

14. பண்புகளின் உறவு பற்றி சுருக்கமாக விவரிக்கவும்.

15. யூலின் தொடர்புக் கெழுவை கூறுக.

IV. **கணக்குகள்**

16. A, B என்ற இரு பண்புகளுக்கு (AB) = 35, (A) = 55; N=100, (B) = 65 எனில் விடுபட்ட மதிப்புகளைக் கணக்கிடுக.

17. பின்வரும் பண்பு அலைவெண்களில் இருந்து நேர்பண்புகள் மற்றும் எதிர் பண்புகளின் அலைவெண்களையும் மொத்த எண்ணிக்கையும் காண்க. (AB) = 9, (Aβ) = 14, (αB) = 4, ($\alpha\beta$) = 37.

18. கொடுக்கப்பட்ட விவரங்கள் N = 100, (A) = 75, (B) = 60, (AB) = 15 என்பன பொருத்தமுடைமை உடையனவா என சரிபார்க்கவும்.

19. (AB) = 256 (αB) = 768 (Aβ) = 48 ($\alpha\beta$) = 144 என்ற விவரங்களில் இருந்து A மற்றும் B என்பன சார்பற்ற பண்புகளா என ஆராய்க.

20. நுகர்வோர் விருப்பத்தை பற்றிய ஆய்வறிக்கையில் 500 பேரில் 410 பேர் A வகையையும் 380 பேர் B வகையையும் 270 பேர் இரண்டையும் விரும்புகின்றனர். இவ்விவரங்கள் பொருத்தமுடைமை தன்மை பெற்றுள்ளதா எனக் காண்க.

21. A, B என்ற இரு பண்புகளுக்கு (AB) = 35, (A) = 55, N=100, ($\alpha\beta$) = 20 எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இவ்விவரங்களுக்கு யூலின் தொடர்புக் கெழுவைக் காண்க.

22. N = 1500, (A) = 383, (B) = 360 மற்றும் (AB) = 35. இதற்கான 2×2 நேர்வுப் பட்டியலையும் யூலின் தொடர்புக் கெழுவையும் கணக்கிடுக. மேலும் இம்முடிவினை விளக்குக.

23. கீழ்க்கண்ட, கால்நடைகளுக்கான காசநோய் தடுப்பு அட்டவணையிலிருந்து யூல் தொடர்புக் கெழுவைக் காண்க.

	பாதிக்கப் பட்டவைகள்	பாதிக்கப் படாதவைகள்
தடுப்பு ஊசி போடப்பட்டவை	12	26
தடுப்பு ஊசி போடப்படாதவை	16	6

மேலும் இத்தடுப்பூசி போடப்படுவதால் இந்நோயைத் தடுக்க முடியுமா ? எனக் காண்க.

24. பின்வரும் விவரங்களிலிருந்து தந்தை மகன்களின் புத்தி கூர்மைக்கிடையே உள்ள தொடர்பினை கணக்கிடுக.

புத்தி கூர்மை உடைய மகன்களை பெற்ற புத்தி கூர்மை உடைய தந்தையர்கள் = 300

மந்தமான மகன்களைப் பெற்ற புத்தசாலி தந்தையார் = 100

புத்திசாலி மகன்களைப் பெற்ற மந்தமான தந்தையர் = 50

மந்தமான மகன்களைப் பெற்ற மந்தமான தந்தையர் = 500

25. ஒரு தொழிற்சாலையில் உள்ள 3000 திறமையற்ற தொழிலாளிகளில் 2000 பேர் கிராமப்புறத்தவர்கள் 1200 திறமையான தொழிலாளிகளில் 300 பேர் கிராமபுறத்தினர் இதிலிருந்து திறமைக்கும் இருப்பிடத்திற்கும் இடையே ஏதேனும் தொடர்பு உள்ளதா என ஆராய்க.

26. மலேரியாத் தடுப்புத் துறை முகாம் மூலம் ஒரு ஊரில் மொத்தமுள்ள 3248 பேர்களில் 812 பேர்களுக்கு கொய்னா மாத்திரைகள் கொடுக்கப்பட்டன. மலேரியா காய்ச்சல் கண்டவர்கள் பற்றிய விவரம் பின்வருமாறு :

சிகிச்சை	காய்ச்சல் கண்டவர்கள்	காய்ச்சல் வராதவர்கள்
கொய்னா சாப்பிட்டவர்கள்	20	792
சாப்பிடாதவர்கள்	220	2216

மலேரியா தடுப்பில் கொய்னாவின் பயனை ஆராய்க.

27. 1500 பேர் எழுதிய போட்டித் தேர்வில் 425 பேர் வெற்றி பெற்றனர். இதில் தனிப்பயிற்சி பெற்ற 250 பேரில் 150 பேர் வெற்றி பெற்றனர். தனிப்பயிற்சியின் பயன்பாட்டை மதிப்பிடுக.

28. ஒரு தேர்வெழுதிய 600 பேர்களில் 348 பேர் மாணவர்கள், தோல்வியுற்றவர்களை விட தேர்ச்சி அடைந்தவர்கள் 310 பேர் அதிகம். தேர்வில் தோல்வியுற்ற மாணவர்களின் எண்ணிக்கை 88 பேர். தேர்வில் வெற்றி பெறுதல் பாலினம் இவற்றிற்கிடையே உள்ள தொடர்புக் கெழு காண்க.

29. **500 பேர்களைக் கொண்ட தொகுதியில் கல்வியறிவிற்கும் வேலையில்லாமைக்கும் உள்ள தொடர்பினை பின்வரும் விவரம் அளிக்கிறது. கல்வியறிவிற்கும் வேலையில்லாமைக்கும் இடையே உள்ள யூல் தொடர்பு கெழுவைக் காண்க.**

கல்வியறிவு பெற்ற வேலை இல்லாதோர் = 220

கல்வியறிவு பெற்ற வேலை உள்ளவர்கள் = 20

கல்வியறிவற்ற வேலை இல்லாதோர் = 180

30. **400 பேரைக் கொண்ட மாணவர் தொகுதியில் 160 பேர் திருமணமானவர்கள், தோல்வியுற்ற 120 மாணவர்களில் 48 பேர் திருமணமானவர்கள், திருமணமும் தேர்வில் பெற்ற தோல்வியும் ஒன்றுடன் ஒன்று சார்பற்றவையா எனக் காண்க.**

விடைகள் :

I.

1. (அ) 2. (ஆ) 3. (ஈ) 4. (ஆ) 5. (ஆ)

II.

6. இரு பிரிவு பாகுபாடு 7. குறையெண்ணாக 8. 0

9. $AB < \frac{(A).(B)}{N}$ 10. பொருத்தமுடையன அல்ல

IV.

16.

	A	α	மொத்தம்
B	35	30	65
β	20	15	35
மொத்தம்	55	45	100

17.

	A	α	மொத்தம்
B	9	4	13
β	14	37	51
மொத்தம்	23	41	64

மொத்த எண்ணிக்கை = 64

18. பொருத்தமுடையன அல்ல

19. A, B இரண்டும் ஒன்றை ஒன்று சாராதவை
20. பொருத்தமுடையன அல்ல
21. 0.167
22. – 0.606, எதிரிடை தொடர்புடையன
23. - 0.705, தடுப்பூசி போட்டு கொள்ளுதல் நல்லது
24. + 0.935
25. திறமையும் இருப்பிடமும் எதிரிடைத் தொடர்புடையவை
26. – 0.59. எதிரிடைத் தொடர்பு எனவே கொய்னா எடுத்துக் கொள்வது நல்லது
27. + 0.68. சிறப்பு பயிற்சி பலனளிக்கக் கூடியது.
28. – 0.07
29. 0.92 கல்வியறிவிற்கும் வேலை இல்லாமைக்கும் இடையே நேரிடைத் தொடர்பு உள்ளது.
30. Q = 0, திருமணமும், தேர்வில் தோல்வியும் ஒன்றை ஒன்று சாராதவை.

10. தீர்மானக் கோட்பாடு

10.0 அறிமுகம்:

தீர்மானக் கோட்பாட்டின் முதலாவதான தொடர்பானது மக்கள் மற்றும் அமைப்புகள் மேற்கொள்ளப்படும் தீர்வுகளுக்கு உதவி புரிதலாகும். இது தீர்வுகளுக்கான முக்கிய முடிவுகளை மேற்கொள்ள பொருள் தருகின்ற கருத்துணர்வுகளை திரட்டித் தருகிறது. தீர்மானித்தல் என்பது எதனை குறிப்பிடுகிறது எனில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள சூழ்நிலையில் பல்வேறான செயற்பாங்குகளில் சிறந்ததொரு செயற்பாங்கினை தேர்வு செய்வதாகும்.

திட்டமிடுதல், அமைப்புகள், வழிகாட்டுதல், உத்திரவிடுதல் மற்றும் கட்டுப்படுத்துதல் என பல்வேறான தோற்றங்களை மேலாண்மையாளர்கள் கருத்தில் கொள்ள வேண்டும். பலவிதமான செயற்பாங்குகளை செயல்படுத்தும் போது மேலாண்மையாளர்கள் பல்வேறான சூழ்நிலைகளை எதிர்கொண்டு அவற்றில் சிறந்த ஒன்றை தேர்வு செய்தல் வேண்டும். இவ்வாறு சிறந்த ஒன்றை தேர்வு செய்தல் என்பதை தொழில் நுட்ப சொல்லால் கூறும் பொழுது தீர்மானம் மேற்கொள்வது "அல்லது" தீர்மானம் எடுத்துக் கொள்வது எனப்படும். தீர்மானம் மேற்கொள்வது என்பது வரையறைப்பதாவது "பல்வேறான செயற்பாங்குகளின் தொகுதியிலிருந்து சிறந்த செயற்பாங்கை தேர்வு செய்வதாகும்". அவ்வாறு தேர்வு செய்யப்பட்ட செயற்பாங்கு தீர்மானம் மேற்கொள்பவரின் நோக்கங்களை திருப்தி செய்வதாக எடுத்துக் கொள்ளப்படுகிறது.

சிறந்த செயற்பாங்கினை தேர்வு செய்வதற்கு புள்ளியியல் அறிவு உத்தி முறை உதவி புரிகின்றது. ஐயப்பாட்டு நிலையில் உகந்ததொரு தீர்வினை தேர்வு செய்ய புள்ளியியல் தீர்மானக் கோட்பாடு வழிகாட்டுகிறது. இத்தகைய சூழ்நிலையில் நிகழ்தகவுக் கொள்கை இன்றியமையாத பங்கு வைக்கின்றது. ஐயப்பாட்டு நிலை மற்றும் இடையூறு உள்ள நிலையில் தீர்மானக் கோட்பாடு நிலைக்கு நிகழ்தகவு கொள்கை மிக அதிக அளவில் அடிக்கடி பயன்படுகிறது.

புள்ளியியல் தீர்மானக் கோட்பாடானது காரண காரியத் தொடர்புடைய பிரச்சினை அமைப்புகளை செயற்பாங்கின் மாற்று நடவடிக்கை, சூழ்நிலையின் நிலைப்பாடுகள், நிகழக் கூடிய விளைவுகள் மற்றும் ஒவ்வொரு விளைவுக்கான நிகழக் கூடிய அளித்தல்களையும் வெளிப்படுத்துகிறது. தற்பொழுது பிரச்சினைக்கான தீர்வினை தீர்மானக் கோட்பாடு அணுகு முறையில் தீர்வு காண அதன் தொடர்புடைய கருத்துக்களை விளக்குவோம்.

தீர்மானித்தல் முடிவு எடுப்பவர் :

தீர்மானித்தல் முடிவு எடுப்பவர் என்பது ஒரு தனி நபரோ அல்லது ஒரு குழுவிலுள்ள நபர்களோ, கிடைக்கக் கூடிய செயற்பாங்கு நடவடிக்கைகளில் தகுந்ததொரு செயற்பாங்கு நடவடிக்கையை தேர்ந்தெடுப்பதற்கு பொறுப்பானவரை குறிப்பது ஆகும்.

செயற்பாங்கு (அல்லது) செயற்பாங்கின் நடவடிக்கைகள் :

பிரச்சினைகளுக்கு தீர்மானக் கோட்பாட்டின் பங்கானது, மாற்று நடவடிக்கைகளைக் கொண்ட செயற்பாங்குகளிலிருந்து ஒரு செயற்பாங்கினை தேர்வு செய்தலாகும். இரண்டு அல்லது இரண்டிற்கு மேற்பட்ட செயற்பாங்குகளைக் கொண்ட பிரச்சினை சூழ்நிலையில் தீர்மானக் கோட்பாட்டைக் கொண்டு ஒரு செயற்பாங்கு நடவடிக்கையை தேர்வு செய்ய அவசியமாகிறது.

a_1, a_2, a_3,… எனக் கொண்டுள்ள செயற்பாங்குகள் அல்லது செயல்கள் என எடுத்துக் கொண்டால், அனைத்து செயற்பாங்குகளின் மொத்தமானது 'செயற்பாங்குவெளி' (action space) எனவும், இதனை A என குறிப்பிடப்படுகிறது. மூன்று செயற்பாங்குகள் a_1, a_2 a_3 எனில் A = செயற்பாங்குவெளி = (a_1, a_2, a_3) அல்லது A = (A_1, A_2, A_3) செயற்பாங்குவெளி அல்லது செயற்பாங்குகளைக் கீழ்க்கண்ட அணி வாயிலாக நிரையாகவோ அல்லது நிரல்களாகவோ தெரிவு செய்யலாம்.

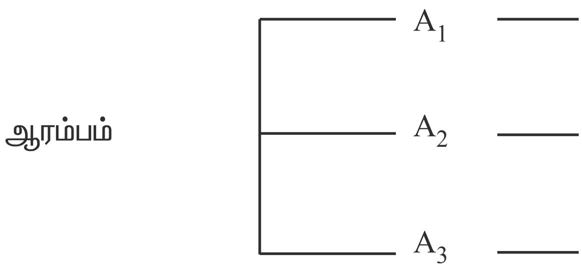
செயற்பாங்குகள்
A_1
A_2
. .
An

அல்லது

செயற்பாங்குகள்

A_1	A_2	. . .	An

செயற்பாங்கு அல்லது செயற்பாங்குகளை ஒரு மர வடிவ விளக்கப்படம் மூலமாகவும் காண்பிக்கலாம்.



நிகழ்ச்சிகள் (அல்லது சூழ்நிலைகளின் நிலைப்பாடு) :

தீர்மானித்தலின் முடிவு எடுப்பவரின் கட்டுப்பாட்டிற்கு வெளியே உள்ள பொழுது கொடுக்கப்பட்டுள்ள செயற்பாங்கு எந்த அளவு வெற்றி அடைந்துள்ளது என்பதை நிர்ணயம் செய்ய நிகழ்கின்ற நிகழ்ச்சிகள் அடையாளம் காண்பிக்கின்றது. இத்தகைய நிகழ்ச்சிகளை சூழ்நிலைகளின் நிலைப்பாடு அல்லது விளைவுகள் என அழைக்கின்றோம். ஒரு குறிப்பிட்ட பொருளுக்கு நிர்ணயிக்கப்பட்ட கால அளவில் சந்தையில் தேவையின் அளவை நிகழ்ச்சி அல்லது சூழ்நிலையின் நிலைப்பாட்டிற்கு ஓர் எடுத்துக்காட்டாகும்.

ஒரு கணத்தின் வாயிலாக சூழ்நிலைகளின் நிலைப்பாட்டைக் கீழ்க்கண்ட ஏதேனும் ஒரு முறையில் தெரிவு செய்யலாம்.

$$S = \{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$$

அல்லது $E = \{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$

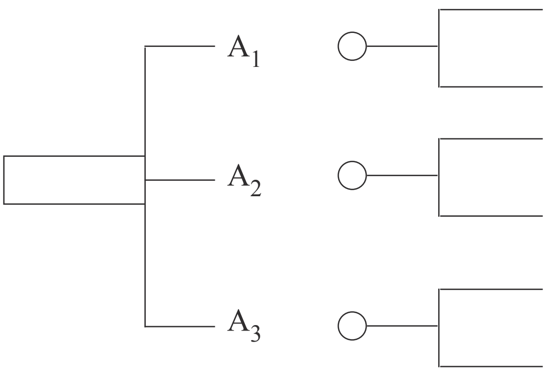
அல்லது $\Omega = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$

எடுத்துக்காட்டாக ஒரு சந்தையில் சலவைத்தூள் விற்பனைக்கு வருகையில் அதனை அதிகப்படியான அளவில் விரும்புகின்றவர்களின் விளைவுகள் (விளைவு θ_1) அல்லது வெளிப்பாடு வாடிக்கையாளர்கள் கவனத்திற்கு செல்லாதது (விளைவு θ_2) அல்லது ஒரு சிறிய விகிதாச்சாரா வாடிக்கையாளர்களால் விரும்பப்படுவது அதனை 25% என்போம். (விளைவு θ_3).

\ ஆகவே $\Omega = \{\theta_1 , \theta_2, \theta_3\}$

மர வடிவ விளக்கப்படத்தில் செயற்பாங்குகளுக்கு அடுத்த இடத்தில் குறிக்கப்படுகிறது. ஏற்படுகின்ற நிகழ்ச்சிகள் மூலம் மற்றொரு செயற்பாங்கு நமக்கு கிடைப்பதை கீழ்க்கண்டவாறு குறிப்பிடலாம்.

செயற்பாங்கு நிகழ்ச்சிகள்



இதனை அணி வாயிலாக, இரு வழிகளில் ஏதேனும் ஒரு வழியில் தெரிவு செய்யலாம்.

சூழ்நிலையின் நிலைப்பாடுகள் → செயற்பாடுகள் ↓	S_1	S_2
A_1 A_2		

அல்லது

செயற்பாடுகள் → சூழ்நிலையின் நிலைப்பாடுகள் ↓	$A_1\ A_2, ..., A_n$
S_1 S_2	

10.1 அளித்தல்கள் (Pay-off) :

அளித்தல் என்பது ஒவ்வொரு சூழ்நிலையின் நிலைப்பாடுகளின் செயற்பாங்கு சேர்வுகளின் முடிவானது ஒவ்வொரு சூழ்நிலையின் நிலைப்பாடுகளின் விளைவு மற்றும் கணநேரமே நிலைக்கின்ற ஒவ்வொரு விளைவின் ஆதாயம் அல்லது இழப்பு ஆகும். இதை எண் அளவையில் குறிப்பிடப்பட வேண்டும் எனக் குறிக்கின்றது.

அளித்தல்கள் பண சேமிப்பு அல்லது நேர சேமிப்பு எனவும் குறிப்பிடப்படுகிறது. பொதுவாக k மாற்று நடவடிக்கைகள் மற்றும் n சூழ்நிலையின் நிலைப்பாடுகள் இருக்குமானால் அதன் விளைவுகளானது $k \times n$ எண்ணிக்கை அல்லது அளித்தல்கள் ஆகும்.

இத்தகைய $k \times n$ அளித்தல்களை, மிக வசதியாக $k \times n$ அளித்தல்கள் அட்டவணையாக தெரிவு செய்யலாம்.

சூழ்நிலையின் நிலைப்பாடு	தீர்மானத்தின் மாற்று நடவடிக்கை			
	A_1	A_2	....	A_k
E_1	a_{11}	a_{12}	....	a_{1k}
E_2	a_{21}	a_{22}	....	a_{2k}
.	.	.	....	.
.	.	.	....	.
.	.	.	....	.
E_n	a_{n1}	a_{n2}	....	a_{nk}

மேற்கண்ட அளித்தல் அட்டவணையை அளித்தல் அணி எனக் கூறலாம். இங்கு $a_{ij} = i$ என்கிற நிகழ்ச்சியில் j என்கிற மாற்று நடவடிக்கை என தேர்வு செய்யும் பொழுது கட்டுப்பாட்டு வெளிப்பாடாகும். எடுத்துக்காட்டாக ஒரு விவசாயி தன் விளை நிலத்தில் மூன்று வகையான பயிர்களில் ஏதேனும் ஒன்றை பயிரிடுகிறார். பயிர் விளைச்சல் வானிலையைப் பொறுத்து அமைகின்றது. ஒவ்வொரு பயிறுக்கும் தனித்தனியாக அளித்தல்களை மூன்று விளை பொருட்களின் விளைச்சல்களின் விலைகளை அட்டவணையின் கடைசி நிரலாக காண்பிக்கப்படுகிறது.

ஒரு ஹெக்டேரில் விளைச்சல் (கிலோவில்)	வானிலை				
		வறட்சி (E_1)	நடுத்தரமான (E_2)	ஈரம் (E_3)	விலை ரூ. (கிலோ வுக்கு)
	நெல் (A_1)	500	1700	4500	1.25
	கடலை (A_2)	800	1200	1000	4.00
	புகையிலை (A_3)	100	300	200	15.00

அளித்தல்கள் அட்டவணை

	E_1	E_2	E_3
A_1	$500 \times 1.25 = 625$	$1700 \times 1.25 = 2125$	$4500 \times 1.25 = 5625$
A_2	$800 \times 4 = 3200$	$1200 \times 4 = 4800$	$1000 \times 4 = 4000$
A_3	$100 \times 15 = 1500$	$300 \times 15 = 4500$	$200 \times 15 = 3000$

10.1.1 இழப்பு (அல்லது சந்தர்ப்ப இழப்பு) :

ஒரு சூழ்நிலைப்பாடுகளில் கிடைக்கக் கூடிய அதிகபட்ச லாபத்திற்கும் ஒரு குறிப்பிட்ட செயற்பாங்கில் கிடைக்கக் கூடிய அதிக பட்ச லாபத்திற்கும் இடையே உள்ள வித்தியாசம் சந்தர்ப்ப இழப்பு ஆகும். அதாவது சந்தர்ப்ப இழப்பு என்பது சிறந்த செயற்பாங்கினை செயற்படுத்தாமல் இருந்ததற்கான இழப்பு ஆகும். ஒவ்வொரு சூழ்நிலைப்பாட்டிற்கும் தனித்தனியாக சந்தர்ப்ப இழப்பு கணக்கிடப்படுகிறது. கொடுக்கப்பட்டுள்ள சூழ்நிலைபாடுகளில் சந்தர்ப்ப இழப்பின் செயற்பாடு அச்செயற்பாட்டின் அளித்தல் மற்றும் தேர்வு செய்யப்பட்ட சிறந்த செயற்பாட்டின் அளித்தலுக்கும் உள்ள வித்தியாசமாகும்.

$P_{11}, P_{12}\ldots\ldots\ldots P_{1n}$ என்பன அளித்தலின் விளைவுகள் முதல் நிறையில் உள்ளது என்றும், இதுபோலவே மற்ற நிறைகளிலும் குறிக்கலாம்.

அளித்தல் அட்டவணை

செயற்பாடு	சூழ்நிலைகளின் நிலைப்பாடு			
	S_1	S_2	....	S_n
A_1	P_{11}	P_{12}	....	P_{1n}
A_2	P_{21}	P_{22}	....	P_{2n}
.	.	.		.
.	.	.		.
.	.	.		.
A_m	P_{m1}	P_{m2}	....	P_{mn}

ஒரு நிலையான சூழ்நிலையின் நிலைப்பாடு S_i ஐ எடுத்துக் கொள்வோம்.

$P_{i1}, P_{i2},\ldots,P_{in}$ என்பன n உத்திகளுக்கான அளித்தல்கள் ஆகும். இவைகளில் M_i என்பது அதிகபட்சம் அளித்தல் என்போம். P_{i1} என்பது செயற்பாடு A_1 ஐ பயன்படுத்தும் பொழுது தீர்மானம் எடுத்துக் கொள்கின்றவரின் சந்தர்ப்ப இழப்பு $M_1 - P_{i1}$ மற்றும் பிற.

கீழ்க்கண்ட அட்டவணை சந்தர்ப்ப இழப்பு கணக்கிடப்படுவதைக் காட்டுகின்றது.

கழிவிரக்கம் (அல்லது சந்தர்ப்ப இழப்பு அட்டவணை)

செயற்பாடுகள்	சூழ்நிலைகளின் நிலைப்பாடுகள்			
	S_1	S_2	....	S_n
A_1	M_1-P_{11}	M_2-P_{12}	....	M_n-P_{1n}
A_2	M_1-P_{21}	M_2-P_{22}	....	M_n-P_{2n}
.	.	.		.
.	.	.		.
.	.	.		.
A_m	M_1-P_{m1}	M_2-P_{m2}	....	M_n-P_{mn}

தீர்மானம் மேற்கொள்வதின் வகைகள் :

கிடைக்கக்கூடிய நிகழ்ச்சிகளுக்கான விவரங்களை அடிப்படையாகக் கொண்டும் மற்றும் தீர்மானத்தின் சூழ்நிலைக்கு ஏற்றவாறும் தீர்மானம் மேற்கொள்ளப்படுகிறது. மூன்று வகையான சூழ்நிலைகளில் தீர்மானம் மேற்கொள்ளப்படுகிறது. நிச்சயமான நிலை, நிச்சயமற்ற நிலை மற்றும் இடர்பாடு.

நிச்சயமான சூழ்நிலையில் தீர்மானம் மேற்கொள்வது :

இங்கு தீர்மானம் மேற்கொள்பவருக்கு தான் தேர்வு செய்யும் தீர்மானங்களுக்கு அதனால் ஏற்படும் விளைவுகளை பற்றிய தகவல்களை நிச்சயமாக முழுமையாக தெரிந்திருப்பார். இத்தகைய தீர்மான அமைப்பில் ஒரே ஒரு சூழ்நிலையின் நிலைப்பாடு மட்டுமே நிகழகூடும் என அனுமானிக்கப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

ஒரு சிற்றுண்டி விடுதியில் தயாரிக்கப்படும் உணவின் ஒரு தட்டிற்கான மொத்த சராசரி விலை ரூ.4 மற்றும் அது ரூ.6க்கு விற்கப்படுகிறது. காலையில் உணவு தயாரிக்கப்பட்டு அன்றைய தினமே அவை விற்கப்படுகின்றது. அன்றைய தினமே விற்கப்படாத உணவுகளை கெட்டுப்போனவை எனக் கொண்டு வெளியே வீசப்படுகிறது. கடந்த கால விற்பனையைக் கொண்டு 50 தட்டுகளுக்கு குறைவில்லாமலும் அல்லது 53 தட்டுகளுக்கு மிகையாகாமலும் உணவு தயாரிக்கப்படுகிறது. நீவிர் (i) செயற்பாங்கு வெளி (ii) சூழ்நிலையின் நிலைப்பாட்டு வெளி (iii) அளித்தல் அட்டவணை (iv) இழப்பு அட்டவணை ஆகியவற்றை முறைப்படுத்திக் கூறுக.

தீர்வு :

(i) சிற்றுண்டி விடுதியில் 50 தட்டுகளுக்கு குறைவில்லாமலும் 53 தட்டுகளுக்கு மிகையாகாமலும் உணவு தயாரிக்கப்படுகிறது. ஆகவே செயற்பாங்குகள் அல்லது செயற்பாங்கின் நடவடிக்கைகளானது

$a_1 = 50$ தட்டுகள் தயாரிக்கப்படுவது

$a_2 = 51$ தட்டுகள் தயாரிக்கப்படுவது

$a_3 = 52$ தட்டுகள் தயாரிக்கப்படுவது

$a_4 = 53$ தட்டுகள் தயாரிக்கப்படுவது

ஆகவே செயற்பாங்கு வெளியானது $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$

(ii) தினசரி தேவையான உணவு தயாரிப்பது சூழ்நிலையின் நிலைப்பாடு எனில் நிகழக்கூடிய நான்கு வகையான சூழ்நிலையின் நிலைப்பாடுகளானது

$S_1 = 50$ தட்டுகள் தேவைப்படுகிறது

$S_2 = 51$ தட்டுகள் தேவைப்படுகிறது

$S_3 = 52$ தட்டுகள் தேவைப்படுகிறது

$S_4 = 53$ தட்டுகள் தேவைப்படுகிறது

ஆகவே சூழ்நிலையின் நிலைப்பாடு வெளியானது $S= \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$

iii) கொடுக்கப்பட்டுள்ள கணக்கில் தினசரி தேவை என்பது நிச்சயமற்றதாகும். சிற்றுண்டி விடுதியின் இலாபம் தினசரி தேவையை பொருத்தது.

n = தேவையான அளவு என்க.

m = உற்பத்தி செய்யப்பட்ட அளவு என்க.

$n \geq m$ எனில்

இறுதி நிலை இலாபம் = (அடக்கவிலை – விற்கும் விலை) × m

= (6 – 4) × m = 2m

m > n எனில்,

இலாபம் ={(அடக்கவிலை – விற்கும் விலை) × n}- {அடக்கவிலை × (m – n) }

= 2n – 4 (m – n) = 2n - 4m + 4n

= 6n – 4m

அளித்தல் அட்டவணை

அளிப்பு (m)	தேவை (n)			
	(S_1) 50	(S_2) 51	(S_3) 52	(S_4) 53
(a_1) 50	100	100	100	100
(a_2) 51	96	102	102	102
(a_3) 52	92	98	104	104
(a_4) 53	88	94	100	106

(iv) சந்தர்ப்ப இழப்பைக் கணக்கிட நாம் முதலில் அதிகபட்ச அளித்தல்களை ஒவ்வொரு சூழ்நிலை நிலைப்பாடுகளுக்கும் காண வேண்டும்.

முதல் சூழ்நிலையில் அதிக பட்ச அளித்தல் = 100

இரண்டாம் சூழ்நிலையில் அதிக பட்ச அளித்தல் = 102

மூன்றாம் சூழ்நிலையில் அதிக பட்ச அளித்தல் = 104

நான்காம் சூழ்நிலையில் அதிக பட்ச அளித்தல் = 106

மேற்கண்ட அளித்தல் அட்டவணைக்கு தொடர்பான இழப்பு அட்டவணை

மேற்கண்ட அளித்தல் அட்டவணைக்கு, தொடர்பான இழப்பு அட்டவணை

அளிப்பு (m)	தேவை (n)			
	(S_1) 50	(S_2) 51	(S_3) 52	(S_4) 53
(a_1) 50	100 – 100 = 0	102 – 100 = 2	104 – 100 = 4	106 – 100 = 6

(a_2) 51	100 – 96 = 4	102 – 102 = 0	104 – 102 = 2	106 – 102 = 4
(a_3) 52	100 – 92 = 8	102 – 98 = 4	104 – 104 = 0	106 – 104 = 2
(a_4) 53	100 – 88 = 12	102 – 94 = 8	104 – 100 = 4	106 – 106 = 0

10.2 நிச்சயமற்ற நிலையில் தீர்மானம் எடுத்தல் (நிகழ்தகவு கொடுக்கப்படாமல் இருக்கையில்) :

நிபந்தனைகளின் அடிப்படையில் நிச்சயமற்ற நிலையில் அளித்தல்கள் மட்டுமே தெரியும் மற்றும் ஒவ்வொரு சூழ்நிலைப்பாட்டின் நிகழ்தகவுத் தன்மை தெரிவதில்லை. இத்தகைய சூழ்நிலை ஒரு புதிய பொருளை சந்தையில் அறிமுகப்படுத்தும் பொழுது அல்லது புதியதாக தொழிற்சாலையிலுள்ள ஒரு இயந்திரத் தொகுதியை நிறுவும் பொழுது ஏற்படலாம். நிபந்தனைகளின் அடிப்படையில் பல வகையான தீர்மானித்தல் அளவைகள் கீழ்க்கண்டவாறு நமக்கு கிடைக்கின்றது.

உகந்த அளவை (மீப்பெருவின் மீப்பெரு மதிப்பு) :

மீப்பெருவின் மீப்பெரு மதிப்பு மூலம் செயற்பாங்கின் நடவடிக்கைகளைக் காண அல்லது மிகையான அளித்தலை மிகைப்படுத்தும் மாற்று உத்தியை கணக்கிடலாம். இத்தகைய தீர்மானத்தின் அளவை மாற்று நடவடிக்கைகளை கொண்டும் அதிக அளவிலான ஆதாயத்தையும் குறிப்பதால், உகந்த தீர்மானத்தின் அளவை என்றும் அழைக்கப்படுகிறது. இதன் செயல் முறையானது

(i) ஒவ்வொரு மாற்று நடவடிக்கைக்கும் சிறந்ததொரு விளைவை தீர்மானிக்கவும்.

(ii) தொடர்புடைய மாற்று நடவடிக்கைகளில் சிறந்த ஒன்றினை தேர்ந்தெடுக்கவும்.

எதிர்பார்க்கப்படும் பணம் சார்ந்த மதிப்பு (EMV):

மாற்று நடவடிக்கையின் செயற்பாங்கினை மதிப்பீடு செய்வதற்கு எதிர்பார்க்கப்படும் பணம் சார்ந்த மதிப்பு பரவலாக பயன்படுத்தப்படுகிறது. கொடுக்கப்பட்டுள்ள மாற்று நடவடிக்கைக்கு எதிர்பார்க்கப்படும் பணம் சார்ந்த மதிப்பு கணக்கிடப்படுவது, ஒவ்வொரு மாற்று நடவடிக்கைகளுக்கான நிகழ்தகவை அதன் அளித்தல்களால் பெருக்கப்பட்டு அதனை கூட்டும் பொழுது கிடைக்கப் பெறுவதாகும்.

பாதகமான அளவை அல்லது மீச்சிறுவின் மீப்பெரு மதிப்பு :

இந்த தீர்மான அளவையானது எடுக்கப்பட்ட செயற்பாங்கின் நடவடிக்கையில் நிகழக் கூடிய அளித்தல்களி மீப்பெரு மதிப்புகளில் மீச்சிறு மதிப்பாகும். இத்தீர்மான அளவை மாற்று உத்திகளால் நிகழக் கூடிய மிகக் குறைந்த இழப்பை குறிக்கின்றது. அதனால் இதனை பாதகமான தீர்மான அளவை எனவும் கூறப்படுகிறது. இதன் செயல் முறையானது

(i) ஒவ்வொரு மாற்று நடவடிக்கைக்கும் குறைந்த பட்ச விளைவை தீர்மானிக்க வேண்டும்.

(ii) இவற்றில் சிறந்தொரு தொடர்புடைய மாற்று நடவடிக்கையைத் தேர்ந்தெடுக்கவும்.

மீப்பெரு மதிப்பின் மீச்சிறு இழப்பு அளவை (சாவேஜி அளவை) :

இந்த அளவையை சந்தர்ப்ப இழப்பு தீர்மான அளவை என்றும் கூறலாம். ஏனென்றால் தீர்மானம் மேற்கொள்பவர் தான் மேற்கொண்ட தவறான செயற்பாட்டினால் (அல்லது மாறுபட்ட)

அளித்தலில் சந்தர்ப்ப இழப்பு ஏற்பட்டுள்ளது என பின்னர் வருந்தலாம். ஆகவே, எப்பொழுதும் இவர் இந்த அளவையை குறைவாகவே இருக்க கருதுவார். இதன் செயல் முறையானது

(அ) அளித்தல் அணியை அமைத்து, அதனின்று சந்தர்ப்ப இழப்பு அணியை உருவாக்குக.

(i) ஒவ்வொரு சூழ்நிலை நிலைபாட்டிற்கும் சிறந்த அளித்தலைக் காண்க.

(ii) இம்மதிப்பிலிருந்து அந்த நிறையிலுள்ள மதிப்புகளை (அளித்தல் மதிப்புகள்) கழிக்கவும்.

(ஆ) ஒவ்வொரு செயற்பாட்டிற்கும் (உத்திக்கும்) அதிக பட்ச இழப்பு மதிப்பை கண்டறிக.

(இ) இவைகளில் மிகச்சிறிய சந்தர்ப்ப இழப்பு மதிப்பைக் கொண்ட செயற்பாட்டை (மாறுபட்ட) தேர்வு செய்க.

சரிசமவாய்ப்பு தீர்மான ('பேயிஸ் அல்லது லாப்லாஸ்') அளவை :

சூழ்நிலை நிலைப்பாட்டின் நிகழ்தகவுகள் தெரியாத காரணத்தால் அனைத்து சூழ்நிலை நிலைப்பாடுகளும் சமமான நிகழ்தகவை கொண்டுள்ளது என அனுமானிக்கப்படுகிறது. அதாவது ஒவ்வொரு சூழ்நிலை நிலைப்பாட்டிற்கும் சமமான நிகழ்தகவை ஒதுக்கீடு செய்கின்றோம். சூழ்நிலை நிலைப்பாடுகள் ஒன்றையொன்று விலக்குவதாகவும் மற்றும் கூட்டாக முழுமையானதாகவும் உள்ளதால், ஒவ்வொன்றுக்குமான நிகழ்தகவானது

1 / (சூழ்நிலைப்பாடுகளின் எண்ணிக்கை)

இதன் செயல் முறையானது

அ) ஒவ்வொரு சூழ்நிலை நிலைப்பாட்டிற்கும்

1/(சூழ்நிலை நிலைப்பாடுகளின் எண்ணிக்கை)

என்கிற சூத்திரத்தை பயன்படுத்தி நிகழ்தகவை ஒதுக்கீடு செய்க.

ஆ) ஒவ்வொரு செயல்பாட்டிற்கும் எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பைக் காண, ஒவ்வொரு விளைவிற்குமான அதன் நிகழ்தகவுகளால் பெருக்கி பின்னர் அதனை கூட்ட வேண்டும்.

இ) சிறந்த எதிர்பார்ப்பு அளித்தல் மதிப்பை தேர்வு செய்யவும்.

(இலாபம் எனில் மீப்பெரு மதிப்பு மற்றும் செலவு எனில் மீச்சிறு மதிப்பு)

இந்த அளவையை போதுமானதற்ற அளவை எனக் கூறப்படுகிறது. ஏனெனில், ஒரு சில நிகழ்ச்சிகளை தவிர, சூழ்நிலை நிலைப்பாடு பற்றிய நிகழ்தகவு தகவல்கள் சிறிதேனும் கிடைக்கப் பெறும்.

மெய்யான அளவை (ஹர்விட்ஸ் அளவை) :

இது உகந்த மற்றும் பாதகமான தீர்மான அளவைகளின் உடன்படிக்கை அளவையாகும். முதலில் α உகந்த கெழுவை தேர்ந்தெடுக்க வேண்டும். α மதிப்பு ஒன்றுக்கு அருகில் இருந்தால் தீர்மானம் எடுப்பவர் உகந்ததொரு எதிர்காலத்தை மேற்கொள்வார் அல்லது α மதிப்பு பூஜ்ஜியத்திற்கு அருகே இருக்குமானால் தீர்மானம் எடுப்பவர் பாதகமான தீர்மாத்தை எதிர்காலத்தில் மேற்கொள்வார்.

அதிக பட்ச உத்தியை தேர்வு செய்ய H = α (அளித்தலின் மீப்பெரு மதிப்பு நிரையில்) + (1 – α) (அளித்தலின் மீச்சிறு மதிப்பு நிரையில்) என ஹார்விட்ஸ் கூறுகிறார்.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

கீழ்க்கண்ட அளித்தல் (இலாபம்) அணியை கருதுக.

செயற்பாடு	சூழ்நிலை			
	(S_1)	(S_2)	(S_3)	(S_4)
A_1	5	10	18	25
A_2	8	7	8	23
A_3	21	18	12	21
A_4	30	22	19	15

சூழ்நிலைப்பாட்டின் நிகழ்தகவுகள் தெரியாத நிலை. கீழ்க்கண்ட ஒவ்வொரு அளவைகள் மூலமாக தீர்வு காணப்பட்டு ஒப்பிடுக.

(i) மீச்சிறுவின் மீப்பெரு (ii) லாப்லாஸ் (iii) ஹர்விட்ஸ் (α = 0.5 என அனுமானிக்கவும்)

தீர்வு :

i) மீச்சிறுவின் மீப்பெரு :

					மீச்சிறு மதிப்பு	
A_1:	5	10	18	25	5	
A_2:	8	7	8	23	7	
A_3:	21	18	12	21	12	
A_4:	30	22	19	15	**15**	மீப்பெரு மதிப்பு

சிறந்த செயல்பாடு A_4 ஆகும்.

ii) 'லாப்லாஸ்' அளவை

$E(A_1) = 1/4\ [5 + 10 + 18 + 25] = 14.5$

$E(A_2) = 1/4\ [8 + 7 + 8 + 23] = 11.5$

$E(A_3) = 1/4\ [21 + 18 + 12 + 21] = 18.0$

$E(A_4) = 1/4\ [30 + 22 + 19 + 15] = 21.5$ மீப்பெரு மதிப்பு

$E(A_4)$ மீப்பெரு மதிப்பாகும். ஆகவே சிறந்த செயற்பாடு A_4 ஆகும்.

iii) ஹர்விட்ஸ் அளவை (α = 0.5 என்க)

	மீச்சிறு மதிப்பு	மீப்பெரு மதிப்பு	α (மீப்பெரு மதிப்பு) + (1 – α) மீச்சிறு மதிப்பு
A_1	5	25	0.5(25) + 0.5(5) = 15
A_2	7	23	0.5(7) + 0.5(23) = 15
A_3	12	21	0.5(12) + 0.5(21) = 16.5
A_4	15	30	0.5(15) + 0.5(30) = **22.5** மீப்பெரு மதிப்பு

சிறந்த செயற்பாடு A_4 ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3 :

ஒரு தீர்மானம் மேற்கொள்பவர் **3** தீர்மான மாற்று நடவடிக்கைகள் மற்றும் **2** சூழ்நிலை நிலைப்பாடுகளை எதிர்கொள்கின்றனர். (i) மீச்சிறுவின் மீப்பெரு மதிப்பு மற்றும் (ii) மீப்பெரு மதிப்பின் மீச்சிறு இழப்பு முறைகளை கையாண்டு கீழ்க்கண்ட அளித்தல் அட்டவணையைக் கொண்டு மேற்கொள்ளும் தீர்மானத்தை பரிந்துரைக்கவும்.

சூழ்நிலை நிலைப்பாடு → செயற்பாடு ↓	S_1	S_2
A_1	10	15
A_2	20	12
A_3	30	11

தீர்வு :

(i) மீச்சிறு மீப்பெரு மதிப்பு

செயற்பாடு	மீச்சிறு மதிப்பு
A_1	10
A_2	**12** மீப்பெரு மதிப்பு
A_3	11

A_2 செயற்பாடு பரிந்துதுரைக்கப்படுகிறது.

ii) **மீப்பெரு மீச்சிறு இழப்பு**

செயற்பாடுகள்	சூழ்நிலை நிலைப்பாடுகள்		மீப்பெரு இழப்பு
	S_1	S_2	
A_1	30 – 10 = 20	15 – 15 = 0	20
A_2	30 – 20 = 10	15 – 12 = 3	10
A_3	30 – 30 = 0	15 – 11 = 4	**4**

மீப்பெரு இழப்பில் மீச்சிறு மதிப்பு **4.** ஆகவே A_3 செயற்பாங்கு பரிந்துரைக்கப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 4 :

ஒரு வியாபாரி மூன்று மாற்று நடவடிக்கைகளைத் தேர்வு செய்ய வெளிப்படையாக உள்ளது. ஒவ்வொன்றும் ஏதேனும் நான்கு நிகழக் கூடிய நிகழ்ச்சிகளைக் கொண்டுள்ளது. கட்டுப்பாடு அளித்தல்கள் ஒவ்வொரு செயற்பாட்டு நிகழ்ச்சிகளுக்கும் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

மாற்று நடவடிக்கை	அளித்தல்கள் – கட்டுப்பாடு நிகழ்ச்சிகள்			
	A	B	C	D
X	8	0	– 10	6
Y	– 4	12	18	– 2
Z	14	6	0	8

வியாபாரி பின்வரும் அளவைகளைப் பயன்படுத்தினால் எந்த மாற்று நடவடிக்கையை தேர்வு செய்வது என்பதை தீர்மானிக்கவும்.

அ) மீச்சிறுவின் மீப்பெரு அளவை

ஆ) மீப்பெருவின் மீப்பெரு அளவை

இ) ஹர்விட்ஸ் அளவை ($\alpha = 0.7$) என உகந்த அளவாக கொள்க.

ஈ) மீப்பெருவின் மீச்சிறு இழப்பு அளவை

உ) லாப்லாஸ் அளவை

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்டுள்ள அளித்தல் அணியில் ஒவ்வொரு மாற்று நடவடிக்கைக் காண மீப்பெரு மதிப்பு மற்றும் மீச்சிறு மதிப்பும் நிகழக் கூடிய அளித்தல் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

மாற்று நடவடிக்கை	மீப்பெரு அளித்தல் (ரூ)	மீச்சிறு அளித்தல் (ரூ)	($\alpha = 0.7$) H = α (மீப்பெரு அளித்தல்) + ($1 - \alpha$) (மீச்சிறு அளித்தல்)
X	8	– 10	2.6
Y	18	– 4	**11.4**
Z	14	0	9.8

அ) மீச்சிறுவின் மீப்பெரு அளவை முறையில், மீச்சிறு அளித்தலில் மீப்பெரு மதிப்பு Z என்பதால் மாற்று நடவடிக்கை Z தேர்வு செய்யப்படுகிறது.

ஆ) மீப்பெருவின் மீப்பெரு மதிப்பு அளவையில் வியாபாரி மாற்று நடவடிக்கை Y – ஐ தேர்வு செய்வார்.

இ) ஹார்விட்ஸ் அளவையில் Y –ஐ தேர்வு செய்வது உகந்ததாகும்.

ஈ) கொடுக்கப்பட்ட அளித்தல் அணிக்கு, இழப்பை கீழ்க்கண்டவாறு கண்டறியலாம். A என்கிற நிகழ்ச்சிக்கு இழப்பு அளித்தல் = A–ன் மீப்பெரு அளித்தல் மதிப்பு – அளித்தல் மதிப்பு. இது போலவே மற்ற நிகழ்ச்சிகளுக்கும் கணக்கிடப்படுகிறது.

மாற்று நடவடிக்கை	அளித்தல் (ரூ)				இழப்பு அளித்தல் (ரூ)				மீப்பெரு இழப்பு
	A	B	C	D	A	B	C	D	
X	8	0	– 10	6	6	12	28	2	28
Y	– 4	12	18	– 2	18	0	0	10	18
Z	14	6	0	8	0	6	18	0	18
மீப்பெரு அளித்தல்	14	12	18	8					

மாற்று நடவடிக்கைகளான Y மற்றும் Z மீப்பெரு இழப்பில் மீச்சிறு மதிப்பாக உள்ளதால் தீர்மானம் மேற்கொள்பவர் இரண்டில் ஒன்றைத் தேர்வு செய்வார்.

உ) லாப்லாஸ் அளவை :

இம்முறையில் ஒவ்வொரு உத்திக்கும் சமமான நிகழ்தகவை பகிர்ந்தளிக்கப்படுகிறது. இதன் முடிவாக கீழ்க்கண்ட எதிர்பார்க்கப்படும் அளித்தல் கிடைக்கின்றது.

மாற்று நடவடிக்கை	அளித்தல் (ரூ)				எதிர்பார்க்கப்படும் அளித்தல் மதிப்பு
	A P = ¼	B P = ¼	C P = ¼	D P = ¼	
X	8	0	– 10	6	¼ [8 + 0 – 10 + 6] = 1
Y	– 4	12	18	– 2	¼ [– 4 + 12 + 18 –2] = 6
Z	14	6	0	8	¼ [14 + 6 + 0 + 8] = 7

எதிர்பார்க்கப்படும் அளித்தல் மதிப்பு Z க்கு மீப்பெரு மதிப்பு. ஆகையால் வியாபாரி மாற்று நடவடிக்கையாக Z ஐ தேர்வு செய்யலாம்.

10.3 இடர்பாட்டு நிலையில் தீர்மானம் மேற்கொள்வது ((நிகழ்தகவுடன்) :

இங்கு தீர்மானம் மேற்கொள்பவர் பலவகையான சூழ்நிலை நிலைப்பாடுகளும் எதிர்கொள்கின்றார். அவர் நம்பகத்தகுந்த தகவல்களை நம்புவதாகவும், அறிவு, முன் அனுபவம், அல்லது நடக்கின்ற நிகழ்ச்சிகளுக்கும் நிகழ்தகவை ஒவ்வொரு நிகழ கூடிய சூழ்நிலை நிலைபாடுகளுக்கும் ஒதுக்குவதாக கொள்வோம். சில வேளைகளில் முந்தைய ஆவணங்கள், அனுபவம் அல்லது தகவல்களை சான்றாக கொண்டு வருங்காலத்தில் நிகழ்ச்சிகள் ஒதுக்கப்படலாம்.

நிகழ்தகவு பரவலை அடிப்படையாக கொண்டு ஒவ்வொரு சூழ்நிலை நிலைப்பாடுகளுக்கும் எதிர்பார்க்கப்படும் அளித்தல் மதிப்பில் மிக அதிக மதிப்பைக் கொண்டு சிறந்ததொரு மாற்று நடவடிக்கையை ஒருவர் தேர்வு செய்யலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 5 :

மூன்று செயற்பாங்கு நடவடிக்கைகளும் (A) மூன்று சூழ்நிலை நிலைப்பாடுகளும் (E) (அல்லது நிகழ்ச்சிகள்) மற்றும் அவற்றின் நிகழ்தகவுகளும் முறையே அளித்தல் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. சிறந்ததொரு நடவடிக்கையைக் காண்க.

நிகழ்ச்சிகள்	E_1	E_2	E_3
நிகழ்தகவு → செயற்பாங்கு ↓	0.2	0.5	0.3
A_1	2	1	– 1
A_2	3	2	0
A_3	4	2	1

தீர்வு :

ஒவ்வொரு செயற்பாங்கிற்கும் எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பானது

$A_1 : 2(0.2) + 1(0.5) - 1(0.3) \quad = 0.6$

$A_2 : 3(0.2) + 2(0.5) + 0(0.3) \quad = 1.6$

$A_3 : 4(0.2) + 2(0.5) + 1(0.3) \quad = 2.1$

செயற்பாங்கு **3**க்கு எதிர்பார்க்கப்படும் பணம் சார்ந்த மதிப்பு அதிகமாக உள்ளது. ஆகவே சிறந்ததொரு நடவடிக்கை A_3 ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 6 :

3 செயற்பாங்குகள் (A_1, A_2, A_3) மற்றும் நிகழ்ச்சி (E_1, E_2, E_3) களின் அளித்தல் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

சூழ்நிலையின் → நிலைப்பாடு ↓	செயற்பாங்கு		
	A_1	A_2	A_3
E_1	35	– 10	– 150
E_2	200	240	200
E_3	550	640	750

ஒவ்வொரு சூழ்நிலை நிலைப்பாட்டிற்கான நிகழ்தகவுகள் முறையே **0.3**, **0.4** மற்றும்**0.3** ஆகும். EMV மதிப்பை கணக்கிட்டு அட்டவணையிடுக மற்றும் எந்தவொரு செயற்பாங்குகளில் சிறந்த ஒன்றை தேர்வு செய்வாய் என்பதை முடிவு செய்க.

தீர்வு :

நிகழ்ச்சி	நிகழ் தகவு	A_1	A_2	A_3
E_1	0.3	35 × 0.3 = 10.5	– 10 × 0.3 = – 3	– 150 × 0.3 = – 45
E_2	0.4	200 × 0.4 = 80.0	240 × 0.4 = 96	200 × 0.4 = 80
E_3	0.3	550 × 0.3 = 165.0	640 × 0.3 = 192	750 × 0.3 = 225
EMV		255.5	285	260

இங்கு A_2 –ன் EMV மீப்பெரு மதிப்பாக உள்ளது. ஆகவே செயற்பாங்கு A_2 வை தேர்வு செய்யவும்.

எடுத்துக்காட்டு 7 :

ஒரு கடைக்காரருக்கு அழியக் கூடிய நிறையப் பொருட்களை சேமித்து வைக்க தேவையான வசதியுள்ளது. அவர் ஒரு பொருளை ரூ. 3க்கு வாங்கி அதனை ஒரு பொருள் ரூ. 5 என விற்பனை செய்கின்றார். ஒரு நாளில் பொருள் விற்கபடவில்லையெனில் அவருக்கு இழப்பு ஒரு பொருளுக்கு ரூ.3 ஆகும். தினசரி தேவையானது கீழ்க்கண்ட நிகழ்தகவு பரவலைச் சார்ந்துள்ளது.

தேவையான பொருட்களின் எண்ணிக்கை	3	4	5	6
நிகழ்தகவு	0.2	0.3	0.3	0.2

எவ்வளவு பொருட்களை அவர் சேமித்தால் அவரது தினசரி எதிர்பார்க்கப்படும் இலாபம் மீப்பெரு மதிப்பாகும் ?

தீர்வு :

m = தினசரி சேமித்து வைக்கக் கூடிய பொருட்களின் எண்ணிக்கை என்க.

n = தினசரி தேவையான பொருட்களின் எண்ணிக்கை என்க.

$n \geq m$ எனில்

இலாபம் $= 2m$

மற்றும் $m > n$,

இலாபம் $= 2n - 3(m-n)$

$= 2n - 3m + 3n$

$= 5n - 3m$

அளித்தல் அட்டவணை

சேமிப்பு (m)	தேவை (n)			
	3	**4**	**5**	**6**
3	6	6	6	6
4	3	8	8	8
5	0	5	10	10
6	– 3	2	7	12
நிகழ்தகவு	0.2	0.3	0.3	0.2

சேமிப்பு (m)	எதிர்பார்க்கப்படும் ஆதாயம்
3	$6 \times 0.2 + 6 \times 0.3 + 6 \times 0.3 + 6 \times 0.2$ = Rs.6.00
4	$3 \times 0.2 + 8 \times 0.3 + 8 \times 0.3 + 8 \times 0.2$ = Rs.7.00
5	$0 \times 0.2 + 5 \times 0.3 + 10 \times 0.3 + 10 \times 0.2$ = Rs.6.50
6	$-3 \times 0.2 + 2 \times 0.3 + 7 \times 0.3 + 12 \times 0.2$ = Rs.4.50

4 பொருட்களை சேமிக்கையில் அதிகபட்ச எதிர்பார்க்கப்படும் ஆதாயம் ரூ. 7, ஆகவே 4 பொருட்களை சேமித்து வைத்தால் எதிர்பார்க்கப்படும் தினசரி இலாபம் வியாபாரிக்கு கிடைக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 8 :

ஒரு மாத இதழ் பங்கீட்டாளர் மாத இதழ் தேவைக்கான கீழ்க்கண்ட நிகழ்தகவை ஒதுக்கீடு செய்கின்றார்.

தேவையான மாத இதழ்களின் எண்ணிக்கை :	2	3	4	5
நிகழ்தகவு :	0.4	0.3	0.2	0.1

ஒரு இதழின் விலை ரூ.6 க்கு வாங்கி அதனை ரூ.8க்கு விற்கின்றனர். எத்தனை மாத இதழ்களை அவர் சேமிக்கையில் அவருக்கு அதிகபட்ச எதிர்பார்க்கப்படும் இலாபம் கிடைக்கும் ? மேலும் அவர் விற்பனைாகாத இதழ்கள் ஒவ்வொன்றையும் ரூ.5க்கு விற்கின்றார்.

தீர்வு :

m = தினசரி சேமிக்கப்படும் மாத இதழ்களின் எண்ணிக்கை

n = தேவையான மாத இதழ்களின் எண்ணிக்கை

தற்பொழுது,

$n \geq m$ எனும் பொழுது,

இலாபம் = ரூ. $2m$

மற்றும்

m > n எனில்

$$\text{இலாபம்} = 8n - 6m + 5(m - n)$$
$$= 8n - 6m + 5m - 5n$$
$$= 3n - m$$

அளிப்பு அட்டவணை

சேமிப்பு (m)	தேவை (n)			
	2	**3**	**4**	**5**
2	4	4	4	4
3	3	6	6	6
4	2	5	8	8
5	1	4	7	10
நிகழ்தகவு	0.4	0.3	0.2	0.1

சேமிப்பு (m)	எதிர்பார்க்கப்படும் ஆதாயம் (ரூபாயில்)
2	$4 \times 0.4 + 4 \times 0.3 + 4 \times 0.2 + 4 \times 0.1 = 4.0$
3	$3 \times 0.4 + 6 \times 0.3 + 6 \times 0.2 + 6 \times 0.1 = 4.8$
4	$2 \times 0.4 + 5 \times 0.3 + 8 \times 0.2 + 8 \times 0.1 = 4.7$
5	$1 \times 0.4 + 4 \times 0.3 + 7 \times 0.2 + 10 \times 0.1 = 4.0$

3 மாத இதழ்களை சேமிக்கும் பொழுது அதிகபட்ச எதிர்பார்க்கப்படும் ஆதாயம் ரூ.4.8. ஆகவே பங்கீட்டாளர் 3 மாத இதழ்களை சேமிக்கும் பொழுது அதிக பட்ச இலாபம் கிடைக்கும்.

10.4 தீர்மான மர வடிவ ஆய்வு :

ஒரு தீர்மானித்தல் பிரச்சினையை விளக்கப்பட உதவியுடன் தெரிவு செய்யலாம். இவ்விளக்கப்படம் அனைத்து நிகழகூடிய செயற்பாடு, சூழ்நிலை நிலைப்பாடு மற்றும் சூழ்நிலைப்பாட்டிற்கு தொடர்பான நிகழ்தகவுகளையும் காண்பிக்கின்றது. இந்த தீர்மான விளக்கப்படம் ஒரு மரத்தை வரைந்து பார்க்கும் பொழுது இருப்பது போல இருப்பதால் இதனை "தீர்மான மரம்" என்றும் கூறலாம்.

ஒரு தீர்மான மரம் கணுக்கள், கிளைகள், நிகழ்தகவு மதிப்பீடுகள் மற்றும் அளித்தல்களையும் கொண்டுள்ளது. கணுக்கள் இருவகைப்படும். தீர்மான கணு (சதுரத்தால் குறியீடு செய்கிறோம்) மற்றும் வாய்ப்பு கணு (வட்டத்தால் குறியீடு செய்கிறோம்). மாறுபட்ட செயற்பாடுகளின் ஆதியானது தீர்மான கணுவிலிருந்து முக்கிய கிளையாக (தீர்மான கிளையாக) தொடங்குகின்றது. தீர்மான கணுவின் முடிவாக உள்ள புள்ளியில், வாய்ப்பு கணு தொடங்குகிறது. வாய்ப்புகணுக்க உட்கிளைகளாக வெளிப்படுத்துகின்றன. அவற்றிற்குரிய அளித்தல்கள் மற்றும் மாறுபட்ட செயற்பாடுகளுக்குத் தொடர்புடைய நிகழ்தகவுகள் மற்றும் வாய்ப்பு நிகழ்ச்சிகள் பக்கத்துப் பக்கமாக வாய்ப்பு கிளைகளில் காண்பிக்கப்படுகிறது. வாய்ப்பு கிளைகளின் முடிவில் எதிப்பார்க்கப்படும் அளித்தல் மதிப்புகளின் விளைவுகள் காண்பிக்கப்படுகிறது.

அடிப்படையில் தீர்மான மர வடிவங்கள், முடிவான தீர்மானம் மற்றும் நிகழக்கூடிய தீர்மானம் என இரு வகைப்படும். இவை மேலும் ஒரு படி மற்றும் பல படி மரங்கள் என பிரிக்கப்படுகின்றது. ஒருபடி முடிவான தீர்மானத்தில் தீர்மான மரமானது ஒரே ஒரு தீர்மானத்தை நிச்சயமான நிபந்தனைகளுடன் உள்ளடக்கியுள்ளது. பலபடி தீர்மானத்தில் ஒரு தொடர் அல்லது சங்கிலியான தீர்மானங்கள் மேற்கொள்ளப்படுகிறது. EMV ன் உச்ச மதிப்பு ஆனது உகந்ததொரு பாதை (உத்தி) ஆகும்.

தீர்மான மரவடிவம் வரைய ஒருவர் பின்பற்றப்பட வேண்டிய குறிப்பிட்ட அடிப்படை விதிகள் மற்றும் இணக்க விதிகள் கீழே நிறுவப்படுகிறது.

1. அனைத்து தீர்மானங்கள் (மற்றும் அதன் மாற்று) அவை எந்த வரிசையில் மேற்கொள்ளப்படுகிது என்பதை கண்டறியவும்.

2. வாய்ப்பு நிகழ்ச்சிகள் அல்லது ஒவ்வொரு மாற்று தீர்மானங்களின் முடிவால் ஏற்படும் சூழ்நிலை நிலைப்பாட்டை கண்டறிக.

3. வாய்ப்பு நிகழ்ச்சி மற்றும் வரிசை தீர்மானங்களை காட்டுகின்ற மர வடிவ விளக்கப்படத்தை விரிவாக்குக. மரவிளக்கபடம் அமைக்கும் பொழுது இடது புறமாக தொடங்கி வலது புறமாக நகர்கின்றது. சதுரப்பெட்டி □ விளக்குவது தீர்மானப்புள்ளி, அங்கு கிடைக்கக் கூடிய செயற்பாட்டு நடவடிக்கைகள் கருத்தில் எடுத்து கொள்ளப்படுகிறது. வட்டம் ○ தெரிவு செய்வது வாய்ப்பு கணு அல்லது நிகழ்ச்சி, பல்வேறான சூழ்நிலை நிலைப்பாடுகள் அல்லது இவ்வாய்ப்பு நிகழ்ச்சியிலிருந்து விளைவுகள் வெளிப்படுத்துகின்றது.

4. நிகழக்கூடிய நிகழ்ச்சிகளின் நிகழ்தகவுகள் அல்லது மாற்று தீர்மானங்களால் கிடைக்கக் கூடிய சூழ்நிலைப்பாடுகளை மதிப்பீடு செய்க.

5. நிகழக்கூடிய எதிர்விளைவுகளின் தீர்மான மாற்றங்கள் மற்றும் நிகழ்ச்சிகளின் விளைவுகளைக் காண்க.

6. எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பை அனைத்து நிகழக்கூடிய தீர்மான மாற்றுகளை கணக்கிடுக.

7. மிகவும் கவரக் கூடிய எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பை கொடுக்கக்கூடிய தீர்மான மாற்றை (அல்லது செயற்பாங்கு) தேர்ந்தெடுக்கவும்.

தீர்மான மர வடிவத்தின் பயன்பாடுகள் :

1. தீர்மான மரம் வரைவதால், தீர்மானம் மேற்கொள்பவர் அனைத்து சிக்கலான பிரச்சினைகளையும் விரிவுபடுத்தி பார்க்க முடியும்.

2. தீர்மானம் மேற்கொள்பவருக்கு, பிரச்சினைகளின் பல வேறான மூலக்கூறுகளை உள்ளடக்கி மற்றும் முறையாகவும் பார்க்க உதவியளிக்கிறது.

3. ஒரு தீர்மான மரவிளக்கப் படத்தின் மூலம் கருத்துக்களை மாற்றாமல் பல பரிமான தீர்மான வரிசைகளாக கோர்வைப்படுத்தலாம்.

4. தீர்மான மர வடிவம் பல்வேறான இடங்களிலும் பயன்படுத்தப்படுகிறது. புதியதாக அறிமுகப்படுத்தப்பட உள்ள பொருள், சந்தை உத்தி முறைகள் எனப்பல.

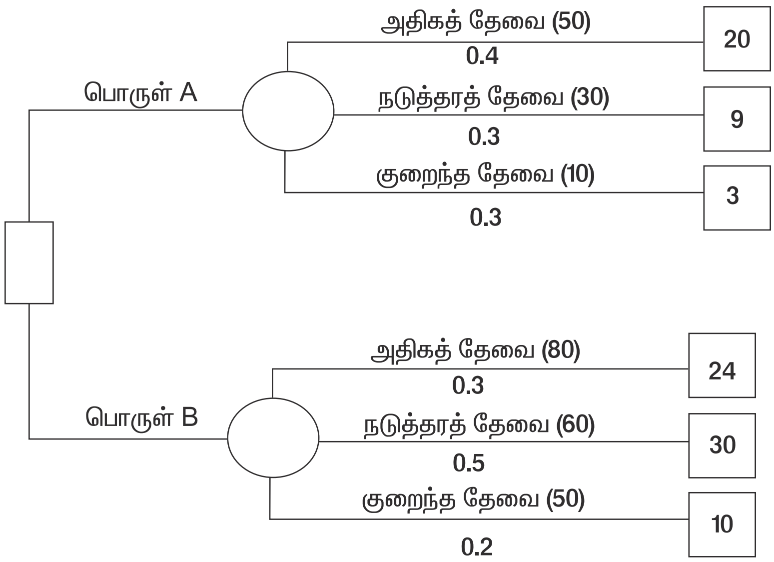
எடுத்துக்காட்டு 9 :

ஒரு உற்பத்தி செய்யும் நிறுவனத்தில் A அல்லது B என்கிற உற்பத்திக்குப் பயன்படுத்தப்படும் பொருள்களில் ஒன்றை தேர்வு செய்தல் வேண்டும். A என்கிற பொருளுக்கு ரூ.20,000 மற்றும் B என்கிற பொருளுக்கு ரூ.40,000–ம் மூலதனமாகத் தேவைப்படுகின்றது. சந்தை ஆய்வை மேற்கொண்டதில் அதிக தேவை, நடுத்தரத் தேவை மற்றும் குறைந்த தேவை, அவற்றின் நிகழ்தகவுகள் மற்றும் இரு பொருள்களின் விலைகள் ரூ. ஆயிரத்தில் கீழ்க்கண்ட அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

சந்தை தேவை	நிகழ்தகவு		விற்பனை	
	A	B	A	B
அதிகம்	0.4	0.3	50	80
நடுத்தரம்	0.3	0.5	30	60
குறைந்த	0.3	0.2	10	50

பொருத்தமான தீர்மான மரம் அமைக்கவும் தொழிற்சாலை எத்தகைய தீர்மானத்தை எடுக்க உள்ளது ?

தீர்வு :



சந்தை தேவை	A			B		
	X('000)	P	PX	X('000)	P	PX
அதிகம்	50	0.4	20	80	0.3	24
நடுத்தரம்	30	0.3	9	60	0.5	30
குறைந்த	10	0.3	3	50	0.2	10
மொத்தம்			32			64

பொருள்	வரவு (ரூ)	மூலதனம் (ரூ)	இலாபம் (ரூ)
A	32,000	20,000	12,000
B	64,000	40,000	24,000

தொழிற்சாலையின் தீர்மானம் B க்கு சாதகமாக உள்ளது ஏனெனில் B-பொருளின் இலாபம் அதிகம்.

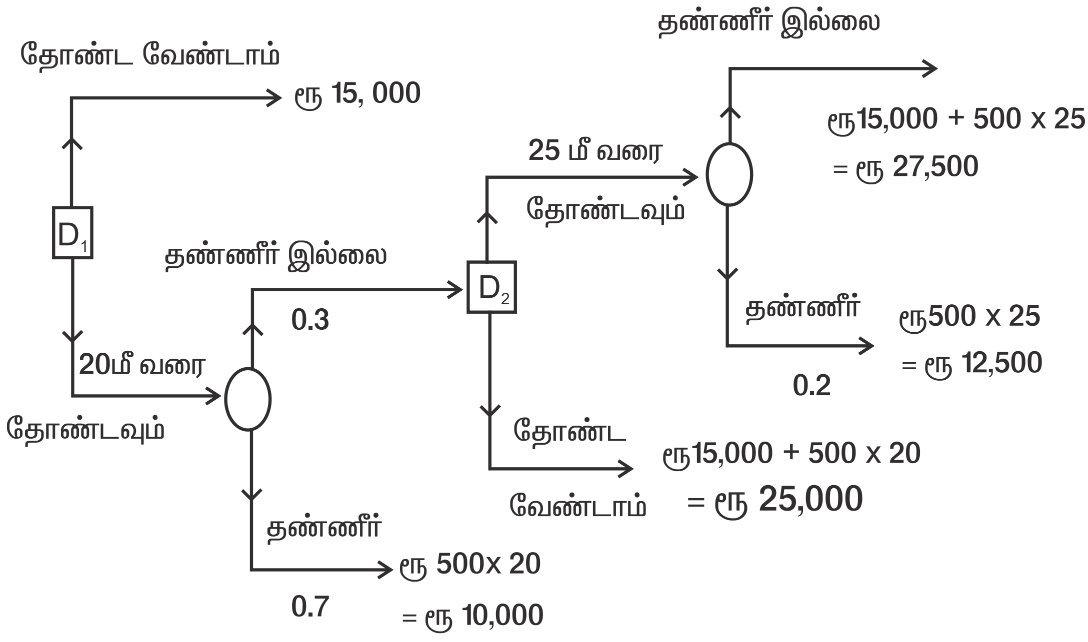
எடுத்துக்காட்டு 10 :

ஒரு பண்ணைக்கு சொந்தக்காரர் தனது பண்ணையில் கிணறு ஒன்றை தோண்ட உள்ளார். அந்தப் பகுதியில் கடந்த காலங்களில் 20 மீட்டர்கள் ஆழத்தில் தோண்டியதில் 70 சதவீதம் வெற்றியடைந்துள்ளது. மேலும் 25 மீட்டர்கள் தோண்டியும் 20 சதவிகிதமே தண்ணீர் கிடைத்துள்ளது. பண்ணையார் கிணறு தோண்டவில்லையெனில் அடுத்த 10 ஆண்டுகளுக்கு தனது பக்கத்து பண்ணையாரிடமிருந்து தண்ணீர் வாங்க ரூ.15,000 செலவு ஆகும் என மதிப்பீடு செய்கிறார்.

பொருத்தமான தீர்மான மரம் வரையவும் மற்றும் பண்ணையாரின் உத்திகளை EMV முறையில் நிர்ணயிக்கவும்.

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட விவரங்கள் கீழ்க்கண்ட மர விளக்கப்படத்தின் மூலம் தெரிவு செய்யப்படுகிறது.



தீர்மானம்	நிகழ்ச்சி	நிகழ்தகவு	பணச் செலவு	எதிர்பார்க்கப்படும் பணச் செலவு
தீர்மானப் புள்ளி D_2				
1. 25 மீட்டர்கள் வரை தோண்டவும்	தண்ணீர் கிடைப்பது தண்ணீர் கிடைப்பதில்லை	0.2 0.8	ரூ.12,500 ரூ.27,500	ரூ.2,500 ரூ.22,000
			EMV	ரூ.24,500
2. தோண்ட வேண்டாம்	EMV = ரூ.25,000			

D_2 புள்ளியில் தீர்மானம் : 25 மீட்டர்கள் வரை தோண்டவும்

தீர்மானப் புள்ளி D_1				
1. 20 மீட்டர்கள் வரை தோண்டவும்	தண்ணீர் கிடைப்பது தண்ணீர் கிடைப்பதில்லை	0.7 0.3	ரூ.10,000 ரூ.24,500	ரூ.7,000 ரூ.7,350
			EMV	ரூ.14,350
2. தோண்ட வேண்டாம்	EMV = ரூ.15,000			

D_1 புள்ளியில் தீர்மானம் : 20 மீட்டர்கள் வரை தோண்டவும்.

பயிற்சி – 10

I. **சரியான விடையை தேர்வு செய்க** :

1. தீர்மானக் கோட்பாடு தொடர்புடையது

   அ) கிடைக்கக் கூடிய தகவல்களின் அளவு

   ஆ) நம்பகத்தன்மைக் கொண்ட தீர்மானத்தை அளவீடு செய்வது

   இ) வரிசைத் தொடர் பிரச்சினைகளுக்கு உகந்த தீர்மானங்களை தேர்ந்து எடுப்பது

   ஈ) மேற்கூறிய அனைத்தும்

2. நிச்சயமற்ற நிலையில் கீழ்க்கண்ட எந்த அளவையைக் கொண்டு தீர்மானம் மேற்கொள்ள பயன்படுத்துவதில்லை

   அ) மீச்சிறுவின் மீப்பெரு மூலம் விடை கூறுதல்

   ஆ) மீப்பெருவின் மீப்பெரு மூலம் விடை கூறுதல்

   இ) மீப்பெருவின் மீச்சிறு மூலம் விடை கூறுதல்

   ஈ) எதிர்பார்க்கப்படும் விடையை மீப்பெருமம் ஆக்குதல்

3. மீச்சிறுவின் மீப்பெரு மூலம் விடை கூறுதல், மீப்பெருவின் மீப்பெரு மூலம் விடை கூறுதல் மற்றும் மீப்பெறு மீச்சிறு இழப்பு அளவைகளானது

   அ) அனைத்தும் ஒரே உகந்த முடிவை தருகின்றன

   ஆ) நிகழ்தகவு பயன்படுத்துவதில்லை

   இ) அ மற்றும் ஆ இவை இரண்டும்

   ஈ) மேற்கூறியவற்றில் எவையுமில்லை

4. மர வடிவ தீர்மானத்திற்கு கீழ்க்கண்டவற்றில் எவை செயற்படுத்துவதில்லை ?

   அ) ஒரு சதுர கணுப்புள்ளி அங்கு தீர்மானம் மேற்கொள்ள வேண்டும்

   ஆ) ஒரு வட்ட கணு தெரிவிப்பது நிச்சமற்ற நிலையை சந்திப்பது

   இ) ஒருவர் தொடர்பான தீர்மானங்களை தேர்வு செய்வது அது வெற்றிக்கு அதிகான நிகழ்தகவை தரும்.

   ஈ) ஒருவர் முயன்று எதிர்பார்க்கும் விடை கூறுதல் மீப்பெரு மதிப்பாக்குதல்

5. இவ்வளவையைக் கொண்டு மீப்பெரு அளித்தல் குறைவாக இருக்கையில் செயற்பாட்டை தேர்வு செய்வது

   அ) மீச்சிறுவின் மீப்பெரு அளவை ஆ) மீப்பெருவின் மீச்சிறு அளவை

   இ) மீப்பெருவின் மீப்பெரு அளவை ஈ) இவற்றில் ஒன்றுமில்லை

II. **கோடிட்ட இடங்களை நிரப்புக** :

6. தீர்மான மரவடிவம் கொண்டுள்ளது ____________ தீர்மானங்கள் மற்றும் சமவாய்ப்பு விளைவுகள்.

7. நிச்சயமற்ற நிலையில் தீர்மானம் மேற்கொள்ள ஒரு வழியானது எல்லா சூழ்நிலை நிலைப்பாடுகளையும் ___________ மற்றும் எதிர்பார்க்கப்படும் விடை கூறுதலை மீப்பெருப்படுத்துவதாகும்.

8. எப்பொழுதும் எதிர்பார்க்கப்படும் வரவின் நிகர பணத்தை மீப்பெருமம் ஆக்குவது என்பதும் எதிர்பார்க்கப்படும் இழப்பை ___________ ஆக்குவது என்பதும் ஒரே மாதிரியான உகந்த கொள்கையாகும்.

9. இடர்பாடு நிலையில் பல வகையான அளவைகளில் தீர்மானம் மேற்கொள்வது என்பது எப்பொழுதும் கிடைக்கக் கூடிய ஒரே மாதிரியான _________ தேர்வே ஆகும்.

10. நிச்சயமற்ற நிலையில் தீர்மானம் மேற்கொள்வது லாப்லாஸ் அளவை மாறுதல் விரும்பாத மிகச்சிறியதாகவும் அதே சமயத்தில் ___________ அளவையானது மிகப்பெரும்பாலான மாறுதல் விரும்பத்தகாதவையாகும்.

III. **கீழ்க்கண்டவற்றிற்கு விடை தருக** :

11. புள்ளியியல் தீர்மானக் கோட்பாடு என்பதின் பொருளை விளக்குக.

12. நிச்சயமற்ற நிலையில் எத்தகைய தொழில் நுணுக்கங்களைப் பயன்படுத்தி தீர்மானப் பிரச்சினைகள் தீர்வு மேற்கொள்ளப்படுகிறது.

13. தீர்மான வடிவ மரம் – சிறு குறிப்பு வரைக.

14. அளித்தல் அணி என்றால் என்ன ?

15. EMV அளவையுடன் மர வடிவ தீர்மானத்தை பயன்படுத்தி சிறந்த முடிவான தீர்மானம் காண்பது எவ்வாறு என்பதை விளக்குக.

IV. **கணக்குகள்**:

16. கொடுக்கப்பட்டுள்ள அளித்தல் அட்டவணையில் மூன்று செயற்பாடுகளுடன் (A) அவற்றின் மூன்று சூழ்நிலை நிலைப்பாடுகள் (E) (அல்லது நிகழ்ச்சி) இவற்றுடன் முறையான நிகழ்தகவுகளும் (P) தரப்பட்டுள்ளது. சிறந்ததொரு செயற்பாங்கை தேர்வு செய்க.

நிகழ்ச்சிகள் → செயற்பாடுகள் ↓	E_1	E_2	E_3
A_1	2.5	2.0	– 1
A_2	4.0	2.6	0
A_3	3.0	1.8	1
நிகழ்தகவு	0.2	0.6	0.2

17. EMV மதிப்பை கணக்கிட்டு கீழ்க்கண்ட அளித்தல் அட்டவணையில் சிறந்ததொரு செயலை தேர்வு செய்க.

சூழ்நிலை நிலைப்பாடு	நிகழ்தகவு	விளையாட்டு வீரரின் அளித்தல் (ரூபாயில்)		
		A	B	C
X	0.3	– 2	– 5	20
Y	0.4	20	– 10	– 5
Z	0.3	40	60	30

18. அளித்தல் அணியை கருதுக.

சூழ்நிலை நிலைப்பாடு	நிகழ்தகவு	செயல் (A_1) விரிவாக்க வேண்டாம்	செயல் (A_2) 200 அலகுகள் விரிவாக்குக	செயல் (A_3) 200 அலகுகள் விரிவாக்குக
அதிகத் தேவை	0.4	2500	3500	5000
நடுத்தர தேவை	0.4	2500	3500	2500
குறைந்த தேவை	0.2	2500	1500	1000

EMV அளவையைப் பயன்படுத்தி சிறந்த செயலை முடிவு செய்க.

19. (i) மீச்சிறுவின் மீப்பெரு (ii) மீப்பெருவின் மீச்சிறு இழப்பை பயன்படுத்தி கீழ்க்கண்ட அளித்தல் அணியில் நிகழ்தகவைப் பற்றி தெரியாத நிலையில் எந்த தீர்மானத்தை பரிந்துரை செய்வாய் ?

சூழ்நிலை நிலைப்பாடு

செயல்	S_1	S_2	S_3
a_1	14	8	10
a_2	11	10	7
a_3	9	12	13

20. ஒரு கடைக்காரரிடம் சில அதிக அளவில் அழுகக் கூடிய பழங்கள் உள்ளன. தான் வாழ்கின்ற பகுதியில் தினசரி பழத் தேவையை X எனக் கொண்ட நிகழ்தகவு பரவல் கீழ்க்கண்டவாறு உள்ளது.

தினசரி தேவை (டஜன்களில்)	:	6	7	8	9
நிகழ்தகவு	:	0.1	0.3	0.4	0.2

வியாபாரி ஒரு டஜன் பழங்களை ரூ. 4க்கு வாங்கி அதனை ரூ.10க்கு விற்கின்றார். ஒரு நாளில் விற்பனையாகாத பழங்களை அடுத்த நாள் ஒரு டஜன் ரூ.2க்கு விற்கின்றார். பழங்கள் டஜன் கணக்கில் சேமிப்பு செய்கிறார் என அனுமானம் மேற்கொண்டு எதிர்பார்க்கப்படும் இலாபம் மீப்பெருமம் ஆக எவ்வளவு சேமிக்க வேண்டும்.

[குறிப்பு : $n \geq m$ எனில் இலாபம் $= 6m$

$n < m$ எனில் இலாபம் $= 10n - 4m + 2(m - n)$

$= 8n - 2m$]

21. ஒரு பூங்கொத்து விற்பனையாளர் தனது வழக்கமான வாடிக்கையாளர்களின் தேவையை பூர்த்தி செய்ய பூக்களை சேமித்து வைக்கிறார். ஒரு டஜன் பூக்களை ரூ.3க்கு வாங்கி அதனை ரூ.10க்கு விற்கிறார். பூக்கள் அதே நாளில் விற்கவில்லையெனில் அவை பயனற்றவையாகும். ஒரு டஜன் பூக்களுக்கான தேவைப்பரவல் கீழேத்தரப்பட்டுள்ளது.

தேவை (டஜன்களில்)	1	2	3	4
நிகழ்தகவு	0.2	0.3	0.3	0.2

இவரது எதிர்பார்க்கப்படும் நிகர லாபத்தை அடைய எத்தனை பூக்களை அவர் சேமித்து வைக்க வேண்டும் ?

22. ஒரு பூ விற்பனையாளர் மிகவும் அழுகக் கூடிய பூக்களை சேமிக்கின்றார். ஒரு டஜன் பூக்களின் விலை ரூ.3 மற்றும் விற்கும் விலை ரூ.10 ஏதேனும் பூ அன்றைய நாளில் விற்காமல் இருந்தால் அவை பயனற்றவை. ஒரு டஜன் பூக்களுக்கான தேவை கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

தேவை (டஜன்களில்)	0	1	2	3	4
நிகழ்தகவு	0.1	0.2	0.4	0.2	0.1

ஏதேனும் ஒரு வாடிக்கையாளரின் தேவையை பூர்த்தி செய்ய தவறினால் அதன் பாதிப்பு இலாபத்தில் நஷ்டம் ரூ.5 ஆகும் மற்றும் இலாபம் இழப்பதுடன் உடனடி விற்பனையும் பாதிக்கப்படுகின்றது. எனில், எதிர்பார்க்கப்படும் மீப்பெரும் லாபத்தை அடைய எத்தனை பூக்களை அவர் சேமித்து வைக்க வேண்டும் ?

23. ஒரு செய்திதாள் விற்பனையாளரின் அனுபவத்தில் x என்கிற செய்திதாளுக்கு தனது பகுதியில் உள்ள தேவையை, கீழ்க்கண்ட நிகழ்தகவு பரவல் காண்பிக்கிறது.

தினசரித்தேவை (x)	300	400	500	600	700
நிகழ்தகவு	0.1	0.3	0.4	0.1	0.1

அவர் செய்தித்தாள் ஒவ்வொன்றையும் ரூ 1 க்கு வாங்கி அவை ஒவ்வொன்றையும் ரூ 2 க்கு விற்கின்றார். விற்கப்படாத பிரிதிகள் பயனற்றவை எனக்கழிக்கப்பட்டு அத்தகைய ஒவ்வொரு பிரிதியும் 10 பைசா விலைக்கு விற்கப்படுகிறது. 100 ன் மடங்குகளாக செய்திதாள்களை சேமிக்கின்றார் என அனுமானம் கொள்வோம். இவரது எதிர்பார்க்கப்படும் மீப்பெரும் லாபத்தை அடைய எத்தனை செய்திதாள்களை சேமிக்க வேண்டும் ?

24. ஒரு தீர்மானம் மேற்கொள்பவர் மூன்று தீர்மான மாற்று நடவடிக்கைகள் மற்றும் நான்கு சூழ்நிலை நிலைப்பாடுகளை எதிர்கொள்கிறார் எனக் கொள்வோம். அளித்தல் அட்டவணை கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

செயல்பாடுகள்	சூழ்நிலைகளின் நிலைப்பாடு			
	S_1	S_2	S_3	S_4
A_1	16	10	12	7
A_2	13	12	9	9
A_3	11	14	15	14

சூழ்நிலை நிலைப்பாடுகளின் நிகழ்தகவுகள் தெரியாது என அனுமானித்து கீழ்க்கண்ட அளவைகளைக் கொண்டு எந்த தீர்மானம் பரிந்துரை செய்யப்படுகிறது ?

(i) மீச்சிறுவின் மீப்பெரு (ii) மீப்பெருவின் மீப்பெரு

(iii) மீப்பெருவின் மீச்சிறு இழப்பு

25. A, B மற்றும் C அளித்தல் மற்றும் X, Y மற்றும் Z ஆகியவற்றின் சூழ்நிலை நிலைப்பாடு கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

சூழ்நிலை நிலைப்பாடு	அளித்தல் (ரூபாயில்) செயல்கள்		
	A	B	C
X	– 20	– 50	2000
Y	200	– 100	– 50
Z	400	600	300

சூழ்நிலை நிலைப்பாடுகளின் நிகழ்தகவுகள் 0.3, 0.4 மற்றும் 0.3 ஆகும். EMV கணக்கிட்டு சிறந்த செயலைத் தேர்வு செய்யவும்.

விடைகள் :

I.

1. (ஈ) 2. (ஈ) 3. (ஆ) 4. (இ) 5. (அ)

II.

6. தொடர் 7. சமவாய்ப்பு 8. மீச்சிறு 9. உகந்த 10. மீப்பெருவின் மீச்சிறு

IV.

16. A_2 சிறந்தது

17. மிக அதிக EMV ரூ.194, A –ஐ தேர்வு செய்க.

18. EMV: 3200, செயல் A_3 ஐ தேர்வு செய்து, 400 அலகுகள் விரிவாக்குக.

19. (i) மீச்சிறுவின் மீப்பெரு மதிப்பு : செயல் a_3

(ii) மீப்பெருவின் மீச்சிறு இழப்பு : செயல் a_1

20. கடைக்காரர் 8 டஜன் பூக்களை சேமிக்கும் பொழுது எதிர்பார்க்கப்படும் அதிக பட்ச இலாபத்தை பெறுவார்.

21. கடைக்காரர் 3 டஜன் பூக்களை சேமிக்கும் போது எதிர்பார்க்கப்படும் அதிக பட்ச இலாபத்தை பெறுவார்.

22. அவர் 3 டஜன் பூக்களை சேமிக்கும் பொழுது எதிர்பார்க்கப்படும் அதிக பட்ச இலாபமான ரூ.9.50 பெறுவார்.

23. 405 செய்தித்தாள்களை (காப்பிகள்) சேமிக்கும் பொழுது இவரது எதிர்பார்க்கப்படும் லாபம் அதிகபட்சமாகும்.

24. (i) செயல் a_3 பரிந்துரைக்கப்படுகிறது.

(ii) செயல் a_1 பரிந்துரைக்கப்படுகிறது.

(iii) செயல் a_3 பரிந்துரைக்கப்படுகிறது.

25. EMV - A வுக்கு அதிகம், ஆகவே செயல் A –ஐ சிறந்த செயலாக தேர்ந்தெடுக்கவும்.

RANDOM NUMBERS

4652	3819	8431	2150	2352	2472	0043	3488
9031	7617	1220	4129	7148	1943	4890	1749
2030	2327	7353	6007	9410	9179	2722	3445
0641	1489	0828	0385	8488	0422	7209	4950
8479	6062	5593	6322	9439	4996	1322	4918
9917	3490	5533	2577	4348	0971	2580	1943
6376	9899	9259	5117	1336	0146	0680	4052
7287	0983	3236	3252	0277	8001	6058	4501
0592	4912	3457	8773	5146	2519	3931	6794
6499	9118	3711	8838	0691	1425	7768	9544
0769	1109	7909	4528	8772	1876	2113	4781
8678	4873	2061	1835	0954	5026	2967	6560
0178	7794	6488	7364	4094	1649	2284	7753
3392	0963	6364	5762	0322	2592	3452	9002
0264	6009	1311	5873	5926	8597	9051	8995
4089	7732	8163	2798	1984	1292	0041	2500
9376	7365	7987	1937	2251	3411	6737	0367
3039	3780	2137	7641	4030	1604	2517	9211
8971	8653	1855	5285	5631	2649	6696	5475
0375	4153	5199	5765	2067	6627	3100	5716
9092	4773	0002	7000	7800	2292	2933	6125
2464	1038	3163	3569	715	2029	2538	7080
3027	6215	3125	5856	9543	3660	0255	5544
5754	9247	1164	3283	1865	5274	5471	1346
4358	3716	6949	8502	1573	5763	5046	7135
7178	8324	8379	7365	4577	4864	0629	5100
5035	5939	3665	2160	6700	7249	1738	2721
3318	0220	3611	9887	4608	8664	2185	7290
9058	1735	7435	6822	6622	8286	8901	5534
7886	5182	7595	0305	4903	3306	8088	3899
3354	8454	7386	1333	5345	6565	3159	3991
3415	7671	0846	7100	1790	9449	6285	2525
3918	5872	7898	6125	2268	1898	0755	6034
6138	9045	6950	8843	6533	0917	6673	5721
3828	1704	2835	4677	4637	7329	3156	3291
1349	0417	9311	9787	1284	0769	8422	1077
4234	0248	7760	6504	2754	4044	0842	9080
6880	3201	7044	3657	5263	0374	7563	6599
0714	5008	5076	1134	5342	1608	5179	0967
3448	6421	3304	0583	12650	0662	7257	0766
5711	7343	7539	3684	9397	5335	4031	1486
2588	3301	0553	2427	3598	2580	7017	9176
8581	4253	7404	5264	5411	3431	3092	8573
8475	6322	3949	9675	6533	1133	8776	2216
0272	5624	8549	5552	7469	2799	2882	9620
7383	7795	7939	2652	4456	6993	2950	8573

											Mean Difference								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0125	0170	0212	0253	0294	0334	0374	4	8	12	17	21	25	29	33	37
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	3	8	11	15	19	23	26	30	34
12	0792	0828	0864	0934	0934	0969	1004	1038	1072	1106	3	7	10	14	17	21	24	28	31
13	1139	1173	1206	1271	1271	1303	1335	1367	1399	1430	3	6	10	13	16	19	23	26	29
14	1461	1492	1523	1583	1584	1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	12	15	18	21	24	27
15	1761	1790	1847	1875	1875	1903	1931	1959	1987	2014	3	6	8	11	14	17	20	22	25
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	3	5	8	11	13	16	18	21	24
17	2304	2330	2355	2380	2405	2330	2455	2480	2504	2529	2	5	7	10	12	15	17	20	22
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	2	5	7	9	12	14	16	19	21
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	2	4	7	9	11	13	16	18	20
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2	3	5	6	8	9	10	12	14
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
37	5682	5694	5705	5717	5929	5740	5752	5763	5775	5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
39	5911	5932	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1	2	3	4	5	6	8	9	10
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6204	6304	6314	6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9
46	6628	6637	6646	6658	6685	6675	6684	6693	6702	6712	1	2	3	4	5	6	7	7	8
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1	2	3	4	5	5	6	7	8
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1	2	3	4	4	5	6	7	8
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1	2	3	4	4	5	6	7	8
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1	2	2	3	4	5	6	7	8
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7

											Mean Difference								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	1	2	2	3	4	5	5	6	7
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	1	2	2	3	4	5	5	6	7
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	1	2	2	3	4	5	5	6	7
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	1	1	2	3	4	4	5	6	7
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1	1	2	3	4	4	5	6	7
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1	1	2	3	4	4	5	6	6
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7984	1	1	2	3	3	4	5	6	6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8096	8109	8116	8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8162	8176	8182	8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8249	8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1	1	2	2	3	4	4	5	6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	1	1	2	2	3	3	4	5	5
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8849	8854	8859	1	1	2	2	3	3	4	5	5
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	1	1	2	2	3	3	4	4	5
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	1	1	2	2	3	3	4	4	5
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9030	9025	1	1	2	2	3	3	4	4	5
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	1	1	2	2	3	3	4	4	5
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1	1	2	2	3	3	4	4	5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	1	1	2	2	3	3	4	4	5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1	1	2	2	3	3	4	4	5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1	1	2	2	3	3	4	4	5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	1	1	2	2	3	3	4	4	5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1	1	2	2	3	3	4	4	5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	0	1	1	2	2	3	3	4	4
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	0	1	1	2	2	3	3	4	4
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	0	1	1	2	2	3	3	4	4
90	9542	9547	9552	9557	9532	9566	9571	9576	9581	9586	0	1	1	2	2	3	3	4	4
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
92	9638	9643	9647	9653	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0	1	1	2	2	3	3	3	4

											Mean Difference								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.00	1000	1002	1005	1007	1009	1012	1014	1016	1019	1021	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.01	1023	1026	1028	1030	1033	1035	1038	1040	1042	1045	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.02	1047	1050	1052	1054	1057	1059	1062	1064	1067	1069	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.03	1072	1074	1076	1079	1081	1084	1086	1089	1091	1094	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.04	1096	1099	1102	1104	1107	1109	1112	1114	1117	1119	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.05	1122	4125	1127	1130	1132	1135	1138	1140	1143	1146	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.06	1148	1151	1153	1156	1159	1161	1164	1167	1169	1172	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.07	1175	1178	1180	1183	1186	1189	1191	1194	1197	1199	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.08	1202	1205	1208	1211	1213	1216	1219	1222	1225	1227	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.09	1230	1233	1236	1239	1242	1245	1247	1250	1253	1256	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.10	1259	1262	1265	1268	1271	1274	1276	1279	1282	1285	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.11	1288	1291	1294	1297	1300	1303	1306	1309	1312	1315	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.12	1318	1321	1324	1327	1330	1334	1337	1340	1343	1346	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.13	1349	1352	1355	1358	1361	1365	1368	1371	1374	1377	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.14	1380	1384	1387	1390	1393	1396	1400	1403	1406	1409	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.15	1413	1416	1419	1422	1426	1429	1432	1435	1439	1442	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.16	1445	1449	1452	1455	1459	1462	1466	1469	1472	1476	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.17	1479	1483	1486	1489	1493	1496	1500	1503	1507	1510	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.18	1514	1517	1521	1524	1528	1531	1535	1538	1542	1545	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.19	1549	1552	1556	1560	1563	1567	1570	1574	1578	1581	0	1	1	1	2	2	3	3	3
.20	1585	1589	1592	1596	1600	1603	1607	1611	1614	1618	0	1	1	1	2	2	3	3	3
.21	1622	1626	1629	1633	1637	1641	1644	1648	1652	1656	0	1	1	2	2	2	3	3	3
.22	1660	1663	1667	1671	1675	1479	1683	1687	1690	1694	0	1	1	2	2	2	3	3	3
.23	1698	1702	1706	1710	1794	1718	1722	1726	1730	1734	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.24	1738	1792	1746	1750	1754	1758	1762	1766	1770	1774	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.25	1778	1782	1786	1791	1795	1799	1803	1807	1811	1816	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.26	1820	1824	1828	1832	1837	1841	1845	1849	1854	1858	0	1	1	2	2	3	3	3	4
.27	1862	1866	1871	1875	1829	1884	1888	1892	1897	1901	0	1	1	2	2	3	3	3	4
.28	1905	1910	1914	1919	1923	1928	1932	1936	1941	1945	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.29	1950	1954	1959	1963	1968	1972	1977	1982	1986	1991	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.30	1995	2000	2004	2009	2014	2018	2023	2028	2032	2037	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.31	2042	2046	2051	2056	2061	2065	2070	2075	2080	2084	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.32	2089	2094	2099	2104	2109	2113	2118	2123	2128	2133	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.33	2138	2143	2148	2153	2158	2163	2168	2173	2178	2183	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.34	2188	2193	2198	2203	2208	2213	2218	2223	2228	2234	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.35	2239	2244	2249	2254	2259	2265	2270	2275	2280	2286	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.36	2291	2296	2301	2307	2312	2317	2323	2328	2333	2339	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.37	2344	2350	2355	2360	2366	2371	2377	2382	2388	2393	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.38	2399	2404	2410	2415	2421	2427	2432	2438	2443	2449	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.39	2455	2460	2466	2472	2477	2483	2489	2495	2500	2506	1	1	2	2	3	3	4	5	5
.40	2512	2518	2523	2529	2535	2541	2547	2553	2559	2564	1	1	2	2	3	4	4	5	5
.41	2570	2576	2582	2588	2594	2600	2606	2612	2618	2624	1	1	2	2	3	4	4	5	5
.42	2630	2636	2642	2649	2655	2661	2667	2673	2679	2685	1	1	2	2	3	4	4	5	6
.43	2692	2698	2704	2710	2716	2723	2729	2735	2742	2748	1	1	2	3	3	4	4	5	6
.44	2754	2761	2767	2773	2780	2786	2793	2799	2805	2812	1	1	2	3	3	4	4	5	6
.45	2818	2825	2831	2838	2844	2851	2858	2864	2871	2877	1	1	2	3	3	4	5	5	6
.46	2884	2891	2897	2904	2911	2917	2924	2931	2938	2944	1	1	2	3	3	4	5	5	6
.47	2951	2958	2965	2972	2979	2985	2992	2999	3006	3013	1	1	2	3	3	4	5	5	6
.48	3020	3027	3034	3041	3048	3055	3062	3069	3076	3083	1	1	2	3	4	4	5	6	6
.49	3090	3097	3105	3112	3119	3126	3133	3141	3148	3155	1	1	2	3	4	4	5	6	6

Antilogarithms

											Mean Difference								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.50	3162	3170	3177	3184	3192	3199	3206	3214	3221	3228	1	1	2	3	4	4	5	6	7
.51	3236	3243	3251	3258	3266	3273	3281	3289	3296	3304	1	2	2	3	4	5	5	6	7
.52	3311	3319	3327	3334	3342	3350	3357	3365	3373	3381	1	2	2	3	4	5	5	6	7
.53	3388	3396	3404	3412	3420	3428	3436	3443	3451	3459	1	2	2	3	4	5	6	6	7
.54	3467	3475	3483	3491	3499	3508	3516	3524	3532	3540	1	2	2	3	4	5	6	6	7
.55	3548	3556	3565	3573	3581	3589	3597	3606	3614	3622	1	2	2	3	4	5	6	7	7
.56	3631	3639	3648	3656	3664	3673	3681	3690	3698	3707	1	2	3	3	4	5	6	7	8
.57	3715	3724	3733	3741	3750	3758	3767	3776	3784	3793	1	2	3	3	4	5	6	7	8
.58	3802	3811	3819	3828	3837	3846	3855	3864	3873	3882	1	2	3	4	4	5	6	7	8
.59	3890	3899	3908	3917	3926	3936	3945	3954	3963	3972	1	2	3	4	5	5	6	7	8
.60	3981	3990	3999	4009	4018	4027	4036	4046	4055	4064	1	2	3	4	5	6	6	7	8
.61	4074	4083	4093	4102	4111	4121	4130	4140	4150	4159	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.62	4169	4178	4188	4198	4207	4217	4227	4236	4246	4256	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.63	4266	4276	4285	4295	4305	4315	4325	4335	4345	4355	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.64	4365	4375	4385	4395	4406	4416	4426	4436	4446	4457	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.65	4467	4477	4487	4498	4508	4519	4529	4539	4550	4560	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.66	4571	4581	4592	4603	4613	4624	4634	4645	4656	4667	1	2	3	4	5	6	7	9	10
.67	4677	4688	4699	4710	4721	4732	4742	4753	4764	4775	1	2	3	4	5	7	8	9	10
.68	4786	4797	4808	4819	4831	4842	4853	4864	4875	4887	1	2	3	4	6	7	8	9	10
.69	4898	4909	4920	4932	4943	4955	4966	4977	4989	5000	1	2	3	5	6	7	8	9	10
.70	5012	5023	5035	5047	5058	5070	5082	5093	5105	5117	1	2	4	5	6	7	8	9	11
.71	5129	5140	5152	5164	5176	5188	5200	5212	5224	5236	1	2	4	5	6	7	8	10	11
.72	5248	5260	5272	5284	5297	5309	5321	5333	5346	5358	1	2	4	5	6	7	9	10	11
.73	5370	5383	5395	5408	5420	5433	5445	5458	5470	5483	1	3	4	5	6	8	9	10	11
.74	5495	5508	5521	5534	5546	5559	5572	5585	5598	5610	1	3	4	5	6	8	9	10	12
.75	5623	5636	5649	5662	5675	5689	5702	5715	5728	5741	1	3	4	5	7	8	9	10	12
.76	5754	5768	5781	5794	5808	5821	5834	5848	5861	5875	1	3	4	5	7	8	9	11	12
.77	5888	5902	5916	5929	5943	5957	5970	5984	5998	6012	1	3	4	5	7	8	10	11	12
.78	6026	6039	6053	6067	6081	6095	6109	6124	6138	6152	1	3	4	6	7	8	10	11	13
.79	6166	6180	6194	6209	6223	6237	6252	6266	6281	6295	1	3	4	6	7	9	10	11	13
.80	6310	6324	6339	6353	6368	6383	6397	6412	6427	6442	1	3	4	6	7	9	10	12	13
.81	6457	6471	6486	6501	6516	6531	6546	6561	6577	6592	2	3	5	6	8	9	11	12	14
.82	6607	6622	6637	6653	6668	6683	6699	6714	6730	6745	2	3	5	6	8	9	11	12	14
.83	6761	6776	6792	6808	6823	6839	6855	6871	6887	6902	2	3	5	6	8	9	11	13	14
.84	6918	6934	6950	6966	6982	6998	7015	7031	7047	7063	2	3	5	6	8	10	11	13	15
.85	7079	7096	7112	7129	7145	7161	7178	7194	7211	7228	2	3	5	7	8	10	12	13	15
.86	7244	7261	7278	7295	7311	7328	7345	7362	7379	7396	2	3	5	7	8	10	12	13	15
.87	7413	7430	7447	7464	7482	7499	7516	7534	7551	7568	2	3	5	7	9	10	12	14	16
.88	7586	7603	7621	7638	7656	7674	7691	7709	7727	7745	2	4	5	7	9	11	12	14	16
.89	7762	7780	7798	7816	7834	7852	7870	7889	7907	7925	2	4	5	7	9	11	13	14	16
.90	7943	7962	7980	7998	8017	8035	8054	8072	8091	8110	2	4	6	7	9	11	13	15	17
.91	8128	8147	8166	8185	8204	8222	8241	8260	8279	8299	2	4	6	8	9	11	13	15	17
.92	8318	8337	8356	8375	8395	8414	8433	8453	8472	8492	2	4	6	8	10	12	14	15	17
.93	8511	8531	8551	8570	8590	8610	8630	8650	8670	8690	2	4	6	8	10	12	14	16	18
.94	8710	8730	8750	8770	8790	8810	8831	8851	8872	8892	2	4	6	8	10	12	14	16	18
.95	8913	8933	8954	8974	8995	9016	9036	9057	9078	9099	2	4	6	8	10	12	15	17	19
.96	9120	9141	9162	9183	9204	9226	9247	9268	9290	9311	2	4	6	8	11	13	15	17	19
.97	9333	9354	9376	9397	9419	9441	9462	9484	9506	9528	2	4	7	9	11	13	15	17	20
.98	9550	9572	9594	9616	9638	9661	9688	9705	9727	9750	2	4	7	9	11	13	16	18	20
.99	9772	9795	9817	9840	9863	9886	9908	9931	9954	9977	2	5	7	9	11	14	16	18	20

VALUES OF e^{-m} (For Computing Poisson Probabilities (0 < m < 1)

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	1.0000	.9900	.9802	.9704	.9608	.9512	.9418	.9324	.9231	.9139
0.1	0.9048	.8957	.8860	.8781	.8694	.8607	.8521	.8437	.8353	.8270
0.2	0.8187	.8106	.8025	.7945	.7866	.7788	.7711	.7634	.7558	.7483
0.3	0.7408	.7334	.7261	.7189	.7178	.7047	.6977	.6907	.6839	.6771
0.4	0.6703	.6636	.6570	.6505	.6440	.6376	.6313	.6250	.6188	.6125
0.5	0.6065	.6005	.5945	.5883	.5827	.5770	.5712	.5655	.5599	.5543
0.6	.5488	.5434	.5379	.5326	.5278	.5220	.5160	.5117	.5066	.5016
0.7	0.4966	.4916	.4868	.4810	.4771	.4724	.4670	.4630	.4584	.4538
0.8	0.4493	.4449	.4404	.4360	.4317	.4274	.4232	.4190	.4148	.4107
0.9	0.4066	.4025	.3985	.3946	.3606	.3867	.3829	.3791	.3753	.5716

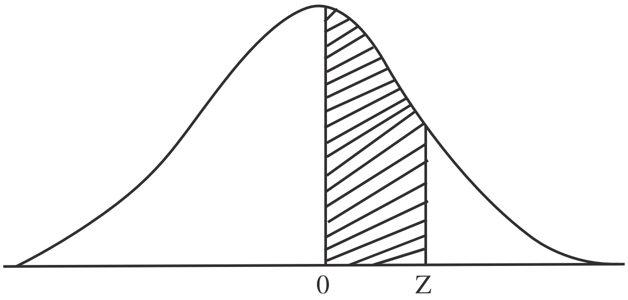
(m = 1, 2, 3, ... 10)

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
e^{-m}	.36788	.13534	.04979	.07832	.00698	.00279	.00092	.000395	.000123	.000045

Note: To obtain values of e^{-m} for other values of m, use the laws of exponents.

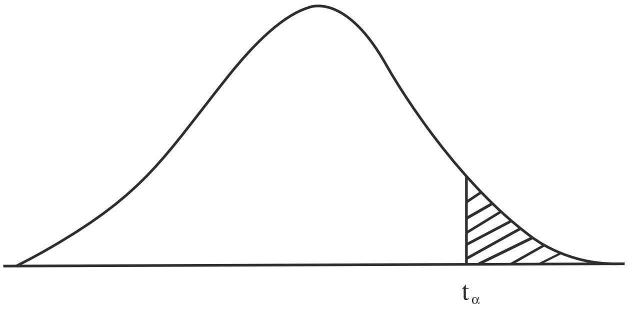
Example, $e^{-2.35} = (e^{-2.0})\ (e^{-0.35}) = (.13534)\ (.7047) = 0.095374$

AREA UNDER STANDARD NORMAL CURVE



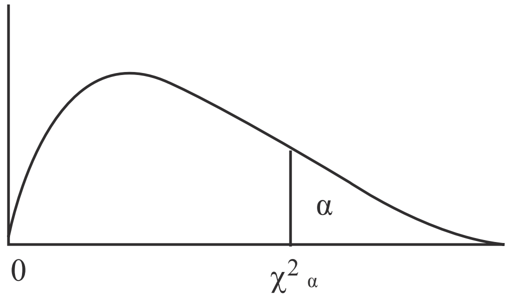
z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.4593	.1331	.1368	.14706	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2517	.2549
0.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	4345	.4357	4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4956	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	..4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.5959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	04977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4989	.4986	.4986
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990

VALUE OF t



d.f	$t_{.100}$	$t_{.050}$	$t_{.025}$	$t_{.010}$	$t_{.005}$
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.571	3.354	4.032
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	1.375	1.812	2.228	2.764	3.169
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	1.519	1.714	2.069	2.500	2.807
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
inf.	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576

PERCENTILE VALUE OF CHI. SQUARE DISTRIBUTION



d.f \ α	.100	.050	.025	.010	.005	.001
1	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88	10.8
2	4.61	5.99	7.38	9.21	10.6	13.8
3	6.25	7.81	9.35	11.3	12.8	15.3
4	7.78	9.49	11.1	13.3	14.9	18.5
5	9.24	11.1	12.8	15.1	16.7	20.5
6	10.6	12.6	14.4	16.8	18.5	22.5
7	12.0	14.1	16.0	18.5	20.3	24.3
8	13.4	15.5	17.5	20.1	22.0	26.1
9	14.7	16.9	19.0	21.7	23.6	27.9
10	16.0	18.3	20.5	23.2	25.2	29.6
11	17.3	19.7	21.9	24.7	26.8	31.3
12	18.5	21.0	23.3	26.2	28.3	32.9
13	19.8	22.4	24.7	27.7	29.8	34.5
14	21.1	23.7	26.1	29.1	31.3	36.1
15	22.3	25.0	27.5	30.6	32.8	37.7
16	23.5	26.3	28.8	32.0	34.3	39.3
17	24.8	27.6	30.2	33.4	35.7	40.8
18	26.0	28.9	31.5	34.8	37.2	42.3
19	27.2	30.1	32.9	36.2	38.6	43.8
20	28.4	31.4	34.2	37.6	40.0	45.3
21	29.6	32.7	35.5	38.9	41.4	46.8
22	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8	48.3
23	32.0	35.2	38.1	41.6	44.2	49.7
24	33.2	36.4	39.4	43.0	45.6	51.2
25	34.4	37.7	40.6	44.3	46.9	52.6
26	35.6	38.9	41.9	45.6	48.3	54.1
27	36.7	40.1	43.2	47.0	49.6	55.5
28	37.9	41.3	44.5	48.3	51.0	56.9
29	39.1	42.6	45.7	49.6	52.3	58.3
30	40.3	43.8	47.0	50.9	53.7	59.7
35	46.1	49.8	53.2	57.3	60.3	66.6
40	51.8	55.8	59.3	63.7	66.8	73.4
45	57.5	61.7	65.4	70.0	73.2	80.1
50	63.2	67.5	71.4	76.2	79.5	86.7
55	68.8	73.3	77.4	82.3	85.7	93.2
60	74.4	79.1	83.3	88.4	92.0	99.6
65	80.0	84.8	89.2	94.4	98.1	106.0
70	85.5	90.5	95.0	100.4	104.2	112.3
75	91.1	96.2	100.8	106.4	110.3	118.6
80	96.6	101.9	106.6	112.3	116.3	124.8
85	102.1	107.5	112.4	118.2	122.3	131.0
90	107.6	113.1	118.1	124.1	128.3	137.2
95	113.0	118.8	123.9	130.0	134.2	143.3
100	118.5	124.3	129.6	135.8	140.2	149.4

5% POINTS OF FISHER'S F-DISTRIBUTION

n \ m	1	2	3	4	5	6	7	8
1	161.45	199.50	215.70	224.58	230.16	223.99	236.77	238.88
2	18.513	19.000	19.164	19.247	19.296	19.330	19.353	19.371
3	10.128	9.5521	9.2766	9.1172	9.0135	8.9406	8.8868	8.8452
4	7.7086	6.9443	6.5914	6.3883	6.2560	6.1631	6.0942	6.0410
5	6.6079	5.7861	5.4095	5.1922	5.0503	4.9503	4.8759	4.8183
6	5.9874	5.1456	4.7571	4.5337	4.3874	4.2839	4.2066	4.1468
7	5.5914	4.7374	4.3468	4.1203	3.9715	3.8660	3.7870	37257
8	5.3177	4.4590	4.0662	3.8378	3.6875	3.5806	3.5005	3.4381
9	5.1174	4.2565	3.8626	3.6331	3.4817	3.3738	3.2927	3.2296
10	4.9646	4.1028	3.7083	3.4780	3.3258	3.2172	3.1355	3.0717
11	4.8443	3.9823	3.5874	3.3567	3.2039	3.0946	3.0123	2.9480
12	4.7472	3.8853	3.4903	3.2592	3.1059	2.9961	2.9134	2.8446
13	4.6672	3.8056	3.4105	3.1791	3.0254	2.9153	2.8321	2.7069
14	4.6001	3.7380	3.3439	3.1122	2.9582	2.8477	2.7642	2.6987
15	4.5431	3.6823	3.2874	3.0556	2.9013	2.7905	2.7066	2.6408
16	4.4940	3.6337	3.2389	3.0069	2.8524	2.7413	2.6572	2.5911
17	4.4513	3.5915	3.1968	2.9647	2.8100	2.6987	2.6143	2.5480
18	4.4139	3.5546	3.1599	2.9277	2.7229	2.6613	2.5767	2.5102
19	4.3808	3.5219	3.1274	2.8951	2.7401	2.6283	2.5435	2.4768
20	4.3513	3.4928	3.0984	2.8661	2.7109	2.5990	2.5140	2.4471
21	4.3248	3.4658	3.0725	2.8401	2.6848	2.5727	2.4876	2.4205
22	4.3009	3.4434	3.0491	2.8167	2.6613	2.5491	2.4638	2.3965
23	4.2793	3.4221	3.0280	2.7955	2.6400	2.5277	2.4422	2.3748
24	4.2597	3.4028	3.0088	2.7763	2.6207	2.5082	2.4226	3.3551
25	4.2417	3.3852	2.9912	2.7587	2.6030	2.4904	2.4047	2.3371
26	4.2252	3.3690	2.9751	2.7426	2.5868	2.4741	2.3883	2.3205
27	4.2100	3.3541	2.9604	2.7278	2.5719	2.4591	2.3732	2.3053
28	4.1960	3.3404	2.9467	2.7141	2.5581	2.4453	2.3593	2.2913
29	4.1830	3.3277	2.9340	2.7014	2.5451	2.4324	2.3463	2.2782
30	4.1709	3.3158	2.9223	2.6896	2.5336	2.4205	2.3343	2.2662
40	4.0848	3.2317	2.8387	2.6060	2.4495	2.3359	2.2490	2.1802
60	4.0012	3.1504	2.7581	2.5252	2.3683	2.2540	2.1665	2.0970
120	3.9201	3.0718	2.6802	2.4472	2.2900	2.1750	2.0867	2.0164
00	3.8415	2.9957	2.6049	2.3719	2.2141	2.0986	2.0096	1.9384

m \ n	9	10	12	15	20	30	60	α
1	240.54	241.88	245.91	245.95	248.01	250.09	252.20	254.32
2	19.385	19.396	19.413	19.420	19.446	19.462	19.479	19.496
3	8.8123	8.7855	8.7446	8.7029	8.6602	8.6166	8.5720	8.5265
4	5.9988	5.9644	5.9117	5.8578	5.8025	5.7459	5.6878	5.0281
5	4.7725	4.7351	4.6777	4.6188	4.5581	4.4959	4.4314	4.3650
6	4.0990	4.0600	3.9999	3.0381	3.8742	3.8082	3.7398	3.6688
7	3.6767	3.6365	3.5747	3.5108	3.4445	3.3758	3.3043	3.2298
8	3.3881	3.3472	3.2840	3.2184	3.1503	3.0794	3.0053	2.9276
9	3.1789	3.1373	3.0729	3.0061	2.9365	2.8637	2.7872	2.7067
10	3.0204	2.9782	2.9130	2.8450	2.74740	2.6996	2.6211	2.5379
11	2.8962	2.8536	2.7876	2.7186	2.6464	2.5705	2.4901	2.4045
12	2.7964	2.7534	2.6866	2.6169	2.5436	2.4663	2.3842	2.2062
13	2.7144	2.6710	2.6037	2.5331	2.4589	2.3803	2.2966	2.2064
14	2.6458	2.6021	2.5342	2.4630	2.3879	2.3082	2.2230	2.1307
15	2.5876	2.5437	2.4753	2.4035	2.3275	2.2468	2.1601	2.06558
16	2.5377	2.4935	2.4247	2.3522	2.2756	2.1938	2.1058	2.0096
17	2.4943	2.4499	2.3807	2.3077	2.2304	2.1477	2.0584	1.9604
18	2.4563	2.4117	2.3421	2.2686	2.1906	2.1071	2.0166	1.9168
19	2.4227	2.3779	2.3080	2.2341	2.1555	2.0712	1.9796	1.8780
20	2.3928	2.3479	2.2776	2.2033	2.1242	2.0391	1.9464	1.8432
21	2.3661	2.3210	2.2504	2.1757	2.0960	2.0102	1.9165	1.8117
22	2.3419	2.2967	2.2258	2.1508	2.0707	1.9842	1.8895	1.7831
23	2.3201	2.2747	2.2036	2.1282	2.0476	1.9605	1.8649	1.7570
24	2.3002	2.2547	2.1834	2.1077	2.0267	1.9390	1.8424	1.7331
25	2.2821	2.2365	2.1649	2.0889	2.0075	1.9192	1.8217	1.7110
26	2.2655	2.3197	2.1479	2.0716	1.9898	1.90410	1.8027	1.6906
27	2.2501	2.2043	2.1323	2.0558	1.9736	1.8842	1.7851	1.6717
28	2.2360	2.1900	2.1179	2.0411	1.9586	1.8687	1.7689	1.6541
29	2.2229	2.1768	2.1045	2.0275	1.9446	1.8543	1.7537	1.6377
30	2.2107	2.1646	2.0921	2.0148	1.9317	1.8409	1.7396	1.6223
40	2.1240	2.0772	2.0035	1.9245	1.8389	1.7444	1.6373	1.5089
60	2.0401	1.9926	1.9194	1.8364	1.7480	1.6491	1.5343	1.3893
120	1.9588	1.9105	1.6337	1.7505	1.6587	1.5543	1.4290	1.2539
00	1.8799	1.8307	1.7522	1.6664	1.5705	1.4591	1.3180	1.0000

1% POINTS OF FISHER'S F-DISTRIBUTION

df \ α	1	2	3	4	5	6	7	8
1	4052.2	4999.5	5403.3	5624.6	5763.7	5859.0	5928.3	5981.6
2	98.503	90.000	99.106	99.249	99.299	99.332	99.356	99.374
3	34.116	60.817	29.457	28.710	28.237	27.911	27.672	27.489
4	21.186	18.000	16.694	15.977	15.522	15.207	14.976	14.799
5	16.258	13.274	12.060	11.392	10.967	10.672	10.456	10.289
6	13.745	10.925	9.7795	9.1483	8.8759	8.4001	8.2600	8.1016
7	12.246	9.5466	8.4513	7.8467	7.4604	7.1914	6.9926	6.8401
8	11.259	8.6491	7.5910	7.0060	6.6318	6.3707	6.1776	6.0289
9	10.567	8.0215	6.9919	6.4221	6.0569	5.8018	5.6129	5.4671
10	10.044	7.5594	6.5523	5.9943	5.6363	5.3858	5.2001	5.0567
11	9.6460	7.2057	6.167	5.668.	5.3160	5.0692	4.8861	4.7445
12	9.3302	6.9266	4.9526	54.4119	5.0643	4.8206	4.6395	4.4994
13	9.0738	6.7010	5.7394	5.2053	4.8616	4.6204	4.4410	4.3021
14	8.8616	6.5149	5.5639	5.0354	4.6950	4.4558	4.2779	4.1399
15	8.6831	6.3589	5.4170	4.8932	4.5556	4.3183	4.1415	4.0045
16	8.5310	6.2262	5.2922	4.7726	4.4374	4.2016	4.0259	3.8896
17	8.3997	6.1121	5.1850	4.6690	4.3359	4.1015	3.9267	3.7910
18	8.2854	6.0129	5.0919	4.5790	4.2479	4.0146	3.8406	3.7054
19	8.1850	5.9259	5.0103	4.5003	4.1708	3.9386	3.7653	3.6305
20	8.0960	5.8489	4.9382	4.4307	4.1027	3.8714	3.3987	3.5644
21	8.0166	5.7804	4.8740	4.3688	4.0421	3.8117	3.6396	3.5056
22	7.9454	5.7190	4.8166	4.3134	3.9880	3.7583	3.5867	3.4530
23	7.8811	5.6637	4.7649	4.2635	3.9392	3.7102	3.5390	3.4057
24	7.8229	5.6136	4.7181	4.2184	3.8951	3.6667	3.4959	3.3629
25	7.7698	5.5680	4.6755	4.1774	3.8550	3.6272	3.4568	3.3239
26	7.7213	5.5263	4.6366	4.1400	3.8183	3.5911	3.4210	3.2884
27	7.6767	5.4881	4.6009	4.1056	3.7848	3.5580	3.3882	3.2558
28	7.6356	5.4229	4.5881	4.0740	3.7539	3.5276	3.3581	3.2259
29	7.5976	5.4205	4.5378	4.0440	3.7254	3.4995	3.3302	3.1982
30	7.5627	5.3904	4.5097	4.0179	3.6990	3.4735	3.3045	3.1726
40	7.3141	5.1785	4.3126	3.8283	3.5138	3.2910	3.1238	2.9930
60	7.0771	4.9774	4.1259	3.6491	3.3389	3.1187	2.9530	2.8233
120	6.8510	4.7865	3.9493	3.4796	3.1735	2.9559	2.7918	2.6629
00	6.6349	4.6052	3.7816	3.3192	3.0173	2.8020	2.6393	2.5113

m \ n	9	10	12	15	20	30	60	α
1	6022.5	6055.8	6106.3	6157.3	6208.7	6260.7	6313.0	6366.0
2	99.388	99.399	99.416	99.432	99.449	99.466	99.483	99.501
3	27.345	27.229	27.052	26.872	26.690	26.505	26.316	26.125
4	14.659	14.546	14.374	14.198	14.020	13.838	13.652	13.463
5	10.158	10.051	9.8883	9.7222	9.5527	9.3793	9.2020	9.0204
6	7.9761	7.8741	77183	7.5590	7.3958	7.2285	7.0568	6.8801
7	6.7188	6.6201	6.4691	6.3143	6.1554	5.9921	5.8235	5.6495
8	5.9106	5.8143	5.6668	5.5151	5.5151	5.1981	5.0316	4.8588
9	5.3511	5.2565	5.1119	4.9621	4.8080	4.6486	4.4831	4.3105
10	4.9424	4.8492	4.7059	4.5582	4.4054	4.2469	4.0819	3.9090
11	4.6315	4.5393	4.3974	4.2509	4.0990	3.9411	3.7761	3.6025
12	4.3875	4.2961	4.1553	4.0096	3.8584	3.7008	3.5355	3.3608
13	4.1911	4.1003	3.9603	3.8154	3.6646	3.5070	3.3413	3.1654
14	4.0297	3.9394	3.8001	3.6557	3.5052	3.3476	3.1813	3.0040
15	3.8948	3.8049	3.6662	3.5222	3.3719	3.2141	3.0471	2.8684
16	3.7804	3.6909	3.5527	3.4089	3.2588	3.1007	3.9330	2.7528
17	3.6822	3.5931	3.4552	3.3117	3.1615	3.0092	2.8348	2.6530
18	3.5971	3.5082	3.3706	3.2273	3.0771	2.9185	2.7493	2.5660
19	3.5225	3.4338	3.2965	3.1533	3.0031	3.8442	3.6742	2.4893
20	3.4567	3.3682	3.2311	3.0880	2.9377	2.7785	2.6077	2.4212
21	3.3981	3.3098	3.1729	3.0299	2.8796	2.7200	2.5484	2.3603
22	3.3458	3.2576	3.1209	2.9709	2.8274	2.6675	2.4951	2.3055
23	3.2986	3.2106	3.0740	2.9311	2.7805	2.6202	2.4471	2.2559
24	3.2560	3.1681	3.0316	2.8887	2.7380	2.5773	2.4035	2.2107
25	3.2172	3.1294	2.9931	2.8502	2.6993	2.5383	2.3637	2.1694
26	3.1818	3.0941	2.9579	2.8150	2.6640	2.5026	2.3273	2.1315
27	3.1494	3.0618	2.9256	2.7827	2.0316	2.4699	2.2938	2.0965
28	3.1195	3.0320	2.8959	2.7530	2.6017	2.4397	2.2629	2.0642
29	3.0920	3.0045	2.8685	2.7256	2.5742	2.4118	2.2344	2.03472
30	3.0665	2.9791	2.8431	2.7002	2.5487	2.3860	2.2079	2.0062
40	2.8876	2.8005	2.6648	2.5216	2.3689	2.2034	2.0194	1.8047
60	2.7185	2.6318	2.4961	2.3523	2.1978	2.0285	1.8363	1.6006
120	2.5586	2.4721	2.3363	2.1915	2.0346	1.8600	1.6557	1.3805
00	2.4073	2.3209	2.1848	2.0385	1.8783	1.6964	1.4730	1.0000