इण्टरमीडिएट परीक्षा, 2013

गणित—द्वितीय प्रश्नपत्र

समय : 3 घण्टे 15 मिनट] **335 (DE)** **[पूर्णांक : 50**

1. निम्नलिखित में से किन्हीं **चार** खण्डों को हल कीजिए—

(क) यदि $f(x) = \sin x + \cos 2x$ तो $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ तथा $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$ का मान ज्ञात कीजिए। 1

(ख) $\int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{1+\sin 2x}}\, dx$ का मान ज्ञात कीजिए। 1

(ग) यदि समीकरण $3x^2 - 8xy + ky^2 = 0$ से निरूपित सरल रेखाएँ परस्पर लम्ब हैं तो k का मान ज्ञात कीजिए। 1

(घ) वृत्त $x^2 + y^2 = 10$ के उन बिन्दुओं पर स्पर्श रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए , जिन पर रेखा $x + 3 = 0$ वृत्त का छेदन करती है। 1

(ङ) यदि दो बलों $(P+Q)$ तथा $(P-Q)$ का परिणामी $\sqrt{2(P^2+Q^2)}$ है तो बलों के बीच का कोण ज्ञात कीजिए। 1

2. निम्नलिखित में से किन्हीं **चार** खण्डों को हल कीजिए—

(क) यदि $y = \sqrt{\frac{1-\sin 2x}{1+\sin 2x}}$ तो सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{dy}{dx} + \sec^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 0.$$ 2

(ख) $\int \frac{\cos x}{\cos(x-a)}\, dx$ का मान ज्ञात कीजिए। 2

(ग) सिद्ध कीजिए कि समीकरण

$4x^2 + 12xy + 9y^2 + 6x + 9y + 2 = 0$ दो समान्तर रेखाओं को निरूपित करता है। 2

(घ) सिद्ध कीजिए कि किसी प्रक्षेप्य का उड्डयन काल $\frac{2u\,\sin\alpha}{g}$ होता है, जहाँ u तथा α क्रमशः प्रक्षेपण वेग एवं क्षैतिज से प्रक्षेपण कोण है। 2

(ङ) 10 किग्रा-भार तथा 4 किग्रा-भार के दो समदिश समान्तर बल किसी पिण्ड के दो बिन्दुओं A तथा B पर इस प्रकार कार्य कर रहे हैं कि $AB = 10$ मीटर है। यदि उनका परिणामी AB के बिन्दु C पर कार्य करता है, तो परिणामी बल तथा दूरी AC ज्ञात कीजिए। 2

3. निम्नलिखित में से किन्हीं **चार** खण्डों को हल कीजिए—

(क) फलन a^x का x के सापेक्ष प्रथम सिद्धान्त से अवकल गुणांक ज्ञात कीजिए। 2

(ख) $\int \frac{dx}{x^4 - 1}$ का मान ज्ञात कीजिए। 2

(ग) यदि रेखा $y = x\sqrt{2} - 4a\sqrt{2}$, परवलय $y^2 = 4ax$ को बिन्दुओं P तथा Q पर काटती है तो सिद्ध कीजिए कि जीवा PQ की लम्बाई $6\sqrt{3}a$ है। 2

(घ) एक गेंद जिसका भार 1 किग्रा है, 7 मी/से के वेग से गतिमान है, एक दूसरी गेंद जिसका भार 2 किग्रा है तथा विपरीत दिशा में 1 मी/से के वेग से चल रही है, से टकराती है। यदि प्रत्यास्थता गुणांक $\frac{3}{4}$ हो, तो टकराने के बाद हल्की गेंद का वेग ज्ञात कीजिए। 2

(ङ) उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं $(1, -2)$ एवं $(-2, 2)$ से होकर जाता है तथा जिसका केन्द्र सरल रेखा $8x - 4y + 9 = 0$ पर स्थित है। 2

4. निम्नलिखित में से किन्हीं **तीन** खण्डों को हल कीजिए—

(क) सिद्ध कीजिए कि

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{2}$$ 3

(ख) $\int \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}\, dx$ का मान ज्ञात कीजिए। 3

(ग) उस दीर्घवृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी उत्केन्द्रता $\frac{2}{3}$, नाभि $(3, 4)$ तथा नियता $3x + 4y = 5$ है। 3

(घ) किसी कण पर तीन बल P, Q एवं R क्रमशः पूरब, उत्तर तथा दक्षिण-पश्चिम की ओर कार्य करते हुए संतुलनावस्था में हैं। यदि $P = 12$ किग्रा भार है तो Q एवं R के परिमाण ज्ञात कीजिए। 3

5. निम्नलिखित में से किन्हीं **तीन** खण्डों को हल कीजिए—

(क) फलन $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 6$, x के किन मानों पर उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ है? फलन के उच्चिष्ठ मानों को भी ज्ञात कीजिए। 3

(ख) सिद्ध कीजिए कि

$$\int_0^{\pi/2} x^2 \operatorname{cosec}^2 x\, dx = \pi \log_e 2.$$ 3

(ग) यदि अतिपरवलय $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ के बिन्दु $(3\sec\phi, 4\tan\phi)$ पर स्पर्श रेखा का समीकरण $8x - 3\sqrt{3}y = 12$ है तो सिद्ध कीजिए कि कोण $\phi = 60°$ है। 3

(घ) M द्रव्यमान की तोप क्षैतिज समतल पर विरामावस्था में है। तोप से एक m द्रव्यमान का गोला छोड़ा जाता है। यदि तोप की नाल क्षैतिज से α कोण बनाती तथा गोला क्षैतिज से θ कोण बनाता हुआ तोप से निकलता है, तो सिद्ध कीजिए कि

$$\tan\theta = \left(1 + \frac{m}{M}\right)\tan\alpha.$$ 3

6. निम्नलिखित में से किसी **एक** खण्ड को हल कीजिए—

(क) (i) वक्र $y = x^2 - x - 8$ पर वह बिन्दु ज्ञात कीजिए जिस पर स्पर्श रेखा x अक्ष के समान्तर है। 2

(ii) वक्र $x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$ के बिन्दु θ पर अभिलम्ब का समीकरण ज्ञात कीजिए। 2

(ख) फलन $(\tan x)^{\log x} + (\cos x)^{\sin x}$ का x के सापेक्ष अवकल गुणांक ज्ञात कीजिए। 4

7. निम्नलिखित में से किसी **एक** खण्ड को हल कीजिए—

(क) $\int \frac{x^2+1}{(x+1)^3(x-2)}\, dx$ का मान ज्ञात कीजिए। 4

(ख) परवलय $y^2 = 4ax$ तथा सरल रेखा $y = mx$ द्वारा घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 4

8. निम्नलिखित में से किसी **एक** खण्ड को हल कीजिए—

(क) उस बिन्दु का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए जिससे परवलय $y^2 = 4ax$ पर खींचे गए अभिलम्बों में से दो परस्पर लम्ब हैं। 4

(ख) (i) एक समान त्वरण से गतिमान कोई कण 21वें सेकेण्ड में 46 मीटर और 27वें सेकेण्ड में 58 मीटर चलता है। इसका त्वरण तथा प्रारम्भिक वेग ज्ञात कीजिए। 2

(ii) एक बल P को P की दिशा के साथ 45° तथा 15° का कोण बनाती हुई दिशाओं में वियोजित किया जाता है। सिद्ध कीजिए कि वियोजित भाग $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{6}} P$ तथा $\frac{\sqrt{6}}{3} P$ हैं। 2