Chapter
30
सहसम्बन्ध एवं समाश्रयण

सहसम्बन्ध

एक चर व द्विचर बंटन (Univariate and bivariate distribution)

यदि यह सिद्ध किया जा चुका हो, कि एक बड़ी संख्या में दो चर सदैव एक ही या विपरीत दिशाओं में घटने या बढ़ने की प्रवृत्ति रखते हैं और यह माना जायें कि ऐसे सम्बन्ध का अस्तित्व है, तब यह सम्बन्ध ही सहसम्बन्ध कहलाता है।

(1) **एकचर बंटन** (Univariate distribution) **:** ऐसा बंटन जिसमें केवल एक चर होता है। जैसे – किसी कक्षा के छात्रों की ऊँचाईयाँ।

(2) **द्विचर बंटन** (Bivariate distribution) **:** ऐसा बंटन जिसमें दो विविक्त चर हों, द्विचर बंटन कहलाता है। जैसे- एक कक्षा के विद्यार्थियों की ऊँचाईयाँ तथा वजन।

(3) **द्विचर बारम्बारता बंटन** (Bivariate frequency distribution) **:** माना x व y दो चर हैं जो क्रमशः $x_1, x_2 ..... x_n$ व $y_1, y_2 .... y_n$, जहाँ $1 \le i \le n, 1 \le j \le n$, मान ग्रहण करते हैं। यदि कोई निश्चित युग्म f_{ij} बार आया है तो हम कहते हैं कि इसकी बारम्बारता f_{ij} है, तब वह फलन जो युग्मों (x_i, y_j) की बारम्बारताओं f_{ij} को दर्शाता है, द्विचर बारम्बारता बंटन कहलाता है।

सह प्रसरण (Covariance)

माना $(x_i, y_i); i = 1, 2, ..., n$ एक द्विचर बंटन है। तब दो चर x व y जो क्रमशः $x_1, x_2, ..., x_n$ व $y_1, y_2, ..., y_n$ मान ग्रहण करते हैं, के बीच में सह–प्रसरण निम्न प्रकार से परिभाषित होता है।

$$Cov\,(x, y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

या $Cov\,(x, y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i y_i - \bar{x}\,\bar{y})$, जहाँ $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ तथा $\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$ क्रमशः x तथा y चरों के माध्य हैं।

सहप्रसरण मूल बिन्दु के परिवर्तन से स्वतंत्र होता है, किन्तु पैमाने के परिवर्तन से प्रभावित होता है।

सहसम्बन्ध (Correlation)

दो चरों में इस प्रकार का सम्बन्ध कि एक में परिवर्तन होने से दूसरे में धनात्मक या ऋणात्मक परिवर्तन होता हो, सहसम्बन्ध कहलाता है।

(1) **सहसम्बन्ध के प्रकार** (Type of Correlation)

(i) **पूर्ण सहसम्बन्ध** (Perfect correlation) **:** यदि दो चर इस प्रकार से विचरण करते हों कि उनका अनुपात हमेशा नियत रहे तो इस प्रकार का सहसम्बन्ध पूर्ण सहसम्बन्ध कहलाता है।

(ii) **धनात्मक या प्रत्यक्ष सहसम्बन्ध**(Positive or direct correlation) **:** यदि एक चर में वृद्धि या ह्रास के सापेक्ष दूसरे चर में भी वृद्धि या ह्रास हो, तो सहसम्बन्ध धनात्मक कहलाता है।

(iii) **ऋणात्मक या अप्रत्यक्ष सहसम्बन्ध** (Negative or indirect correlation) **:** यदि एक चर में वृद्धि या ह्रास के सापेक्ष दूसरे चर में ह्रास या वृद्धि हो तो इसे ऋणात्मक सहसम्बन्ध कहते हैं।

(2) **कार्ल पियर्सन का सहसम्बन्ध गुणांक** (Karl pearson's coefficient of correlation)

कार्ल पियर्सन ने चरों x तथा y के मध्य सहसम्बन्ध गुणांक $r(x, y)$ की गणना करने के लिए निम्नलिखित सूत्र दिया।

$$r(x, y) = \frac{Cov(x, y)}{\sqrt{Var(x)}\sqrt{Var(y)}} \text{ या } \frac{Cov\,(x, y)}{\sigma_x \sigma_y}$$

$$r(x, y) = \frac{n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{\sqrt{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}\sqrt{n\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2}}$$

$$r\,(x, y) = \frac{\sum(x - \bar{x})(y - \bar{y})}{\sqrt{\sum(x - \bar{x})^2}\sqrt{\sum(y - \bar{y})^2}} = \frac{\sum dxdy}{\sqrt{\sum dx^2}\sqrt{\sum dy^2}}$$

जहाँ $x, y, \bar{x}$ व $\bar{y}$ अपने सामान्य अर्थों में हैं

तथा $dx = (x - \bar{x}), dx^2 = (x - \bar{x})^2, dy = (y - \bar{y})$ व $dy^2 = (y - \bar{y})^2$

(3) **परिमार्जित सूत्र** (Modified formula)

$$r=\frac{\sum dxdy-\frac{\sum dx.\sum dy}{n}}{\sqrt{\left\{\sum dx^2-\frac{\left(\sum dx\right)^2}{n}\right\}\left\{\sum dy^2-\frac{\left(\sum dy\right)^2}{n}\right\}}}$$

जहाँ $dx=x-\bar{x}; dy=y-\bar{y}$ एवं $r_{xy}=\frac{Cov(x,y)}{\sigma_x\sigma_y}=\frac{Cov(x,y)}{\sqrt{Var(x).Var(y)}}$

(4) **पद विचलन विधि** (Step deviation method) : माना x_i तथा y_i के कल्पित माध्य क्रमशः A तथा B हैं, तब

$$r(x,y)=\frac{\sum u_iv_i-\frac{1}{n}\sum u_i\sum v_i}{\sqrt{\sum u_i^2-\frac{1}{n}\left(\sum u_i\right)^2}\sqrt{\sum v_i^2-\frac{1}{n}\left(\sum v_i\right)^2}}$$

जहाँ $u_i=x_i-A$, $v_i=y_i-B$

रैंक सहसम्बन्ध (Rank correlation)

माना किसी समूह के n व्यक्तियों के दो गुण A तथा B को श्रेष्ठता के आधार पर क्रम से व्यवस्थित किया गया है। दोनों गुणों की श्रेणियाँ भिन्न भिन्न होंगी।

उदाहरणार्थ : यदि हम बुद्धिमत्ता तथा सुदंरता के मध्य सम्बन्ध के बारे में विचार करें, तब यह आवश्यक नहीं है, कि सुदंर व्यक्ति, बुद्धिमान भी हों।

रैंक सहसम्बन्ध (Rank correlation) : $\rho=1-\frac{6\sum d^2}{n(n^2-1)}$ जो कि रैंक सहसम्बन्ध गुणांक के लिये स्पीयरमेन का सूत्र है।

जहाँ $\sum d^2$ = दो रैंकों के अन्तर के वर्गों का योगफल व n युग्मों की संख्या है।

हम जानते हैं कि

$$\sum d_i=\sum(x_i-y_i)=\sum x_i-\sum y_i=n(\bar{x})-n(\bar{y})=0,\ (\because \bar{x}=\bar{y})$$

यदि d के सभी मान शून्य हैं, तब $r=1$ (अधिकतम मान), जो कि यह प्रदर्शित करता है कि चरों के मध्य पूर्ण रैंक सहसम्बन्ध है।

यदि x_i के कुछ मान समान हैं, तब रैंक सहसम्बन्ध निम्न सूत्र के द्वारा प्राप्त होता है

$$r=1-\frac{6\left[\sum d^2+\left(\frac{1}{12}\right)(m^3-m)\right]}{n(n^2-1)}$$

जहाँ m, x_i के पुनरावृत्ति वाले मानों की संख्या है।

धनात्मक तथा ऋणात्मक रैंक सहसम्बन्ध गुणांक : माना r रैंक सहसम्बन्ध गुणांक है।

यदि $r>0$, अर्थात् यदि एक चर की रैंक अधिक है, तब दूसरे चर की रैंक भी अधिक होगी या यदि एक चर की रैंक कम है, तब दूसरे चर की रैंक भी कम होगी। ***उदाहरणार्थ*** : यदि व्यक्तियों के दो चर भार तथा ऊँचाई है, तब $r>0$ का अभिप्राय है, कि लम्बे व्यक्तियों का भार भी अधिक होगा।

यदि $r=1$, तब इसका अभिप्राय यह है कि दोनों चरों के मध्य पूर्ण सहसम्बन्ध है अर्थात् प्रत्येक व्यक्ति दोनों चरों की समान श्रेणी प्राप्त करता है। इस स्थिति में रैंक (1, 1), (2, 2),....., (n, n) होगी।

यदि $r<0$, अर्थात् यदि एक चर की रैंक अधिक है, तब दूसरे की रैंक कम होगी या यदि एक चर की रैंक कम है, तब दूसरे की रैंक अधिक होगी। ***उदाहरणार्थ*** : यदि दो गुण छरहरापन तथा समृद्धि हैं, तब $r<0$ अर्थात् धनवान व्यक्ति छरहरे नहीं होते।

यदि $r=-1$, (पूर्णतः ऋणात्मक सहसम्बन्ध) अर्थात् यदि एक व्यक्ति किसी चर की उच्चतम रैंक रखता है तब दूसरे चर में इसकी रैंक न्यूनतम होगी। इस स्थिति में n व्यक्तियों के समूह में दो चरों की रैंक (1, n), $(2,n-1)$,....., $(n,1)$ होगी।

यदि $r=0$, अर्थात् दो चरों (गुणों) के मध्य सहसम्बन्ध का अभाव है।

अनुमान की प्रामाणिक तथा संभावित त्राुटि (Standard and probable error)

(1) **अनुमान की प्रामाणिक त्रुटि** : निरीक्षित मानों से अनुमानित मानों का विचलन प्रामाणिक त्रुटि कहलाता है। इसे निम्न प्रकार परिभाषित करते हैं।

$$S_y=\sqrt{\left\{\frac{\sum(y-y_p)^2}{n}\right\}}$$

जहाँ y वास्तविक मान तथा y_p अनुमानित मान है। सहसम्बन्ध गुणांक के सम्बन्ध में यह निम्न प्रकार दी जाती है।

(i) x की गणना में प्रामाणिक त्रुटि $S_x=\sigma_x\sqrt{1-r^2}$

(ii) y की गणना में प्रामाणिक त्रुटि $S_y=\sigma_y\sqrt{1-r^2}$

(2) **प्रामाणिक तथा संभावित त्रुटि में संबंध** : यदि n प्रेक्षणों के लिए सह सम्बन्ध गुणांक r हैं, तब प्रामाणिक त्रुटि S.E.$(r)=\frac{1-r^2}{\sqrt{n}}$ तथा संभावित त्रुटि P.E. (r) = 0.6745 (S.E.) = $0.6745\left(\frac{1-r^2}{\sqrt{n}}\right)$

प्रामाणिक तथा संभावित त्रुटि का उपयोग सहसम्बन्ध गुणांक का मान ज्ञात करने के लिए करते हैं।

(i) यदि $r<P.E.(r)$, तब कोई भी सहसम्बन्ध नहीं होगा।

(ii) यदि $r>6P.E.(r)$, तब निश्चित रूप से सहसम्बन्ध का अस्तित्व होगा।

किसी द्विचर बंटन के लिये सहसम्बन्ध गुणांक का वर्ग "निर्धारण गुणांक" (coefficient of determination) कहलाता है।

समाश्रयण

रेखीय समाश्रयण (Linear regression)

यदि प्रकीर्णन आरेख पर दो चरों x तथा y के मध्य सम्बन्ध हो, तब प्रकीर्णन आरेख के बिन्दु कम या अधिक एक वक्र के परितः संकेन्द्रित होंगे। इसी वक्र को समाश्रयण वक्र कहते हैं।

समाश्रयण रेखा : जब वक्र एक सरल रेखा होती है, तो यह समाश्रयण की रेखा कहलाती है और इस समाश्रयण को रैखिक समाश्रयण कहते हैं।

समाश्रयण रेखा का समीकरण (Equations of lines of regression)

(1) **y की x पर समाश्रयण रेखा** : यदि x का मान ज्ञात हो तो y का मान निम्न प्रकार से प्राप्त किया जा सकता है

$$y-\bar{y}=\frac{Cov(x,y)}{\sigma_x^2}(x-\bar{x}) \text{ या } y-\bar{y}=r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-\bar{x})$$

(2) **x की y पर समाश्रयण रेखा** : y के दिये हुए मान के लिए x का मान निम्न प्रकार से ज्ञात किया जा सकता है

$$x-\bar{x}=\frac{Cov(x,y)}{\sigma_y^2}(y-\bar{y}) \text{ या } x-\bar{x}=r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y-\bar{y})$$

(3) **समाश्रयण गुणांक** (Regression coefficient)

(i) y का x पर समाश्रयण गुणांक $b_{yx} = \frac{r\sigma_y}{\sigma_x} = \frac{Cov(x,y)}{\sigma_x^2}$

(ii) x का y पर समाश्रयण गुणांक $b_{xy} = \frac{r\sigma_x}{\sigma_y} = \frac{Cov(x,y)}{\sigma_y^2}$

समाश्रयण रेखाओं के मध्य कोण

(Angle between two lines of regression)

दो समाश्रयण रेखाओं के समीकरण निम्न प्रकार हैं :

$y - \bar{y} = b_{yx}(x - \bar{x})$ तथा $x - \bar{x} = b_{xy}(y - \bar{y})$

यहाँ, $m_1 =$ y की x पर समाश्रयण रेखा की प्रवणता

$= b_{yx} = r.\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$

$m_2 =$ x की y पर समाश्रयण रेखा की प्रवणता $= \frac{1}{b_{xy}} = \frac{\sigma_y}{r.\sigma_x}$

$$\therefore \tan\theta = \pm\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} = \pm\frac{\frac{\sigma_y}{r\sigma_x} - \frac{r\sigma_y}{\sigma_x}}{1 + \frac{r\sigma_y}{\sigma_x}.\frac{\sigma_y}{r\sigma_x}}$$

$$= \pm\frac{(\sigma_y - r^2\sigma_y)\sigma_x}{r\sigma_x^2 + r\sigma_y^2} = \pm\frac{(1-r^2)\sigma_x\sigma_y}{r(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)}.$$

यहाँ, धनात्मक चिन्ह न्यूनकोण देता है, क्योंकि $r^2 \le 1$ तथा σ_x, σ_y धनात्मक है।

$$\therefore \tan\theta = \frac{1-r^2}{r}.\frac{\sigma_x\sigma_y}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} \quad .....(i)$$

यदि $r = 0$, तब (i) से $\tan\theta = \infty$ या $\theta = \pi/2$ अर्थात् दोनों समाश्रयण रेखायें लम्बवत् हैं।

यदि $r = \pm 1$, $\tan\theta = 0$ अर्थात् $\theta = 0$, चूँकि θ न्यूनकोण है अर्थात् दोनों रेखायें सम्पाती हैं।

समाश्रयण गुणांकों b_{yx} तथा b_{xy} से सम्बन्धित महत्वपूर्ण बिन्दु :

(1) $r = \sqrt{b_{yx}.b_{xy}}$, अर्थात् समाश्रयण गुणांकों का गुणोत्तर माध्य सहसम्बन्ध गुणांक होता है।

(2) यदि $b_{yx} > 1$, तो $b_{xy} < 1$ अर्थात् यदि एक समाश्रयण गुणांक का मान इकाई से अधिक है तो दूसरे समाश्रयण गुणांक का मान इकाई से कम होगा।

(3) यदि चरों के बीच पूर्ण सहसम्बन्ध नहीं है, तो समाश्रयण रेखायें $(\bar{x}, \bar{y})$ पर प्रतिच्छेद करती हैं।

(4) b_{yx}, y की x पर समाश्रयण रेखा की प्रवणता (ढाल) कहलाती है। इसी प्रकार $\frac{1}{b_{xy}}$, x की y पर समाश्रयण रेखा की प्रवणता कहलाती है।

(5) $b_{yx} + b_{xy} > 2\sqrt{b_{yx}b_{xy}}$ = $2r$ अर्थात् समाश्रयण गुणांकों का समान्तर माध्य, सहसम्बन्ध गुणांक से अधिक होता है।

(6) समाश्रयण गुणांक मूल बिन्दु के परिवर्तन से स्वतंत्र है लेकिन पैमाने से नहीं।

(7) समाश्रयण रेखाओं की प्रवणताओं का गुणनफल $\frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2}$ होता है।

(8) यदि दोनों समाश्रयण रेखायें सम्पाती हों तो सहसम्बन्ध पूर्ण रेखीय होगा।

(9) यदि b_{yx} व b_{xy} दोनों धनात्मक हैं, तो r धनात्मक होगा एवं दोनों ऋणात्मक हैं, तो r ऋणात्मक होगा।

Tips & Tricks

✍ सहसम्बन्ध (r) एक विशुद्ध संख्या है अतः इसका कोई मात्रक नहीं होता है।

✍ सहसम्बन्ध गुणांक, मूलबिन्दु तथा पैमाने में परिवर्तन से स्वतंत्र होता है।

✍ यदि दो चर रैखिक सम्बन्ध $x + y = K$ द्वारा सम्बन्धित हों, तब x, y के मध्य पूर्णतः अप्रत्यक्ष सहसम्बन्ध होगा। यहाँ $r = -1$.

✍ यदि x तथा y दो स्वतंत्र चर हैं, तब $\rho(x+y, x-y) = \frac{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$.

✍ यदि समाश्रयण रेखायें $y = ax + b$ तथा $x = cy + d$ हों, तो $\bar{x} = \frac{bc + d}{1 - ac}$ व $\bar{y} = \frac{ad + b}{1 - ac}$ होगा।

✍ यदि b_{xy}, b_{yx} तथा $r \ge 0$, तब $\frac{1}{2}(b_{xy} + b_{yx}) \ge r$ तथा यदि b_{xy}, b_{yx} तथा $r \le 0$, तब $\frac{1}{2}(b_{xy} + b_{yx}) \le r$.

✍ सहसम्बन्ध, चरों के मध्य सम्बन्ध की माप करता है जबकि समाश्रयण, चरों के मध्य सम्बन्ध के कारण और प्रभाव की माप करता है।

✍ यदि y की x पर समाश्रयण रेखा, x-अक्ष की धनात्मक दिशा से α कोण बनाती है, तब $\tan\alpha = b_{yx}$

✍ यदि x की y पर समाश्रयण रेखा x-अक्ष की धनात्मक दिशा से β कोण बनाती है, तब $\cot\beta = b_{xy}$.

Ordinary Thinking

Objective Questions

सहसम्बन्ध

1. यदि $Var(x) = 8.25$, $Var(y) = 33.96$ तथा $Cov(x, y) = 10.2$, तो सहसम्बन्ध गुणांक होगा

(a) 0.89 (b) – 0.98

(c) 0.61 (d) – 0.16

2. मूल बिन्दु को परिवर्तित करने पर सहसम्बन्ध गुणांक होगा

(a) शून्य (b) परिवर्तित

(c) अपरिवर्तित रहेगा (d) इनमें से कोई नहीं

3. यदि r सहसम्बन्ध गुणांक हो, तो [MP PET 1995]

(a) $r \ge 1$ (b) $r \le 1$

(c) $|r| \le 1$ (d) $|r| \ge 1$

4. यदि r सहसम्बन्ध गुणांक हो तथा $Y = a + bX$, तो $|r| =$

(a) a/b (b) b/a

(c) 1 (d) इनमें से कोई नहीं

5. विद्यार्थियों और अध्यापकों की ऊँचाइयों (इंच में) के मध्य कार्ल पिर्यसन का सहसम्बन्ध गुणांक निम्न आंकड़ों के लिए है

अध्यापकों की ऊँचाइयाँ x :	66	67	68	69	70
विद्यार्थियों की ऊँचाइयाँ y :	68	66	69	72	70

[MP PET 1993]

(a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (b) $\sqrt{2}$

(c) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ (d) 0

6. कार्ल पियर्सन का सहसम्बन्ध गुणांक निर्भर करता है [MP PET 1993]

(a) केवल मूल बिन्दु के परिवर्तन पर, पैमाने के परिवर्तन पर नहीं
(b) केवल पैमाने के परिवर्तन पर, मूल बिन्दु के परिवर्तन पर नहीं
(c) दोनों पैमाने के परिवर्तन व मूल बिन्दु के परिवर्तन पर
(d) न तो मूल बिन्दु के परिवर्तन पर और न पैमाने के परिवर्तन पर

7. जब दो चरों के बीच पूर्ण सहसम्बन्ध होता है, तो सहसम्बन्ध गुणांक का मान होगा [CEE 1993]

(a) – 1 (b) + 1
(c) 0 (d) ± 1

8. दिये गये आंकड़ों के लिए युग्मों (x, y) के सभी मानों के संगत गणनायें निम्न हैं

$\Sigma(x-\overline{x})^2 = 36,\ \Sigma(y-\overline{y})^2 = 25,\ \Sigma(x-\overline{x})(y-\overline{y}) = 20$

तो कार्ल पियर्सन का सहसम्बन्ध गुणांक है

(a) 0.2 (b) 0.5
(c) 0.66 (d) 0.33

9. निम्न आँकड़ों

$n = 25,\quad \Sigma x = 125,\quad \Sigma y = 100$,

$\Sigma x^2 = 650,\ \Sigma y^2 = 436,\ \Sigma xy = 520$

के लिए सहसम्बन्ध गुणांक है

(a) 1/2 (b) 2/5
(c) 3/5 (d) 2/3

10. यदि दो चरों x तथा y के बीच सहसम्बन्ध गुणांक शून्य है तो

(a) चरों x तथा y में कोई सम्बन्ध नहीं होता है
(b) x का मान बढ़ने पर y का मान घटता है
(c) x का मान बढ़ने पर y का मान बढ़ता है
(d) चरों x तथा y में सम्बन्ध हो भी सकता है

11. निम्नलिखित आंकड़ों से कार्ल पियर्सन के सहसम्बन्ध गुणांक का मान है

x :	3	4	8	9	6	2	1
y :	5	3	7	7	6	9	2

[AISSE 1983, 85, 90]

(a) 0.480 (b) – 0.480
(c) 0.408 (d) – 0.408

12. नीचे 10 विद्यार्थियों द्वारा गणित व रसायन में रैंक दर्शायी गयी है

गणित में रैंक :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
रसायन में रैंक :	3	10	5	1	2	9	4	8	7	6

तो कार्ल पियर्सन का रैंक सहसम्बन्ध गुणांक होगा [AISSE 1990]

(a) 0.224 (b) 0.204
(c) 0.240 (d) इनमें से कोई नहीं

13. पिता व पुत्र की ऊँचाइयों के बीच सहसम्बन्ध गुणांक होगा

पिता की ऊँचाई (x) :	65	66	67	68	69	70	71
पुत्र की ऊँचाई (y) :	67	68	66	69	72	72	69

[AI CBSE 1985; DSSE 1984, 85]

(a) 0.60 (b) – 0.60
(c) – 0.67 (d) 0.67

14. 10 विद्यार्थियों के अंग्रेजी व गणित के अंक निम्न प्रकार हैं

अंग्रेजी में अंक :	20	13	18	21	11	12	17	14	19	15
गणित में अंक :	17	12	23	25	14	8	19	21	22	19

तो कार्लपियर्सन का सहसम्बन्ध गुणांक होगा [AI CBSE 1979, 82]

(a) 0.75 (b) – 0.75
(c) 0.57 (d) इनमें से कोई नहीं

15. निम्न आंकड़ों के लिए कार्ल पियर्सन का सहसम्बन्ध गुणांक है

x :	28	40	41	35	38	33	40	36	32	33
y :	23	33	34	30	34	26	28	36	31	38

[AI CBSE 1982, 85]

(a) 0.40 (b) – 0.40
(c) 0.44 (d) इनमें से कोई नहीं

16. निम्न आंकड़ों के लिए सहसम्बन्ध गुणांक होगा

x :	– 4	– 3	– 2	– 1	0	1	2	3	4
y :	16	9	4	1	0	1	4	9	16

[Mathematics Olympiad 1981; DSSE 1980]

(a) 1 (b) – 1
(c) 0 (d) इनमें से कोई नहीं

17. निम्न आंकड़ों से सहसम्बन्ध गुणांक होगा

x :	1	2	3	4	5
y :	2	5	7	8	10

[DSSE 1983; AI CBSE 1991]

(a) 0.97 (b) – 0.97
(c) 0.90 (d) इनमें से कोई नहीं

18. x व y के बीच निम्न आंकड़ों से सहसम्बन्ध गुणांक लगभग होगा

x :	15	16	17	17	18	20	10
y :	12	17	15	16	12	15	11

[DSSE 1979, 81; AI CBSE 1990]

(a) 0.50 (b) 0.53
(c) – 0.50 (d) – 0.53

19. यदि द्विचर आंकड़ों के प्रकीर्ण आरेख में प्राप्त बिन्दु एक चतुर्थांश के सभी कोनों पर समान रूप से प्रकीर्णित हैं, तो

(a) $r = 1$ (b) $r = -1$
(c) $r = 0$ (d) $r = \pm\frac{1}{2}$

20. पूर्ण धनात्मक सहसम्बन्ध में प्रकीर्ण आरेख के सभी बिन्दु निम्न रेखा पर स्थित होते हैं

(a) $y = -x$ (b) $y = x$
(c) $y = 2x$ (d) $y = -2x$

21. यदि $r = 0.2$ तो रेखीय सहसम्बन्ध आवश्यक रूप से होगा

(a) पूर्ण (b) ऋणात्मक
(c) बहुत कम (d) बहुत अधिक

22. यदि $r = -0.97$, तो

(a) सहसम्बन्ध रेखीय व वक्रीय है
(b) सहसम्बन्ध रेखीय व ऋणात्मक है
(c) सहसम्बन्ध तृतीय व चतुर्थ चतुर्थांश में है
(d) इनमें से कोई नहीं

23. यदि x तथा y के बीच सहसम्बन्ध r है, तो y तथा x के बीच सहसम्बन्ध होगा

(a) $-r$ (b) $\frac{1}{r}$
(c) r (d) $1-r$

24. निम्न आंकड़ों के लिए कार्ल पियर्सन का सहसम्बन्ध गुणांक होगा

$\Sigma(x-\overline{x})^2 = 25, \Sigma(y-\overline{y})^2 = 256, \Sigma(x-\overline{x})(y-\overline{y}) = 80$

(a) 0.2 (b) 0.01
(c) 1 (d) 0.1

25. निम्न आंकड़ों के लिए सहसम्बन्ध गुणांक होगा

x :	2	4	5	6	3	6	8	10
y :	5	6	6	8	4	8	12	15

[AI CBSE 1990]

(a) 0.90 (b) 0.96
(c) – 0.90 (d) – 0.96

26. यदि तो सहसम्बन्ध गुणांक होगा

x :	3	4	8	6	2	1
y :	5	3	9	6	9	2

[AI CBSE 1990]

(a) 0.49 (b) 0.40
(c) – 0.49 (d) – 0.40

27. निम्न आंकड़ों के लिए r का मान होगा

x :	10	7	12	12	9	16	12
y :	6	4	7	8	10	7	10

[AI CBSE 1990]

(a) 0.207 (b) – 0.207
(c) 0.287 (d) – 0.287

28. निम्न आंकड़ों के लिए सहसम्बन्ध गुणांक है

x :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y :	3	10	5	1	2	9	4	8	7	6

[AI CBSE 1986, 90]

(a) 0.224 (b) 0.240
(c) 0.30 (d) इनमें से कोई नहीं

29. यदि तो r का लगभग मान होगा

x :	25	17	21	23	12	18	22
y :	22	20	24	25	17	11	18

[AI CBSE 1987]

(a) 0.47 (b) 0.55
(c) 0.52 (d) इनमें से कोई नहीं

30. यदि सहसम्बन्ध गुणांक धनात्मक हो, तो चर x, y के मानों के लिए जब x का मान पूर्ण रूप से बढ़ता है, तो

(a) y का मान बढ़ता है (b) y का मान घटता है
(c) y का मान स्थिर रहता है (d) कुछ नहीं कहा जा सकता

31. कोष्ठक के अन्दर की दो संख्याएँ दो विषयों में एक कक्षा के 10 विद्यार्थियों की रैंक को दर्शाते हैं : (1, 10), (2, 9), (3, 8), (4, 7), (5, 6), (6, 5), (7, 4), (8, 3), (9, 2), (10, 1), तब रैंक सहसम्बन्ध गुणांक है

(a) 0 (b) – 1
(c) 1 (d) 0.5

32. दो चरों के मध्य सहसम्बन्ध गुणांक का मान होता है [Kurukshetra CEE 1998]

(a) 0 और 1 के मध्य (b) – 1 तथा 1 के मध्य
(c) 0 तथा ∞ के मध्य (d) –∞ तथा 0 के मध्य

33. यदि एक द्विचर बंटन के दो यदृच्छया चर x तथा y, सम्बन्ध $3x + 2y = 4$ से सम्बन्धित हैं तो सहसम्बन्ध गुणांक r_{xy} का मान होगा [AMU 1999]

(a) 1 (b) – 1
(c) $\frac{2}{3}$ (d) $-\frac{2}{3}$

34. यदि X तथा Y दो स्वतंत्र चर हैं, तब सहसम्बन्ध गुणांक है [MP PET 2002]

(a) 1 (b) – 1
(c) $\frac{1}{2}$ (d) 0

35. निम्न आंकड़ों के लिए कार्ल पियर्सन का सहसम्बन्ध गुणांक है

x :	4	7	8	3	4
y :	5	8	6	3	5

[Kerala (Engg.) 2002]

(a) $\frac{63}{\sqrt{94 \times 66}}$ (b) 63
(c) $\frac{63}{\sqrt{94}}$ (d) $\frac{63}{\sqrt{66}}$

36. दो चर x व y क्रमशः ऊँचाई (सेमी में) तथा भार (ग्राम में) प्रदर्शित करते हैं। x व y के मध्य सहसम्बन्ध की इकाई होगी [MP PET 2003]

(a) ग्राम (b) सेमी
(c) ग्राम–सेमी (d) इनमें से कोई नहीं

37. x व y के लिए द्विचर बारंबारता सारणी दी गई है

y \ x	0-10	10-20	20-30	30-40	योग
0-10	3	2	4	2	11
10-20	–	1	3	1	5
20-30	3	2	–	–	5
30-40	–	6	7	–	13
योग	6	11	14	3	34

तो y के लिए सीमान्त बारंबारता बंटन है

(a)

0 – 10	6
10 – 20	11
20 – 30	14
30 – 40	3

(b)

0 – 10	11
10 – 20	5
20 – 30	5
30 – 40	13

(c)

0 – 10	10
10 – 20	12
20 – 30	11
30 – 40	1

(d) इनमें से कोई नहीं

38. यदि x और y के बीच सह–प्रसरण 10 है तथा x और y के प्रसरण क्रमशः 16 और 9 हैं, तब x और y के बीच सहसम्बन्ध गुणांक है [MP PET 1996]

(a) 0.61 (b) 0.79
(c) 0.83 (d) 0.93

39. यदि दो चरों x और y के प्रसरण क्रमशः 9 और 16 हैं तथा सह–प्रसरण 8 है, तब इनका सहसम्बन्ध गुणांक है [MP PET 1998]

(a) $\frac{2}{3}$ (b) $\frac{8}{3\sqrt{2}}$
(c) $\frac{9}{8\sqrt{2}}$ (d) $\frac{2}{9}$

40. माना अचर A की विभिन्न रैंक $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ तथा अचर B की विभिन्न रैंक $y_1, y_2, ..., y_n$ इस प्रकार हैं कि $x_i + y_i = n + 1$, $i = 1, 2, 3, ..., n$ के लिये, तब A और B के बीच सहसम्बन्ध गुणांक है

(a) 1 (b) 0
(c) –1 (d) इनमें से कोई नहीं

41. निम्नलिखित युग्म आंकड़ों (1,10),(2, 9),(3, 9),(4, 8),(5, 6),(6, 12), (7, 4), (8, 3), (9, 13), (10, 1) के लिये $Cov(x, y) =$

(a) 1.05 (b) 2.45
(c) – 4.45 (d) – 4.9

42. यदि $Var(x) = \frac{21}{4}$ व $Var(y) = 21$ एवं $r = 1$ की y की प्रामाणिक त्रुटि है

(a) 0 (b) 1/2
(c) 1/4 (d) 1

43. यदि *a, b, h, k* अचर हैं, जबकि $U=\frac{X-a}{h}, V=\frac{Y-b}{k}$ है, तब **[DCE 1999]**

(a) $Cov\ (X,Y)= Cov\ (U,V)$

(b) $Cov\ (X,Y)= hk\ \ Cov\ (U,V)$

(c) $Cov\ (X,Y)= ab\ \ Cov\ (U,V)$

(d) $Cov\ (U,V)= hk\ \ Cov\ (X,Y)$

44. यदि $\Sigma x=15$, $\Sigma y=40, \Sigma xy=110$, $n=5$, तब *x* और *y* के बीच सहप्रसरण (*x, y*) है **[DCE 2000]**

(a) 22 (b) 2

(c) – 2 (d) इनमें से कोई नहीं

समाश्रयण

1. यदि चरों *x* तथा *y* के समाश्रयण समीकरण *x* = 19.13 – 0.83*y* तथा *y* = 11.64 – 0.50*x* हों, तो *x* तथा *y* के बीच सहसम्बन्ध गुणांक होगा

(a) 0.66 (b) – 0.64

(c) 0.001 (d) – 0.001

2. निम्न में से कौनसा कथन सत्य है

(a) सहसम्बन्ध गुणांक समाश्रयण गुणांकों का समान्तर माध्य होता है

(b) सहसम्बन्ध गुणांक समाश्रयण गुणांकों का गुणोत्तर माध्य होता है

(c) सहसम्बन्ध गुणांक समाश्रयण गुणांकों का हरात्मक माध्य होता है

(d) इनमें से कोई नहीं

3. यदि सहसम्बन्ध गुणांक ऋणात्मक हो, तो समाश्रयण गुणांक होगा

(a) शून्य (b) एक

(c) ऋणात्मक (d) धनात्मक

4. यदि सहसम्बन्ध गुणांक शून्य हो तो समाश्रयण रेखायें होंगी

(a) अक्षों के समान्तर

(b) अक्षों के लम्बवत्

(c) अक्षों से किसी भी कोण पर झुकी हुई

(d) संपाती

5. यदि समाश्रयण रेखाओं के समीकरण $x-y=0$ तथा $4x-y-3=0$ हों और $\sigma_x^2=1$ हो, तो सहसम्बन्ध गुणांक होगा

(a) – 0.5 (b) 0.5

(c) 1.0 (d) – 1.0

6. यदि एक समाश्रयण गुणांक इकाई हो, तो दूसरा होगा

(a) इकाई से बड़ा (b) इकाई से बड़ा या बराबर

(c) इकाई से छोटा या बराबर (d) इनमें से कोई नहीं

7. चरों *x* और *y* के बीच सहसम्बन्ध गुणांक 0.8 है, जबकि *y* का *x* पर समाश्रयण गुणांक 0.2 है, तो *x* का *y* पर समाश्रयण गुणांक होगा **[MP PET 1993]**

(a) – 3.2 (b) 3.2

(c) 4 (d) 0.16

8. यदि दोनों समाश्रयण रेखायें संपाती हों तो सहसम्बन्ध गुणांक का मान होता है

(a) 0 (b) 1

(c) 0.5 (d) 0.33

9. यदि दोनों समाश्रयण रेखायें लम्बवत् प्रतिच्छेदित करती हैं, तो **[Pb. CET 2003]**

(a) $r<-1$ (b) $r=-1$

(c) $r=0$ (d) $r=\frac{1}{2}$

10. यदि समाश्रयण गुणांकों के मान क्रमशः – 0.33 व – 1.33 हैं, तो सहसम्बन्ध गुणांक का मान है

(a) 0.2 (b) – 0.66

(c) 0.4 (d) – 0.4

11. निम्न आंकड़ों के लिए

	x	*y*
माध्य	65	67
मानक विचलन	5.0	2.5
सहसम्बन्ध गुणांक	0.8	

तो *y* की *x* पर समाश्रयण रेखा है

(a) $y-67=\frac{2}{5}(x-65)$ (b) $y-67=\frac{1}{5}(x-65)$

(c) $x-65=\frac{2}{5}(y-67)$ (d) $x-65=\frac{1}{5}(y-67)$

12. *y* का *x* पर समाश्रयण गुणांक 0.40 है, तो *x* का *y* पर समाश्रयण गुणांक होगा

(a) 1.6 (b) 6.4

(c) 5.1 (d) 3.2

13. यदि *y* का *x* पर समाश्रयण गुणांक $\frac{8}{5}$ व *x* का *y* पर समाश्रयण गुणांक $\frac{2}{5}$ है तथा दोनों रेखाओं के बीच का न्यूनकोण α है, तो $\tan\alpha$ का मान है

(a) 9/25 (b) $9/2\sqrt{5}$

(c) 3/25 (d) 9/50

14. यदि दो समाश्रयण रेखायें $4x+3y+7=0$ व $3x+4y+8=0$ हैं, तो *x* तथा *y* के माध्य हैं **[AI CBSE 1990]**

(a) $-\frac{4}{7},-\frac{11}{7}$ (b) $-\frac{4}{7},\frac{11}{7}$

(c) $\frac{4}{7},-\frac{11}{7}$ (d) 4, 7

15. यदि *y* की *x* पर तथा *x* की *y* पर समाश्रयण रेखायें $y=kx+4$ व $x=4y+5$ हैं तो

(a) $k\le 0$ (b) $k\ge 0$

(c) $0\le k\le\frac{1}{4}$ (d) $0\le k\le 1$

16. यदि सहसम्बन्ध गुणांक धनात्मक है तो समाश्रयण गुणांक

(a) दोनों धनात्मक होंगे

(b) दोनों ऋणात्मक होंगे

(c) एक धनात्मक तथा एक ऋणात्मक होगा

(d) इनमें से कोई नहीं

17. यदि $3x=2y-1$ व $2x+3y+1=0$ दो समाश्रयण रेखायें हों तो सहसम्बन्ध गुणांक होगा

(a) 0 (b) – 1

(c) 1 (d) इनमें से कोई नहीं

18. यदि समाश्रयण रेखायें $3x+12y=19$ व $3y+9x=46$ हैं तो r_{xy} होगा [AI CBSE 1990]

(a) 0.289 (b) – 0.289

(c) 0.209 (d) इनमें से कोई नहीं

19. यदि समाश्रयण की दो रेखायें $3x+2y=26$ और $6x+y=31$ हैं, तो x और y के बीच सहसम्बन्ध गुणांक होगा [DCE 2000]

(a) $-\frac{1}{3}$ (b) $\frac{1}{3}$

(c) $-\frac{1}{2}$ (d) $\frac{1}{2}$

20. यदि x और y के बीच दोनों समाश्रयण गुणांक 0.8 और 0.2 हों, तो उनके बीच सहसम्बन्ध गुणांक है [MP PET 2000]

(a) 0.4 (b) 0.6

(c) 0.3 (d) 0.5

21. यदि दो चरों x और y में साँख्यिकीय रैखिक सम्बन्ध है तो y का x पर समाश्रयण गुणांक है [MP PET 1998]

(a) $\frac{Cov\,(x,y)}{\sigma_x\sigma_y}$ (b) $\frac{Cov\,(x,y)}{\sigma_y^2}$

(c) $\frac{Cov(x,y)}{\sigma_x^2}$ (d) $\frac{Cov\,(x,y)}{\sigma_x}$

जहाँ पर σ_x, σ_y क्रमशः x और y के मानक विचलन हैं।

22. यदि दो समाश्रयण रेखाओं के बीच का कोण 90^o हो, तो यह प्रदर्शित करता है [DCE 1999]

(a) पूर्ण सहसम्बन्ध

(b) पूर्ण ऋणात्मक सहसम्बन्ध

(c) कोई रेखीय सहसम्बन्ध नहीं

(d) इनमें से कोई नहीं

23. यदि दो समाश्रयण रेखाओं के समीकरण $2x-9y+6=0$ तथा $x-2y+1=0$ हैं, तब x तथा y के बीच सहसम्बन्ध गुणांक है [DCE 1999]

(a) $\frac{-2}{3}$ (b) $\frac{2}{3}$

(c) $\frac{4}{9}$ (d) इनमें से कोई नहीं

24. समाश्रयण रेखाओं के निम्न दो समुच्चयों में से कौनसा द्विचर बंटन के लिए सही सूचना प्रदर्शित करता है [AMU 2000]

I. $x+4y=15$ तथा $y+3x=12,\ \bar{x}=3,\ \bar{y}=3$

II. $3x+4y=9$ तथा $4x+y=1,\ \bar{x}=-\frac{5}{10}, \bar{y}=\frac{30}{13}$

(a) I तथा II (b) केवल II

(c) केवल I (d) इनमें से कोई नहीं

25. सहसम्बन्ध गुणांक r तथा समाश्रयण गुणांकों b_{xy} तथा b_{yx} के मध्य सम्बन्ध है [MP PET 2003]

(a) $r=\frac{1}{2}(b_{xy}+b_{yx})$ (b) $r=\sqrt{b_{xy}\,.\,b_{yx}}$

(c) $r=(b_{xy}\,b_{yx})^2$ (d) $r=b_{xy}+b_{yx}$

26. यदि समाश्रयण गुणांकों का मान –1.5 तथा – 0.5 हो, तो सहसम्बन्ध गुणांक का मान होगा [Kurukshetra CEE 2002]

(a) 0.75 (b) 0.7

(c) – 0.87 (d) – 0.5

27. यदि दो समाश्रयण रेखाओं के बीच का कोण θ हो, तो θ का मान होगा [Kurukshetra CEE 2002]

(a) $\tan^{-1}\left(\frac{b_{yx}+\frac{1}{b_{xy}}}{1+\frac{b_{xy}}{b_{yx}}}\right)$ (b) $\tan^{-1}\left(\frac{b_{yx}-b_{xy}-1}{b_{yx}+b_{xy}}\right)$

(c) $\tan^{-1}\left(\frac{b_{xy}-\frac{1}{b_{yx}}}{1+\frac{b_{xy}}{b_{yx}}}\right)$ (d) $\tan^{-1}\left(\frac{b_{yx}-b_{xy}}{1+b_{yx}\,.\,b_{xy}}\right)$

28. किसी परिवार की आय पर बचत (s) की समाश्रयण रेखा $s=a+\frac{y}{m}$ है, जहाँ a और m अचर हैं। यदि 100 परिवारों के यदृच्छया प्रतिदर्श में बचतों का प्रसरण, आयों के प्रसरण का $\frac{1}{4}$ है तथा सहसम्बन्ध गुणांक 0.4 है। तब m का मान है

(a) 2 (b) 5

(c) 8 (d) इनमें से कोई नहीं

Critical Thinking

Objective Questions

1. दो चरों x तथा y के बीच सहसम्बन्ध गुणांक निम्न में से किसके द्वारा परिभाषित किया जाता है

(a) $r=\frac{\sigma_x^2+\sigma_y^2+\sigma_{x-y}^2}{2\sigma_x\sigma_y}$ (b) $r=\frac{\sigma_x^2+\sigma_y^2-\sigma_{x-y}^2}{2\sigma_x\sigma_y}$

(c) $r=\frac{\sigma_x^2+\sigma_y^2+\sigma_{x-y}^2}{\sigma_x\sigma_y}$ (d) $r=\frac{\sigma_x^2+\sigma_y^2-\sigma_{x-y}^2}{\sigma_x\sigma_y}$

2. एक यदृच्छया प्रतिदर्श समष्टि से 5 विद्यार्थी चुनकर लिये गये हैं। इन विद्यार्थियों के गणित व सांख्यिकी के निम्न अंक प्राप्त हुए

अनुक्रमांक	1	2	3	4	5
गणित के अंक	85	60	73	40	90
सांख्यिकी के अंक	93	75	65	50	80

तो रैंक सहसम्बन्ध गुणांक है

(a) 0.8 (b) 0.6

(c) 0.5 (d) – 0.8

3. दो चर x तथा y रैखिक समीकरण $ax+by+c=0$ से सम्बन्धित है। दोनों के मध्य सहसम्बन्ध गुणांक +1 होगा, यदि

[DCE 2002]

(a) a धनात्मक है (b) b धनात्मक है

(c) a तथा b धनात्मक हैं (d) a तथा b के चिन्ह विपरीत हैं

4. x तथा y के मध्य सहसम्बन्ध गुणांक 0.6 है तथा सह–प्रसरण 16 है। x का मानक विचलन 4 है, तो y का मानक विचलन है [AMU 1988, 2002]

(a) 5 (b) 10

(c) 20/3 (d) इनमें से कोई नहीं

5. यदि x_1 तथा x_2 समाश्रयण गुणांक हों और r सहसम्बन्ध गुणांक हो, तो

(a) $x_1 - x_2 > r$ (b) $x_1 + x_2 < r$

(c) $x_1 + x_2 \geq 2r$ (d) इनमें से कोई नहीं

6. यदि दो समाश्रयण रेखाओं के बीच न्यूनकोण θ हो, तो

(a) $\sin\theta \geq 1 - r^2$

(b) $\tan\theta \geq 1 - r^2$

(c) $\sin\theta \leq 1 - r^2$

(d) $\tan\theta \leq 1 - r^2$

7. यदि y की x पर समाश्रयण रेखा $y = m_1 x + c_1$ तथा x की y पर समाश्रयण रेखा $y = m_2 x + c_2$ हो, तो निम्न में से सत्य है

(a) $m_1 m_2 < 1$ (b) $0 \leq \sqrt{m_1 m_2} \leq 1$

(c) $-1 \leq \sqrt{\frac{m_1}{m_2}}$ (d) $-1 \leq \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}$

8. यदि b_{yx} तथा b_{xy} दोनों धनात्मक है (जहाँ b_{yx} तथा b_{xy} समाश्रयण गुणांक है), तब [MP PET 2001]

(a) $\frac{1}{b_{yx}} + \frac{1}{b_{xy}} < \frac{2}{r}$ (b) $\frac{1}{b_{yx}} + \frac{1}{b_{xy}} > \frac{2}{r}$

(c) $\frac{1}{b_{yx}} + \frac{1}{b_{xy}} < \frac{r}{2}$ (d) इनमें से कोई नहीं

9. यदि y की x पर तथा x की y पर समाश्रयण रेखायें, x-अक्ष की धनात्मक दिशा के साथ 30^o तथा 60^o का कोण बनाती हैं, तब x तथा y के बीच सहसम्बन्ध गुणांक का मान है [MP PET 2002]

(a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (b) $\frac{1}{2}$

(c) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (d) $\frac{1}{3}$

10. यदि x का प्रसरण 9 है तथा समाश्रयण रेखायें $4x - 5y + 33 = 0$ तथा $20x - 9y - 10 = 0$ हैं, तब x तथा y के मध्य सहसम्बन्ध गुणांक तथा y का प्रसरण क्रमशः है [AMU 1997, 2002]

(a) 0.6; 16 (b) 0.16; 16

(c) 0.3; 4 (d) 0.6; 4

Answers

सहसम्बन्ध

1	c	2	c	3	c	4	c	5	a
6	d	7	d	8	c	9	d	10	a
11	c	12	a	13	d	14	a	15	c
16	c	17	a	18	b	19	c	20	b
21	c	22	b	23	c	24	c	25	b
26	a	27	c	28	a	29	c	30	a
31	b	32	b	33	b	34	d	35	a
36	d	37	b	38	c	39	a	40	c
41	c	42	a	43	b	44	c		

समाश्रयण

1	b	2	b	3	c	4	a	5	b
6	c	7	b	8	b	9	c	10	b
11	a	12	a	13	d	14	a	15	c
16	a	17	a	18	b	19	c	20	a
21	c	22	c	23	b	24	c	25	b
26	c	27	c	28	b				

Critical Thinking Questions

1	b	2	a	3	d	4	c	5	c
6	c	7	c	8	b	9	c	10	a

Answers and Solutions

सहसम्बन्ध

1. (c) $r_{xy} = \frac{Cov(x,y)}{\sqrt{Var(x).Var(y)}} = \frac{10.2}{\sqrt{(8.25)(33.96)}} = 0.61$.

2. (c) यह स्पष्ट है।

3. (c) यह स्पष्ट है।

4. (c) यह स्पष्ट है।

5. (a) यहाँ $\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y}) = 10, \Sigma(x-\bar{x})^2 = 10$

व $\Sigma(y-\bar{y})^2 = 20$

अतः सहसम्बन्ध गुणांक =

$$r = \frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sqrt{\Sigma(x-\bar{x})^2 \Sigma(y-\bar{y})^2}} = \frac{10}{\sqrt{10 \times 20}} = \frac{10}{10\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

6. (d) यह आधारभूत संकल्पना है।

7. (d) यह स्पष्ट है।

8. (c) $r_{xy} = \frac{20}{\sqrt{(36)(25)}} = \frac{2}{3} = 0.66$.

9. (d) सूत्र

$$r = \frac{\Sigma xy - \frac{\Sigma x . \Sigma y}{n}}{\sqrt{\left\{\Sigma x^2 - \frac{(\Sigma x)^2}{n}\right\}\left\{\Sigma y^2 - \frac{(\Sigma y)^2}{n}\right\}}} = \frac{2}{3}$$ का उपयोग करें।

10. (a) यह स्पष्ट है।

11. (c)

x	y	xy	x	y
3	5	15	09	25
4	3	12	16	09
8	7	56	64	49
9	7	63	81	49
6	6	36	36	36
2	9	18	04	81
1	2	02	01	04
$\Sigma x = 33$	$\Sigma y = 39$	$\Sigma xy = 202$	$\Sigma x^2 = 211$	$\Sigma y^2 = 253$

$$r = \frac{\Sigma xy - \frac{\Sigma x . \Sigma y}{n}}{\sqrt{\left\{\Sigma x^2 - \frac{(\Sigma x)^2}{n}\right\}\left\{\Sigma y^2 - \frac{(\Sigma y)^2}{n}\right\}}}$$

$$\Rightarrow r = \frac{202 - \frac{33 \times 39}{7}}{\sqrt{\left\{211 - \frac{(33)^2}{7}\right\}\left\{253 - \frac{(39)^2}{7}\right\}}} \Rightarrow r = 0.408 .$$

12. (a) चूँकि $\Sigma d^2 = 128$

अतः $\rho = 1 - \frac{6(128)}{10(100-1)} = 0.224$.

13. (d) यहाँ $\bar{x} = 68, \bar{y} = 69$

$x-\bar{x}$	$y-\bar{y}$	$(x-\bar{x})(y-\bar{y})$	$(x-\bar{x})^2$	$(y-\bar{y})^2$
– 3	– 2	6	9	4
– 2	– 1	2	4	1
– 1	– 3	3	1	9
0	0	0	0	0
1	3	3	1	9
2	3	6	4	9
3	0	0	9	0

$\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y}) = 20$

अतः $r_{xy} = \frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sqrt{\Sigma(x-\bar{x})^2 \Sigma(y-\bar{y})^2}} = \frac{20}{\sqrt{(28)(32)}} = 0.67$.

14. (a) $r = \frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sqrt{\Sigma(x-\bar{x})^2 \Sigma(y-\bar{y})^2}}$ का उपयोग करें।

15. (c) $r = \frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sqrt{\Sigma(x-\bar{x})^2 \Sigma(y-\bar{y})^2}}$ का उपयोग करें।

16. (c) $r = \frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sqrt{\Sigma(x-\bar{x})^2 \Sigma(y-\bar{y})^2}}$ का उपयोग करें।

17. (a) $r = \frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sqrt{\Sigma(x-\bar{x})^2 \Sigma(y-\bar{y})^2}}$ का उपयोग करें।

18. (b) $r = \frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sqrt{\Sigma(x-\bar{x})^2 \Sigma(y-\bar{y})^2}}$ का उपयोग करें।

19. (c) यह आधारभूत संकल्पना है।

20. (b) यह स्पष्ट है।

21. (c) यह स्पष्ट है।

22. (b) यह स्पष्ट है।

23. (c) यह स्पष्ट है।

24. (c) $r = \frac{80}{\sqrt{25 \times 256}} = 1$.

25. (b) यहाँ $\Sigma x = 44, \Sigma y = 64$,

$\Sigma x^2 = 290, \Sigma y^2 = 610$ व $\Sigma xy = 418$

अतः सूत्र से, $r_{xy} = 0.96$

26. (a) यहाँ $\bar{x} = 4, \bar{y} = \frac{34}{6} = 5.66$.

$x-\bar{x}$	$y-\bar{y}$	$(x-\bar{x})(y-\bar{y})$
– 1	– 0.66	0.66
0	– 2.66	0
4	3.34	13.36
2	0.34	0.68
– 2	3.34	– 6.68
– 3	– 3.66	+10.98

$\Sigma(x-\bar{x})^2 = 34$, $\Sigma(y-\bar{y})^2 = 43.33$

इसलिए $r_{xy} = \frac{19}{\sqrt{(34)(43.33)}} = 0.49$.

27. (c) $r = \frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sqrt{\Sigma(x-\bar{x})^2 \Sigma(y-\bar{y})^2}}$ का उपयोग करें।

28. (a) $r = \frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sqrt{\Sigma(x-\bar{x})^2 \Sigma(y-\bar{y})^2}}$ का उपयोग करें।

29. (c) $r = \frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sqrt{\Sigma(x-\bar{x})^2 \Sigma(y-\bar{y})^2}}$ का उपयोग करें।

30. (a) यह आधारभूत संकल्पना है।

31. (b) सहसम्बन्ध गुणांक = $1 - \frac{6\Sigma d^2}{n(n^2-1)}$

यहाँ $\Sigma d^2 = 9^2+7^2+5^2+3^2+1^2+1^2+3^2+5^2+7^2+9^2 = 330$

एवं $n = 10 \quad \therefore \ r = 1 - \frac{6\times 330}{10\times 99} = 1-2 = -1$

ट्रिक : स्पष्टतः r पूर्णतः ऋणात्मक है क्योंकि जब x का मान बढ़ता है, तब y का मान घटता है।

32. (b) यह स्पष्ट है।

33. (b) $y = \frac{-3}{2}x + 2$

चूँकि x तथा y रैखिकतः सम्बन्धित है तथा प्रवणता ऋणात्मक है अतः दोनों चरों के मध्य पूर्णतः अप्रत्यक्ष सहसम्बन्ध है। अतः $r_{xy} = -1$.

34. (d) X तथा Y दोनों स्वतंत्र चर हैं अतः इनके मध्य कोई सहसम्बन्ध नहीं है, अर्थात् $r = 0$.

35. (a) $A = 5$ तथा $B = 5$ लेकर निम्नलिखित सारणी बनाते हैं।

x_i	y_i	$u_i = x_i - 5$	$v_i = y_i - 5$	u_i^2	v_i^2	$u_i v_i$
4	5	− 1	0	1	0	0
7	8	2	3	4	9	6
8	6	3	1	9	1	3
3	3	− 2	− 2	4	4	4
4	5	− 1	0	1	0	0
कुल		1	2	19	14	13

$$\therefore \ r(X,Y) = \frac{13 - \frac{1\times 2}{5}}{\sqrt{19-\frac{1^2}{5}}\sqrt{14-\frac{4}{5}}} = \frac{63}{\sqrt{94}\sqrt{66}}.$$

36. (d) सहसम्बन्ध गुणांक की कोई इकाई नहीं होती है।

37. (b) यह स्पष्ट है।

38. (c) $Cov(x,y) = 10$, $Var(x) = 16$, $Var(y) = 9$

$$\therefore \ r = \frac{Cov(x,y)}{\sqrt{Var(x).Var(y)}} = \frac{10}{\sqrt{16\times 9}} = \frac{10}{12} = 0.83.$$

39. (a) सहसम्बन्ध गुणांक =

$$r = \frac{Cov(x,y)}{\sqrt{Var(x)}.\sqrt{Var(y)}} = \frac{8}{\sqrt{9}\sqrt{16}} \Rightarrow r = \frac{2}{3}.$$

40. (c) $x_i + y_i = n+1$ के लिए $i = 1,2,3.....n.$

माना $x_i - y_i = d_i$, तब $2x_i = n+1+d_i$s

$\Rightarrow d_i = 2x_i - (n+1)$

$$\therefore \ \sum_{i=1}^{n} d_i^2 = \sum_{i=1}^{n}[2x_i - (n+1)]^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n}[4x_i^2 + (n+1)^2 - 4(n+1)x_i]$$

$$= 4\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + (n+1)^2(n) - 4(n+1)\Sigma x_i$$

$$= 4\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 n - 4(n+1)\frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n^2-1)}{3}$$

$$\therefore \ r = 1 - \frac{6\sum d_i^2}{n(n^2-1)} = 1-2 = -1.$$

41. (c) यहाँ $\bar{x} = 5.5, \bar{y} = 7.5$

$x-\bar{x}$	$y-\bar{y}$	$(x-\bar{x})(y-\bar{y})$
− 4.5	2.5	− 11.25
− 3.5	1.5	− 5.25
− 2.5	1.5	− 3.75
− 1.5	0.5	− 0.75
− 0.5	− 1.5	0.75
0.5	4.5	2.25
1.5	− 3.5	− 5.25
2.5	− 4.5	− 11.25
3.5	5.5	19.25
4.5	− 6.5	− 29.25

$$Cov(x,y) = \frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{n} = \frac{-44.5}{10} = -4.45.$$

42. (a) $S_y = \sigma_y\sqrt{1-r^2} = \sigma_y\sqrt{1-1} = 0$.

43. (b) $U = \frac{X-a}{h}, V = \frac{Y-b}{k}$

$\Rightarrow X = hU + a, \ Y = kV + b$

$\therefore Cov(X,Y) = hk\ Cov(U,V)$,

$[\because Cov(AX+B, CY+D) = AC\ Cov(x, y)]$.

44. (c) $\sum x = 15, \sum y = 40, \ \sum xy = 110, n = 5$

हम जानते हैं कि $Cov(x, y) = \frac{1}{n}\Sigma xy - \left(\frac{1}{n}\Sigma x\right)\left(\frac{1}{n}\Sigma y\right)$

$$= \frac{1}{5}.110 - \left(\frac{15}{5}\right)\left(\frac{40}{5}\right) = 22 - 3\times 8 = -2.$$

समाश्रयण

1. (b) दी गई समाश्रयण रेखायें हैं,

$x = -0.83y + 19.13$ व $y = -0.50x + 11.64$

$\Rightarrow \ r = -\sqrt{0.83\times 0.50} = -0.64$,

(चूँकि दोनों प्रवणताएँ ऋणात्मक हैं)

2. (b) यह आधारभूत संकल्पना है।

3. (c) यह आधारभूत संकल्पना है।

4. (a) y की x पर समाश्रयण रेखा $y - \bar{y} = 0$ एवं x की y पर समाश्रयण रेखा $x - \bar{x} = 0$ है।

5. (b) $y = x$ व $x = \frac{1}{4}y + \frac{3}{4}$, अतः $r = \sqrt{1.\frac{1}{4}} = 0.5$.

6. (c) यह आधारभूत संकल्पना है।

7. (b) $0.8 = \sqrt{0.2\times b_{yx}} \Rightarrow b_{yx} = \frac{0.64}{0.2} = 3.2$.

8. (b) या तो 1 या − 1.

9. (c) यह स्पष्ट है।

10. (b) $r=\sqrt{(-0.33)(-1.33)}=-0.66$.

11. (a) चूँकि y की x पर, समाश्रयण रेखा है,

$$y-\bar{y}=r.\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-\bar{x}) \Rightarrow y-67=\frac{0.8\times 2.5}{5}(x-65)$$

$$\Rightarrow y-67=\frac{2}{5}(x-65).$$

12. (a) दोनों समाश्रयण गुणांकों का गुणनफल ≤ 1 होना चाहिए, अतः $1.6\times 0.40=0.64<1$.

13. (d) यहाँ, $b_{yx}=\frac{8}{5}$ व $b_{xy}=\frac{2}{5}$

अतः $m_1=\frac{8}{5}$ व $m_2=\frac{1}{b_{xy}}=\frac{5}{2}$

$$\Rightarrow \tan\theta=\pm\left(\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right)=\pm\frac{\frac{8}{5}-\frac{5}{2}}{1+\frac{8}{5}\times\frac{5}{2}}=\frac{9}{50}.$$

14. (a) चूँकि समाश्रयण रेखायें $(\bar{x},\bar{y})$ से गुजरती हैं, अतः

$4\bar{x}+3\bar{y}+7=0$, $3\bar{x}+4\bar{y}+8=0$

हल करने पर, $\bar{x}=-\frac{4}{7}$ व $\bar{y}=-\frac{11}{7}$.

15. (c) चूँकि हम जानते हैं कि $m_1m_2\le 1\Rightarrow k.4\le 1\Rightarrow k\le\frac{1}{4}$

एवं m_1 व m_2 को समान चिन्ह का होना चाहिए।

अतः $k\ge 0 \Rightarrow 0\le k\le\frac{1}{4}$

16. (a) यह आधारभूत संकल्पना है।

17. (a) समाश्रयण गुणांक विभिन्न चिन्हों के हैं जो कि सम्भव नहीं है एवं रेखायें एक–दूसरे पर लम्ब हैं। अतः $r=0$.

18. (b) $r_{xy}=\sqrt{\left(\frac{-3}{12}\right)\left(\frac{-3}{9}\right)}=-0.289$.

19. (c) $3x+2y=26\Rightarrow y=-\frac{3}{2}x+13$

$6x+y=31\Rightarrow x=-\frac{1}{6}y+\frac{31}{6}$

$\therefore\ r=\sqrt{\left(\frac{-3}{2}\right)\left(-\frac{1}{6}\right)}=-\frac{1}{2}.$

20. (a) $r=+\sqrt{0.8\times 0.2}=0.4$.

21. (c) हम जानते हैं, कि सहसम्बन्ध गुणांक $r=\frac{Cov(x,y)}{\sigma_x\sigma_y}$

तथा y का x पर समाश्रयण गुणांक $b_{yx}=\frac{r\sigma_y}{\sigma_x}$

$$\therefore\ b_{yx}=\frac{Cov(x,y).\sigma_y}{\sigma_x.\sigma_y.\sigma_x}\Rightarrow b_{yx}=\frac{Cov(x,y)}{\sigma_x^2}.$$

22. (c) यदि दो समाश्रयण रेखाओं के मध्य कोण θ हो, तो

$\tan\theta=\pm\left(\frac{1-r^2}{r}\right).\left(\frac{\sigma_x.\sigma_y}{\sigma_x^2+\sigma_y^2}\right)$, यहाँ $\theta=90^\circ\ \therefore\ r=0$

अतः यहाँ रैखिक सहसम्बन्ध नहीं है।

23. (b) दी गयी समाश्रयण रेखायें $2x-9y+6=0$ तथा $x-2y+1=0$ हैं।

b_{yx} = y की x पर समाश्रयण रेखा की प्रवणता $=\frac{2}{9}$

$\frac{1}{b_{xy}}$ = x की y पर समाश्रयण रेखा की प्रवणता $=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow b_{xy}=2.$

$\therefore\ r^2=b_{yx}.b_{xy}\Rightarrow r=+\frac{2}{3}.$

24. (c) समाश्रयण रेखाओं के दूसरे समुच्चय में $\bar{x}$ तथा $\bar{y}$ के मान समाश्रयण रेखाओं को संतुष्ट नहीं करते हैं।

25. (b) x पर y का समाश्रयण गुणांक $=b_{yx}=r.\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$

y पर x का समाश्रयण गुणांक $=b_{xy}=r.\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$

तब, $b_{yx}.b_{xy}=r.\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\times r.\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$

$r^2=b_{yx}.b_{xy}\Rightarrow r=\sqrt{b_{yx}.b_{xy}}$.

26. (c) $r=\sqrt{b_{yx}.b_{xy}}=-\sqrt{1.5\times 0.5}=-0.87$

उत्तर ऋणात्मक है, क्योंकि दोनों समाश्रयण गुणांक ऋणात्मक हैं।

27. (c) x पर y की समाश्रयण रेखा का समीकरण है,

$y-\bar{y}=r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-\bar{x})$ या $y-\bar{y}=b_{yx}(x-\bar{x})$

m_1 = x पर y की समाश्रयण रेखा की प्रवणता $=b_{yx}$

अब y पर x की समाश्रयण रेखा का समीकरण है,

$x-\bar{x}=b_{xy}(y-\bar{y})$

m_2 = y पर x की समाश्रयण रेखा की प्रवणता $=\frac{1}{b_{xy}}$

यदि इनके मध्य कोण θ हो, तो

$$\tan\theta=\pm\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}=\frac{b_{yx}-\frac{1}{b_{xy}}}{1+\frac{b_{yx}}{b_{xy}}} \text{ या } \tan\theta=\left(\frac{b_{xy}-\frac{1}{b_{yx}}}{1+\frac{b_{xy}}{b_{yx}}}\right).$$

28. (b) दिया है $s=a+\frac{y}{m}$, $\sigma_s^2=\frac{1}{4}\sigma_y^2$ तथा $r=0.4$

अब, $s=a+\frac{y}{m}\Rightarrow\bar{s}=a+\frac{\bar{y}}{m}\Rightarrow s-\bar{s}=\frac{1}{m}(y-\bar{y})$ .....(i)

$\Rightarrow\ \Sigma(s-\bar{s})(y-\bar{y})=\frac{1}{m}\Sigma(y-\bar{y})^2$

$\Rightarrow\ Cov(s,y)=\frac{1}{m}\sigma_y^2$ .....(ii)

$$r=\frac{Cov(s,y)}{\sigma_s\sigma_y}\Rightarrow 0.4=\frac{\frac{1}{m}\sigma_y^2}{\sigma_s\sigma_y}$$

$\Rightarrow 0.4=\frac{1}{m}\frac{\sigma_y}{\sigma_s}\Rightarrow 0.2=\frac{1}{m}$, $\left[\because\ \sigma_s=\frac{1}{2}\sigma_y,\text{(दिया है)}\right]$

$\Rightarrow\ m=5$.

Critical Thinking Questions

1. (b) $\sigma_{x-y}^2 = \frac{1}{n}\Sigma[(x-y)-(\bar{x}-\bar{y})]^2$

$= \frac{1}{n}\Sigma[(x-\bar{x})-(y-\bar{y})]^2$

$= \frac{1}{n}\Sigma[(x-\bar{x})^2+(y-\bar{y})^2-2(x-\bar{x})(y-\bar{y})]$

$= \frac{1}{n}\Sigma(x-\bar{x})^2+\frac{1}{n}\Sigma(y-\bar{y})^2-\frac{2}{n}\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})$

$= \sigma_x^2+\sigma_y^2-2r.\sigma_x\sigma_y \Rightarrow r = \frac{\sigma_x^2+\sigma_y^2-\sigma_{x-y}^2}{2\sigma_x\sigma_y}$.

2. (a)

रैंक (गणित)	2	4	3	5	1
रैंक (सांख्यिकी)	1	3	4	5	2
रैंकों में अन्तर का वर्ग (d)	1	1	1	0	1

$\Rightarrow \rho = 1-\frac{6\times 4}{5\times 24} = \frac{4}{5} = 0.8$.

3. (d) दिया गया सम्बन्ध है, $ax+by+c=0$

$\Rightarrow by = -ax-c \Rightarrow y = \frac{-a}{b}x-\frac{c}{b}$

$\because \rho = 1$, जब दिये गये सम्बन्ध की प्रवणता धनात्मक हो,

अतः a तथा b के चिन्ह विपरीत होने चाहिए।

4. (c) $r_{xy} = \frac{Cov(x,y)}{\sigma_x\sigma_y} \Rightarrow 0.6 = \frac{16}{4\sigma_y}$

$\sigma_y = \frac{16}{4\times 0.6} = \frac{20}{3}$.

5. (c) $x_1 = \frac{r\sigma_y}{\sigma_x}, x_2 = \frac{r\sigma_x}{\sigma_y}$

अतः $x_1+x_2 = r\left[\frac{\sigma_y}{\sigma_x}+\frac{\sigma_x}{\sigma_y}\right]$

अब $\frac{\sigma_y}{\sigma_x}+\frac{\sigma_x}{\sigma_y} \geq 2\sqrt{\frac{\sigma_x\sigma_y}{\sigma_y\sigma_x}}$, ($\because$ A.M. $\geq$ G.M.)

अतः $r\left[\frac{\sigma_y}{\sigma_x}+\frac{\sigma_x}{\sigma_y}\right] \geq 2r$ या $x_1+x_2 \geq 2r$.

6. (c) $\tan\theta = \pm\left(\frac{1-r^2}{r}\right)\left(\frac{\sigma_x\sigma_y}{\sigma_x^2+\sigma_y^2}\right)$

चूँकि दो विभिन्न राशियों का समान्तर माध्य, गुणोत्तर माध्य से बड़ा या बराबर होता है।

अतः $\frac{\sigma_x^2+\sigma_y^2}{2} \geq \sigma_x\sigma_y \Rightarrow \frac{\sigma_x\sigma_y}{\sigma_x^2+\sigma_y^2} \leq \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \tan\theta \leq \frac{1-r^2}{2r} \Rightarrow \tan^2\theta \leq \left(\frac{1-r^2}{2r}\right)^2$

चूँकि $\sin^2\theta = \frac{\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$

$\therefore \sin^2\theta \leq \left[\frac{\left(\frac{1-r^2}{2r}\right)^2}{\left\{1+\left(\frac{1-r^2}{2r}\right)^2\right\}}\right] \Rightarrow \sin^2\theta \leq \left(\frac{1-r^2}{1+r^2}\right)^2$

चूँकि $1-r^2 < 1+r^2$ व $\sin^2\theta \leq 1 \Rightarrow \sin\theta \leq 1-r^2$.

7. (c) $y = m_1x+c_1 \Rightarrow b_{yx} = m_1$

तथा $x = \frac{y}{m_2}-\frac{c_2}{m_2} \Rightarrow b_{xy} = \frac{1}{m_2}$

$\therefore r = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}}$. अतः $-1 \leq \sqrt{\frac{m_1}{m_2}}$, ($\because -1 \leq r \leq 1$).

8. (b) हम जानते हैं कि $b_{yx}+b_{xy} > 2\sqrt{b_{yx}.b_{xy}}$

$\Rightarrow b_{yx}+b_{xy} > 2r \Rightarrow \frac{b_{yx}+b_{xy}}{r^2} > \frac{2}{r}$

$\Rightarrow \frac{b_{yx}+b_{xy}}{b_{yx}.b_{xy}} > \frac{2}{r} \Rightarrow \frac{1}{b_{xy}}+\frac{1}{b_{yx}} > \frac{2}{r}$.

9. (c) x पर y की समाश्रयण रेखा की प्रवणता $= b_{yx} = \tan 30^o = \frac{1}{\sqrt{3}}$

y पर x की समाश्रयण रेखा की प्रवणता $= \frac{1}{b_{xy}} = \tan 60^o = \sqrt{3}$

$\Rightarrow b_{xy} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

अतः $r = \sqrt{b_{xy}.b_{yx}} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{3}}.\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

10. (a) $Var(x) = \sigma_x^2 = 9$, (दिया है)

दी गई समाश्रयण रेखायें हैं

$4x-5y+33=0, \quad 20x-9y-10=0$

अर्थात् $y = \frac{4}{5}x+\frac{33}{5}$ तथा $x = \frac{9}{20}y+\frac{10}{20}$

अतः $b_{yx} = \frac{4}{5}$ तथा $b_{xy} = \frac{9}{20}$

अब $b_{yx} = \frac{Cov(x,y)}{\sigma_x^2}$

$\Rightarrow Cov(x,y) = \frac{4}{5}.9 = \frac{36}{5}$ तथा $b_{xy} = \frac{Cov(x,y)}{\sigma_y^2}$

$\Rightarrow \sigma_y^2 = \frac{36}{5}.\frac{20}{9} = 16$ अर्थात्, $Var(y) = 16$

अब $\rho(x,y) = \frac{Cov(x,y)}{\sigma_x.\sigma_y} = \frac{36}{5\times 3\times 4} = 0.6$

अतः सहसम्बन्ध गुणांक

$= 0.6$ तथा y का प्रसरण $= 16$.

सहसम्बन्ध एवं समाश्रयण

SET Self Evaluation Test -30

1. यदि y की x पर समाश्रयण रेखा का समीकरण $ax+by+c=0$ तथा x की y पर समाश्रयण रेखा का समीकरण $a_1x+b_1y+c_1=0$ हो, तो

(a) $a_1b \le ab_1$

(b) $aa_1 = bb_1$

(c) $ab_1 \le a_1b$

(d) इनमें से कोई नहीं

2. दो समाश्रयण रेखायें $3x+4y-7=0$ तथा $4x+y-5=0$ हैं, तो x व y के बीच सहसम्बन्ध गुणांक है [AI CBSE 1991]

(a) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (b) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$

(c) $\frac{3}{16}$ (d) $-\frac{3}{16}$

3. माना X, Y दो चर हैं जिनका सहसम्बन्ध गुणांक $\rho(X,Y)$ है तथा चर U, V सम्बन्ध $U=2X, V=3Y$ से X तथा Y से सम्बन्धित है तब $\rho(U,V)$ का मान है [AMU 1999]

(a) $\rho(X,Y)$

(b) $6\rho(X,Y)$

(c) $\sqrt{6}\rho(X,Y)$

(d) $\frac{3}{2}\rho(X,Y)$

4. निम्न आंकड़ों के लिए सहसम्बन्ध गुणांक होगा

x :	20	25	30	35	40	45
y :	16	10	8	20	5	10

[AI CBSE 1988]

(a) 0.32

(b) – 0.32

(c) 0.35

(d) इनमें से कोई नहीं

5. यदि $\bar{x}=\bar{y}=0, \Sigma x_iy_i=12, \sigma_x=2, \sigma_y=3$ तथा $n=10$ तो सहसम्बन्ध गुणांक है [MP PET 1999; Pb. CET 2003]

(a) 0.4 (b) 0.3

(c) 0.2 (d) 0.1

6. प्रेक्षणों (1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1) के मध्य सहसम्बन्ध गुणांक है [Pb. CET 1997; DCE 2002]

(a) 1 (b) – 1

(c) 0 (d) 2

7. यदि y की x पर तथा x की y पर समाश्रयण रेखाओं के समीकरण क्रमशः $y=ax+b$ तथा $x=cy+d$ हों, तो $\bar{x}$ तथा $\bar{y}$ क्रमशः होंगे

(a) $\frac{ab+c}{1-ad}, \frac{cd+a}{1-ad}$

(b) $\frac{bc+d}{1-ac}, \frac{ad+b}{1-ac}$

(c) $\frac{ad+c}{1-bc}, \frac{cd+d}{1-bc}$

(d) इनमें से कोई नहीं

8. यदि

x :	2	4	6	8	10	12	14	16
y :	25	18	16	16	14	8	8	4

तो

(a) $r=0$

(b) r धनात्मक है

(c) r ऋणात्मक है

(d) इनमें से कोई नहीं

9. निम्न परीक्षणों से

$\{(x,y)\} = \{(1,7),(4,5),(7,2),(10,6),(13,5)\}$

y की x पर समाश्रयण रेखा है [AI CBSE 1991]

(a) $7x+30y-187=0$

(b) $7x-30y-187=0$

(c) $7x-30y+187=0$

(d) इनमें से कोई नहीं

10. यदि द्विचर आंकड़े $\sum x=30$, $\sum y=400$, $\sum x^2=196$, $\sum xy=850$ तथा $n=10$ हों, तो x पर y का समाश्रयण गुणांक है [Kerala (Engg.) 2002]

(a) – 3.1 (b) – 3.2

(c) – 3.3 (d) – 3.4

AS Answers and Solutions

(SET - 30)

1. (c) $y=\frac{-a}{b}x-\frac{c}{b}$, $x=-\frac{b_1}{a_1}x-\frac{c_1}{a_1}$

$\because \quad r^2\le 1$

$\therefore \sqrt{\left(\frac{-a}{b}\right)\left(-\frac{b_1}{a_1}\right)}\le 1$

$\Rightarrow \frac{ab_1}{ba_1}\le 1 \Rightarrow ab_1\le ba_1$.

2. (b) $y=-\frac{3}{4}x+\frac{7}{4}$, $x=\frac{-y}{4}+\frac{5}{4}$

अतः $r=\sqrt{\left(\frac{-3}{4}\right)\left(\frac{-1}{4}\right)}=\frac{-\sqrt{3}}{4}$.

3. (a) $\rho(U,V)=\frac{2.3}{|2.3|}\rho(X,Y)=\rho\ (X,Y)$.

4. (b) पद विचलन से, $u=x-35, v=y-10$

$\Sigma u=-15, \Sigma v=9$

$\Sigma uv=-105, \Sigma u^2=475$ व $\Sigma v^2=165$

अब $r_{xy}=r_{uv} \Rightarrow r_{xy}=-0.32$.

5. (c) सहसम्बन्ध गुणांक = $r=\frac{Cov\,(x,y)}{\sigma_x\sigma_y}$

$Cov(x,y)=\frac{\Sigma x_i y_i}{n}-\bar{x}\,\bar{y}$

$\bar{x}=\bar{y}=0$ तथा $\Sigma x_i y_i=12, n=10, \sigma_x=2, \sigma_y=3$

$r=\frac{\frac{12}{10}-0}{2\times 3}=\frac{2}{10}=0.2$.

6. (b) चूँकि दोनों चर रैखिक सम्बन्ध $x+y=7$ से संलग्न हैं तथा जब x के मान में वृद्धि होती है तब y के मान में कमी होती है। अतः x तथा y में पूर्णतः अप्रत्यक्ष सहसम्बन्ध है, अर्थात् $\rho=-1$.

7. (b) समाश्रयण रेखायें $y=ax+b$ व $x=cy+d$ हैं।

चूँकि समाश्रयण रेखायें $(\bar{x},\bar{y})$ से गुजरती हैं, अतः

$\bar{y}=a\bar{x}+b$ व $\bar{x}=c\bar{y}+d$

हल करने पर, $\bar{x}=\frac{bc+d}{1-ac}, \bar{y}=\frac{ad+b}{1-ac}$.

8. (c) स्पष्टतः r ऋणात्मक होगा क्योंकि जब x बढ़ता है, तो y घटता है।

9. (d) यहाँ $\bar{x}=\frac{\Sigma x}{n}=\frac{35}{5}=7$

व $\bar{y}=\frac{\Sigma y}{n}=\frac{25}{5}=5$

अतः $b_{yx}=\frac{\sum xy-\frac{\sum x.\sum y}{n}}{\sum x^2-\frac{(\sum x)^2}{n}}=\frac{-1}{10}$

अतः y की x पर समाश्रयण रेखा है,

$y-\bar{y}=b_{yx}(x-\bar{x})$

$\Rightarrow y-5=\frac{-1}{10}(x-7)$

$\Rightarrow x+10y=57$.

10. (c) $Cov\ (x,y)=\frac{1}{n}(\Sigma xy-\frac{1}{n}\Sigma x\,\Sigma y)$

$=\frac{1}{10}\left(850-\frac{1}{10}\times 30\times 400\right)=-35$

$Var(x)=\sigma_x^2=\frac{1}{n}\Sigma x^2-\left(\frac{\Sigma x}{n}\right)^2$

$=\frac{196}{10}-\left(\frac{30}{10}\right)^2=10.6$

अतः $b_{yx}=\frac{Cov\,(x,y)}{Var(x)}=\frac{-35}{10.6}=-3.3$.

* * *