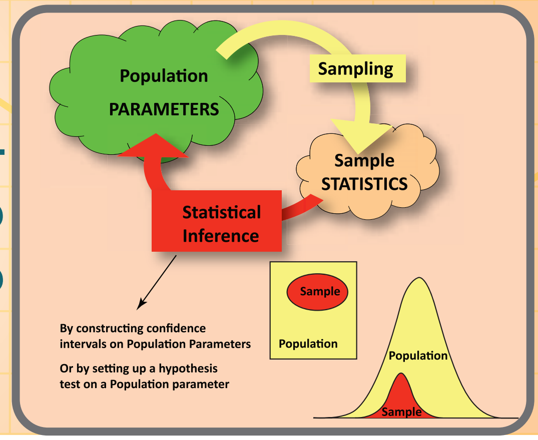
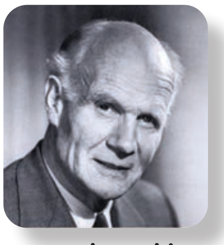
அத்தியாயம்

# 1 மிகைகாண் சோதனைகள் – அடிப்படைக் கோட்பாடுகளும் பெருங்கூறுசோதனைகளும்



ஜெர்ஸி நேமன்
1894–1981

ஜெர்ஸி நேமன் (Jerzy Neyman) என்பவர் ரஷ்யாவில் பிறந்த போலந்து நாட்டவர். அவர் நவீன புள்ளியியல் உருவாக்கத்தின் முக்கிய சிற்பிகளில் ஒருவராகக் கருதப்படுகிறார். 1937 ஆம் ஆண்டில் புள்ளியியலில் 'மதிப்பீடுகளுக்கான நம்பிக்கை இடைவெளி' என்னும் கருத்தாக்கத்தை உருவாக்கினார். மேலும் புள்ளியியலில், சோதனைகள் வடிவமைப்பு, மாதிரிக் கோட்பாடுகள், கலப்புப்பரவல்கள் போன்ற பிரிவுகளிலும் தமது பங்களிப்பை நல்கியுள்ளார். பெர்க்லியில் உள்ள கலிபோர்னியோ பல்கலைக் கழகத்தில் புள்ளியியல் துறையை நிறுவியுள்ளார். அது இன்றளவும் உலக அளவில் ஒப்புயர்வுற்றதாக விளங்கி வருகிறது.


எகான் ஷார்ப் பியர்சான்
1895–1980

எகான் ஷார்ப் பியர்சான் (Egon Sharp Pearson) என்பர் இங்கிலாந்தைச் சேர்ந்தவர். அவர், புள்ளியியலாளரான பேராசிரியர் கார்ல் பியர்சானின் மைந்தராவார். அவர் பயோமெட்ரிகா (Biometrika) என்னும் புள்ளியியலுக்கான இதழின் ஆசிரியராகப் பணியாற்றியுள்ளார். இரு பகுதிகளால் ஆன 'புள்ளியியலாளருக்கான பயோமெட்ரிகா அட்டவணை' என்னும் நூலை வெளியிடுவதில் முன்னோடியாகத் திகழ்ந்தார். அவை உலக அளவில், புள்ளியியல் தரவுப்பகுப்பாய்வில் ஈடுபடும் அனைவருக்கும் குறிப்பிடத்தக்க அளவில் தற்கால நவீன கணக்கீட்டுமுறை வசதிகள் வரும் வரை பெரிதும் துணை புரிந்து வந்திருக்கின்றன.

நேமன், பியர்சான் ஆகிய இருவரும் இணைந்து சுமார் பத்தாண்டு காலம் (1928-1938) புள்ளியியலில் கருதுகோள் ஆய்வுகள் பற்றி ஆய்வு மேற்கொண்டு, நேமன் – பியர்சான் கிளைத்தேற்றம் (Neyman – Pearson Fundamental Lemma) என்பதை உருவாக்கியுள்ளனர். இத்தேற்ற உருவாக்கம், புள்ளியியல் கருதுகோள்களுக்கு அடிப்படையாக விளங்கி அனுமானப் புள்ளியியலில் ஒரு மைல்கல்லாகத் திகழ்கிறது. அந்நாட்களில் அவர் இருவரும் உருவாக்கிய கோட்பாடுகளைப் பேராசிரியர் ஆர்.ஏ. ஃபிஷர் உட்பட பலரும் திறனாய்வு செய்து கருத்துக்களை வெளியிட்டிருக்கின்றனர். இருப்பினும் அவ்விருவர் உருவாக்கிய கோட்பாடுகள் இன்றளவும் பயன்பாட்டில் இருக்கின்றன.

**'எல்லா அறிவியல் கருத்துகளுக்கும் துணைநிற்கும் பணியாள் போன்று செயலாற்றுவதே புள்ளியியலின் பண்பாகும்' – ஜெர்ஸி நேமன்**

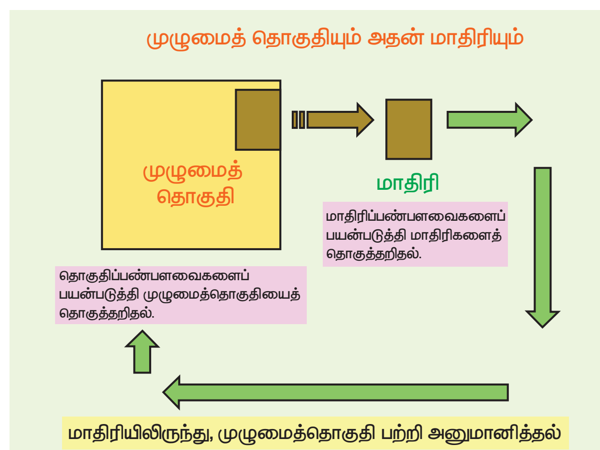


01_12th_Statistics_TM_Unit 1.indd 1 12-12-2021 19:19:05

## கற்றல் குறிக்கோள்கள்

- ❖ கருதுகோள் சோதனையின் நோக்கங்களை அறிதல்.
- ❖ தொகுதிப்பண்பளவை, மாதிரிப்பண்பளவை ஆகியவற்றை அறிதல்.
- ❖ மாதிரிப் பரவல் பற்றிப் புரிந்து கொள்ளல்.
- ❖ திட்டப்பிழையை வரையறை செய்தல்.
- ❖ பல்வகை கருதுகோள் அமைப்புகளைப் புரிந்து கொள்ளுதல்.
- ❖ கருதுகோள் சோதனையில் ஏற்படும் முதல் வகைப் பிழை, இரண்டாம் வகைப்பிழை பற்றிப் புரிந்துகொள்ளுதல்.
- ❖ மிகைகாண் நிலை, தீர்மானிக்கும் பகுதி, தீர்மானிக்கும் எல்லை மதிப்பு ஆகியவற்றைப் புரிந்து கொள்ளுதல்.
- ❖ ஒருபக்க சோதனை, இருபக்க சோதனை ஆகியவற்றை வகைப்படுத்துதல்.
- ❖ கருதுகோள்களின்படி பெருங்கூறு சோதனைகள் செய்வதற்கான வழிமுறைகளை அறிதல்.
- ❖ பெருங்கூறுகளைக் கொண்டு, கருதுகோள்களின்படி சராசரிகளுக்கும், விகிதசமங்களுக்கும் மிகைகாண் சோதனை காணும் கணக்குகளைச் செய்தல்.

## அறிமுகம்




முந்தைய பதினோறாம் வகுப்பு புள்ளியியல் பாடத்தில் தரவுகளைச் சேகரித்து அவற்றை வகைப்படுத்தி மையப் போக்கு அளவைகள், சிதறல் அளவைகள் ஆகியவற்றின் துணை கொண்டு பகுப்பாய்வு செய்து பல்வேறு முடிவுகளைக் கண்டிருக்கிறோம். இவ்வாறாக புள்ளியியல் தரவுகளுக்கு விளக்கம் தருவதை **விளக்கப் புள்ளியியல்** (Descriptive Statistics) என்கிறோம். இப்போது புள்ளியியல் பகுப்பாய்வின் மற்றொரு பரிமாணமான **அனுமானப் புள்ளியியல்** (Inferential Statistics) என்ற பகுதியைப் பற்றி நாம் அறிந்து கொள்வது அவசியமாகிறது. இந்நூலின் முதல் நான்கு பாடங்களில் அனுமானப் புள்ளியியலில் இடம்பெறும் கருத்துகளும், கணக்கிடும் முறைகளும் விரிவாக விளக்கப்படவிருக்கின்றன.

எந்த அறிவியல் ஆய்வு அல்லது கள ஆய்விலும் முழுமைத் தொகுதியைப் பற்றிய தெரியாத விவரங்கள் அல்லது பண்புகள் ஆகியவற்றைக் கண்டறிவதே நமது முதன்மை நோக்கமாகும். முழுமைத்தொகுதி முழுவதையும் ஆய்வு செய்து கண்டறிவது எப்போதும் நடைமுறைக்கு ஏற்றதாக அமையாது. ஏனெனில் அச்செயலுக்கு அதிக பொருட்செலவும் அதிக காலமும் செலவழிக்க நேரிடும். ஆனால், முழுமைத்தொகுதியில் இருந்து ஒரு சிறு பகுதியை எடுத்து ஆய்வு செய்வது எளிதான செயலாகும். அத்தகைய சிறு பகுதியை **மாதிரி** அல்லது **கூறு** (Sample) என்று அழைக்கிறோம். இம்மாதிரியில் இருந்து கிடைக்கப் பெறும் தகவல்களைக் கொண்டு முழுமைத்தொகுதியின் தெரியாத விவரங்களையும், அதன் பண்புகளையும் அனுமானித்துக் கூற இயலும்.



01_12th_Statistics_TM_Unit 1.indd 2 12-12-2021 19:19:06

இவ்வாறாக, அனுமானப் புள்ளியியல் என்பது மாதிரிகளைப் பயன்படுத்தி சில புள்ளியியல் முறைகளைக் கொண்டு முழுமைத்தொகுதியில், நிகழ்தகவின் அடிப்படையில் தக்க அனுமானங்களைப் பெறுவதற்கும், புள்ளியியல் முடிவுகள் எடுப்பதற்கும் உருவாக்கப்படும் முறைகளைப் பற்றிக் கூறுவதாகும்.

அனுமானப் புள்ளியியல் பற்றி விரிவாகப் படிப்பதற்கு முன் சில முக்கிய வரையறைகளையும், அதில் இடம் பெறும் சொற்களையும் நாம் அறிந்துகொள்ள வேண்டும்.

## 1.1 முழுமைத்தொகுதிப்பண்பளவை மற்றும் மாதிரிப்பண்பளவை (Parameter and Statistic)

ஓர் ஆய்வில், முழுமைத் தொகுதி என்பது அதிலுள்ள அனைத்து எண்கள் அல்லது அலகுகள் அல்லது உறுப்புகள் ஆகியவற்றின் தொகுப்பாகும். அதன் உறுப்புகள் $X$ என்ற வாய்ப்பு மாறியின் மதிப்புகளாகக் கருதபடுகிறது. அம்மதிப்புகளைக் கொண்டு $X$ என்ற மாறிக்கு நிகழ்தகவு பரவல் அமைக்கலாம். (பதினோறாம் வகுப்பு பாட நூலில் பிரிவு 2.4 இல் முழுமைத் தொகுதி பற்றியும், பிரிவு 9.3 இல் வாய்ப்பு மாறி $X$ இன் நிகழ்தகவு பரவல் பற்றியும் காணலாம்).

**தொகுதிப்பண்பளவை (Parameter):** பொதுவாக, முழுமைத்தொகுதிப்பண்பளவை அல்லது **தொகுதிப்பண்பளவை** (Parameter) என்பது முழுமைத்தொகுதியிலுள்ள அளவு அல்லது எண் சார்ந்த பண்பையும் அது சார்ந்த பரவலின் பண்பையும் வெளிப்படுத்தும்.

பெரும்பாலானவற்றில் புள்ளியியலின் எண் சார்ந்த பண்புகள், முழுமைத்தொகுதியின் எல்லா உறுப்புகளைக் கொண்டும் கணக்கிடப் பெற்று தொகுதிப் பண்பளவைகளாகக் கூறப்படும். எடுத்துக்காட்டாக, தொகுதிசராசரி ($\mu$), தொகுதிதிட்டவிலக்கம் ($\sigma$), தொகுதிவிகிதசமம் ($P$) போன்றவை சில பரவல்களுக்கு அமையும் தொகுதிப்பண்பளவைகளாகும். தொகுதிப்பண்பளவை மதிப்புகளைப் பொதுவாக **கிரேக்க** எழுத்துக்களால் குறிப்பது வழக்கம்.

**குறிப்பு:** $X$ என்ற வாய்ப்பு மாறியில் அமையும் நிகழ்தகவு–திண்மைச் சார்பிலும், நிகழ்தகவு–அடர்த்திச் சார்பிலும் இடம் பெறும் தெரியாத மாறிலி மதிப்புகளை அந்தந்தப் பரவல்கள் அல்லது முழுமைத் தொகுதிகளின் பண்பளவைகள் என்று அழைக்கப்படுவதும் உண்டு. அனுமானப் புள்ளியியலில் முழுமைத்தொகுதியின் சில அல்லது எல்லா தொகுதிப்பண்பளவைகளின் மதிப்புகள் தெரியாமல் இருப்பதாகக் கருதவேண்டும்.

**வாய்ப்பு மாதிரி (Random Sample):** ஒரே மாதிரியான சூழ்நிலையில், சார்பற்றனவாக $X$ என்ற வாய்ப்பு மாறியின் கணம் பெறும் மதிப்புகள் $(X_1, X_2, ..., X_n)$ ஆக இருப்பின் அக்கணம் **வாய்ப்பு மாதிரி** (Random Sample) என்று அழைக்கப்படுகிறது.

**மாதிரிப்பண்பளவை (Statistic):** ஒரு முழுமைத் தொகுதியில் $(X_1, X_2, ..., X_n)$ என்பவை வாய்ப்பு மாதிரி என்பதாக இருக்கட்டும். வாய்ப்பு மாதிரியில் உள்ள உறுப்புகளைக் கொண்டு கணக்கிடப்படும் எந்த புள்ளியியல் அளவையும் **மாதிரிப்பண்பளவை** (Statistic) அல்லது **கூறுபண்பளவை** என்று அழைக்கப்படும். மாதிரி சராசரி ($\bar{x}$), மாதிரி திட்டவிலக்கம் ($s$) , மாதிரி விகிதசமம் ($p$) போன்றவை மாதிரிப்பண்பளவைகள் என்று அழைக்கப்படும். மாதிரிப்பண்பளவைகள் **ரோமன்** எழுத்துக்களால் குறிக்கப்படும். (மாதிரிப்பண்பளவையை சிலர் புள்ளியியல் அளவை என்றும் கூறளவை என்றும் கூறுவர்)

$(X_1, X_2, ..., X_n)$ என்ற வாய்ப்பு மாறிகளிலிருந்து பெறும் மதிப்புகள் $(x_1, x_2, ..., x_n)$ என்போம். இந்த $(x_1, x_2, ..., x_n)$ என்ற எல்லா உறுப்புகளையும் சேர்த்து அமையும் தொகுப்பைப் **புள்ளியியலின் கூறுவெளி** (Sample space) என்போம். அது '$\mathbf{S}$' என்று குறிப்பிடப்படுகிறது.



01_12th_Statistics_TM_Unit 1.indd 3 12-12-2021 19:19:06

**குறிப்பு 1:**

$X$ என்ற வாய்ப்பு மாறியில் $x_1, x_2, \ldots, x_n$ எனும் $n$ மாதிரி உறுப்புகளைக் கொண்டு ஒரு கணம், தெரியாத தொகுதிப்பண்பளவைகளின் மதிப்புகளை அனுமானிப்பதற்காக உருவாக்கப்படுகிறது. இங்குள்ள எண் சார்ந்த மதிப்புகளும் ஒவ்வொரு மாதிரிக்கும் வேறுபடும் என்பதைக் கவனத்தில் கொள்ளவேண்டும். இவ்வாறு $X_1, X_2, \ldots, X_n$ என்ற வாய்ப்பு மாறிகளிலிருந்து பெறப்படும் மதிப்புகள் சார்பற்றதாகவும், $X$ என்ற மாதிரிப்பரவலின் தன்மைகளைக் கொண்டதாகவும் இருக்கும். இவை, சார்பற்ற, சமமான பரவல்களையுடைய வாய்ப்பு மாறிகள் என்று அழைக்கப்படுகின்றன.

> **குறிப்பு**
>
> மாதிரிப்பண்பளவை (Statistic) ஒரு வாய்ப்பு மாதிரியாகவும், அதற்கு ஒரு நிகழ்தகவு பரவலும் அமைக்கலாம் என்பதை அறிக.

**குறிப்பு 2:**

அனுமானப் புள்ளியியலில் மாதிரி திட்டவிலக்கம் $S=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}$ , என்றும், மாதிரி சராசரி $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$. என்றும் குறிப்பிடப்படுகிறது. மேலும் திட்டவிலக்கம் $S$ காணும் விதியில் $n$ ஆல் வகுப்பதற்கு பதிலாக $(n-1)$ ஆல் வகுத்திருப்பதைக் கவனிக்க.

**குறிப்பு 3:**

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ என்ற மாறிகளுக்கான எண் சார்ந்த மதிப்புகளை அறியாதவரையில் மாதிரிப் பண்பளவை என்பது ஒரு வாய்ப்பு மாறியாகவே கருதப்படும். மேலும் இது ஒரு நிகழ்தகவுப் பரவலையும் பெற்றிருக்கும்.

பல்வேறு தொகுதிப்பண்பளவைகளையும் அதற்கு இசைந்த மாதிரிப் பண்பளவைகளையும் குறிக்கும் குறியீடுகளையும் அட்டவணை 1.1 இல் காணலாம், இக்குறியீடுகள் அதே பொருளைத் தரும்படியாகத் தொடர்ந்து வரும் பாடங்களிலும் பயன்படுத்தப்படுகின்றன.

**அட்டவணை 1.1**

தொகுதி மற்றும் மாதிரியில் பயன்படுத்தப்படும் பண்பளவைகளின் குறியீடுகள்

| புள்ளியியல் அளவைகள் | தொகுதிப்பண்பளவை | மாதிரிப் பண்பளவை | கொடுக்கப்பட்ட மாதிரியின் மாதிரிப் பண்பளவை மதிப்பு |
|---|---|---|---|
| சராசரி | $\mu$ | $\bar{X}$ | $\bar{x}$ |
| திட்ட விலக்கம் | $\sigma$ | S | $s$ |
| விகித சமம் | $P$ | $p$ | $p_0$ |

## 1.2 மாதிரிப்பரவல்கள் (Sampling Distribution)

ஒரு மாதிரிப்பண்பளவையின் அல்லது கூறுபண்பளவையின் நிகழ்தகவுப் பரவல், மாதிரிப் பரவல் அல்லது **கூறு பரவல்** (Sampling Distribtution) என்று அழைக்கப்படுகிறது. அதாவது, ஒரே எண்ணிக்கையைக் கொண்ட சம வாய்ப்பு கூறுபரவலின் மதிப்புகளைக் கொண்டு நிகழ்தகவுப் பரவல் அமைக்கப்படுகிறது.

இக்கருத்தைப் பின்வரும் எடுத்துக்காட்டுகளில் இருந்து புரிந்துகொள்ளலாம்.



01_12th_Statistics_TM_Unit 1.indd 4 12-12-2021 19:19:06

**எடுத்துக்காட்டு 1.1**

ஒரு முழுமைத் தொகுதியில் 4, 8, 12, 16 எனும் நான்கு உறுப்புகள் உள்ளன. இவற்றை $X$ என்ற வாய்ப்பு மாறியில் இடம் பெறும் உறுப்புகளாகக் கருதுவோம். மாதிரி அளவு 2 ஆகவும் அதன் உறுப்புகள் திரும்ப வைத்து எடுக்கும் முறையில் அமைவதாகவும் கொள்வோம். அவ்வாறு அமைக்கும்போது $4^2$ மாதிரிகள் நமக்குக் கிடைக்கும்.

**விளக்கம்:**

$N$ அளவுள்ள ஒரு முடிவுறு முழுமைத் தொகுதியில்,

$n$ அளவு உள்ள மாதிரிகள் எடுக்கும் போது, உறுப்புகளைத்

(i) திரும்ப வைத்து எடுக்கும் முறையில் $N^n$ மாதிரிகளும்

(ii) திரும்ப வைக்காமல் எடுக்கும் முறையில் $Nc_n$ மாதிரிகளும் கிடைக்கும் என்பதை அறிக.

இவ்வாறு பெறும் $4^2$ மாதிரிகளில், ஒவ்வொரு மாதிரியிலும் $x_1, x_2$ எனும் இரண்டு மதிப்புகளும் சார்ந்திராத சமமான பரவல்களில் உள்ள $X_1$, $X_2$ என்ற வாய்ப்பு மாறிகளாக அமைந்திருப்பதாகக் கருதப்படுகிறது.

மேற்கூறிய முழுமைத்தொகுதியில் உள்ள உறுப்புகளிலிருந்து உருவாக்கப்படும் மாதிரிகள் பின்வரும் அட்டவணை 1.2 இல் தரப்பட்டுள்ளன.

அட்டவணை 1.2

உருவாகும் மாதிரிகளும் அவற்றின் சராசரிகளும்

| மாதிரியின் வரிசை எண் | மாதிரி உறுப்புகள் $(x_1, x_2)$ | மாதிரி சராசரி $\bar{x}$ |
|---|---|---|
| 1 | 4,4 | 4 |
| 2 | 4,8 | 6 |
| 3 | 4,12 | 8 |
| 4 | 4,16 | 10 |
| 5 | 8,4 | 6 |
| 6 | 8,8 | 8 |
| 7 | 8,12 | 10 |
| 8 | 8,16 | 12 |
| 9 | 12,4 | 8 |
| 10 | 12,8 | 10 |
| 11 | 12,12 | 12 |
| 12 | 12,16 | 14 |
| 13 | 16,4 | 10 |
| 14 | 16,8 | 12 |
| 15 | 16,12 | 14 |
| 16 | 16,16 | 16 |

அட்டவணையின் இரண்டாம் நிரலில் (column) உள்ள $(x_1, x_2)$ என்ற வரிசைச் சோடிகளாலான மாதிரி உறுப்புகள் அனைத்தும் முழுமைத்தொகுதியின் கூறுவெளியாக உள்ளன.


01_12th_Statistics_TM_Unit 1.indd 5 12-12-2021 19:19:06

இங்கு, கூறுவெளியானது:

$S = \{(4,4), (4,8), (4,12), (4,16), (8,4), (8,8), (8,12), (8,16), (12,4), (12,8), (12,12), (12,16), (16,4), (16,8), (16,12), (16,16)\}$

மாதிரி சராசரிகளைக் கொண்டு அமைக்கப் பெற்ற, $\overline{X}$ இன் மாதிரிப் பரவல்களின் நிகழ்தகவு அட்டவணை 1.3 இல் தரப்பட்டுள்ளது.

**அட்டவணை 1.3**

மாதிரி சராசரிகளின் மாதிரிப்பரவல்

| மாதிரி சராசரி: $\overline{x}$ | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | மொத்தம் |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| நிகழ்தகவு: $P(\overline{X}=\overline{x})$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{2}{16}$ | $\frac{3}{16}$ | $\frac{4}{16}$ | $\frac{3}{16}$ | $\frac{2}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | 1 |

**குறிப்பு 4:** ஒரு முடிவுறு முழுமைத்தொகுதியில் திரும்ப வைத்தெடுக்கும் முறையில் பெறப்படும் வாய்ப்பு மாதிரிகள் குறிப்பு 1 இல் கூறப்பட்டுள்ள நிபந்தனைகளை நிறைவேற்றுகின்றன.

**குறிப்பு 5:** உறுப்புகளைத் திரும்ப வைக்காமல் எடுக்கும் முறையில் மாதிரி எடுக்கப்படுமேயானால் அது பெறும் மதிப்புகளில் $X_1, X_2, \ldots X_n$ இன் சாரா மதிப்புப் பண்பு நிறைவேறாது. எனவே, இம்மாதிரி ஒரு வாய்ப்பு மாதிரி அன்று.

**குறிப்பு 6:** மாதிரி அளவு 30 அல்லது அதற்கும்மேல் இருந்தால் அம்மாதிரியைப் **பெரும்மாதிரி** அல்லது **பெருங்கூறு** (large sample) என்று கூறுவர். மேலும், மாதிரி 30 என்ற அளவிற்கும் கீழே இருந்தால் அதை **சிறுமாதிரி** அல்லது **சிறுகூறு** (small sample) என்று கூறுவர், நடைமுறையில் 30 என்ற எண்ணைப் பொறுத்து கண்டிப்பாக பெருங்கூறும், சிறுகூறும் பிரிக்கப்பட வேண்டும் என்பதில்லை. முழுமைத்தொகுதியையும் அதற்குள்ளே அமையும் மாதிரியையும் அவற்றின் தன்மைகளுக்கு ஏற்ப, பிரிக்கும் முறையைச் சற்றே மாற்றிக்கொள்வதும் உண்டு.

**குறிப்பு 7:** சில நிகழ்தகவுப்பரவல்கள், கூட்டல் பண்பினைப் பெற்றிருப்பதை அறியலாம். (அது பற்றிய விவரங்களைப் பதினோறாம் வகுப்பு பாட நூலில் காண்க). எடுத்துக்காட்டாக சார்ந்திராத சமமான பரவல்களையுடைய வாய்ப்பு மாறிகளான $X_1, X_2, \ldots X_n$ என்பவை $N(\mu, \sigma^2)$ என்பதாக அமையுமானால், $X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ மற்றும் $\overline{X}$ ஆகியவற்றின் நிகழ்தகவு பரவல்கள் முறையே $N(n\mu, n\sigma^2)$ மற்றும் $N(\mu, \sigma^2/n)$ ஆக அமையும். இவ்விரு பரவல்களும், அனுமானப் புள்ளியியல் கருத்தில், முறையே மாதிரி கூடுதலின் மாதிரிப் பரவல்களும், $N(\mu,\sigma^2)$ என்ற பரவலிருந்து பெறப்பட்ட, வாய்ப்பு மாதிரியில் உள்ள மாதிரி சராசரி ஆகும். $N(\mu,\sigma^2)$ என்ற குறியீடு, சராசரி $\mu$, மாறுபாட்டு அளவை $\sigma^2$ என்பதைக் குறிக்கும் இயல்நிலைப்பரவல் ஆகும்.

## 1.3 திட்டப் பிழை (Standard Error)

ஒரு மாதிரிப்பண்பளவையைக் கொண்டு மாதிரிப்பரவல் அமைத்து அதில் காணும் திட்டவிலக்கத்தை அம்மாதிரிப் பண்பளவையின் **திட்டப் பிழை** (Standard Error) என்கிறோம். அதை S.E. என்று குறிப்பிடுகிறோம்.

எடுத்துக்காட்டாக, மாதிரி சராசரி $\overline{X}$ இன் மாதிரிப் பரவல்களில் இருந்து பெறும் திட்ட விலக்கத்தை மாதிரிசராசரியின் திட்டப்பிழை என்று அழைக்கிறோம். அதை S.E $(\overline{X})$ என்று எழுதுகிறோம்.



01_12th_Statistics_TM_Unit 1.indd 6 12-12-2021 19:19:07

$X_1, X_2, ..., X_n$ என்ற சார்ந்திராத தன்மையுடைய வாய்ப்பு மாறிகள் அதே பரவலில் இருப்பதால்

$$V(\bar{X}) = V\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2 = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$SE(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

மேலும், $\bar{\bar{X}} = E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu = \frac{n\mu}{n} = \mu$ ஆகும்.

**எடுத்துக்காட்டு 1.2**

எடுத்துக்காட்டு 1 இல் தரப்பட்டுள்ள மாதிரிப் பரவலுக்கு, சராசரிக்கான திட்டப்பிழையைக் கணக்கிடுக.

**தீர்வு:**

இங்கு $\{4, 8, 12, 16\}$ என்பது முழுமைத் தொகுதி

முழுமைத் தொகுதியின் அளவு, $N = 4$, மாதிரியின் அளவு, $n = 2$

முழுமைத் தொகுதியின் சராசரி, $\mu = (4 + 8 + 12 + 16)/4 = 40/4 = 10$

முழுமைத் தொகுதியின் மாறுபாட்டு அளவை

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(X_i - \mu)^2$$

$$= \frac{1}{4}\left[(4-10)^2 + (8-10)^2 + (12-10)^2 + (16-10)^2\right] = \frac{1}{4}[36 + 4 + 4 + 36] = 20.$$

எனவே, திட்டப்பிழை $SE(\bar{X}) = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = \sqrt{\frac{20}{2}} = \sqrt{10}$

இதை, சராசரியின் மாதிரிப்பரவலிலிருந்தும் கணக்கிடலாம் (அட்டவணை 1.3 ஐப் பார்க்க)

$\bar{X}$ இன் மாறுபாட்டு அளவை $= V(\bar{X}) = \sum(\bar{x} - \mu)^2 P(\bar{X} = \bar{x})$

$$= (4-10)^2\frac{1}{16} + (6-10)^2\frac{2}{16} + (8-10)^2\frac{3}{16} + (10-10)^2\frac{4}{16}$$

$$+ (12-10)^2\frac{3}{16} + (14-10)^2\frac{2}{16} + (16-10)^2\frac{1}{16}$$

$$= \frac{1}{16}(36 + 32 + 12 + 0 + 12 + 32 + 36) = 10$$

மாதிரிப்பரவல் சராசரியின் திட்டவிலக்கம் $\bar{X} = \sqrt{10}$.

அட்டவணை 1.4 இல், அதிகம் பயன்படுத்தப்படும் மாதிரிப்பண்பளவைகளின் திட்டப்பிழைகள் சிலவற்றைக் காணலாம்.

**அட்டவணை 1.4**

மாதிரிப் பண்பளவைகளும் அவற்றின் திட்டப்பிழைகளும்

| மாதிரிப்பண்பளவை | திட்டப்பிழை |
|---|---|
| மாதிரி சராசரி $\bar{X}$ | $\sigma/\sqrt{n}$ $\sigma$ என்பது முழுமைத் தொகுதியின் திட்டவிலக்கம். $n$ என்பது மாதிரியின் அளவு |
| மாதிரி விகிதசமம்: $p$ | $\sqrt{\frac{PQ}{n}}$, $P$ என்பது முழுமைத் தொகுதியின் விகிதசமம், $Q = 1 - P$. |
| $\bar{X}, \bar{Y}$ எனும் இரு சார்பிலா சராசரி மாதிரிகளின் வித்தியாசம் $(\bar{X} - \bar{Y})$ | $\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}$ $m$, $n$ என்பவை மாதிரிகளின் அளவுகள். அவற்றின் முழுமைத் தொகுதிகளில் உள்ள மாறுபாட்டு அளவைகளின் மதிப்புகள் முறையே $\sigma_X^2, \sigma_Y^2$. |
| | $\sigma\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}$, $\sigma^2$ என்பது முழுமைத் தொகுதிகளின் பொதுவான மாறுபாட்டு அளவை. |
| $p_X, p_Y$ எனும் இரு சார்பிலா விகிதசம மாதிரிகளின் வித்தியாசம் $(p_X - p_Y)$ | $\sqrt{\frac{P_X Q_X}{m} + \frac{P_Y Q_Y}{n}}$, $m$, $n$ என்பவை மாதிரிகளின் அளவுகள். அவற்றின் முழுமைத் தொகுதிகளில் உள்ள விகிதசமங்கள் முறையே $P_X$, $P_Y$ ஆகும். மேலும் $Q_X = 1 - P_X$, $Q_Y = 1 - P_Y$. |
| | $\sqrt{\hat{p}\hat{q}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)}$, இங்கு $\hat{p} = \frac{mp_X + np_Y}{m+n}$, $\hat{q} = 1 - \hat{p}$, மேலும் $m$, $n$ என்பவை மாதிரிகளின் அளவுகள் |

## 1.4 இன்மை கருதுகோள் மற்றும் மாற்று கருதுகோள் (Null Hypothesis and Alternative Hypothesis)

பல்வேறு சமயங்களில், முன்பே கூறியபடி மாதிரிகளைக் கொண்டே, முழுமைத் தொகுதியின் பண்புகளைக் கணிக்க வேண்டியுள்ளது. எடுத்துக்காட்டாக மருத்துவ ஆய்வுகளில், ஒரு புதிய கருத்தின் அடிப்படையில் தற்போது ஒரு மருந்து உருவாக்கப்படுகிறது என்போம். அது அதற்கு முன்பே நடைமுறையில் இருந்த மருந்தைவிட குணமாக்கும் தன்மையில் சிறந்து விளங்குகிறது என்பதைப் புள்ளியியல் முறையில் சோதித்து அறிய வேண்டியிருக்கிறது. இதற்காக முழுமைத் தொகுதி முழுவதற்கும் பொருந்தும்படியாக சில கருத்துகளை நாம் உருவாக்குகிறோம். அக்கருத்துகளே, **கருதுகோள்கள்** (Hypotheses) என்று அழைக்கப்படுகின்றன.

ஒரு முழுமைத்தொகுதியைப் பற்றி உருவாக்கப்படும் கருத்து அல்லது முழுமைத்தொகுதியின் மதிப்புகளை நிகழ்தகவுப்பரவலுடன் தொடர்பு படுத்தி உருவாக்கும் கருத்து, **கருதுகோள்** (Hypothesis) எனப்படும்.



01_12th_Statistics_TM_Unit 1.indd 8 12-12-2021 19:19:13

சோதனைக்கு உட்படும் முழுமைத்தொகுதியில் உள்ள, முழுமைத்தொகுதியைப் பிரதிபலிக்கும் மாதிரியை எடுத்துக்கொண்டு, புள்ளியியல் கருத்துகள், கணக்கீடுகள் மூலம் கருதுகோள்களின் பொருத்தமாகும் தன்மையைச் சோதித்து அறிய வேண்டும்.

ஒரு புள்ளியியல் சோதனை என்பது வரையறுக்கப்பட்ட சில விதிகளைக் கொண்டு முறையாக பல படிகளைக் கொண்டு அமைக்கப்படுவது ஆகும். அச்சோதனை, மாதிரி மதிப்புகளைக் கொண்டு, இன்மைகருதுகோளை **மறுப்பது** அல்லது **ஏற்பது** என்ற முடிவை எடுப்பதற்கு வழிவகை செய்வதாகும்.

இவ்வழிமுறையே **புள்ளியியல் கருதுகோள் சோதனை** (Statistical hypothesis testing) என்று அழைக்கப்படுகிறது.

இந்த புள்ளியியல் கருதுகோள் சோதனை பல துறைகளில் முக்கிய பங்கு வகிக்கின்றது. குறிப்பாக தொழில் துறை, உயிரியல் துறை, நடத்தை அறிவியல், பொருளியல், புள்ளியியல் போன்ற துறைகளில் முக்கியத்துவம் வகிக்கின்றது. ஒவ்வொரு கருதுகோள் சோதனையிலும் இன்மை கருதுகோள், மாற்று கருதுகோள் எனும் இருவகை கருதுகோள்களை நாம் உருவாக்க வேண்டியிருக்கிறது. அவை பற்றி அடுத்துக் காண்போம்.

### இன்மை கருதுகோள் (Null Hypothesis)

ஒரு மாதிரியில், ஒரு கருதுகோளின்படி சோதனை செய்யப்பட்டு அக்கருதுகோள் மறுக்கப்படுவதற்கான வாய்ப்பு இருக்குமேயானால் அக்கருதுகோள் **இன்மைகருதுகோள்** (Null Hypothesis) என்று அழைக்கப்படுகிறது. அது $H_0$ என்று குறிக்கப்படுகிறது.

**குறிப்பு**

(i) பொதுவாக இன்மைகருதுகோள் என்பது, இரு பண்புகளை ஒப்பிடும் போது, அவ்விரண்டிற்கும் குறிப்பிடத்தக்க வித்தியாசம் இல்லை என்பதைக் குறிக்கும்.

(ii) ஒரே மாதிரியைக் கொண்ட கணக்குகளில், தொகுதிப் பண்பளவைக்கு, ஒரு மதிப்பை அளிக்கும் வகையில் அமையும்.

(iii) மாதிரி வடிவமைப்பை உருவாக்கும் சூழ்நிலையில் இது ஒரு பொருத்தமான வடிவமைப்புக்குப் பரிந்துரைக்கும்.

(iv) கைவர்க்க சோதனையைப் பொருத்த அளவில் (chi-square test) கொடுக்கப்படும் இரு பண்புகளும் ஒன்றை ஒன்று சாராததாகக் கருதப்படும்.

### மாற்று கருதுகோள் (Alternative Hypothesis)

முழுமைத்தொகுதியைப் பற்றிய ஒரு கருத்து, அங்குள்ள சூழ்நிலையைப் பொருத்து, இன்மை கருதுகோளை மறுக்குமானால், அக்கருதுகோள் **மாற்றுகருதுகோள்** (Alternative Hypothesis) என்று அழைக்கப்படுகிறது. அக்கருதுகோள் $H_1$ எனக் குறிக்கப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு முழுமைத் தொகுதியின் சராசரி $\mu_0$ என்ற மதிப்பைப் பெற்றிருந்தால் புள்ளியியல் சோதனையின் போது இன்மைகருதுகோள் $H_0: \mu = \mu_0$ என்று குறிப்பிடப்படுகிறது. அதற்குரிய மாற்றுகருதுகோளைப் பின்வருவனவற்றில் ஏதேனும் ஒன்று அமையுமாறு எழுதலாம்:

(i) $H_1: \mu \neq \mu_0$ (இருபக்க மாற்று கருதுகோள்)

(ii) $H_1: \mu > \mu_0$ (ஒருபக்க வலது மாற்று கருதுகோள்)

(iii) $H_1: \mu < \mu_0$ (ஒருபக்க இடது மாற்று கருதுகோள்)

## 1.5 புள்ளியியல் கருதுகோள் சோதனையில் ஏற்படும் பிழைகள் (Errors in Statistical Hypotheses Testing)

கருதுகோள் சோதனை செய்யும் போது பெறுகின்ற புள்ளியியல் முடிவு (statistical decision) என்பது, இன்மை கருதுகோள் $H_0$ ஐ **மறுப்பதோ** (Reject), **மறுக்காமல் இருப்பதோ** (Do not reject) ஆகும்.

புள்ளியியல் முடிவுகள் என்பவை, புள்ளியியல் கோட்பாடுகள் மூலம் சில விதிகளைக் கொண்டு **முடிவு காணும் விதிகள்** (Decision Rules) என்பவை உருவாக்கப்பெற்று இருக்கின்றன. ஒரு சோதனையில் இன்மைகருதுகோள் $H_0$ ஐ மறுக்கும் நிலையில் உள்ள விதி, **மறுக்கும் விதி** (Rejection Rule) என்று அழைக்கப்படுகிறது.

ஒரு குறிப்பிட்ட சூழ்நிலையில் இன்மைகருதுகோள் சரியாகவோ, தவறாகவோ அமையலாம். ஒவ்வொரு கருதுகோள் சோதனையிலும், முடிவெடுக்கும்போது நான்கு வகையான சூழ்நிலைகள் உருவாகுவதைக் காணலாம். அவை அட்டவணை 1.5 இல் தரப்பட்டுள்ளன.

**அட்டவணை 1.5**

முடிவுகள் பற்றிய அட்டவணை

| | $H_0$ என்பது சரி | $H_0$ என்பது தவறு |
|---|---|---|
| $H_0$ மறுக்கப்படுகிறது | முதல் வகைப் பிழை | சரியான முடிவு |
| $H_0$ மறுக்கப்படுவது இல்லை | சரியான முடிவு | இரண்டாம் வகைப் பிழை |

**குறிப்பு**

சிலர் $H_0$ ஐ மறுக்கப்படுவது இல்லை என்பதை **ஏற்பது** (Accept) என்றும் குறிப்பிடுவர்.

இன்மைகருதுகோளான $H_0$ என்பதை மறுக்கும்போதோ, $H_0$ என்பதை மறுக்காமல் இருக்கும்போதோ இறுதி முடிவு எடுக்கும் சமயங்களில் சில தவறுகள் ஏற்பட வாய்ப்புண்டு. அதில் $H_0$ என்பது சரியான கூற்றாக இருக்கும்பொழுது $H_0$ என்பதை மறுக்கும் பிழைக்கு **முதல்வகைப் பிழை** என்றும், $H_0$ என்பது தவறான கூற்றாக இருக்கும்பொழுது $H_0$ என்பதை மறுக்காமல் இருப்பது **இரண்டாம் வகைப் பிழை** என்றும் அழைக்கப்படும்.

**எடுத்துக்காட்டு 1.3**

மென்பானம் தயாரிக்கும் ஒரு நிறுவனம் ஒரு புதுவகையான மென்பானத்தை உருவாக்கியுள்ளது. ஒரு நகரத்தில், அப்புதிய மென்பானத்தின் தினசரி விற்பனை, சராசரியாக ₹40,000 உம், திட்டவிலக்கம் ₹2,500 ஆகவும் இருக்கிறது. அந்நிறுவனத்தின் விளம்பர மேலாளர், அம்மென்பானத்தைப்பற்றி அருகமை தொலைக்காட்சி நிறுவனங்களில் விளம்பரம் செய்கிறார். பல்வேறு நாட்களில் 10 முறை இவ்வாறு விளம்பரம் செய்கிறார். அதன் பிறகு தினசரி விற்பனை அதிகரிக்கப்பட்டுள்ளதா என்பதை அறிய விரும்புகிறார். இதற்குப் பொருத்தமான இன்மை கருதுகோளையும் மாற்று கருதுகோளையும் அமைக்க. இவற்றில் ஏற்படும் முதல்வகைப் பிழை மற்றும் இரண்டாம் வகைப் பிழை என்னவாக இருக்கும்?

**தீர்வு:**

விளம்பர மேலாளர், மென்பானத்தின் தினசரி விற்பனை ₹40,000 ஐ விட அதிகரித்து இருக்கிறது அல்லது இல்லை என்பதைச் சோதனை செய்ய விரும்புகிறார். இங்கு $\mu$ என்பது விளம்பரத்துக்குப் பிந்தைய சராசரி விற்பனை அளவு எனக் கொள்வோம்.

இன்மை கருதுகோளையும், மாற்று கருதுகோளையும் நாம் பெற்றிருக்கின்ற விவரங்களிலிருந்து பின்வருமாறு அமைப்போம்.



01_12th_Statistics_TM_Unit 1.indd 10 12-12-2021 19:19:13

இன்மை கருதுகோள் $H_0: \mu = 40000$

அதாவது விளப்பரத்திற்குப்பின், சராசரி விற்பனை ₹40,000 இல் குறிப்பிடத்தக்க வேறுபாடு எதுவும் இல்லை என்று கருதப்படுகிறது.

மாற்று கருதுகோள் $H_1: \mu > 40000$

அதாவது விளம்பரத்திற்கு பின் சராசரி விற்பனை அதிகரிப்பு குறிப்பிடத்தக்க அளவில் வேறுபட்டுள்ளது என்று கருதப்படுகிறது.

(i) இச்சோதனையில் முதல்வகைப்பிழை ஏற்பட்டால், விளம்பரத்தால் விற்பனை அதிகரித்துள்ளது என்று முடிவெடுக்க வேண்டும். ஆனால் உண்மையில் அவ்வாறு இல்லை.

(ii) இச்சோதனையில் இரண்டாம் வகைப் பிழை ஏற்பட்டால், விளம்பரத்தால் விற்பனை அதிகரிக்கவில்லை என்று முடிவெடுக்க வேண்டும். ஆனால் உண்மையில், விளம்பரத்தால் விற்பனை அதிகரித்துள்ளது.

மேலே கூறப்பட்டுள்ள தவறான முடிவுகளால் நிறுவனத்திற்கு ஏற்படும் இழப்புகள் பின்வருமாறு:

முதல்வகைப் பிழை ஏற்பட்டிருந்தால் அந்நிறுவனம் விளம்பரத்திற்காக அதிகம் செலவு செய்ய நேரிடும். அது அந்நிறுவனத்திற்கு அதிக பொருட்செலவை ஏற்படுத்தும்.

அதேசமயம் இரண்டாம் வகைப்பிழை ஏற்பட்டிருந்தால், அந்நிறுவனம் விளம்பரத்திற்காக செலவை மேற்கொள்ளாது. அதனால் அந்நிறுவனத்தின் விற்பனை, அதிகரிக்க வாய்ப்பு இல்லாமல் ஆகிவிடும்.

## 1.6 மிகைகாண் நிலை (Level of Significance), தீர்மானிக்கும் எல்லையின் மதிப்பு (Critical Value), தீர்மானிக்கும் பகுதி (Critical Region)

**மிகைகாண் நிலை** (Level of Significance): கருதுகோள் சோதனையில், முதல்வகைப்பிழையினை ஏற்கக்கூடிய அதிகபட்ச நிகழ்தகவு, அச்சோதனையின் **மிகைகாண் நிலை** அல்லது **மிகைகாண் மட்டம்** (Level of significance) என்று அழைக்கப்படுகிறது. இந்நிகழ்தகவு $\alpha$ என்று குறிக்கப்படுகிறது.

கருதுகோள் சோதனை செய்ய முற்படுவதற்கு முன்பாகவே மிகைகாண் நிலையைத் தீர்மானித்துக்கொள்ள வேண்டும்.

பொதுவாக ஒவ்வொரு கருதுகோள் சோதனையிலும், மிகைகாண் நிலையை 0.05 (அல்லது 5%) என்றோ, 0.01 (அல்லது 1%) என்றோ எடுத்துக்கொள்வதுண்டு.

மிகைகாண் நிலை 5% என்று எடுத்துக்கொண்டால், கருதுகோள் $H_0$ ஐ மறுப்பதில், 100 முடிவுகளுக்குள், 5 முடிவுகள் மட்டுமே பிழையாக இருக்க வாய்ப்புள்ளன. எடுக்கப்படும் 100 மாதிரிகளும் சார்பற்ற சமமான வாய்ப்புகளைப் பெற்றிருக்கும் மாதிரிகளாக இருக்க வேண்டும்.

அதாவது $H_0$ என்பது உண்மையாக இருக்கும்போது, 5% மாதிரிகளில் மட்டுமே, தவறாக மறுக்கப்படுவதற்கு வாய்ப்புள்ளது. எனவே $H_0$ ஐ மறுத்து, சரியான முடிவெடுப்பதில் 95% நம்பிக்கையுடன் இருக்கிறோம் என்றாகிறது.

**தீர்மானிக்கும் பகுதி அல்லது மறுக்கும் பகுதி** (Critical Region): ஒரு கருதுகோள் சோதனையின்போது, அதற்குரிய கூறுவெளியில், $H_0$ என்பதை மறுக்கும் உறுப்புகளால் ஆன உட்கணப் பகுதி **தீர்மானிக்கும் பகுதி** (Critical Region) என்று அழைக்கப்படுகிறது.

அதாவது, இன்மைகருதுகோளை **மறுக்கும் பகுதியே** (Rejection Region), தீர்மானிக்கும் பகுதி எனப்படுகிறது. சராசரிகளின் அளவைப் பொருத்து அதன் உறுப்புகள் அதற்குரிய பரிமானத்தைப் பெறுகின்றன. அது $n$ என்பதாக இருக்கட்டும், $n(n > 1)$

$$\text{தீர்மானிக்கும் பகுதி} = \left\{ \underset{\sim}{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \mid H_0 \text{ என்பது மறுக்கப்படுகிறது} \right\}.$$

அதே கூறுவெளியில், $H_0$ என்பதை மறுக்காமல் இருக்கும் உறுப்புகளால் ஆன உட்கணத்தை, **ஏற்கும் பகுதி** (Acceptance Region) என்றும் கூறுவர். இது மறுக்கம் பகுதியின் நிரப்புகணமாக விளங்குகிறது. அதை

$$\mathbf{S} = \{\text{மறுக்கும் பகுதி}\} \cup \{\text{ ஏற்கும் பகுதி }\} \text{ என்று எழுதலாம்.}$$

ஒரு கருதுகோள் சோதனையில், பயன்படுத்தப்படும் மாதிரிப்பண்பளவை சார்பு $t(\underset{\sim}{X})$, $c$ என்ற மாறிலியைப் பொருத்து $H_0$ இன் கருத்திற்கு ஒரு முடிவைத் தருகிறது. $t(\underset{\sim}{x}) > c$ எனும்போது, $H_0$ மறுக்கப்படுகிறது. இங்கு $t(\underset{\sim}{X})$ என்பது எண்ணளவையாகவும் அதன் பரிமாணம் ஒன்று ஆகவும் உள்ளது. அதன் மாதிரிப் பரவல் ஒரு மாறியைக் கொண்டதாக இருக்கும்.

## தீர்மானிக்கும் எல்லை மதிப்பு (Critical Value)

$t(\underset{\sim}{x}) > c$ என்ற நிபந்தனையை நிறைவேற்றும் $t(\underset{\sim}{X})$ இன் மதிப்புகள், கூறுவெளியிலுள்ள, $H_0$ ஐ மறுக்கும் மாதிரிகளைக் காண உதவும். $\{t \mid t(\underset{\sim}{x}) > c\}$ என்பது அதற்கு உகந்த மறுக்கும் பகுதியாகும். $c$ என்ற மதிப்பு மறுக்கும் பகுதியையும், ஏற்கும் பகுதியையும் பிரிக்கும் மதிப்பாகும். அம்மதிப்பு மறுக்கப்படும் எல்லை மதிப்பு (critical value) என்று அழைக்கப்படுகிறது.

அதாவது, இன்மை கருதுகோளை மறுக்கும் பகுதியையும், ஏற்கும் பகுதியையும் பிரிக்கும் எல்லைமதிப்பையே **தீர்மானிக்கும் எல்லை மதிப்பு** (Critical value) அல்லது **தீர்மானிக்கும் மதிப்பு** என்று கூறப்படுகிறது. ஒரு கருதுகோள் சோதனைக்கு, ஒன்றுக்கும் மேற்பட்ட மறுக்கப்படும் எல்லை மதிப்புகள் இருக்கலாம். மாதிரிப் பரவல்களில், $H_0$ ஐப் பொறுத்து, புள்ளியியல் சோதனைக்கு ஏற்ப, மறுக்கப்படும் எல்லை மதிப்புகளைக் காணலாம்.

**எடுத்துக்காட்டு 1.4**

ஒரு மின்பொருள் தயாரிக்கும் தொழிலகம், அதற்குப் பயன்படும் மூலப்பொருள்களாகத் திருகு ஆணிகளைத் தொகுப்பாகப் பெற்று வருகிறது. அத்தொழிலகத்தின் உற்பத்திப்பொறியாளர், மாதிரி அளவு 2 ஆக எடுத்துக்கொண்டு, அதில் ஒன்று அல்லது இரண்டு திருகுஆணிகள் குறையுடன் இருக்கும்போது, அம்மாதிரி உள்ள தொகுப்பை மறுப்பதற்கு முடிவு செய்கிறார்.

$$X_i : \begin{cases} 1, & i \text{ ஆவது திருகுஆணி குறையுடையது} \\ 0, & i \text{ ஆவது திருகுஆணி குறையுடையது அன்று,} \end{cases} \qquad i = 1, 2$$

எனில் $X_1$, $X_2$ இரண்டும் சார்பற்ற சமமான வாய்ப்புள்ள மாறிகளாகும். அவை பெர்னொலி பரவலில் அமைந்திருக்கின்றன.

**விளக்கம்:**

இங்கு, $H_0 : P = \frac{1}{3}$, $H_1 : P = \frac{2}{3}$ எனில்

கூறுவெளி $\mathbf{S} = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$ ஆகும்.



01_12th_Statistics_TM_Unit 1.indd 12 12-12-2021 19:19:15

$T(X_1, X_2)$ என்பது குறையுடைய திருகு ஆணிகளை ஒவ்வொரு மாதிரியிலும் இருப்பதாகக் கொள்வோம். மாதிரிப்பண்பளவை $T(X_1, X_2) = X_1 + X_2$, ஈருறுப்புப்பரவல் $B(2, P)$ இன்படி அமையும் வாய்ப்பு மாதிரியாகும். அதில் $T$ பெறும் மதிப்புகள் 0, 1, 2 ஆகும். $T(X_1, X_2)$ இன் மதிப்புகள் $H_0$ ஐ மறுக்கும்படியாக $\{1,2\}$ என்ற கணம் அமையும்.

ஆனால்,மறுக்கும்பகுதியின் உறுப்புகள், $T(X_1,X_2)=1$ அல்லது 2 ஆக வரையறுக்கப்படுகின்றன. எனவே 2 பரிமாணமுள்ள $\{(0,1), (1,0), (1,1)\}$ என்பதே மறுக்கும் பகுதியாகும்.

மாதிரிப் பரவல்களின், மாதிரிப்பண்பளவைச் சோதனை $Z$, ஓர் இயல்நிலைப்பரவலாக அமையுமானால், அதைச் சோதனைசெய்ய, கீழ்க்கண்ட அட்டவணையில் 5%, 1% அளவுகளை உடைய மிகைகாண் நிலைகளும் அவற்றிற்குரிய மறுக்கும்பகுதி, தீர்மானிக்கும் எல்லை மதிப்புகளும் தரப்பட்டுள்ளன.

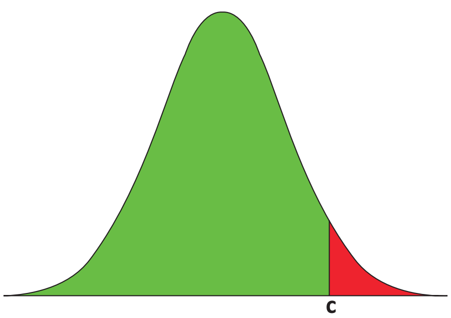
அட்டவணை 1.6

$Z$ மாதிரிப்பண்பளவை சோதனைக்குரிய தீர்மானிக்கும் எல்லை மதிப்புகள்

| மாற்று கருதுகோள் | மிகைகாண் நிலை ($\alpha$) | |
|---|---|---|
| | 0.05 அல்லது 5% | 0.01 அல்லது 1% |
| ஒருபக்க சோதனை (வலது) | $z_\alpha = z_{0.05} = 1.645$ | $z_\alpha = z_{0.01} = 2.33$ |
| ஒருபக்க சோதனை (இடது) | $-z_\alpha = -z_{0.05} = -1.645$ | $-z_\alpha = -z_{0.01} = -2.33$ |
| இருபக்க சோதனை | $z_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1.96$ | $z_{\alpha/2} = z_{0.005} = 2.58$ |

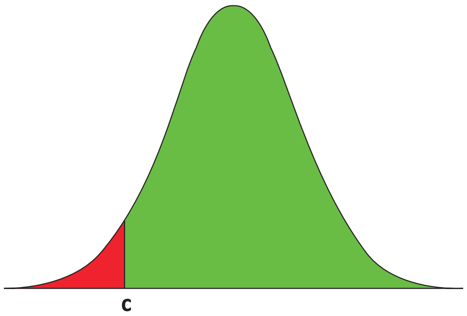
## 1.7 ஒருமுனை மற்றும் இருமுனை சோதனைகள் (One–Tailed and Two–Tailed Test)

சில கருதுகோள் சோதனைகளில், தீர்மானப் பகுதியில் (அல்லது மறுக்கும் பகுதியில்) உள்ள உறுப்புகள் $t(\underset{\sim}{X}) \geq c$ என்ற விதிப்படி கண்டறியப்படும். அப்போது $P(t(\underset{\sim}{X}) \geq c)$ என்ற பரப்பளவு வலதுபுறத்தில் (படம் 1.1) $t(\underset{\sim}{X})$ என்ற மாதிரிப் பரவலுக்கு உட்பட்டு அமைவதைக் காணலாம். இவ்வகையான புள்ளியியல் சோதனையை **வலதுமுனை சோதனை** (Right tailed test) என்கிறோம்.




படம் 1.1. வலதுமுனை சோதனை

அதே சமயம், மறுக்கும் விதி $t(\underset{\sim}{X}) \leq c$ இன்படி, உறுப்புகள் தீர்மானப் பகுதியில் (அல்லது மறுக்கும் பகுதியில்) அமையுமானால் $P(t(\underset{\sim}{X}) \leq c)$ என்ற பரப்பளவு இடது புறத்தில் (படம்.1.2) $t(\underset{\sim}{X})$ என்ற மாதிரிப் பரவலுக்கு உட்பட்டு அமைவதைக் காணலாம். இவ்வகையான புள்ளியியல் சோதனையை **இடதுமுனை சோதனை** (Left tailed test) என்று அழைக்கிறோம்.




படம் 1.2. இடதுமுனை சோதனை

மேற்கூறிய இரண்டும் **ஒருமுனை சோதனைகள்** (one-tailed tests) என்று அழைக்கப்படுகின்றன.

குறிப்பு: $t(\underset{\sim}{X})$ என்ற மாதிரிப்பரவல் எப்போதுமே சமச்சீர் வடிவத்தைப் பெற்றிருக்க வேண்டும் என்பதில்லை. சில சமயங்களில் மிகையாகவோ, குறைவாகவோ கோட்ட அளவையைப் (Skewed) பெற்றுஇருக்கலாம் என்பதைக் கவனத்தில் கொள்க.



01_12th_Statistics_TM_Unit 1.indd 13 12-12-2021 19:19:16

## எடுத்துக்காட்டு 1.5

ஒரு பிட்சா உணவகம், பிட்சாவைக் கொண்டுவந்து தருவதற்கான நேரம் 30 நிமிடங்கள் ஆகும் என்று கூறுகிறது. ஆனால் 30 நிமிடங்களை விட அதிக நேரம் எடுத்துக்கொள்ளும் எனக் கருதும்போது, இன்மை கருதுகோளும், மாற்று கருதுகோளும் பின்வருமாறு அமைக்கப்படுகிறது.

$H_0 : \mu = 30$ நிமிடங்கள், $H_1 : \mu > 30$ நிமிடங்கள்

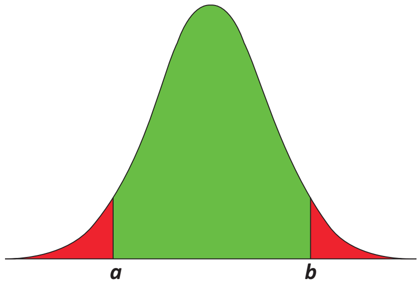
**விளக்கம்:**

நான்கு வெவ்வேறான சமயங்களில், அவ்வுணவகத்திலிருந்து பிட்சாவைக் கொண்டு சேர்க்கும் நேரங்களை $x_1, x_2, x_3, x_4$ என்போம். மாதிரிசராசரி 31 ஐ விட அதிகமாக இருக்கும் போது $H_0$ என்பது மறுக்கப்படுவதாக இருக்கட்டும்.

$$\text{அப்போது, மறுக்கப்படும் பகுதி} = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \,|\, \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} > 31\right\}$$

இதில், $P(\bar{X} > 31)$ என்ற பகுதியின் பரப்பு வலதுமுனைப் பகுதியில் அமையும். எனவே இச்சோதனையை வலது முனைச் சோதனை எனக் குறிப்பிடலாம்.

கருதுகோள் சோதனையில், $t(\underset{\sim}{X}) \leq a$ அல்லது $t(\underset{\sim}{X}) \geq b$ என்பது பொருந்தும்போது, $P(t(\underset{\sim}{X}) \leq a)$, $P(t(\underset{\sim}{X}) \geq b)$ ஆகியவற்றின் பரப்பளவுகள், மாதிரிப் பரவல்களின் வலது, இடது ஆகிய இருபுறங்களிலும் அமையும் (படம் 1.3). இவ்வாறு மறுக்கும் விதி அமையும் புள்ளியியல் சோதனை, **இருமுனை சோதனை** (Two tailed test) என்று அழைக்கப்படுகிறது.




படம் 1.3. இருமுனை சோதனை

## எடுத்துக்காட்டு 1.6

சில எந்திரங்களில் பயன்படுத்தப்படும் சிறிய அளவிலான பந்து–தாங்கிகளை (ball-bearings) உற்பத்தி செய்யும் ஒரு தொழிலகத்தைப் பார்வையிட்டு அங்கு உற்பத்தி செய்யப்படும் ஒவ்வொரு பந்து–தாங்கியின் விட்டமும் 5 மி.மி. அளவுடையதாக இருப்பதைப் பற்றிச் சோதனை செய்கிறார். ஒவ்வொரு பந்து–தாங்கியின் சராசரி விட்டம் 4.75 மீ.மீக்குக் குறைவாகவோ, 5.10 மீ.மீக்கு அதிகமாகவோ இருந்தால் எந்திரத்திற்குப் பழுது உண்டாகும் என்க.

**விளக்கம்:**

இங்கு, இன்மை கருதுகோள் $H_0 : \mu = 5$

மாற்று கருதுகோள் $H_1 : \mu \neq 5$.

10 மாதிரி பந்துதாங்கிகளை எடுத்துக்கொள்வோம். அவற்றை $X_i$, $i = 1, 2, \ldots, 10$ என்று குறிப்போம். அதையொட்டி $H_0$ என்பதை அமைப்போம். அவ்வாறெனில் அதன் மறுக்கும் பகுதி,

$$\text{மறுக்கும் பகுதி} = \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_{10}) \,|\, \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{10}}{10} < 4.75 \text{ or } > 5.10\right\}$$

இதில் $P(\bar{X} < 4.75)$ என்பதன் பரப்பளவு இடமுனைப்பகுதியிலும் $P(\bar{X} > 5.10)$ என்பதன் பரப்பளவு வலமுனைப் பகுதியிலும் மாதிரிப்பரவலில் அமைவதைக் காணலாம். எனவே இந்த எடுத்துக்காட்டில் கூறப்பட்டது இருமுனைச் சோதனை ஆகும்.



01_12th_Statistics_TM_Unit 1.indd 14 12-12-2021 19:19:17

## 1.8 கருதுகோள் சோதனை காண்பதற்கான பொதுவான வழிமுறைகள் (General Procedure for Test of Hypotheses)

பெருங்கூறுகள், சிறுகூறுகள் ஆகிய இரண்டிற்கும் பொருந்தும் படியாகவும் பொதுவானதாகவும் இருக்கும் கருதுகோள் சோதனைகளைக் காணும் வழிமுறைகள் கீழ்க்கண்டவாறு படிகளாகக் கூறப்பட்டுள்ளன.

படி 1 : முழுமைத் தொகுதியையும் அதன் தொகுதிப்பண்பளவை பற்றியும் விளக்கம் தருக. இன்மை கருதுகோள் $(H_0)$, மாற்று கருதுகோள் $(H_1)$ ஆகியவற்றை அமைக்க.

படி 2 : மாதிரி பற்றிக் கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களை எழுதுக.

படி 3 : மிகைகாண் நிலை $\alpha$ என்பதை நிர்ணயிக்க.

படி 4 : இன்மை கருதுகோள் $H_0$ ஐப் பொருத்து மாதிரிப்பண்பளவைச் சோதனையை (test statistic) குறிப்பிடுக.

படி 5 : மாதிரிப்பண்பளவைச்சோதனையின் மதிப்பைக் கணக்கிடுக.

படி 6 : தீர்மானிக்கும் எல்லை மதிப்புகளை, $\alpha$ என்பதைப் பொறுத்து அட்டவணையில் காண்க.

படி 7 : மறுக்கும் விதிப்படி, இன்மை எடுகோள் $H_0$ என்பதை மறுப்பது அல்லது மறுக்காமல் இருப்பது என்பதை, கணக்கிட்ட சோதனை மதிப்பையும், அட்டவணை மதிப்பையும் ஒப்பிட்டு முடிவுசெய்க.

**குறிப்பு:** மாதிரிப்பண்பவைச் சோதனை (Test Statistic) என்பதை கூறுபண்பளவை சோதனை என்றும், புள்ளியியியல் சோதனை என்றும் அழைப்பதுண்டு.

மேற்கண்ட வழிமுறைப்படிகளின்படி, பெருங்கூறுகளில், கருதுகோள் சோதனை செய்வதற்கான எடுத்துக்காட்டுகள் சிலவற்றை இனிக்காண்போம்.

## 1.9 முழுமைத்தொகுதி சராசரிக்கான கருதுகோள் சோதனை (முழுமைத்தொகுதி மாறுபாட்டு அளவை தெரிந்திருக்கும்போது)

**வழிமுறை:**

படி 1 : சராசரி $\mu$, மாறுபாட்டு அளவை $\sigma^2$ என்பவை சோதனைக்கு எடுத்துக் கொண்ட முழுமைத் தொகுதியில் அமைவதாக இருக்கட்டும். மேலும் முழுமைத்தொகுதியின் மாறுபாட்டு அளவை கொடுக்கப்பட்டுள்ளதாக கருதுவோம். $\mu$ இன் ஏற்கக் கூடிய மதிப்பு $\mu_0$ எனில் இன்மை கருதுகோளை $H_0: \mu = \mu_0$ என்று எழுத வேண்டும். பின் அதற்குரிய மாற்று கருதுகோளாகக் கீழ்க்கண்டவற்றுள் ஒன்றினைத் தெரிவு செய்ய வேண்டும்.

(i) $H_1: \mu \neq \mu_0$ (ii) $H_1: \mu > \mu_0$ (iii) $H_1: \mu < \mu_0$

படி 2 : முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ என்ற $n$ உறுப்புகளால் ஆன அளவு முப்பதுக்கும் மேற்பட்ட $(n \geq 30)$ ஒரு வாய்ப்பு மாதிரியை எடுத்துக்கொள்வோம். அம்மாதிரியிலிருந்து பெறப்படும் தரவுகளைக் குறிப்பிடுக.

படி 3 : இச்சோதனைக்கான மிகை காண் நிலை $\alpha$ என்பதை நிர்ணயிக்க.



01_12th_Statistics_TM_Unit 1.indd 15 12-12-2021 19:19:17

படி 4 : $H_0$ என்பதைப் பொருத்து மாதிரிப்பண்பளவைச் சோதனை (Test statistic) $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$ என்பதைக் கருதுவோம். இங்கு $\overline{X}$ என்பது மாதிரி சராசரியைக் குறிக்கும். இதன் சராசரி பரவல் இயல்நிலை பரவல் $N(0,1)$ என்பதற்கு மிக நெருங்கியதாக அமையும்.

படி 5 : மேற்கண்ட விதிப்படி கொடுக்கப்பட்ட மதிப்புகளுக்கு $z_0 = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$ என்பதைக் கணக்கிடுக.

படி 6 : மிகைகாண் நிலை $\alpha$, மாற்று கருதுகோள் $H_1$ என்பதற்கு ஏற்ப பின்வரும் அட்டவணையில் இருந்து தீர்மானிக்கும் மதிப்பு $z_e$ என்பதைத் தெரிவு செய்க

| மாற்று கருதுகோள் $(H_1)$ (Alternative Hypothesis) | $\mu \neq \mu_0$ | $\mu > \mu_0$ | $\mu < \mu_0$ |
|---|---|---|---|
| தீர்மானிக்கும் எல்லை மதிப்பு $(z_e)$ (Critical Value) | $z_{\alpha/2}$ | $z_\alpha$ | $-z_\alpha$ |

படி 7 : கீழ்க்கண்ட அட்டவணையிலிருந்து, $H_1$ என்பதற்குப் பொருத்தமான மறுக்கும் விதியைத் தெரிவு செய்து, இன்மை கருதுகோள் $H_0$ பற்றிய முடிவைத் தீர்மானிக்க.

| மாற்று கருதுகோள் $(H_1)$ (Alternative Hypothesis) | $\mu \neq \mu_0$ | $\mu > \mu_0$ | $\mu < \mu_0$ |
|---|---|---|---|
| மறுக்கும் விதி (Rejection Rule) | $\lvert z_0 \rvert \geq z_{\alpha/2}$ | $z_0 > z_\alpha$ | $z_0 < -z_\alpha$ |

**எடுத்துக்காட்டு 1.7**

ஒரு நிறுவனம் தயாரித்த அனைத்து LED விளக்குகளின் சராசரி ஆயுட்காலம் 2000 மணிகள். அதன் திட்ட விலக்கம் 150 மணிகள். தயாரிக்கப்பட்ட விளக்குகள் அனைத்தும் பல தொகுப்புகளாக உள்ளன. சம வாய்ப்பு முறையில் எடுக்கப்பட்ட 100 விளக்குகளைக் கொண்ட ஒரு மாதிரி தொகுப்பின் சராசரி ஆயுட்காலம் 1950 மணிகள். ஒவ்வொரு தொகுப்பில் உள்ள விளக்குகளின் சராசரி ஆயுட்காலம் 2000 மணிகள் என்ற கருத்திலிருந்து அவை குறிப்பிடத்தக்க வித்தியாசத்தைப் பெற்றிருக்கிறதா என்பதை 5% மிகை காண் நிலையில் சோதித்து அறிக.

**தீர்வு:**

படி 1 : முழுமைத்தொகுதியில், ஒளிரும் விளக்குகளின் சராசரி ஆயுட் காலம் $\mu = 2000$ மணிகள், திட்ட விலக்கம் $\sigma = 150$ மணிகள்.

**இன்மை கருதுகோள் (Null hypothesis)** $H_0$: $\mu = 2000$ மணிகள்

ஒளிரும் விளக்குகளின் சராசரி ஆயுட்காலம் 2000 மணிகள் என்பதிலிருந்து குறிப்பிடத்தக்க வேறுபாட்டைப் பெற்றிருக்கவில்லை.

**மாற்று கருதுகோள் (Alternative hypothesis)** $H_1$ : $\mu \neq 2000$ மணிகள்

ஒளிரும் விளக்குகளின் சராசரி ஆயுட்காலம் 2000 மணிகள் என்பதிலிருந்து குறிப்பிடத்தக்க வேறுபாட்டைப் பெற்றிருக்கிறது.

இதற்கு இருபக்க மாற்று கருதுகோளின்படி முடிவெடுக்க வேண்டியுள்ளது.


01_12th_Statistics_TM_Unit 1.indd 16 12-12-2021 19:19:18

படி 2 : மாதிரியில் தரப்பட்டுள்ள தரவுகள் (Data from sample)

மாதிரி அளவு $n = 100$, மாதிரி சராசரி $\bar{x} = 1950$ மணிகள்

படி 3 : மிகை காண் நிலை (Level of Significance)

$\alpha = 5\%$

படி 4 : மாதிரிப்பண்பளவை சோதனை (Test Statistic)

இன்மை கருதுகோள் $H_0$ என்பதைப் பொருத்து, $Z = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$.

படி 5 : மாதிரிப்பண்பளவை சோதனைக்கு ஏற்ப கணக்கிடுதல் (Calculation of test statistic)

$$z_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

$$= \frac{1950 - 2000}{150/\sqrt{100}}$$

$$= -3.33$$

$$|z_0| = 3.33$$

படி 6 : தீர்மானிக்கும் எல்லை மதிப்பு (Critical value)

$H_1$ என்பது இருபக்க மாற்று கருதுகோளாக (Two sided alternative hypothesis) இருப்பதால் $\alpha = 0.05$ என்ற நிலையில் அதன் தீர்மானிக்கும் மதிப்பு $z_e = z_{0.025} = 1.96$. (அட்டவணை 1.6 இல் காண்க).

படி 7 : முடிவு (Decision)

இருபக்க மாற்று கருதுகோள் $H_1$ என்பதற்கு ஏற்ப, அதன் மறுக்கும்விதி $|z_0| \geq z_e$ என்று ஆகிறது. இங்கு $(|z_0| = 3.33) > (z_e = 1.96)$.

அதனால், இன்மை கருதுகோள் $H_0$ மறுக்கப்படுகிறது. எனவே மாற்று எடுகோளின்படி

$H_1: \mu \neq 2000$ என்பதைக் கருத வேண்டியுள்ளது.

இதிலிருந்து ஒளிரும் விளக்குகளின் சராசரி ஆயுட்காலம் 2000 மணிகளிலிருந்து குறிப்பிடத்தக்க வேறுபாட்டைப் பெற்றிருக்கிறது என்று அறிகிறோம்.

**எடுத்துக்காட்டு 1.8**

ஒரு தயாரிப்பாளர் வழங்கியுள்ள கம்பிவடத்தின் சராசரி உடைபடும் திறன் 1900 $n/m^2$ அலகுகள் மற்றும் திட்டவிலக்கம் 120 $n/m^2$. அத்தயாரிப்பாளர், தமது புதிய தயாரிப்பில், ஒரு புதிய தொழில் நுட்பத்தைப் பயன்படுத்தித் தயாரிக்கப்பட்ட கம்பிவடத்தின் உடைபடும் திறன் அதிகரித்துள்ளதாகக் கூறுகிறார். அக்கூற்றைச் சோதனை செய்ய 60 கம்பிவடங்களைக் கொண்ட மாதிரி எடுத்துக்கொள்ளப்படுகிறது. அச்சோதனையில் சராசரி உடைபடும் திறன் 1960 $n/m^2$. எனக் கிடைக்கிறது. அவ்வாறெனில் 1% மிகைகாண் நிலையில் அத்தயாரிப்பாளரின் கூற்று ஏற்கப்படுமா?

**தீர்வு:**

படி 1 : முழுமைதொகுதியில், கம்பிவடத்தின் சராசரி உடைபடும் திறன் $\mu = 1900\ n/m^2$, திட்டவிலக்கம் $\sigma = 120\ n/m^2$.

இன்மை கருதுகோள் $H_0: \mu = 1900$

அதாவது கம்பிவடத்தின் சராசரி உடைபடும் திறன் $\mu = 1900n/m^2$. என்பதிலிருந்து குறிப்பிடத்தக்க வேறுபாட்டைப் பெற்றிருக்கவில்லை.

மாற்று கருதுகோள் $H_1: \mu > 1900$

அதாவது கம்பிவடத்தின் சராசரி உடைபடும் திறன் $1900n/m^2$ என்பதிலிருந்து குறிப்பிடத்தக்க வித்தியாசம் அதிகமாக உள்ளது.

இது ஒருபக்க வலது மாற்று கருதுகோள் என்பதை அறிக.

படி 2 : மாதிரியில் தரப்பட்டுள்ள தரவுகள்

மாதிரி அளவு $n = 60$.

மாதிரி சராசரி $\bar{x} = 1960$

படி 3 : மிகைகாண் நிலை

$\alpha = 1\%$

படி 4 : மாதிரிப்பண்பளவை சோதனை

இன்மை கருதுகோள் $H_0$ என்பதைப் பொருத்து $Z = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$ ஆகும்.

படி 5 : மாதிரிப்பண்பளவை சோதனைக்கு ஏற்ப கணக்கிடுல்

$$z_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

$$z_0 = \frac{1960 - 1900}{120 / \sqrt{60}}$$

$$z_0 = 3.87$$

படி 6 : தீர்மானிக்கும் எல்லை மதிப்பு

$H_1$ என்பது ஒரு பக்க (வலது) மாற்று கருதுகோளாக இருப்பதால் $\alpha = 0.01$ என்பதற்கு ஏற்ப $z_e = z_{0.01} = 2.33$ (அட்டவணை 1.6 இல் காண்க)

படி 7 : முடிவு

ஒருபக்க சோதனைக்கு ஏற்ப கருதுகோளை மறுக்கம் விதி $z_0 > z_e$ ஆகும்.

இங்கு $z_0 = 3.87 > z_e = 2.33$.

எனவே, இன்மை கருதுகோள் $H_0$ மறுக்கப்படுகிறது. அதனால் மாற்று எடுகோளின்படி $H_1: \mu > 1900\ n/m^2$ என்பதைக் கருத வேண்டியுள்ளது.

இதிலிருந்து தயாரிப்பாளிரின் கூற்றின்படி புதிய கம்பிவடத்தின் சராசரி உடைப்படும்திறன் $H_0 : \mu = 1900$ என்பதைவிட அதிகரித்துள்ளது எனக் கண்டறியப்பட்டுள்ளது.



01_12th_Statistics_TM_Unit 1.indd 18 12-12-2021 19:19:20

## 1.10 முழுமைத் தொகுதி சராசரிக்கான கருதுகோள் சோதனை (தொகுதி மாறுபாட்டு அளவை தெரியாதபோது)

**வழிமுறை:**

படி 1 : சராசரி $\mu$, மாறுபாட்டு அளவை $\sigma^2$ என்பவை சோதனைக்கு எடுத்துக் கொண்ட முழுமைத்தொகுதியில் அமைவதாக இருக்கட்டும். மேலும் மாறுபாட்டு அளவை கொடுக்கப்படவில்லை எனக் கருதுவோம்.

$\mu$ இன் ஏற்கக் கூடிய மதிப்பு $\mu_0$ எனில் இன்மை கருதுகோளை $H_0: \mu = \mu_0$ என்று எழுத வேண்டும். பின் அதற்குரிய மாற்றுஎடுகோளாக பின்வருவனவற்றுள் ஒன்றினைத் தெரிவு செய்ய வேண்டும்:

(i) $H_1: \mu \neq \mu_0$ (ii) $H_1: \mu > \mu_0$ (iii) $H_1: \mu < \mu_0$

படி 2 : முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ என்ற $n$ உறுப்புகளால் ஆன அளவு முப்பதுக்கும் மேற்பட்ட$(n \geq 30)$ ஒரு வாய்ப்பு மாதிரியை எடுத்துக் கொள்வோம். அம்மாதிரியிலிருந்து பெறப்படும் தரவுகளைக் குறிப்பிடுக.

படி 3 : இச்சோதனைக்கான மிகைகாண் நிலை $\alpha$ என்பதை நிர்ணயிக்க.

படி 4 : $H_0$ என்பதைப் பொருத்து மாதிரிப்பண்பளவைச் சோதனை $Z = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$ என்பதைக் கருதுக.

இங்கு $\bar{X}$ மற்றும் $S$ என்பது மாதிரி சராசரியை குறிக்கும். இதன் சராசரி பரவல் இயல்நிலை பரவல், $N(0,1)$ என்பதற்கு மிக நெருக்கமானதாக அமையும்.

**தெரிந்து கொள்ள வேண்டியவை**

ஒரு மாதிரியின் அளவு சிறிதாக $(n<30)$ இருக்கும்போது, $Z$ இன் மாதிரிப்பரவல் ஸ்டுடென்ட் $t$ பரவலாக (Student's $t$ distribution), $(n-1)$ கட்டின்மை படிகளுடன் (Degrees of freedom) அமைந்திருக்கும். இந்த $t$ பரவல் பற்றிய கருதுகோள் சோதனைகள் இரண்டாவது அத்தியாயத்தில் விரிவாக விளக்கப்பட்டுள்ளன. $n$ பெரிதாக இருக்கும்போது $t$ பரவல், இயல்நிலைப்பரவல் $N(0,1)$ என்பதை நோக்கி ஒருங்குகிறது (converge) என்பதை நாம் அறிந்து கொள்ள வேண்டும்.

படி 5 : மேற்கண்ட விதியின்படி கொடுக்கப்பட்ட மதிப்புகளுக்கு $z_0 = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$ என்பதைக் கணக்கிடுக.

படி 6 : மிகை காண் நிலை $\alpha$ மற்றும் மாற்று கருதுகோள் $H_1$ என்பதற்கு ஏற்ப பின்வரும் அட்டவணையில் இருந்து தீர்மானிக்கும் எல்லை மதிப்பு $z_e$ என்பதைத் தெரிவு செய்க

| மாற்று கருதுகோள் $(H_1)$ | $\mu \neq \mu_0$ | $\mu > \mu_0$ | $\mu < \mu_0$ |
|---|---|---|---|
| தீர்மானிக்கும் எல்லை மதிப்பு $(z_e)$ | $z_{\alpha/2}$ | $z_\alpha$ | $-z_\alpha$ |

படி 7 : கீழ்க்கண்ட அட்டவணையிலிருந்து, $H_1$ என்பதற்குப் பொருத்தமான மறுக்கும் விதியைத் தெரிவு செய்து, இன்மை கருதுகோள் $H_0$ பற்றிய முடிவைத் தீர்மானிக்க.

| மாற்று கருதுகோள் $(H_1)$ | $\mu \neq \mu_0$ | $\mu > \mu_0$ | $\mu < \mu_0$ |
|---|---|---|---|
| மறுக்கும் விதி | $\lvert z_0 \rvert \geq z_{\alpha/2}$ | $z_0 > z_\alpha$ | $z_0 < -z_\alpha$ |



01_12th_Statistics_TM_Unit 1.indd 19 12-12-2021 19:19:20

**எடுத்துக்காட்டு 1.9**

கார்கள் தயாரிக்கும் ஒரு நிறுவனம், ஒரு புதியவகை காரை அறிமுகம் செய்ய உள்ளது. அந்நிறுவனம் தற்போதைய பயன்பாட்டில் இருக்கும் காரைவிட அறிமுகப்படுத்தப் போகும் காரில் எரிபொருள் குறைவாகச் செலவாகும் என்றும் அதன் சராசரி எரிபொருள் திறன் லிட்டருக்கு 27 கி.மீ என்றும் கூறுகிறது. 100 புதிய கார்களைக் கொண்ட ஒரு மாதிரி எடுக்கப்பட்டு அதன் எரிபொருள் திறன் சோதிக்கப்படுகிறது. அம்மாதிரிச் சோதனையில் புதிய கார்களின் சராசரி எரிபொருள் திறன் லிட்டருக்கு 30 கி.மீ, திட்ட விலக்கம் லிட்டருக்கு 3 கி.மீ. ஆகவும் கிடைக்கப் பெறுகிறது. நிறுவனத்தின் கூற்றை ஏற்கலாமா என்பதை 5% மிகைகாண் நிலையில் சோதித்துக் கூறுக.

**தீர்வு:**

**படி 1 :** புதிய காரின் சராசரி எரிபொருள் பயன்பாடு 27 கி.மீ/லிட்டர். இங்கு முழுமைத்தொகுதியின் திட்ட விலக்கம் தரப்படவில்லை.

இன்மை கருதுகோள் $H_0: \mu = 27$

நிறுவனத்தின் புதிய காரின் எரிபொருள் பயன்பாட்டுக்கும், தற்போதைய பயன்பாட்டில் இருக்கும் காரின் எரிபொருள் பயன்பாட்டுக்கும் குறிப்பிடத்தக்க வித்தியாசம் ஏதுமில்லை எனக் கருதுவோம்.

மாற்று கருதுகோள் $H_1: \mu > 27$

நிறுவனத்தின் புதிய காரின் எரிபொருள் பயன்பாடு, தற்போதைய பயன்பாட்டில் இருக்கும் காரின் எரிபொருள் பயன்பாட்டைவிடக் குறைவாக இருக்கும். அதாவது புதியகார், தற்போதைய பயன்பாட்டில் இருக்கும் காரைவிட லிட்டருக்கு அதிக கிலோ மீட்டர் செல்லும் என்று அந்நிறுவனம் கூறுகிறது. இங்கு $H_1$ நிறுவனத்தின் கூற்றைக் கூறுகிறது. இது ஒரு பக்க (வலது) மாற்று கருதுகோளைக் குறிக்கின்றது.

**படி 2 :** மாதிரியில் தரப்பட்டுள்ள தரவுகள்

மாதிரி அளவு $(n) = 100$

மாதிரி சராசரி $(\bar{x}) = 30$

மாதிரி திட்ட விலக்கம் $s = 3$

**படி 3 :** மிகைகாண் நிலை

$\alpha = 5\%$

**படி 4 :** மாதிரிப்பண்பளவை சோதனை

$H_0$ என்பதைப் பொருத்த சராசரிப்பண்பளவை சோதனை

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim N(0,1).$$

**படி 5 :** மாதிரிப்பண்பளவை சோதனைப்படி கணக்கிடுதல்

$$z_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

$$z_0 = \frac{30 - 27}{3/\sqrt{100}}$$

$$z_0 = 10.$$



01_12th_Statistics_TM_Unit 1.indd 20 12-12-2021 19:19:21

படி 6 : தீர்மானிக்கும் எல்லை மதிப்பு

$H_1$ என்பது ஒரு பக்க (வலது) மாற்று கருதுகோளாக இருப்பதால், தீர்மானிக்கும் எல்லை மதிப்பு $\alpha = 0.05$ என்பதற்கு ஏற்ப $z_e = z_{0.05} = 1.645$

படி 7 : முடிவு

ஒருபக்க வலது மாற்று கருதுகோள் $(H_1)$ என்பதன் மறுக்கும்விதி $z_0 > z_e$ ஆக இருக்க வேண்டும்.

ஆனால் இங்கு, $z_0 = 10 > z_e = 1.645$ என்பதாகிறது. இங்கு மாதிரிப்பண்பளவைச் சோதனையில் கணக்கிட்ட மதிப்பு, அட்டவணை மதிப்பைவிட அதிகமாக உள்ளது. எனவே இன்மை கருதுகோள் $H_0$ மறுக்கப்படுகிறது. இதனால் மாற்று கருதுகோள் $H_1$ என்பதன் மூலம் அந்நிறுவனத்தின் கூற்று சரியானது என்றாகிறது.

## 1.11 இரு முழுமைத்தொகுதிகளில் உள்ள சராசரிகளின் சமனித்தன்மை காணும் கருதுகோள் சோதனை (முழுமைத் தொகுதிகளிலுள்ள மாறுபாட்டு அளவைகள் மதிப்பு தெரிந்து இருக்கும்போது)

**வழிமுறை:**

படி 1 : முழுமைத் தொகுதி 1 இல் உள்ள சராசரி $\mu_X$ என்றும், மாறுபாட்டு அளவை $\sigma_X^2$ என்றும், முழுமைத் தொகுதி 2 இல் உள்ள சராசரி $\mu_Y$ என்றும் அதன் மாறுபாட்டு அளவை $\sigma_Y^2$ என்றும் வைத்துக் கொள்வோம்.

இன்மை கருதுகோள் $H_0$: $\mu_X = \mu_Y$ என்றும், அதற்குரிய மாற்று கருதுகோளாகப் பின்வருவனவற்றுள் ஏதேனும் ஒன்றைத் தெரிவு செய்ய வேண்டும்

(i) $H_1$: $\mu_X \neq \mu_Y$ (ii) $H_1$: $\mu_X > \mu_Y$ (iii) $H_1$: $\mu_X < \mu_Y$

படி 2 : $X_1, X_2, \ldots, X_m$ எனும் $m$ உறுப்புகளைக்கொண்ட மாதிரி, முழுமைத் தொகுதி 1 இலும், $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ எனும் $n$ உறுப்புகளைக் கொண்ட மாதிரி, முழுமைத் தொகுதி 2 இலும் உள்ளன.

இரு மாதிரிகள் சார்பற்றதாகவும் அவற்றின் அளவுகள் $m \geq 30$, $n \geq 30$ என்பதாகவும் உள்ளன

படி 3 : மிகை காண் நிலை $\alpha$ என்பதை நிர்ணயிக்க.

படி 4 : இதற்குரிய மாதிரிப்பண்பளவைச் சோதனை $Z = \dfrac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_X^2}{m} + \dfrac{\sigma_Y^2}{n}}}$ என்பதைக் கருதுக. ஆயினும் சோதனைக் கணக்கீட்டின் போது, மேலே கூறியுள்ளவற்றிற்கு மிக நெருக்கமான மதிப்பைத் தரும் மாதிரிப்பண்பளவைச் சோதனையாக $Z = \dfrac{(\bar{X} - \bar{Y})}{\sqrt{\dfrac{\sigma_X^2}{m} + \dfrac{\sigma_Y^2}{n}}}$ என்பதைப் பயன்படுத்துகிறோம்.

அதேசமயம், $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \sigma^2$ எனும்போது மாதிரிப்பண்பளவை அளவு $Z = \dfrac{(\bar{X} - \bar{Y})}{\sigma\sqrt{\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n}}}$ என்பதாக அமையும்.

படி 5 : கொடுக்கப்பட்ட மதிப்புகளை, சராசரிப் பண்பளவைச் சோதனை விதி $z_o = \dfrac{(\bar{x}-\bar{y})}{\sqrt{\dfrac{\sigma_X^2}{m}+\dfrac{\sigma_Y^2}{n}}}$. என்பதில் பிரதியிட்டு மதிப்பைக் காண்க. இங்கு மாதிரிகளில் இருந்து, $\bar{x}, \bar{y}$ என்பவை முறையே $\bar{X}, \bar{Y}$ என்பவற்றிலிருந்து பெறப்படுகின்றன.

படி 6 : $\alpha$, $H_1$ என்பதைப் பொருத்து, தீர்மானிக்கும் எல்லை மதிப்பு $z_e$ என்பதைக் கீழ்க்கண்ட அட்டவணையிலிருந்து தெரிவு செய்க.

| மாற்று கருதுகோள் $(H_1)$ | $\mu_X \neq \mu_Y$ | $\mu_X > \mu_Y$ | $\mu_X < \mu_Y$ |
|---|---|---|---|
| தீர்மானிக்கும் எல்லை மதிப்பு $(z_e)$ | $z_{\alpha/2}$ | $z_\alpha$ | $-z_\alpha$ |

படி 7 : கீழ்க்கண்ட அட்டவணையிலிருந்து, $H_1$ என்பதற்குப் பொருத்தமான மறுக்கும் விதியைத் தெரிவு செய்து, இன்மை கருதுகோள் $H_0$ பற்றிய முடிவைத் தீர்மானிக்க.

| மாற்று கருதுகோள் $(H_1)$ | $\mu_X \neq \mu_Y$ | $\mu_X > \mu_Y$ | $\mu_X < \mu_Y$ |
|---|---|---|---|
| மறுக்கும் விதி | $\lvert z_0 \rvert \geq z_{\alpha/2}$ | $z_0 > z_\alpha$ | $z_0 < -z_\alpha$ |

**எடுத்துக்காட்டு 1.10**

தேசிய அளவிலான திறனறித் தேர்வில் பத்தாம் வகுப்பு பயிலும் மாணவர்களின் செயல் திறன் பற்றிய ஓர் ஆய்வு மேற்கொள்ளப்பட்டது. அதற்கு $D_1$, $D_2$ எனும் இரு மாவட்டங்களிலிருந்து சமவாய்ப்பு முறையில் மாணவர்களைத் தெரிவு செய்து அவர்களின் திறன் பற்றி பகுப்பாய்வு செய்யப்பட்டது. $D_1$, $D_2$ எனும் இரு மாவட்டங்களிலிருந்து சமவாய்ப்பு முறையில் தெரிவு செய்யப்பட்ட மாணவர்களின் எண்ணிக்கை முறையே, 500 மற்றும் 800 ஆகும். அதைப்போல அவர்களின் சராசரி மதிப்பெண்களின் அளவு முறையே 58 மற்றும் 57 ஆகும். பொதுவான திட்ட விலக்கம் 2 என்பதைக் கொண்ட முற்றொருமித்த முழுமைத் தொகுதிகளிலிருந்து மேற்கூறிய இரு மாதிரிகளும் பெறப்பட்டுள்ளனவா என்பதை 5% மிகை காண் நிலையில் சோதனை செய்க.

**தீர்வு:**

படி 1 : $\mu_X$ மற்றும் $\mu_Y$ என்பது தேசிய அளவிலான திறனறித்தேர்வில் தேர்ச்சி பெற்ற $D_1$, $D_2$ எனும் இரு மாவட்டங்களிலிருந்து பெறப்பட்ட மாணவர்களின் சராசரி மதிப்பெண்கள். இதில் இவ்விரு மாவட்டதிற்கான பொதுவான திட்டவிலக்கம் $\sigma = 2$.

இன்மை கருதுகோள் $H_0$: $\mu_X = \mu_Y$

இரண்டு மாவட்டங்களிலிருந்து பெறப்பட்ட மாணவர்களின் மதிப்பெண்களுக்கு இடையே குறிப்பிடத்தக்க வித்தியாசம் இல்லை எனக்கருதப்படுகிறது.

மாற்று கருதுகோள் $H_1$: $\mu_X \neq \mu_Y$

இரண்டு மாவட்டங்களிலிருந்து பெறப்பட்ட மாணவர்களின் மதிப்பெண்களுக்கு இடையே குறிப்பிடத்தக்க வித்தியாசம் உண்டு எனக் கருதப்படுகிறது. இது இருபக்க மாற்று கருதுகோள் ஆகும்.


01_12th_Statistics_TM_Unit 1.indd 22 12-12-2021 19:19:23

படி 2 : தரவுகள்

முதல் மாதிரியின் அளவு $m = 500$

இரண்டாம் மாதிரியின் அளவு $n = 800$.

முதல் மாதிரியின் சராசரி $\overline{x} = 58$

இரண்டாம் மாதிரியின் சராசரி $\overline{y} = 57$

படி 3 : மிகைகாண் நிலை

$\alpha = 5\%$

படி 4 : மாதிரிப்பண்பளவை சோதனை

$H_0$ என்பதைப் பொருத்து மாதிரிப்பண்பளவைச் சோதனை

$$Z = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sigma\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}} \sim N(0,1).$$

படி 5 : மாதிரிப்பண்பளவை சோதனைக்கு ஏற்ப கணக்கிடுதல்

$$z_0 = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{\sigma\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}}$$

$$z_0 = \frac{58 - 57}{2\sqrt{\frac{1}{500} + \frac{1}{800}}}$$

$$z_0 = 8.77$$

படி 6 : தீர்மானிக்கும் எல்லை மதிப்பு

$H_1$ என்பது இருபக்க மாற்றுகருதுகோள். எனவே அதன் மிகைகாண் மதிப்பு $\alpha = 0.05$, $z_e = z_{0.025} = 1.96$.

படி 7 : முடிவு

இருபக்க சோதனைக்கு ஏற்ப கருதுகோளை மறுக்கும் விதி $|z_0| \geq z_e$ என்று ஆகிறது. அதாவது $(|z_0| = 8.77) > (z_e = 1.96)$ என்பதாகிறது.

எனவே, இன்மை கருதுகோள் $H_0$ மறுக்கப்படுகிறது. அதனால் மாற்று கருதுகோள் $H_1$ என்பதன்படி இருமாவட்டங்களிலிருந்து பெறப்பட்ட மாதிரிகளின் சராசரிகளிலிருந்து தேசிய அளவிலான திறனறித் தேர்வில் மாணவர்களின் செயல்திறன்களில் குறிப்பிடத்தக்க வேறுபாடு உள்ளது என்று அறிகிறோம்.



01_12th_Statistics_TM_Unit 1.indd 23 12-12-2021 19:19:23

## 1.12 இரு முழுமைத் தொகுதிகளிலுள்ள சராசரிகளின் சமனித்தன்மை பற்றி அறியும் கருதுகோள் சோதனை (முழுமைத் தொகுதிகளிலுள்ள மாறுபாட்டு அளவைகள் தெரியாமல் இருக்கும்போது)

**வழிமுறை:**

**படி 1 :** முழுமைத் தொகுதி 1 இல் உள்ள சராசரி $\mu_X$ என்றும், திட்டவிலக்கம் $\sigma_X^2$ என்றும், முழுமைத் தொகுதி 2 இல் உள்ள சராசரி $\mu_Y$ என்றும், அதன் திட்டவிலக்கம் என்றும் $\sigma_Y^2$ வைத்துக் கொள்வோம்.

இங்கு $\sigma_X^2$, $\sigma_Y^2$ என்பவை தெரியாதவை எனக்கொள்வோம்.

அதற்கிசைந்த மாற்று கருதுகோளாகப் பின்வருவனவற்றுள் ஏதேனும் ஒன்றைத் தெரிவு செய்க:

(i) $H_1: \mu_X \neq \mu_Y$ (ii) $H_1: \mu_X > \mu_Y$ (iii) $H_1: \mu_X < \mu_Y$

**படி 2 :** மாதிரியின் தரவுகள்

$X_1, X_2, \ldots, X_m$ எனும் $m$ உறுப்புகளைக் கொண்ட மாதிரி, முழுமைத் தொகுதி 1 இலும், $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ எனும் $n$ உறுப்புகளைக் கொண்ட மாதிரி, முழுமைத் தொகுதி 2 இலும் உள்ளன.

இரு மாதிரிகள் சார்பற்றதாகவும் அவற்றின் அளவுகள் $m \geq 30$, $n \geq 30$ என்பதாகவும் உள்ளன.

**படி 3 :** மிகைகாண் நிலை $\alpha$ என்பதை நிர்ணயிக்க.

**படி 4 :** இன்மை கருதுகோள் $H_0$ ஐப் பொருத்து, பொருத்தமான மாதிரிப்பண்பளவைச் சோதனை

$$Z = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{S_X^2}{m} + \frac{S_Y^2}{n}}}$$ ஆக அமையும்.

மேற்கண்ட மாதிரிப்பண்பளவைச் சோதனை, பிரிவு 1.11 இல், $\sigma_X^2$, $\sigma_Y^2$ என்பதற்குப் பதிலாக $S_X^2$, $S_Y^2$ என்பதைப் பிரதியிடக் கிடைப்பதை அறியலாம். சோதனைக் கணக்கீட்டின்போது மேலே குறிப்பிட்டதற்கு மிக நெருங்கிய மதிப்பைத் தரும் மாதிரிப்பண்பளவைச் சோதனையாக $Z = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{S_X^2}{m} + \frac{S_Y^2}{n}}} \sim N(0,1)$ என்பதைப் பயன்படுத்துகிறோம்.

**படி 5 :** கொடுக்கப்பட்ட மதிப்புகளை, மாதிரிப்பண்பளவைச் சோதனை $z_0 = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{s_X^2}{m} + \frac{s_Y^2}{n}}}$ இல் பிரதியிட்டு மதிப்பைக்காண்க. ($\bar{x}, \bar{y}$ என்பவை மாதிரிகளின் $\bar{X}, \bar{Y}$ என்பவற்றிலும், $s_X^2$, $s_Y^2$ என்பவை மாதிரிகளின் $S_X^2$, $S_Y^2$ என்பவற்றிலும் முறையே பெறப்படுகின்றன)



01_12th_Statistics_TM_Unit 1.indd 24 12-12-2021 19:19:24

படி 6 : $\alpha$, $H_1$ என்பதைப்பொருத்து, தீர்மானிக்கும் எல்லை மதிப்பு $z_e$ என்பதைக் கீழ்க்கண்ட அட்டவணையிலிருந்து தெரிவு செய்க.

| மாற்று கருதுகோள் $(H_1)$ | $\mu_X \neq \mu_Y$ | $\mu_X > \mu_Y$ | $\mu_X < \mu_Y$ |
|---|---|---|---|
| தீர்மானிக்கும் எல்லை மதிப்பு $(z_e)$ | $z_{\alpha/2}$ | $z_\alpha$ | $-z_\alpha$ |

படி 7 : கீழ்க்கண்ட அட்டவணையிலிருந்து, $H_1$ என்பதற்குப் பொருத்தமான மறுக்கும் விதியைத் தெரிவு செய்து, இன்மைகருதுகோள் $H_0$ பற்றிய முடிவைத் தீர்மானிக்க.

| மாற்று கருதுகோள் $(H_1)$ | $\mu_X \neq \mu_Y$ | $\mu_X > \mu_Y$ | $\mu_X < \mu_Y$ |
|---|---|---|---|
| மறுக்கும் விதி | $\|z_0\| \geq z_{\alpha/2}$ | $z_0 > z_\alpha$ | $z_0 < -z_\alpha$ |

**எடுத்துக்காட்டு 1.11**

12ஆம் வகுப்பு பயிலும் மாணவர்களுக்கு, புள்ளியியல் பாடத்தில் ஒரு மாதிரித் தேர்வு நடத்தப்பட்டது. ஒரு மாவட்டத்தின் மாவட்ட கல்வி அலுவலர், அத்தேர்வைக் கொண்டு ஆண், பெண் ஆகிய இருபாலரின் செயல்திறன்களில் உள்ள வேறுபாட்டைக் காண விழைகிறார். அதற்காக எடுக்கப்பட்ட மாதிரிகளிலிருந்த பெறப்பட்ட தரவுகள் பின்வருமாறு:

| பாலினம் | மாதிரி அளவு | மாதிரி சராசரி | மாதிரி திட்ட விலக்கம் |
|---|---|---|---|
| மாணவர் | 100 | 50 | 4 |
| மாணவியர் | 150 | 51 | 5 |

இருபாலரின் செயல்திறன்களில் குறிப்பிடத்தக்க வேறுபாடு, அவரது பாலினைப் பொறுத்து உள்ளதா என்பதை 5% மிகை காண் நிலையில் சோதனை செய்க.

**தீர்வு:**

படி 1 : $\mu_X$ என்பது மாணவரின் சராசரி மதிப்பாகும். $\mu_Y$ என்பது மாணவியரின் சராசரி மதிப்பாகும்.

இன்மை கருதுகோள் $H_0 : \mu_X = \mu_Y$

பாலினத்தைப் பொறுத்து அவர்களது செயல்திறன்களுக்கிடையே குறிப்பிடத்தக்க வேறுபாடு இல்லை எனக் கருதுவோம்.

மாற்று கருதுகோள் $H_1 : \mu_X \neq \mu_Y$

பாலினத்தைப் பொறுத்து அவர்களது செயல்திறன்களுக்கு இடையே குறிப்பிடத்தக்க வேறுபாடு உண்டு எனக் கொள்வோம். இது இருபக்க மாற்று கருதுகோளில் அமைகிறது.

படி 2 : மாதிரியில் தரப்பட்டுள்ள தரவுகள்

| பாலினம் | மாதிரி அளவு | மாதிரி சராசரி | மாதிரி திட்டவிலக்கம் |
|---|---|---|---|
| மாணவர் | $m = 100$ | $\bar{x} = 50$ | $s_X = 4$ |
| மாணவியர் | $n = 150$ | $\bar{y} = 51$ | $s_Y = 5$ |

படி 3 : மிகை காண் நிலை

$\alpha = 5\%$

படி 4 : மாதிரிப்பண்பளவை சோதனை

இன்மை கருதுகோள் $H_0$ ஐப் பொருத்து, பொருத்தமான மாதிரிப்பண்பளவைச் சோதனை

$$Z = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\frac{S_X^2}{m} + \frac{S_Y^2}{n}}} \sim N(0,1) \text{ ஆகும்.}$$

படி 5 : மாதிரிப்பண்பளவைச் சோதனைக்கு ஏற்ப கணக்கிடுதல்

$$z_0 = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{\frac{s_X^2}{m} + \frac{s_Y^2}{n}}}$$

$$z_0 = \frac{50 - 51}{\sqrt{\frac{4^2}{100} + \frac{5^2}{150}}}$$

$$z_0 = -1.75$$

படி 6 : தீர்மானிக்கும் எல்லை மதிப்பு

$H_1$ என்பது இருபக்க மாற்றுகருதுகோளாக இருப்பதால் $5\%$ மிகைகாண் நிலைக்கு, தீர்மானிக்கும் எல்லை மதிப்பு $z_e = z_{0.025} = 1.96$.

படி 7 : முடிவு

இந்த இருமுனைச் சோதனையில் மறுக்கும் பகுதி, மறுக்கும் விதி படி $|z_0| \geq |z_0$ ஆகும். ஆனால், இங்கு $(|z_0| = 1.75) < (z_e = 1.96)$ என்றாகிறது. எனவே இன்மை கருதுகோள் $H_0$ ஐ மறுப்பதற்குப் போதுமான ஆதாரம் இல்லை. இதிலிருந்து இருபாலரின் செயல்திறன்களில் குறிப்பிடத்தக்க வேறுபாடு உள்ளது என்பதை இச்சோதனையின் மூலம் அறிகிறோம்.

## 1.13 முழுமைத்தொகுதிக்கான விகிதசமம் காணும் கருதுகோள் சோதனை (Test of Hypothesis for Population Proportion)

**வழிமுறை:**

படி 1 : ஒரு சோதனையில், முழுமைத் தொகுதியின் பண்பைப் பெற்றிருக்கும் அளவையின் விகிதசமம் $P$ என்க.

$P$ என்பதற்குப் பொருத்தமானதாக $p_0$ என்ற மதிப்பு அமையுமானால், அதன் இன்மை கருதுகோள், மாற்று கருதுகோள் ஆகியவற்றைப் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

இன்மை கருதுகோள் $H_0 : P = p_0$



01_12th_Statistics_TM_Unit 1.indd 26 12-12-2021 19:19:25

மாற்று கருதுகோள்

(i) $H_1: P \neq p_0$ (ii) $H_1: P > p_0$ (iii) $H_1: P < p_0$

படி 2 : மாதிரி தரவுகளை எழுதுக. $p$ என்பது மாதிரி உறுப்புகளின் தன்மையை விளக்கும் விகித சமம் என்க. மாதிரியின் அளவுகள் $np > 5$, $n(1 - p) > 5$ என்பதோடு $n$ இன் அளவுகள் மிக அதிகமாக இருக்க வேண்டும்.

படி 3 : மிகை காண்நிலை $\alpha$ என்பதை நிர்ணயிக்க.

படி 4 : இன்மை கருதுகோள் $H_0$ ஐப் பொருத்து, மாதிரிப்பண்பளவைச் சோதனை $Z = \dfrac{p - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0 q_0}{n}}} \sim N(0,1)$ ஆகும்.

படி 5 : மாதிரிப்பண்பளவை சோதனை $z_0 = \dfrac{p - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0 q_0}{n}}}$ என்பதற்கு ஏற்ப கணக்கிட்டு, மதிப்பைக்காண்க.

படி 6 : மிகைகாண் நிலை $\alpha$, மாற்று கருதுகோள் $H_1$ ஐப் பொருத்து தீர்மானிக்கும் எல்லை மதிப்பை பின்வரும் அட்டவணையிலிருந்து தெரிவு செய்க.

| மாற்று கருதுகோள் $(H_1)$ | $P \neq p_0$ | $P > p_0$ | $P < p_0$ |
|---|---|---|---|
| தீர்மானிக்கும் எல்லை மதிப்பு $(z_e)$ | $z_{\alpha/2}$ | $z_\alpha$ | $-z_\alpha$ |

படி 7 : கீழ்க்கண்ட அட்டவணையிலிருந்து, $H_1$ என்பதற்குப் பொருத்தமான மறுக்கும் விதியைத் தெரிவு செய்து, இன்மை கருதுகோள் $H_0$ பற்றிய முடிவைக் காண்க.

| மாற்று கருதுகோள் $(H_1)$ | $P \neq p_0$ | $P > p_0$ | $P < p_0$ |
|---|---|---|---|
| மறுக்கும் விதி | $\lvert z_0 \rvert \geq z_{\alpha/2}$ | $z_0 > z_\alpha$ | $z_0 < -z_\alpha$ |

**எடுத்துக்காட்டு 1.12**

ஒரு மாநகரில் உள்ள மக்களின், மிகவிருப்ப பானமாக தேநீர், காபி இவையிரண்டில் எது அதிகம் விருப்பமானது என்பற்கான ஒரு கள ஆய்வு மேற்கொள்ளப்பட்டு, தரவுகள் பெறப்பட்டுள்ளன. சமவாய்ப்புமுறையில் எடுக்கப்பட்ட 1000 பேர் கொண்ட ஒரு மாதிரியில் 560 பேர் தேநீர் பருகுவோராகவும், மற்றையோர் காபி அருந்துவோராகவும் உள்ளனர். நாம் பெற்ற இவ்விவரங்களிலிருந்து, அம்மாநகரில் உள்ளோரின் விருப்பபானங்களாக தேநீர், காபி இரண்டும் சம அளவில் உள்ளது என்னும் கருத்தை 1% மிகைகாண் நிலையில் முடிவெடுக்கலாமா?

**தீர்வு:**

படி 1 : மாநகரிலுள்ள மக்களின் விருப்பபானமாக தேநீர் விளங்குவதற்கான விகித சமம் $P$ என்போம்.

இன்மை கருதுகோள் $H_0 : P = 0.5$

தேநீர், காபி ஆகிய பானங்களின் விருப்பப்பயன்பாடு சமமாக இருக்கிறது என்றும் அவற்றிற்கிடையே குறிப்பிடத்தக்க வேறுபாடு ஏதுமில்லை எனக் கருதுவோம்.

மாற்று கருதுகோள் $H_1 : P \neq 0.5$

தேநீர், காபி ஆகிய இரண்டிற்குமிடையே, விருப்பபானமாக இருப்பதில் குறிப்பிடத்தக்க வேறுபாடு உள்ளது என்போம்.



01_12th_Statistics_TM_Unit 1.indd 27 12-12-2021 19:19:25

படி 2 : மாதிரியில் உள்ள தரவுகள்

மாதிரியின் அளவு $n = 1000$.

தேநீர் பருகுவோர் எண்ணிக்கை $= 560$

மாதிரி விகித சமம் $p = \dfrac{560}{1000} = 0.56$

படி 3 : மிகைகாண் நிலை அளவு

$\alpha = 1\%$

படி 4 : மாதிரிப்பண்பளவை சோதனை

மாதிரிப்பரவலில், இன்மை கருதுகோள் $H_0$ இன் படி மாதிரிப்பண்பளவைச் சோதனை

$$Z = \frac{p-P}{\sqrt{\dfrac{PQ}{n}}} \sim N(0,1)$$

படி 5 : மாதிரிப்பண்பளவைச் சோதனைக்கு ஏற்ப கணக்கிடுதல்

$$z_0 = \frac{p-p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0 q_0}{n}}}$$

$$z_0 = \frac{0.56-0.50}{\sqrt{\dfrac{0.5\times0.5}{1000}}}$$

$$z_0 = 3.79$$

படி 6 : தீர்மானிக்கும் எல்லை மதிப்பு

$H_1$ இருபக்க மாற்று கருதுகோளாக உள்ளதால், $1\%$ மிகைகாண் நிலையில், அதன் தீர்மானிக்கும் எல்லை மதிப்பு $z_e = z_{\alpha/2} = z_{0.005} = 2.58$.

படி 7 : முடிவு

இங்கு $(|z_0| = 3.79) > (z_e = 2.58)$ என்பதால், இன்மை கருதுகோள் $H_0$ மறுக்கப்படுகிறது. இன்மை கருதுகோள் மறுக்கப்பட்டதால், மாற்று கருதுகோளின் படி, விருப்பானமாக இருப்பதில் தேநீர், காபி ஆகிய இருபானங்களுக்குமிடையே குறிப்பிடத்தக்க வேறுபாடு உள்ளது என்று இச்சோதனையினால் அறிகிறோம்.

## 1.14 இரு முழுமைத் தொகுதிகளிலுள்ள விகித சமங்களின் சமனித்தன்மை பற்றி அறியும் கருதுகோள் சோதனை.
(Test of Hypothesis for Equality of Proportions of Two Populations)

**வழிமுறை:**

படி 1 : விகித சமம் $P_X$ என்பது முதல் முழுமைத் தொகுதியிலும், $P_Y$ என்பது இரண்டாம் முழுமைத் தொகுதியிலும், அத்தொகுதிகளின் பண்பைப் பிரதிபலிக்கும் வகையில் இருப்பதாகக் கொள்வோம். அவற்றிற்குத் தொடர்புடைய கருதுகோள்கள்:

இன்மை கருதுகோள்: $H_0$: $P_X = P_Y$



01_12th_Statistics_TM_Unit 1.indd 28 12-12-2021 19:19:26

மாற்று கருதுகோள் கீழ்க்கண்டவற்றுள் ஏதேனும் ஒன்றினை மாற்று கருதுகோளாகத் தெரிவு செய்க.

(i) $H_1: P_X \neq P_Y$ (ii) $H_1: P_X > P_Y$ (iii) $H_1: P_X < P_Y$

படி 2 : மாதிரி பற்றிய தரவுகள்

$m$ அளவு கொண்ட மாதிரியின் விகித சமம் $p_x$ என்பது முதல் முழுமைத் தொகுதியிலும், $n$ அளவு கொண்ட மாதிரியின் விகித சமம் $p_y$ என்பது இரண்டாம் முழுமைத் தொகுதியிலும் எடுக்கப்படுகிறது எனக்கொள்வோம். மேலும் $m, n$ இரண்டின் அளவுகளும் 30க்கும் மேற்பட்டவையாக இருக்க வேண்டும். அத்துடன் $mp_X > 5$, $m(1-p_X) > 5$, $np_Y > 5$, $n(1-p_Y) > 5$ என்பதோடு இரு மாதிரிகளும் சார்பற்றதாக இருக்க வேண்டும்.

படி 3 : மிகை காண் நிலை $\alpha$ என்பதை நிர்ணயிக்க.

படி 4 : இன்மை கருதுகோள் $H_0$ இன்படி, மாதிரிப்பண்பளவை சோதனை $Z = \dfrac{(p_X - p_Y) - (P_X - P_Y)}{\sqrt{\hat{p}\hat{q}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)}}$ என்பதாகவும், அதில் $\hat{p} = \dfrac{mp_X + np_Y}{m+n}$, $\hat{q} = 1 - \hat{p}$, என்பதாகவும் அமையும். ஆயினும், சோதனைக் கணக்கீட்டின்போது, மேலே கூறியுள்ளவற்றிற்கு மிக நெருக்கமான மதிப்பைத்தரும் சராசரிப் பண்பளவைச் சோதணையாக $z_0 = \dfrac{p_X - p_Y}{\sqrt{\hat{p}\hat{q}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)}} \sim N(0,1)$ என்பதைப் பயன்படுத்துகிறோம்.

படி 5 : மாதிரிப்பண்பளவை சோதனை என்பதற்கு ஏற்ப கணக்கிட்டு $z_0 = \dfrac{p_X - p_Y}{\sqrt{\hat{p}\hat{q}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)}}$ மதிப்பைக் காண்க.

படி 6 : மிகை காண் நிலை $\alpha$, மாற்று கருதுகோள் $H_1$ ஐப் பொருத்து தீர்மானிக்கும் எல்லை மதிப்பைப் பின்வரும் அட்டவணையிலிருந்து தெரிவு செய்க.

| மாற்று கருதுகோள் $(H_1)$ | $P_X \neq P_Y$ | $P_X > P_Y$ | $P_X < P_Y$ |
|---|---|---|---|
| தீர்மானிக்கும் எல்லை மதிப்பு $(z_e)$ | $z_{\alpha/2}$ | $z_\alpha$ | $-z_\alpha$ |

படி 7 : கீழ்க்கண்ட அட்டவணையிலிருந்து, $H_1$ என்பதற்குப் பொருத்தமான மறுக்கும் விதியைத் தெரிவு செய்து, இன்மை கருதுகோள் $H_0$ பற்றிய முடிவைக் காண்க.

| மாற்று கருதுகோள் $(H_1)$ | $P_X \neq P_Y$ | $P_X > P_Y$ | $P_X < P_Y$ |
|---|---|---|---|
| மறுக்கும் விதி | $\lvert z_0 \rvert \geq z_{\alpha/2}$ | $z_0 > z_\alpha$ | $z_0 < -z_\alpha$ |



01_12th_Statistics_TM_Unit 1.indd 29 12-12-2021 19:19:27

**எடுத்துக்காட்டு 1.13**

சுயதொழில் செய்வதில் உள்ள ஆர்வம்பற்றிய ஓர் ஆய்வு, இரு மாநகர்களில் வாழும் மக்களிடையே நடத்தப்பட்டது. முதல் மாநகரில் சமவாய்ப்பு முறையில் 500 பேர் தெரிவு செய்யப்பட்டு அவர்களில் 400 பேர் சுயதொழில் செய்வதாகக் கண்டறியப்பட்டுள்ளது. அதே போன்று இரண்டாவது மாநகரில், 800 பேரில், 600 பேர் சுய தொழில் செய்வதாகக் கண்டறியப்பட்டுள்ளது. இவ்விரு மாநகரிலுள்ள மக்களிடையே, சுயதொழில் செய்வதிலுள்ள ஆர்வம், குறிப்பிடத்தக்க வேறுபாட்டைப் பெற்றிருக்கிறதா என்பதை 5% மிகைகாண் நிலையில் ஆய்வு செய்க.

**தீர்வு:**

படி 1 : $P_X$ என்பது முதல் முழுமைத்தொகுதியாக உள்ள முதல் மாநகரிலிருந்து பெறப்படும் விகித சமமாகவும், $P_X$ என்பது இரண்டாம் முழுமைத் தொகுதியாக உள்ள இரண்டாவது மாநகரிலிருந்து பெறப்படும் விகித சமமாகவும் இருக்கட்டும்.

அவ்வாறாயின் அதற்குரிய கருதுகோள்கள்

இன்மை கருதுகோள் $H_0 : P_X = P_Y$

அதாவது, இரு மாநகர்களிலுள்ள மக்களிடையே, சுயதொழில் செய்வதிலுள்ள ஆர்வத்தில், அவர்கள் பெற்றுள்ள விகித சமங்களில் குறிப்பிடத்தக்க வேறுபாடு ஏதுமில்லை எனக் கருதுவோம்.

மாற்று கருதுகோள் $H_1 : P_X \neq P_Y$

அதாவது, அந்நகர்களில் சுயதொழில் செய்வதில் ஆர்வமுள்ளோர் பற்றிய விகித சமங்களில் குறிப்பிடத்தக்க வேறுபாடு உள்ளது என்போம்.

படி 2 : மாதிரியில் தரப்பட்டுள்ள தரவுகள்:

மாதிரியிலிருந்து பெறப்பட்ட தரவுகள் கீழ்க்கண்ட அட்டவணையில் தரப்பட்டுள்ளன.

| மாநகரம் | மாதிரி அளவு | மாதிரி விகிதசமம் |
|---|---|---|
| முதல் மாநகர் | $m = 500$ | $p_X = \frac{400}{500} = 0.80$ |
| இரண்டாம் மாநகர் | $n = 800$ | $p_Y = \frac{600}{800} = 0.75$ |

படி 3 : மிகைகாண் நிலை $\alpha = 5\%$ என்க.

படி 4 : மாதிரிப்பண்பளவை சோதனை

இன்மை கருதுகோள் $H_0$ இன் படி, மாதிரிப்பண்பளவை சோதனை

$$Z = \frac{p_X - p_Y}{\sqrt{\hat{p}\hat{q}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)}}$$ இங்கு $\hat{p} = \frac{mp_X + np_Y}{m+n}$ , $\hat{q} = 1 - \hat{p}$ ஆகும்.

படி 5 : மாதிரிப்பண்பளவை சோதனையைக் கணக்கிடுதல்

$$z_0 = \frac{p_X - p_Y}{\sqrt{\hat{p}\hat{q}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)}}.$$



01_12th_Statistics_TM_Unit 1.indd 30 12-12-2021 19:19:29

$$\hat{p} = \frac{400+600}{500+800} = \frac{1000}{1300} = 0.77 \text{ and } \hat{q} = 0.23$$

$$z_0 = \frac{0.80-0.75}{\sqrt{(0.77)(0.23)\left(\frac{1}{500}+\frac{1}{800}\right)}}$$

$z_0 = 2.0764$

படி 6 : **தீர்மானிக்கும் எல்லை மதிப்பு**

$H_1$ என்பது இருபக்க மாற்று கருதுகோளாக இருப்பதால், 5% மிகை காண் நிலை மதிப்பின்படி, $z_e = 1.96$.

படி 7 : **முடிவு**

இங்கு ( $z_e$ = 2.0764) > ( $z_e$ = 1.96) என்பதால் $H_0$ மறுக்கப்படுகிறது. இதிலிருந்து சுயதொழில்பற்றிய இருநகரங்களுக்கிடையேயுள்ள விகித சமன்களில் குறிப்பிடத்தக்க வேறுபாடு உள்ளதாகக் கருதப்படுகிறது.

## நினைவில் கொள்க

- மாதிரிப்பண்பளவை (statistic) அல்லது கூறுபண்பளவை என்பது ஒரு வாய்ப்பு மாதிரியாகும். அதன் நிகழ்தகவுப் பரவல் மாதிரிப் பரவல் (sampling distribution) என்று அழைக்கப் படுகிறது.
- அனுமானப்புள்ளியியலில் (Inferential Statistics), பொதுவாக வாய்ப்பு மாதிரி உறுப்புகள், திரும்பவைத்து எடுக்கும் முறையில் எடுக்கப்படுகின்றன.
- மாதிரிப்பரவலின் திட்டவிலக்கம், திட்டப்பிழை (Standard Error) என்று அழைக்கப்படுகிறது.
- கருதுகோள் (Hypothesis) என்பது, முழுமைத் தொகுதியைப்பற்றிய கூற்றாகவோ, அதன் தொகுதிப்பண்பளவையில் உள்ளவற்றின் மதிப்பாகவோ அமைக்கப்படுகிறது.
- குறிப்பிடத்தக்க வேறுபாடு இல்லை எனும் கூற்றை, அதாவது $H_0$ என்பதை மறுக்கும் வாயிலாக அமைக்கப்படும் கருதுகோளே இன்மைகருதுகோள் (Null hypothesis) எனப்படுகிறது.
- ஒரு புள்ளியியல் சோதனையின் முடிவு, இன்மை கருதுகோளைப் பொருத்தே அமைகிறது.
- ஒவ்வொரு புள்ளியியல் கருதுகோள் சோதனையிலும், ஒரு இன்மை கருதுகோளும், அதற்குரிய மாற்று கருதுகோளும் அமைக்கப்படுகிறது.
- புள்ளியியல் சோதனையில் முதல்வகைப் பிழை என்பது, சரி எனப்படும் இன்மை கருதுகோளை மறுப்பதாகும்.
- புள்ளியியல் சோதனையில்இரண்டாம் வகைப்பிழை என்பது, தவறு எனப்படும் இன்மை கருதுகோளை மறுக்காமல் இருப்பதாகும்.
- $P$ (முதல்வகைப்பிழை) என்பதன் மேல் எல்லை, மிகைகாண் நிலை (level of significance) மதிப்பு ஆக அமையும்.
- மறுக்கும் விதியால் (Rejection rule) வரையறுக்கப்படும் கூறுவெளியின் உட்கணமாக, தீர்மானிக்கும் பகுதி (Critical region) அமையும்.
- தீர்மானிக்கும் பகுதிக்குள் உள்ள உறுப்புகளைத் தீர்மானிக்கும் எல்லை மதிப்பைப் (Critical value) பொருத்து அறியலாம்.

- ஒரு மாதிரியின் அளவு 30 அல்லது அதற்கும் மேற்பட்ட அளவைக் கொண்டிருந்தால் அது பெரும்மாதிரி அல்லது பெருங்கூறு (Large sample) என்று அழைக்கப்படும்.
- இருமாதிரிகளைக் கொண்ட சோதனையில் இருமாதிரிகளின் அளவுகளும் 30 அல்லது அதற்கும் மேற்பட்ட அளவைக் கொண்டிருந்தால் மட்டுமே, பெருங்கூறுகள் என்று அழைக்கப்படும்.
- முழுமைத் தொகுதிக்கான விகிதசம சோதனயில், மாதிரிப் பரவலில் $n \geq 30$, $np > 5$, $n(1-p) > 5$ என்பதை நிறைவு செய்தால் மட்டுமே மாதிரிப் பண்பளவை சோதனை $N(0, 1)$ ஆக அமையும்.
- இரு முழுமைத் தொகுதிகளிலுள்ள விகித சமங்களின் சமனித் தன்மைபற்றி அறியும் சோதனையில், மாதிரிப் பரவலில், $m \geq 30$, $n \geq 30$, $mp_X > 5$, $m(1-p_X) > 5$, $np_Y > 5$, $n(1-p_Y) > 5$ என்பவற்றை நிறைவு செய்தால் மட்டுமே, மாதிரிப் பண்பளவை சோதனை $N(0, 1)$ ஆக அமையும்.

## பயிற்சிகள் 1

### I. மிகச்சரியான விடையைத் தெரிவு செய்க:

1. மாதிரி சராசரிக்கான திட்டப்பிழை

   (அ) $\sigma^2$ (ஆ) $\frac{\sigma}{n}$

   (இ) $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ (ஈ) $\frac{\sqrt{n}}{\sigma}$

2. மாதிரி அளவு $n$ பெரிதாகவும், $\sigma^2$ தெரியாமலும் இருந்தால், மாதிரிப்பண்பளவைச் சோதனையில், $\sigma^2$ என்பதற்குப் பதிலாக இடம்பெறுவது

   (அ) மாதிரிச் சராசரி (ஆ) மாதிரி மாறுபாட்டளவை

   (இ) மாதிரி திட்டவிலக்கம் (ஈ) மாதிரி விகிதசமம்

3. ஒரு சோதனையில் தீர்மானிக்கும் பகுதி என்பது

   (அ) இன்மை கருதுகோளை மறுக்கும் பகுதி (ஆ) இன்மை கருதுகோளை ஏற்கும் பகுதி

   (இ) கூறுவெளி (ஈ) கூறுவெளியின் உட்கணம்

4. ஒரு பெருங்கூறுக்கான சோதனையில், $\alpha$ எனும் மிகைகாண் நிலைக்கு, இருமுனைச் சோதனைக்கான தீர்மானிக்கும் மதிப்பு (அட்டவணை மதிப்பு) ஆகக் குறிப்பிடப்படுவது

   (அ) $z_{\alpha/2}$ (ஆ) $z_\alpha$

   (இ) $-z_\alpha$ (ஈ) $-z_{\alpha/2}$

5. பொதுவாக, பெரும்மாதிரிக் கோட்பாடுகள் பயன்படுத்தப்படுவது எப்போது எனில்

   (அ) $n \geq 100$ (ஆ) $n \geq 50$

   (இ) $n \geq 40$ (ஈ) $n \geq 30$

6. $H_1$ என்பது ஒருமுனை (வலது) மாற்றுஎடுகோளாக இருக்கும்போது, தீர்மானிக்கும் பகுதியை நிர்ணயிக்கும் சோதனை

   (அ) வல, இட இருமுனை சோதனை (ஆ) இருமுனை சோதனை அல்ல

   (இ) வலமுனை சோதனை (ஈ) இடமுனை சோதனை



01_12th_Statistics_TM_Unit 1.indd 32 12-12-2021 19:19:30

7. பெருங்கூறில், 5% மிகைகாண் நிலையில் இருமுனை சோதனையின் தீர்மானிக்கும் மதிப்பு

(அ) 1.645 (ஆ) 2.33

(இ) 2.58 (ஈ) 1.96

8. $H_0: \mu = \mu_0$ என்பதற்கு ஏற்ப $H_1 : \mu < \mu_0$, எனும் ஒருசோதனையில், மிகைகாண்மதிப்பு $\alpha = 0.01$ ஆக இருக்கும்போது, அதன் தீர்மானிக்கும் மதிப்பு

(அ) 1.645 (ஆ) –1.645

(இ) –2.33 (ஈ) 2.33

9. ஒரு கருதுகோள் சோதனையில், $H_0: \mu_0 = 45$, $H_1: \mu_0 < 45$ என்பதற்கு ஏற்ப நடத்தப்படும் சோதனை

(அ) இடதுமுனை சோதனை (ஆ) வலதுமுனை சோதனை

(இ) இருமுனை சோதனை (ஈ) ஒருமுனை சோதனை

10. மாற்று எடுகோள் $H_1: \mu \neq \mu_0$, எனும்போது, தீர்மானிக்கும் பகுதியை நிர்ணயிப்பது.

(அ) இட, வல இருமுனை சோதனை (ஆ) இருமுனை சோதனை அல்ல

(இ) வலமுனை சோதனை (ஈ) இடமுனை சோதனை

11. சரியான கூற்றாக இருக்கும்போது, $H_0$ என்பதை மறுக்கும் பிழை,

(அ) முதல்வகைப் பிழை (ஆ) இரண்டாம்வகைப் பிழை

(இ) மாதிரியெடுத்தலில் பிழை (ஈ) திட்டப்பிழை

12. இன்மை கருதுகோள் $H_0$ என்பதைப் பொருத்து மாதிரி விகிதசமத்தின் திட்டப்பிழை,

(அ) $\sqrt{\dfrac{PQ}{n}}$ (ஆ) $\sqrt{\dfrac{pq}{n}}$

(இ) $\dfrac{PQ}{n}$ (ஈ) $\dfrac{pq}{n}$

13. முழுமைத் தொகுதி மாறுபாட்டு அளவைகள் தெரியாத போது, இரு முழுமைத் தொகுகளிலுள்ள சராசரிகளின் சமனித்தன்மை பற்றி அறியும் மாதிரிப்பண்பளவைச் சோதனை

(அ) $\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}}{\dfrac{\sigma_X^2}{m}+\dfrac{\sigma_Y^2}{n}}$ (ஆ) $\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}}{\dfrac{s_X^2}{m}+\dfrac{s_Y^2}{n}}$

(இ) $\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_X^2}{m}+\dfrac{\sigma_Y^2}{n}}}$ (ஈ) $\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{\dfrac{s_X^2}{m}+\dfrac{s_Y^2}{n}}}$

14. முழுமைத் தொகுதிகளின் மாறுபாட்டு அளவைகள் சமமாகவும், கொடுக்கப்பட்டு இருந்தால், மாதிரிப்பண்பளவைச் சோதனை $Z = \dfrac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sigma\sqrt{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}}}$ என்பதில் அமைக்கப்பட்டிருக்கும் இன்மை கருதுகோள்

(அ) $H_0 : \mu = \mu_0$ (ஆ) $H_0 : \mu_X = \mu_Y$

(இ) $H_0 : P_X = P_Y$ (ஈ) $H_0 : P = p_0$

15. இரு மாதிரி சமவிகிதங்களின் வித்தியாசம் $(P_X - P_Y)$ காண்பதற்கான திட்டப்பிழை

(அ) $\sqrt{\hat{p}\hat{q}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)}$  (ஆ) $\sqrt{\hat{p}\hat{q}}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)$

(இ) $\hat{p}\hat{q}\sqrt{\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)}$  (ஈ) $\hat{p}\hat{q}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)$

16. மிகைகாண் நிலை என்பது

(அ) $P$ (முதல் வகைப்பிழை)  (ஆ) $P$ (இரண்டாம் வகைப் பிழை)

(இ) $P$ (முதல்வகைப்பிழை) இன், மேல்–எல்லை மதிப்பு

(ஈ) $P$ (இரண்டாம் வகைப் பிழை) இன், மேல்–எல்லை மதிப்பு

17. முழுமைத்தொகுதியின் விகிதசமம் காணும் பெருங்கூறு சோதனை செய்வதற்குப் பொருத்தமான நிபந்தனை

(அ) $n$ பெரிது, n $\geq 30$, $np > 5$, $n(1-p) > 5$  (ஆ) $n$ பெரிது, $n \geq 30$, $np > 5$, $n(1-p) < 5$

(இ) $n$ பெரிது, n $\geq 30$, $np > 5$, $np\ (1-p) > 5$  (ஈ) $n$ பெரிது, $n \geq 30$, $np > 5$, $np(1-p) < 5$

18. பெருங்கூறுகளைக் கொண்டு, இரு மாதிரிகளின் சோதனை செய்வதற்கான நிபந்தனை

(அ) $m + n \geq 30$  (ஆ) $m \geq 30, n \geq 30$

(இ) $m \geq 30, m + n \geq 30$  (ஈ) $mn \geq 30$

19. பெருங்கூறு சோதனை, எப்போது பொருத்தமானதாக இருக்கும் எனில், அதன் முழுமைத் தொகுதியின் பரவல்

(அ) இயல்நிலைப்பரவலாக இருந்தால் மட்டும்

(ஆ) ஈருப்புப் பரவலாக இருந்தால்

(இ) பாய்சான் பரவலாக இருந்தால்

(ஈ) எந்தப் பரவலாக இருந்தாலும் பொருந்தும்

20. பெருங்கூறுகளில், இன்மை கருதுகோள் $H_0$ என்பதற்கு இசைந்த ஒருபக்க–இடது மாற்று கருதுகோள் அமைக்கும்போது, அதற்கான மறுக்கும் விதி (Rejection rule)

(அ) $|z_0| \geq z_{\alpha/2}$  (ஆ) $z_0 < -z_\alpha$

(இ) $z_0 \leq -z_{\alpha/2}$  (ஈ) $z_0 > z_\alpha$

## II. கீழ்க்கண்ட வினாக்களுக்கு (சில சொற்களில்) குறுகிய விடைதருக:

21. அனுமானப் புள்ளியியல் (Inferential Statistics) என்பது என்ன?

22. புள்ளியியலில் கூறுவெளி என்பதை வரையறு.

23. வாய்ப்பு மாதிரி என்பது பற்றி நீ அறிவது யாது?

24. கருதுகோள் சோதனை (Testing of Hypothesis) காணும்போது ஏற்படும் பிழைகள் யாவை?

25. இன்மை கருதுகோள் $H_0$: $\mu = \mu_0$ என்பதற்கு ஏற்ப உருவாகும் எல்லா மாற்று கருதுகோள்களுக்குரிய மறுக்கும் விதிகளை எழுதுக.

26. இரு முழுமைத்தொகுதியிலுள்ள சராசரிகளின் சமனித்தன்மை காணும் சோதனைக்கு ஏற்ற மாற்று கருதுகோள்களையும் அவற்றின் மறுக்கும் விதிகளையும் (Rejection Rules) எழுதுக.



01_12th_Statistics_TM_Unit 1.indd 34 12-12-2021 19:19:32

27. இரு முழுமைத் தொகுதிகளிலுள்ள விகித சமங்களின் சமனித்தன்மை காணும் சோதனையில் உள்ள மாற்று கருதுகோள்களையும் அவற்றின் மறுக்கும் விதிகளையும் எழுதுக.

28. தொகுதிப்பண்பளவை (parameter) என்பதை வரையறு.

29. மாதிரிப்பண்பளவை (statistic) அல்லது கூறுபண்பளவை என்பதை வரையறு.

30. ஒரு மாதிரிப்பண்பளவையின் திட்டப்பிழை (Standard Error) என்றால் என்ன?

31. மாதிரிப்பண்பளவையால் ஆன மாதிரிப்பரவல்கள் (Sampling distribtuion of a statistic) பற்றி நீ அறிவது என்ன?

32. இன்மைகருதுகோள் (Null hypothesis) என்றால் என்ன?

33. இன்மை கருதுகோள், மாற்று கருதுகோள் என்பவற்றிற்கிடையேயான வேறுபாட்டை எழுதுக.

34. இன்மை கருதுகோளுக்கு எதிரான இருபக்க மாற்று கருதுகோளை உடைய ஒரு புள்ளியியல் சோதனையில், $|z_0| > z_{\alpha/2}$ என்ற கருத்திற்கு, உன்னுடைய முடிவு எது?

35. அண்மையில் ஒரு மாவட்டத்தில் நடத்திய கள ஆய்வில், சமவாய்ப்பு முறையில் 2000 பட்டதாரிகள் தெரிவு செய்யப்பட்டு, அவரிடையே 367 பேர் இந்திய ஆட்சிப்பணி தேர்வு எழுதுவதற்கு ஆர்வமுடையவராக இருக்கின்றனர் என்று கண்டறியப்பட்டுள்ளது. அவ்வாறெனின் அவரது விகிதசம மதிப்பைக் காண்க.

36. ஒரு புள்ளியியல் சோதனையில் $H_0 : \mu = 27$ என்பதற்கெதிரான $H_1 : \mu > 27$ என்ற கருதுகோளுக்கு, எவ்வகை சோதனை நடத்தப்பட வேண்டும்?

37. பதினோராம் வகுப்புமாணவர்கள், அவர்களுக்கு உரிய வேதியியல் ஆய்வகத்தில் தங்களது சோதனையை முடிக்க ஆகும் சராசரி நேரம் 30 நிமிடத்திற்கும் குறைவாக இருக்க வேண்டுமெனில், அதற்குரிய இன்மை கருதுகோளையும், மாற்று கருதுகோளையும் அமைக்க.

38. $\mu$ என்பது முழுமைத் தொகுதியின் சராசரியைக் குறிக்குமெனில், 250 உறுப்புகளைக் கொண்டு அமைக்கப்படும் ஒரு சோதனையில் $H_0: \mu = 100$, $H_1 : \mu < 100$ என்பதற்கேற்ப 5% மிகைகாண் நிலையில், அதன் தீர்மானிக்கும் எல்லை மதிப்பைக்காண்க.

39. ஒரு பள்ளியில் பத்தாம் வகுப்பில் பயிலும் மாணவர்களின் சராசரி உயரம் 150 செ.மீ. அப்பள்ளியில் சமவாய்பின்படி தெரிவு செய்யப்பட்ட 15 மாணவர்களின் சராசரி உயரம் 155 செ.மீ. மேற்கூறிய கூற்றிலிருந்து, தொகுதிப்பண்பளவை, மாதிரிப்பண்பளவை, அவற்றின் மதிப்புகள் ஆகியவற்றை எழுதுக.

40. ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலுள்ள மாதிரியின் சராசரி 100, அதன் அளவு 64 மேலும் அதன் திட்டவிலக்கம் 24 எனில், அம்மாதிரி சராசரிக்கான திட்டப் பிழையைக் கணக்கிடுக.

41. முழுமைத் தொகுதியின் விகிதசமம் $p = 0.45$, மாதிரியின் அளவு 100 ஆக இருக்கும்போது, அம்மாதிரியின் திட்டப்பிழையைக் காண்க.

## III. கீழ்க்கண்ட வினாக்களுக்கு (சில சொற்றொடர்களில் ) சுருக்கமான விடைதருக:

42. ஒரு புள்ளியியல் சோதனைக்கு, முடிவைத் தரும் விதிகளை (Decision Rules) அட்டவணைப் படுத்தி விவரிக்க.

43. கருதுகோள் சோதனையில், முதல்வகைப்பிழை, இரண்டாம் வகைப்பிழை என்பவை யாவை?

44. மிகைகாண் நிலை (Level of significance) என்பதன் பொருள் யாது?

45. ஒருமுனை சோதனை, இருமுனை சோதனை என்பவை பற்றி விளக்குக.

46. தீர்மானிக்கும் எல்லை மதிப்பு (Critical value) பற்றி விளக்குக.

47. ஒரு கல்வி நிறுவனத்தில் சமவாய்ப்பு முறையில் 100 மாணவர்கள் தெரிவு செய்யப்பட்டு அவர்களின் சராசரி உயரம் 163 செ.மீ, திட்டவிலக்கம் 10 செ.மீ ஆகவும் உள்ளது. $H_0 : \mu = 167$. எனும் இன்மைகருதுகோளுக்கு ஏற்ப மாதிரிப்பண்பளவைச் சோதனையின் மதிப்பைக் கணக்கிடுக.

48. இருபள்ளிகளில், மாணவர்களிடையே உடனடி புதுவகை உணவு உண்பதிலுள்ள விருப்பம் பற்றிய கள ஆய்வு ஒன்று மேற்கொள்ளப்பட்டது. சம வாய்ப்பு முறையில், முதல்பள்ளியில் தெரிவு செய்யப்பட்ட 50 பேரில் 35 பேர் அவ்வகை உணவை விரும்புவதாகவும், இரண்டாம் பள்ளியில் தெரிவு செய்யப்பட்ட 80 பேரில் 40 பேர் அவ்வகை உணவை விரும்புவதாகவும் கண்டறியப்பட்டுள்ளது. அவ்வாறெனில் இரு மாதிரி விகிதசமங்களுக்கிடையேயுள்ள வித்தியாசத்தின் திட்டப்பிழையைக் கண்டுபிடி.

49. $m = 35$, $n = 40$, $\bar{x} = 10.8$, $\bar{y} = 11.9$, $s_X = 3$, $s_Y = 4$, எனும் வழக்கமான குறியீடுகளைக் கொண்டு $(\bar{x}, \bar{y})$ என்பதிற்கான திட்டப் பிழையைக் கணக்கிடுக.

50. $n$=500, $np$=383 என்பவற்றிற்கு, $H_0 : P = 0.68$ எனும்போது அதன் மாதிரிப்பண்பளவைச் சோதனையின் மதிப்பைக் கணக்கிடுக.

51. $m = 100$, $n = 150$, $mp_X = 78$, $np_Y = 100$, என்ற தரவுகளுக்கு $H_0$: $P_X = P_Y$ என்ற கருதுகோளுக்கு ஏற்ப மாதிரிப்பண்பளவைச் சோதனையின் மதிப்பைக் கணக்கிடுக.

## IV. கீழ்க்கண்ட வினாக்களுக்கு விரிவான விடை தருக:

52. கருதுகோள் சோதனையின் போது பின்பற்றப்படும் பொதுவான வழிமுறைகளை விளக்குக.

53. முழுமைத் தொகுதியின் மாறுபாட்டு அளவை தெரியாதபோது, முழுமைத் தொகுதிக்கான சராசரி பற்றிய கருதுகோள் சோதனையில் பின்பற்றப்படும் வழிமுறைகளை விளக்குக.

54. முழுமைத் தொகுதிகளின் மாறுபாட்டு அளவைகள் தெரிந்திருக்கும்போது, இரு முழுமைத் தொகுதிகளின் சராசரிகளின் சமனித்தன்மைக்கான கருதுகோள் சோதனையில் பின்பற்றப்படும் வழிமுறைகளை விளக்குக.

55. முழுமைத் தொகுதிகளின் மாறுபாட்டு அளவைகள் தெரியாமல் இருக்கும்போது, இரு முழுமைத் தொகுதிகளின் சராசரிகளின் சமனித் தன்மைக்கான கருதுகோள் சோதனையில் பின்பற்றப்படும் வழிமுறைகளை விளக்குக.

56. முழுமைத் தொகுதிக்கான விகிதசமம் பற்றிய கருதுகோள் சோதனை அமைப்பதில் உள்ள வழிமுறைகளைத் தருக.

57. இரு முழுமைத் தொகுதிகளின் விகித சமங்களின் சமனித்தன்மை பற்றி அறிவதற்கான கருதுகோள் சோதனையில் பின்பற்றப்படும் வழி முறைகளை விளக்குக.

58. ஒரு மாவட்டத்திலுள்ள எட்டாம் வகுப்பு பயிலும் மாணவர்களுக்கு, அவர்களின் கடிதம் எழுதும் திறனை மேம்படுத்த, ஒரு சிறப்பு பயிற்சி அளிப்பதற்கு அம்மாவட்ட கல்வி அலுவலர் ஏற்பாடு செய்துள்ளார். சமவாய்ப்பு முறையில் 100 மாணவர்களைத் தெரிவு செய்து, அவர்கள் அப்புதிய பயிற்சியின் மூலம் கடிதம் எழுதும் காலம் சராசரியாக 15 நிமிடம் எனக் கணக்கிடப்பட்டது. அம்மாவட்ட மாணவர்கள் அப்பயிற்சியை முடிக்கும் காலம் சராசரியாக 13 நிமிடம் என்றும், திட்டவிலக்கம் 8 நிமிடம் எனும் போது அம்மாவட்டத்தில் உள்ள மாணவர்களுக்கும், மாதிரியில் மாணவர்களுக்கும் அப்பயிற்சியை முடிக்கும் காலத்தில் குறிப்பிடத்தக்க வேறுபாடு உள்ளதா என்பதை 1% மிகைகாண் நிலையில் சோதனை செய்க.



01_12th_Statistics_TM_Unit 1.indd 36 12-12-2021 19:19:32

59. வழக்கமான குறியீடுகளுடன், கீழ்க்கண்ட தரவுகளுக்கு கருதுகோள் சோதனை செய்க. $H_0 : \mu_X = \mu_Y$, $H_1 : \mu_X \neq \mu_Y$, $\bar{x} = 7$, $\bar{y} = 8$ , $\sigma_X = 3$, $\sigma_Y = 2$, $m = 40$, $n = 40$, $\alpha = 0.01$.

60. இரு மாவட்டங்களிலுள்ள மாணவர்களின் கணிதத்திறன் பற்றி அறிய, ஒரு முதன்மைக் கல்வி அலுவலர் விரும்புகிறார். அதற்காக சமவாய்ப்பு முறையில் எடுக்கப்பட்ட மாதிரிகளின் தரவுகள் கீழ்க்கண்ட அட்டவணையில் தரப்பட்டுள்ளன.

| கல்வி மாவட்டம் | மாணவர் எண்ணிக்கை | சராசரி | திட்ட விலக்கம் |
|---|---|---|---|
| A | 45 | 62 | 15 |
| B | 53 | 60 | 17 |

5% மிகைகாண் நிலையில், மாவட்டம் A இல் உள்ள மாணவர்கள், மாவட்டம் B இல் உள்ளவர்களை விட சிறந்து விளங்குகிறார்களா என்பதைச் சோதனை செய்து காண்க.

61. A எனும் மாவட்டத்திலுள்ள நெல் விளையும் 100 பாத்திகளில் கண்ட நெல்விளைச்சல், சராசரி ஏக்கருக்கு 210 கிலோவும், திட்டவிலக்கம் ஏக்கருக்கு 10 கிலோவாகவும் உள்ளது. B எனும் மாவட்டத்தில், நெல்விளையும் 150 பாத்திகளில் கண்ட நெல் விளைச்சல், சராசரி ஏக்கருக்கு 220 கிலோகவும், திட்டவிலக்கம் ஏக்கருக்கு 12 கிலோவாகவும் உள்ளது. இரு மாவட்டங்களையும் உள்ளடக்கிய மாநிலம் முழுவதற்குமான நெல்விளைச்சலின் திட்டவிலக்கம் ஏக்கருக்கு 11 கிலோ எனில், அவ்விரு மாவட்டங்களுக்கிடையேயுள்ள விளைச்சலில் குறிப்பிடத்தக்க வேறுபாடு காண முடிகிறதா என்பதை 1% மிகைகாண் நிலையில் சோதனை செய்க.

62. பதினோராம் வகுப்பு மாணவர்களுக்கான ஓர் எண்–திறனறி சோதனையில், அவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்களின் திட்ட விலக்கம் 15. ஒரு பள்ளி, மாணவர்களின் எண்ணியல் திறனை மேம்படுத்த ஒரு புதிய கற்பித்தல் முறையை உருவாக்கியுள்ளது. 99 மாணவர்கள் கொண்ட ஒரு குழுவை இரு வகுப்புகளாகப் பிரித்து, 50 பேர் கொண்ட முதல் குழுவில் உள்ள மாணவர்களுக்கு புதிய வகை கற்பித்தல் முறையையும், மீதியுள்ள 49 பேர் கொண்ட இரண்டாம் குழுவில் உள்ள மாணவர்களுக்கு வழக்கமான கற்பித்தல் முறையையும் செயல்படுத்த முடிவெடுக்கப்படுகிறது. ஒரு பருவம் முழுவதும் கற்பித்தல் முடிந்த பின் இரு குழுவிலுள்ள மாணவர்களுக்கும் ஒரே விதமான திறனறித்தேர்வு நடத்தப்படுகிறது. அத்தேர்வில் அவ்விரு குழுவும் பெற்ற சராசரி மதிப்பெண்கள் முறையே 116.0, 113.1 ஆகும். இவ்விவரங்களிலிருந்து, புதிய வகை கற்பித்தல் முறை மாணவர்களிடையே எண்திறனறிவில் உயர்வை உருவாக்கியுள்ளதா என்பதை 5% மிகைகாண் நிலையில் சோதனை செய்க.

63. ஒரு பந்துமுனை பேனாவின் காலம், அது தொடர்ச்சியாக எழுதும் நீள அளவைப் பொருத்தது. சமவாய்ப்பு முறையில் மாதிரியாக எடுக்கப்பட்ட A வகை பேனாக்கள் 80 இன் கூடுதல் எழுதும் திறன் 96.84 கி.மீ. மற்றொரு மாதிரியான B வகை பேனாக்கள் 75 இன் கூடுதல் எழுதும் திறன் 93.75 கி.மீ. எழுதும் திறனில் இருவகை பேனாக்களிலும் ஒரு பேனாவின் திட்டவிலக்கம் 0.15 கி.மீ. எனக்கொண்டால், B வகை பேனாக்களின் சராசரி எழுதும் திறன், A வகை பேனாக்களைவிட அதிகம் உள்ளது என்ற அனுமானத்தின் பேரில், உபயோகிப்பாளர் B வகை பேனாக்களைத் தெரிவு செய்வாரா என்பதை 1% மிகைகாண் நிலையில் சோதனை செய்க.

64. மாநிலங்களுக்கான தடகள விளையாட்டுப் போட்டிகளில் பங்குபெறும் இரு மாநிலங்களைச் சேர்ந்த விளையாட்டு வீரர்களின் திறனை ஒப்பிடும் ஓர் ஆய்வு நடத்தப்பட்டது. இரு மாநிலங்களிலும் அவர்கள் பெற்ற வெற்றிகளைப் பற்றிய விவரங்கள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன:

| மாநிலம் | தடகளத்தில் வெற்றி பெற்றவர் | சராசரி | திட்ட விலக்கம் |
|---|---|---|---|
| மாநிலம் 1 | 300 | 75 | 10 |
| மாநிலம் 2 | 400 | 73 | 11 |



01_12th_Statistics_TM_Unit 1.indd 37 12-12-2021 19:19:32

இந்த விவரங்களைக் கொண்டு, இரு மாநிலங்களைச் சேர்ந்தவர்களிடையே குறிப்பிடத்தக்க வேறுபாடு காணப்படுகிறதா என்பதை 1% மிகைகாண் நிலையில் சோதனை செய்து முடிவினைக் கூறுக.

65. ஒரு மாவட்ட நிர்வாகம், மாணவர்களின் உதவியோடு தொற்றுநோய் பற்றிய ஒரு விழிப்புணர்வு நிகழ்ச்சியை நடத்தியது. சமவாய்ப்பு முறையில் 64 வீடுகளைத் தெரிவு செய்து, அவர்களிடம் விழிப்புணர்வு நிகழ்ச்சியில் பங்குபெற்ற மாணவர்களின் பங்கு பற்றி வினவப்பட்ட போது, 50 வீடுகளில் மாணவர்களின் பங்காற்றலைச் சிறப்பித்துக் கூறியுள்ளனர். இதன் மூலம் மாவட்ட நிர்வாகம், விழிப்புணர்வு நிகழ்ச்சிகளில் மாணவர்களைப் பங்கு பெறச் செய்வதால், நிகழ்ச்சிகள் 90% க்கு மேல் வெற்றி பெறும் என்று கருத்தை உருவாக்கிக் கொள்ளலாமா?

66. ஒரு நாணயம் 10,000 முறை சுண்டப்படும் போது 5195 முறை தலை விழுகிறது. அவ்வாறெனில், 5% மிகைகாண் நிலையில் அந்நாணயம் குற்றமற்றதா என்பதைக் காண கருதுகோள் சோதனை செய்க.

67. ஒரு மாவட்டத்தின் இரு பகுதிகளில், சமவாய்ப்பு முறையில் தெரிவு செய்யப்பட்ட சில குடும்பங்களில் உள்ள பெற்றோரிடம் தொலைக்காட்சி நிகழ்ச்சிகளை அவர்கள் பார்ப்பதால் அவர்களுடைய குழந்தைகளின் கல்வி பாதிக்கப்படுகிறதா என்பது பற்றி அறிய ஓர் ஆய்வு நடத்தப்பட்டது. அது பற்றிய விவரம் கீழே தரப்பட்டுள்ளது:

| பகுதி | குடும்பங்களின் எண்ணிக்கை | |
|---|---|---|
| | பங்கு பெற்றவர் | ஏற்றுக்கொண்டவர் |
| A | 200 | 48 |
| B | 600 | 96 |

5% மிகைகாண் நிலையில், இரு பகுதிகளிலுள்ள குடும்பங்களின் விகிதசம வித்தியாசங்களில் குறிப்பிடத்தக்க வேறுபாடு உள்ளதா என்பதை சோதனை செய்து மேற்கூறிய கூற்றை அவர்கள் ஏற்றார்களா என்பதைக் கூறுக.

68. ஒரு வகை பாதுகாப்பு முறையில் வைக்கப்பட்ட 1000 ஆப்பிள்களில், 4% கெட்டுவிட்டன. மற்றொரு வகை பாதுகாப்பு முறையில் வைக்கப்பட்ட 1500 ஆப்பிள்களில், 3% கெட்டுவிட்டன. இதிலிருந்து இரண்டாவது வகை பாதுகாப்பு முறை, முதல் வகை பாதுகாப்பு முறையை விடச் சிறந்ததா என்பதைக் கருதுகோள் சோதனை மூலம் கண்டு அறிக.

69. விளையாட்டு நிகழ்வுகளில் பங்குபெறும் மாணவர்கள், திறந்தவெளி உடற்பயிற்சியில் ஈடுபடுவதைக் காட்டிலும், நவீன உடற்பயிற்சிக் கூடங்களில் பயிற்சி பெறுவதையே விரும்புவதாகத் தெரிகிறது. அதற்காக இருமாநிலங்களில் சமவாய்ப்பு முறையில் தெரிவு செய்யப்பட்ட மாணவர்களின் விருப்பம் கீழ்க்கண்ட அட்டவணையில் தரப்பட்டுள்ளது.

| மாநிலம் | மாணவர்களின் எண்ணிக்கை | |
|---|---|---|
| | மாதிரி | நவீன உடற்பயிற்சிக் கூடத்தை விரும்பியவர்கள் |
| A | 50 | 38 |
| B | 60 | 52 |

மேற்கண்ட இரு மாநிலங்களிடையேயுள்ள மாணவர்களின் விருப்பத்தில் குறிப்பிடத்தக்க வேறுபாடு உள்ளதா என்பதை 5% மிகைகாண் நிலையில் சோதனை செய்க.



01_12th_Statistics_TM_Unit 1.indd 38 12-12-2021 19:19:32

70. குடியிருப்புப் பள்ளிகளில் பயில்வதில் ஆர்வமுடைய 12ஆம் வகுப்பு மாணவர்களிடையே ஆய்வு ஒன்று இரு பகுதிகளில் நடத்தப்பட்டது. A பகுதியில் தெரிவு செய்யப்பட்ட 300 மாணவர்களில், 34 பேர் ஆர்வம் கொண்டுள்ளனர் என்றும், B பகுதியில் தெரிவு செய்யப்பட்ட 200 மாணவர்களில் 28 பேர் ஆர்வம் கொண்டுள்ளனர் எனவும் தெரிகிறது. இவ்விவரங்களைக் கொண்டு, குடியிருப்புப் பள்ளிகளில் பயில்வதில் ஆர்வமுடையோரில், B பகுதியில் உள்ள மாணவர்களைவிட, A பகுதியில் உள்ள மாணவர்கள் ஆர்வமுடன் இருக்கிறார்கள் என்பதற்கு போதுமான ஆதாரம் உள்ளதா என்பதை ஆய்வு செய்க.

குறிப்பு: ஆசிரியரும், மாணவரும் கலந்துரையாடி மேற்கண்ட பயிற்சி வினாக்களைப் போன்று, புதிய வினாக்களை உருவாக்கி, இப்பயிற்சிப் பகுதியை மேலும் விரிவாக்கம் செய்யலாம்.

## செயல்பாடுகள்

1. உமது கல்வி நிலையத்தில் உள்ள விளையாட்டுத்துறைப் பகுதியிலிருந்து ஒரே வகுப்பைச் சேர்ந்த (9 ஆம் வகுப்பு என்க) மாணவர்களின் உயரம்/எடை பற்றிய தரவுகளைச் சேகரித்துக் கொள்க. பிறகு சமவாய்ப்பு முறையில் 50 மாணவர்களைக் கொண்ட ஒரு மாதிரியை எடுத்துக் கொண்டு, அவர்களின் உயரம்/எடை பற்றிய மாதிரி சராசரி, மாதிரி திட்டவிலக்கம் ஆகியவற்றைக் காண்க. அனுமானப் புள்ளியியல் சோதனைகள் மூலம், மாதிரி சராசரிக்கும், முழுமைத் தொகுதி சராசரிக்கும் இடையே குறிப்பிடத்தக்க வித்தியாசம் உள்ளதா என்பதை ஆராய்க. உம்பள்ளியில் இவ்விவரங்களைச் சோதனை மூலம் சரிபார்த்து உமது கருத்தைக் கூறுக.
2. உமது பள்ளியில் ஒரே வகுப்பைச் சேர்ந்த (10 ஆம் வகுப்பு என்க) மாணவர்கள் ஒரு குறிப்பிட்ட பாடத்தேர்வை தமிழ், ஆங்கிலம் ஆகிய இரு மொழிகளிலும் எழுதுகிறார்கள். அந்த இருமொழி வாயிலாக எழுதுவோரிடமிருந்து இரு மாதிரிகளை எடுத்துக் கொண்டு அவற்றின் சராசரிகள், திட்டவிலக்கங்கள் ஆகியவற்றைக் காண்க. இரு மொழிவாயிலாக தேர்வெழுதும் மாணவர்களுக்கிடையே அவர்களது திறனில் குறிப்பிடத்தக்க வேறுபாடு உள்ளதா என்பதைக் கருதுகோள் சோதனை மூலம் ஆய்வு செய்து உமது வகுப்பில் மாணவர்களுடன் விவாதிக்க.



01_12th_Statistics_TM_Unit 1.indd 39 12-12-2021 19:19:32

## விடைகள்

**I.** 1. (இ) 2. (ஆ) 3. (அ) 4. (அ) 5. (ஈ)

6. (இ) 7. (ஈ) 8. (இ) 9. (அ) 10. (அ)

11. (அ) 12.(அ) 13. (இ) 14. (ஆ) 15. (அ)

16. (இ) 17. (அ) 18. (ஆ) 19. (ஈ) 20. (ஆ)

**II.** 34. $H_0$ மறுக்கப்படுகிறது

35. 0.1835

36. ஒரு முனை சோதனை (வலது)

37. $H_0: \mu = 30, H_1: \mu < 30$

38. −1.645

39. −1.645

39. தொகுதிப்பண்பளவை = பள்ளி மாணவரின் சராசரி உயரம் 150 செ.மீ.

மாதிரிப்பண்பளவை = மாதிரியில் உள்ள மாணவரின் சராசரி உயரம் 155 செ.மீ.

40. $SE(\bar{X}) = 3$

41. $SE(p) = 0.05$

**III.** 47. $z_0 = -4$

48. 0.089

49. 0.8106

50. 4.122

51. 1.937

**IV.** 58. $z_0 = 2.5$; $H_0$ மறுக்கப்படவில்லை

59. $z_0 = -1.75$; $H_0$ மறுக்கப்படவில்லை

60. $z_0 = 0.619$; $H_0$ மறுக்கப்படவில்லை

61. $z_0 = -7.04$; $H_0$ மறுக்கப்படுகிறது

62. $z_0 = 0.9619$; $H_0$ மறுக்கப்படவில்லை

63. $z_0 = -1.638$; $H_0$ மறுக்கப்படவில்லை

64. $z_0 = 2.508$; $H_0$ மறுக்கப்படவில்லை

65. $z_0 = -3.167$; $H_0$ மறுக்கப்படவில்லை

66. $z_0 = 3.90$; $H_0$ மறுக்கப்படுகிறது

67. $z_0 = 2.55$; $H_0$ மறுக்கப்படுகிறது

68. $z_0 = 1.352$; $H_0$ மறுக்கப்படவில்லை

69. $z_0 = -1.444$; $H_0$ மறுக்கப்படவில்லை

70. $z_0 = -0.886$; $H_0$ மறுக்கப்படவில்லை