वास्तव में, गैस के सभी अणुओं का वेग समान नहीं होता, वेग अणुओं पर वितरित रहते हैं। अतः, उपरोक्त समीकरण अणुओं के उस समूह के कारण दाब को व्यक्त करती है जिनकी x-दिशा में चाल υ_x है और n इस ही अणु समूह का संख्या घनत्व है। कुल दाब ज्ञात करने के लिए सभी समूहों के योगदानों का संकलन करना होगा। तब,

$$P = n\, m\, \overline{\upsilon^2} \qquad (13.12)$$

जहाँ $\overline{\upsilon_x^2}$, $\upsilon_x{}^2$ का औसत है। अब, क्योंकि गैस समदैशिक है, अर्थात् धारक पात्र में अणुओं के वेग की कोई वरीय दिशा नहीं है, इसलिए सममिति के अनुसार,

$$\overline{\upsilon_x^2} = \overline{\upsilon_y^2} = \overline{\upsilon_3^2} =$$
$$(1/3)\,[\,\overline{\upsilon_x^2} + \overline{\upsilon_y^2} + \overline{\upsilon_3^2}\,] = (1/3)\ \overline{\upsilon^2} \qquad (13.13)$$

जहाँ υ चाल है, और $\overline{\upsilon^2}$ वर्गीकृत चालों का माध्यम है। अतः,

$$P = (1/3)\, n\, m\, \overline{\upsilon^2} \qquad (13.14)$$

इस व्युत्पत्ति पर कुछ टिप्पणियाँ : (i) प्रथम, यद्यपि हमने घनाकार बर्तन का चयन किया है, परंतु वास्तव में, बर्तन की आकृति से कुछ अंतर नहीं पड़ता है। बर्तन किसी भी यादृच्छिक आकृति का हो, हम एक अत्यंत सूक्ष्म समतल लेकर उस पर उपरोक्त व्युत्पत्ति के चरण लागू कर सकते हैं। ध्यान दीजिए, A एवं Δt दोनों ही अंतिम परिणाम में प्रकट नहीं होते हैं। अध्याय 10 में दिए गए पास्कल के नियम के अनुसार यदि कोई गैस साम्यावस्था में हो, तो उसके एक भाग पर जितना दाब होता है उतना ही दाब किसी दूसरे भाग पर भी होता है। (ii) द्वितीय, इस व्युत्पत्ति में हमने किन्हीं भी संघट्टों को उपेक्षणीय मानकर परिकलनों में सम्मिलित नहीं किया है। यद्यपि, इस पूर्वधारणा का कोई पक्का औचित्य बताना तो कठिन है, परंतु गुणात्मक रूप से हम यह देख सकते हैं कि इससे अंतिम परिणाम में त्रुटि नहीं आती। Δt सेकंड में दीवार से संघात करने वाले अणुओं की औसत संख्या – n Aυ_x Δt पाई जाती है। अब, चूंकि संघट्ट यादृच्छिक है और गैस एक स्थायी प्रावस्था में है, यदि (υ_x, υ_y, υ_z) वेग वाले अणु की, संघट्ट के कारण, गति बदल भी जाएगी तो भिन्न प्रारंभिक वेग वाला कोई कण संघट्ट के बाद यह वेग (υ_x, υ_y, υ_z) प्राप्त कर लेगा। क्योंकि यदि ऐसा नहीं होगा तो वेगों का वितरण स्थायी नहीं रह पाएगा। सभी प्रकरणों में हम $\overline{\upsilon_x^2}$ का मान प्राप्त करेंगे। और इस प्रकार अणुओं के संघट्ट (जब तक कि वे बहुत जल्दी-जल्दी नहीं हो रहे हैं और एक संघट्ट में लगा समय दो संघट्टों के बीच के समय की तुलना में उपेक्षणीय है) से उपरोक्त परिकलन प्रभावित नहीं होता।

13.4.2 ताप की अणु गतिक व्याख्या

समीकरण (13.14) को इस प्रकार भी लिखा जा सकता है,

$$PV = (1/3)\, nV m\, \overline{\upsilon^2} \qquad (13.15a)$$
$$PV = (2/3)\,[N x - m\ \overline{\upsilon^2}] \qquad (13.15b)$$

यहाँ $N\,(= nV)$ गैस के नमूने में अणुओं की कुल संख्या है।

दीर्घ कोष्ठक में लिखी राशि गैस के अणुओं की औसत स्थानांतरीय गतिज ऊर्जा है। क्योंकि किसी आदर्श गैस की आंतरिक ऊर्जा पूर्णतः गतिज ऊर्जा* ही है,

$$E = N \times (1/2)\, m\, \overline{\upsilon^2} \qquad (13.16)$$

समीकरण (13.15b) से तब हमें प्राप्त होता है,

$$PV = (2/3)\, E \qquad (13.17)$$

अब हम ताप की अणुगतिक व्याख्या के लिए तैयार हैं। समीकरण (13.17) का आदर्श गैस समीकरण (13.3) से संयोजित करने पर

$$E = (3/2)\ k_B\, NT \qquad (13.18)$$

या $E/N = -\ m\ \overline{\upsilon^2} = (3/2)\, k_B T \qquad (13.19)$

अर्थात्, किसी अणु की औसत गतिज ऊर्जा, गैस के परम ताप के अनुक्रमानुपाती होती है : यह आदर्श गैस की प्रकृति, दाब या आयतन पर निर्भर नहीं करती। यह एक मौलिक निष्कर्ष है, जो किसी गैस के ताप, जो गैस का एक स्थूल, मेय, प्राचल (जिसे ऊष्मागतिकी चर कहा जाता है) है, को किसी आण्विक राशि, जिसे अणु की औसत गतिज ऊर्जा कहते हैं से संबद्ध करता है। बोल्ट्ज़मान नियतांक इन दो प्रभाव क्षेत्रों को जोड़ता है। ध्यान से देखें तो समीकरण (13.18) यह स्पष्ट करती है कि आदर्श गैस की आंतरिक ऊर्जा केवल उसके ताप पर निर्भर करती है, दाब या आयतन पर नहीं। ताप की इस व्याख्या से स्पष्ट है कि आदर्श गैसों का अणुगति सिद्धांत आदर्श गैस समीकरण और इस पर आधारित विभिन्न गैस नियमों के पूर्णतः संगत है।

अक्रिय आदर्श गैसों के मिश्रण के लिए कुल दाब मिश्रण की प्रत्येक गैस के दाब का योगदान होता है। समीकरण (13.14) को नए रूप में इस प्रकार लिख सकते हैं,

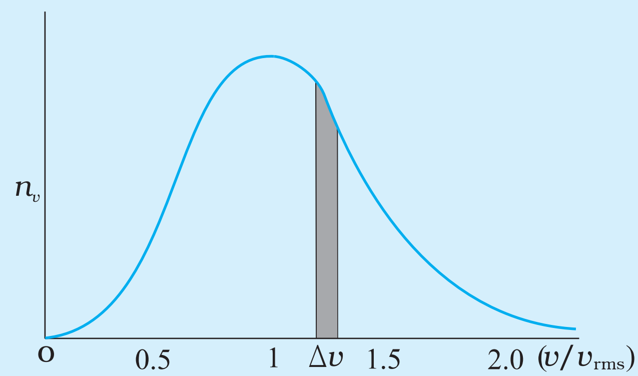
$$P = (1/3)\,[n_1 m_1\, \overline{\upsilon_1^2} + n_2 m_2\, \overline{\upsilon_2^2} + \ldots\,] \qquad (13.20)$$

* संकेत E आंतरिक ऊर्जा U, जिसमें अन्य स्वातंत्र्य कोटियों के कारण भी ऊर्जाएँ सम्मिलित हो सकती हैं (देखिये अनुभाग 13.5), का केवल स्थानांतरीय भाग ही व्यक्त करता है।

मैक्सवेल बंटन फलन

गैस के दिए गए द्रव्यमान में, दाब, ताप, आयतन जैसे स्थूल प्राचलों के नियत होने पर भी, इसके सब अणुओं के वेग समान नहीं होते। संघट्टों के कारण अणुओं की चाल और गति की दिशा परिवर्तित होती रहती है। तथापि, साम्यावस्था में चालों का वितरण स्थायी या नियत रहता है।

बहुत से पिंडों के निकाय के व्यवहार का अध्ययन करते समय चालों के ये वितरण बहुत महत्वपूर्ण एवं उपयोगी हो जाते हैं। एक उदाहरण के रूप में, आइये किसी शहर में लोगों की आयु पर विचार करें। प्रत्येक व्यक्ति की आयु को परिकलन में सम्मिलित करना हो – व्यावहारिक नहीं है। हम लोगों को समूहों में बाँट सकते हैं : 20 वर्ष तक की आयु के बच्चे, 20 से 60 वर्ष तक की आयु के वयस्क, 60 वर्ष से अधिक आयु के वृद्ध। यदि हमें अधिक विस्तृत जानकारी चाहिए तो हम आयु के और छोटे अंतराल वाले समूह ले सकते हैं : 0–1, 1–2,.... 99–100 वर्ष आयु के समूह। जब आयु का अंतराल कम करते हैं तो उस आयु–अंतराल में आने वाले लोगों की संख्या भी कम हो जाती है। उदाहरणार्थ, आधा वर्ष अंतराल में लोगों की संख्या एक वर्ष अंतराल में लोगों की संख्या की लगभग आधी होगी। आयु अंतराल x एवं $x + dx$ में लोगों की संख्या $dN(x)$ अंतराल dx के अनुक्रमानुपाती होगी। अर्थात्, $dN(x) = n_x\ dx$, यहाँ n_x का उपयोग हमने x एवं $x + dx$ के बीच के अंतराल में लोगों की संख्या को निर्दिष्ट करने में किया है।



आण्विक चालों का मैक्सवेल बंटन

इसी प्रकार, आण्विक गतियों के बंटन पर विचार करें तो चालों v एवं $v + dv$ के बीच अणुओं की संख्या $dN(v) = 4p\, N\, a^3 e^{-bv^2} v^2\, dv = n_v dv$। यह मैक्सवेल बंटन कहलाता है। n_v और v के बीच ग्राफ ऊपर चित्र में दर्शाया गया है। उन अणुओं की संख्या जिनकी चाल v एवं $v+dv$ के बीच है ग्राफ में दर्शायी पट्टी के क्षेत्रफल के बराबर होती है। v^2 जैसी किसी राशि का औसत, समाकलन $<v^2> = (1/N) \int v^2\, dN(v) = \sqrt{(3k_B\, T/m)}$ द्वारा परिभाषित किया जाता है जो अधिक प्राथमिक धारणाओं के आधार पर व्युत्पन्न परिणामों से मिलता है।

साम्यावस्था में विभिन्न गैसों के अणुओं की औसत गतिज ऊर्जा समान हो जाएगी। अर्थात्

$$– m_1\ \overline{v_1^2} = – m_2\ \overline{v_2^2} = (3/2)\ k_B\, T$$

अत:, $P = (n_1 + n_2 + \ldots\ )\ k_B\, T$ (13.21)

यही डाल्टन का आंशिक दाबों का नियम है।

समीकरण (13.19) से हम किसी गैस में अणुओं की प्रारूपिक चाल का अनुमान लगा सकते हैं। नाइट्रोजन के एक अणु की $T = 300$ K, ताप पर माध्य वर्ग चाल होगी :

यहाँ, $m = \dfrac{M_{N_2}}{N_A} = \dfrac{28}{6.02 \times 10^{26}} = 4.65 \times 10^{?\,26}$ kg

$$\overline{v^2} = 3\ k_B\, T\ /\ m = (516)^2\ m^2 s^{-2}$$

$\overline{v^2}$ का वर्गमूल इसकी वर्ग माध्य मूल (rms) चाल कहलाती है और इसे v_{rms} द्वारा निर्दिष्ट करते हैं।

($\overline{v^2}$ को हम $< v^2 >$ भी लिख सकते हैं)

$$v_{rms} = 516\ m\ s^{-1}$$

इस चाल की कोटि वायु में ध्वनि के वेग के समान है। समीकरण (13.19) से हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि समान ताप पर हलके अणुओं की rms चाल अधिक होती है।

उदाहरण 13.5 किसी फ्लास्क में आर्गन एवं क्लोरीन गैस भरी है जिनके द्रव्यमान 2 : 1 के अनुपात में हैं। मिश्रण का ताप 27°C है। दोनों गैसों के (i) प्रति अणु की औसत गतिज ऊर्जा का अनुपात (ii) दोनों गैसों के अणुओं की वर्ग माध्य मूल चालों v_{rms} का अनुपात ज्ञात कीजिए। आर्गन का परमाणु द्रव्यमान = 39.9 u, क्लोरीन का अणु द्रव्यमान = 70.9u

हल यहाँ याद रखने योग्य महत्वपूर्ण बात यह है कि किसी (आदर्श) गैस की (प्रति अणु) औसत गतिज ऊर्जा (चाहे वह आर्गन की तरह एक परमाणुक हो, क्लोरीन की तरह द्विपरमाणुक हो, अथवा बहुपरमाणुक भी क्यों न हो) सदैव ही $(3/2)\, k_BT$ के बराबर होती है, गैस के ताप पर निर्भर करती है और गैस की प्रकृति पर निर्भर नहीं करती।

(i) चूंकि फ्लास्क में आर्गन और क्लोरीन दोनों का ताप समान है, अत: इन दो गैसों की (प्रति अणु) औसत गतिज ऊर्जाओं का अनुपात 1 : 1 है।

(ii) अब – $m\, v_{rms}^{\;2}$ = प्रति अणु औसत गतिज ऊर्जा = (3/2)) k_BT यहाँ m गैस के एक अणु का द्रव्यमान है।

$$\frac{(v_{rms}^2)_{Ar}}{(v_{rms}^2)_{Cl}} = \frac{(m)_{Cl}}{(m)_{Ar}} = \frac{(M)_{Cl}}{(M)_{Ar}} = \frac{70.9}{39.9} = 1.77$$

यहाँ M गैस का अणु-द्रव्यमान है (आर्गन का परमाणु ही उसका अणु है।) दोनों पक्षों का वर्गमूल लेने पर

$$\frac{(v_{rms})_{Ar}}{(v_{rms})_{Cl}} = 1.33$$

आपने इस तथ्य पर ध्यान दिया होगा कि उपरोक्त परिकलनों में मिश्रण के द्रव्यमानों के आधार पर संघटन की कोई प्रासंगिकता नहीं है। यदि ताप का मान अपरिवर्तित रहता है तो आर्गन और क्लोरीन के द्रव्यमान किसी अन्य अनुपात में होते, तब भी (i) एवं (ii) के उत्तर यही होते। ◀

उदाहरण 13.6 यूरेनियम के दो समस्थानिकों के द्रव्यमान 235 u एवं 238 u हैं। यदि यूरेनियम हेक्साफ्लोराइड गैस में ये दोनों समस्थानिक विद्यमान हों, तो किसकी औसत चाल अधिक होगी? यदि फ्लोरीन का परमाणु द्रव्यमान 19 u हो, तो किसी भी ताप पर, इनकी चालों में प्रतिशत अंतर आकलित कीजिए।

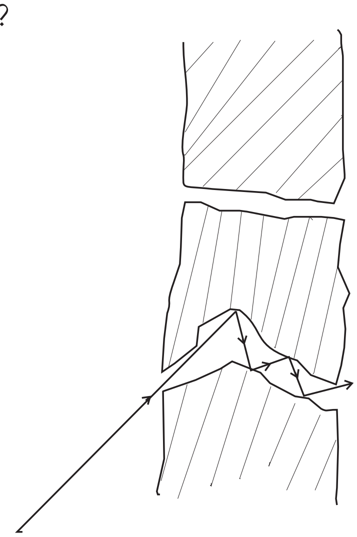
हल : किसी नियत ताप पर औसत ऊर्जा = ½ $m\langle v^2\rangle$ नियत रहती है। अत: अणु का द्रव्यमान जितना कम होगा, उतनी ही अधिक तीव्र उसकी गति होगी। चालों का अनुपात, द्रव्यमानों के अनुपात के वर्गमूल के व्युत्क्रमानुपाती है। चूंकि यहाँ द्रव्यमान 349u एवं 352 इकाइयाँ हैं, इसलिए

$$v_{349} / v_{352} = (352/349)^{1/2} = 1.0044$$

$$\text{चालों के अंतर का प्रतिशत } \frac{\Delta V}{V} = 0.44\ \%$$

^{235}U वह समस्थानिक है जिसकी आवश्यकता नाभिकीय विखंडन में होती है। इसको अधिक मात्रा में पाए जाने वाले समस्थानिक ^{238}U से पृथक करने के लिए मिश्रण को एक सरंध्र सिलिंडर द्वारा चारों ओर से घेर देते हैं। सरंध्र सिलिंडर मोटी दीवार का लेकिन संकरा होना चाहिए ताकि अणु लंबे रंध्रों की दीवारों से संघट्ट करते हुए एक एक कर जा सकें। धीमे अणुओं की तुलना में तीव्रगति से चलने वाले अणु अधिक संख्या में रिस कर बाहर आएंगे और इस प्रकार सरंध्र सिलिंडर के बाहर हलके अणु अधिक मात्रा में पाए जाएँगे (संवर्धन) (देखिए चित्र 13.5)। यह विधि अत्यंत प्रभावी नहीं है और पर्याप्त संवर्धन के लिए इसे कई बार दोहराना पड़ता है। ◀

जब गैसें विसरित होती हैं, तो उनके विसरण की दर उनके अणुओं के द्रव्यमान के वर्गमूल के व्युत्क्रमानुपाती होती है (देखिए अभ्यास 13.12)। क्या उपरोक्त उत्तर के आधार पर आप इस तथ्य की व्याख्या का अनुमान लगा सकते हैं?



चित्र 13.5 एक सरंध्र दीवार से गुज़रते हुए अणु।

उदाहरण 13.7 (a) जब कोई अणु (या प्रत्यास्थ गेंद) किसी (भारी) दीवार से टकराता है, तो टकराने के पश्चात् यह उसी चाल से विपरीत दिशा में वापस लौटता है। जब कोई गेंद दृढ़तापूर्वक पकड़े गए भारी बल्ले से टकराती है, तो भी ऐसा ही होता है। तथापि, जब गेंद अपनी ओर आते हुए बल्ले से टकराती है, तो यह भिन्न चाल से वापस लौटती है। उस स्थिति में गेंद की चाल अपेक्षाकृत कम होती है या अधिक? (अध्याय 6 प्रत्यास्थ संघट्टों से संबंधित आपकी याद ताजा कर सकेगा)। (b) पिस्टन लगे सिलिंडर में पिस्टन को अंदर की ओर धकेल कर जब किसी गैस को संपीडित किया जाता है, तो उस गैस का ताप बढ़ जाता है। ऊपर (a) में प्रयुक्त अणुगति सिद्धांत के आधार पर इस प्रेक्षण की व्याख्या कीजिए। (c) पिस्टन लगे सिलिंडर में संपीडित गैस जब पिस्टन को बाहर धकेलकर फैलती है तो क्या होता है? तब आप क्या प्रेक्षण करेंगे? (d) खेलते समय सचिन तेंदुलकर एक भारी बल्ले का उपयोग करते हैं। इससे क्या उनको किसी प्रकार की कोई सहायता मिलती है?

हल **(a)** माना कि बल्ले के पीछे लगे विकिटों के सापेक्ष गेंद की चाल u है। यदि विकिटों के सापेक्ष बल्ला V चाल से गेंद की ओर आ रहा हो तो बल्ले के सापेक्ष गेंद की चाल $V + u$ होगी, जो बल्ले की ओर प्रभावी होगी। भारी बल्ले से टकराकर जब गेंद वापस लौटती है तो बल्ले के सापेक्ष इसकी चाल $V + u$ बल्ले से दूर की ओर होगी। अतः विकिट के सापेक्ष, लौटती हुई गेंद की चाल, $V + (V + u) = 2V + u$, विकिट से परे जाती हुई होगी। अतः इस प्रकार गतिमान बल्ले से संघट्ट के पश्चात् गेंद की चाल बढ़ जाती है। यदि बल्ला भारी नहीं है तो प्रतिपेक्ष चाल u से कम होगी। अणु के लिए इसका अर्थ ताप में वृद्धि होगा।

(a) के उत्तर के आधार पर, अब आप, (b) (c), (d) के उत्तर दे सकते हैं।

(संकेत: इस संगतता पर ध्यान दें, पिस्टन → बल्ला, सिलिंडर → विकिट, अणु → गेंद)। ◀

13.5 ऊर्जा के समविभाजन का नियम

किसी एकल अणु की गतिज ऊर्जा होती है :

$$\varepsilon_t = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}mv_y^2 + \frac{1}{2}mv_z^2 \qquad (13.22)$$

T ताप पर, तापीय साम्य में किसी गैस की औसत ऊर्जा का मान < > द्वारा निर्दिष्ट किया जाता है, अतः

$$\langle\varepsilon_t\rangle = \left\langle\frac{1}{2}mv_x^2\right\rangle + \left\langle\frac{1}{2}mv_y^2\right\rangle + \left\langle\frac{1}{2}mv_z^2\right\rangle = \frac{3}{2}k_BT \quad (13.23)$$

क्योंकि यहाँ कोई वरीय दिशा नहीं है, अतः समीकरण (13.23) से इंगित होता है कि

$$\left\langle\frac{1}{2}mv_x^2\right\rangle = \frac{1}{2}k_BT \; ; \left\langle\frac{1}{2}mv_y^2\right\rangle = \frac{1}{2}k_BT \; ;$$

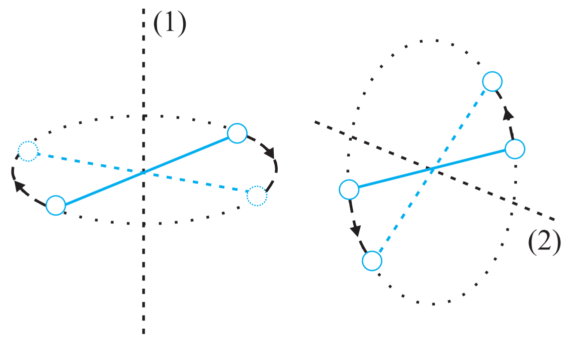
$$\left\langle\frac{1}{2}mv_z^2\right\rangle = \frac{1}{2}k_BT \qquad (13.24)$$

दिक्स्थान में गति के लिए स्वतंत्र किसी अणु की स्थिति दर्शाने के लिए हमें तीन निर्देशांकों की आवश्यकता होती है। यदि इसकी गति किसी एक समतल में बाध्य कर दी जाए, तो दो निर्देशांकों की, और यदि इसे किसी सरल रेखा के अनुदिश गति के लिए बाध्य कर दिया जाए, तो केवल एक निर्देशांक की आवश्यकता होगी। इसे एक दूसरे ढंग से भी व्यक्त किया जा सकता है। हम कहते हैं कि सरल रेखीय गति के लिए इसकी स्वातंत्र्य कोटि एक है, समतल गति की स्वातंत्र्य कोटि दो तथा दिक्स्थान में गति के लिए स्वातंत्र्य कोटि तीन है। किसी संपूर्ण पिण्ड की एक बिंदु से दूसरे बिंदु तक गति को स्थानांतरीय गति कहते हैं। अतः, दिक्स्थान में गति के लिए स्वतंत्र अणु की तीन स्वातंत्र्य कोटि होती हैं। प्रत्येक स्थानांतरीय स्वतंत्रता की एक स्वातंत्र्य कोटि होती है, जिसमें गति के किसी चर का वर्ग सम्मिलित होता है, उदारहणार्थ यहाँ – mv_x^2 और इसी के सदृश पद v_y एवं v_z हैं। समीकरण (13.24) में हम देखते हैं कि तापीय साम्य में इस प्रकार के प्रत्येक पद का औसत मान – k_BT है।

आर्गन जैसी एकपरमाणुक गैस के अणुओं में केवल स्थानांतरीय स्वातंत्र्य कोटि होती है। लेकिन O_2 या N_2 जैसी द्विपरमाणुक गैसों के विषय में क्या कह सकते हैं? O_2 के अणु में 3 स्थानांतरीय स्वातंत्र्य कोटि तो होती ही हैं, पर, इनके अतिरिक्त यह अणु अपने द्रव्यमान केंद्र के परितः घूर्णन गति भी कर सकते हैं। चित्र 13.6 में, ऑक्सीजन के दो परमाणुओं को जोड़ने वाली रेखा के लंबवत् दो स्वतंत्र घूर्णन अक्ष 1 एवं 2 दर्शाए गए हैं जिनके परितः अणु घूर्णन गति कर सकता है*। अतः इन अणुओं में प्रत्येक की दो घूर्णी स्वातंत्र्य कोटि होती हैं। इस प्रकार कुल ऊर्जा में स्थानांतरीय ऊर्जा ε_t एवं घूर्णी ऊर्जा ε_r दोनों का योगदान होता है।

$$\varepsilon_t + \varepsilon_r = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}mv_y^2 + \frac{1}{2}mv_z^2 + \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}I_2\omega_2^2 \quad (13.25)$$

* परमाणुओं को मिलाने वाली रेखा के परितः घूर्णन का जड़त्व आघूर्ण बहुत कम होता है और क्वांटम यांत्रिकीय कारणों से प्रभावी नहीं हो पाता। अनुभाग 13.6 का अंतिम भाग देखिए।



चित्र 13.6 *द्विपरमाणुक अणु के दो स्वतंत्र घूर्णन अक्ष।*

यहाँ ω_1 एवं ω_2 क्रमशः अक्षों 1 एवं 2 के परितः कोणीय चाल तथा I_1 एवं I_2 उनके संगत जड़त्व-आघूर्ण हैं। ध्यान दीजिए, प्रत्येक घूर्णी स्वातंत्र्य कोटि ऊर्जा में एक पद का योगदान करती है जिसमें घूर्णी गति के किसी चर का वर्ग सम्मिलित होता है।

ऊपर हमने यह मान लिया है, कि O_2 अणु एक "दृढ़ घूर्णी" है, अर्थात्, यह अणु कंपन नहीं करता। O_2 के लिए यह पूर्वधारणा, यद्यपि (सामान्य ताप पर) सही पाई गई है, पर सदैव मान्य नहीं होती। CO जैसे कुछ अणु, सामान्य ताप पर भी कुछ कंपन करते हैं, अर्थात् इनके परमाणु, अंतरापरमाणुक अक्ष के अनुदिश एकविमीय कंपन करते हैं (ठीक वैसे ही जैसे एकविमीय लोलक) और परिणामतः कुल ऊर्जा में एक पद, ε_v कंपन ऊर्जा का भी होता है, यहाँ,

$$\varepsilon_v = \frac{1}{2}m\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}ky^2$$

जहाँ k लोलक का बल नियतांक एवं y इसका कंपन निर्देशांक है। अब,

$$\varepsilon = \varepsilon_t + \varepsilon_r + \varepsilon_v \qquad (13.26)$$

पुनः ध्यान दीजिए, समीकरण (13.26) में दिए गए कंपन-ऊर्जा पद में, गति के कंपन चरों y एवं dy/dt के वर्ग सम्मिलित हैं।

यह भी देखिए कि प्रत्येक स्थानांतरीय एवं घूर्णी स्वातंत्र्य कोटि ने तो एक ही "वर्गित पद" का योगदान किया है, पर समीकरण (13.26) में दिए गए कंपन स्वातंत्र्य कोटि के सापेक्ष पद में गतिज एवं स्थितिज ऊर्जा व्यक्त करने वाले दो वर्गित पद हैं।

ऊर्जा के व्यंजक में प्रत्येक द्विघाती पद अणु द्वारा ऊर्जा अवशोषित करने का एक ढंग बताता है। हम देख चुके हैं कि परम ताप T पर तापीय साम्यावस्था में स्थानांतरीय गति के प्रत्येक ढंग के लिए औसत ऊर्जा – k_BT है। सर्वप्रथम मैक्सवेल द्वारा सिद्ध किए गए चिर प्रतिष्ठित सांख्यिकीय यांत्रिकी के सर्वाधिक परिष्कृत सिद्धांत के अनुसार ऊर्जा के विभाजन के प्रत्येक ढंग में ऐसा ही होता है चाहे ऊर्जा स्थानांतरीय हो, घूर्णी हो या कंपन ऊर्जा हो। अर्थात् तापीय साम्य में, ऊर्जा समान रूप से सभी संभव ऊर्जा रूपों पर बंटित होती है और प्रत्येक रूप में औसत ऊर्जा – k_BT पाई जाती है। यही **ऊर्जा का समविभाजन नियम** है। तदनुसार, किसी अणु की स्थानांतरीय एवं घूर्णी स्वातंत्र्य कोटियों में प्रत्येक – k_BT ऊर्जा का योगदान देती है जबकि प्रत्येक कंपन आवृत्ति $2 \times – k_BT = k_BT$ ऊर्जा का योगदान देती है, क्योंकि, कंपन रूप में गतिज और स्थितिज दोनों प्रकार की ऊर्जाओं का योगदान होता है।

ऊर्जा के समविभाजन नियम की उपपत्ति इस पुस्तक की विषय वस्तु से बाहर है। यहाँ हम सैद्धांतिक रूप से गैसों की विशिष्ट ऊष्मा धारिता ज्ञात करने के लिए इस नियम का उपयोग करेंगे। बाद में ठोसों की विशिष्ट ऊष्मा धारिता के लिए भी इसके उपयोग का संक्षिप्त विवरण देंगे।

13.6 विशिष्ट ऊष्मा धारिता

13.6.1 एकपरमाणुक गैसों के लिए

एकपरमाणुक गैस के अणु में केवल तीन स्थानांतरीय स्वातंत्र्य कोटि होती हैं। अतः इनके एक अणु की T ताप पर औसत ऊर्जा $(3/2)k_BT$ होगी। इस प्रकार की गैस के 1 मोल की कुल आंतरिक ऊर्जा,

$$U = \frac{3}{2}k_BT \times N_A = \frac{3}{2}RT \qquad (13.27)$$

नियत आयतन पर मोलर विशिष्ट ऊष्मा धारिता C_v का मान है,

$$C_v \text{ (एकपरमाणुक गैस के लिए)} = \frac{dU}{dT} = RT \qquad (13.28)$$

आदर्श गैस के लिए

$$C_p - C_v = R \qquad (13.29)$$

जहाँ, C_p नियत दाब पर मोलर विशिष्ट ऊष्माधारिता है।

अतः, $$C_p = \frac{5}{2}R \qquad (13.30)$$

इन दो विशिष्ट ऊष्मा धारिताओं का अनुपात

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{5}{3} \qquad (13.31)$$

13.6.2 द्विपरमाणुक गैसों के लिए

जैसा पहले स्पष्ट किया जा चुका है कि द्विपरमाणुक अणु की आकृति डंबलाकार होती है और यदि इस आकृति को दृढ़ घूर्णी

मानें, तो इसकी 5 स्वातंत्र्य कोटि हैं : 3 स्थानांतरीय एवं 2 घूर्णी। ऊर्जा समविभाजन के नियमानुसार इस प्रकार की गैस के एक मोल की, T ताप पर कुल आंतरिक ऊर्जा,

$$U = \frac{5}{2}k_B T \times N_A = \frac{5}{2} RT \quad (13.32)$$

अतः मोलर विशिष्ट ऊष्मा धारिताएँ

$$C_v \text{ (दृढ़ द्विपरमाणुक)} = \frac{5}{2}R,\ C_p = \frac{7}{2}R \quad (13.33)$$

$$\gamma \text{ (दृढ़ द्विपरमाणुक)} = \frac{7}{5} \quad (13.34)$$

यदि द्विपरमाणुक अणु दृढ़ नहीं है, वरन् इसमें एक अतिरिक्त कंपन रूप भी सम्मिलित है, तो

$$U = \left(\frac{5}{2}k_B T + k_B T\right) N_A = \frac{7}{2} RT$$

$$C_v = \frac{7}{2}R,\ C_p = \frac{9}{2}R,\ \gamma = \frac{9}{7}R \quad (13.35)$$

13.6.3 बहुपरमाणुक गैसों के लिए

व्यापक रूप में किसी बहुपरमाणुक अणु में 3 स्थानांतरीय, 3 घूर्णी स्वातंत्र्य कोटि एवं कुछ निश्चित संख्या (f) के कंपन रूप होते हैं। ऊर्जा समविभाजन के नियमानुसार यह सुगमता से समझा जा सकता है कि इस प्रकार की गैस के 1 मोल की कुल आंतरिक ऊर्जा

$$U = (\frac{3}{2}\ k_B T + \frac{3}{2}\ k_B T + f\, k_B T)\ N_A$$

अर्थात् $C_v = (3 + f)\ R;\quad C_p = (4 + f)\ R,$

$$\gamma = \frac{(4+\ f)}{(3+\ f)} \quad (13.36)$$

ध्यान दीजिए, $C_p - C_v = R$ सभी आदर्श गैसों के लिए सत्य है, फिर चाहे वह गैस एकपरमाणुक हो, द्विपरमाणुक हो अथवा बहुपरमाणुक भी क्यों न हो।

सारणी (13.1) में, गैसों में, कंपन रूपों की उपेक्षा करते हुए, उनकी विशिष्ट ऊष्मा धारिताओं के विषय में सैद्धांतिक पूर्वानुमानों को सूचीबद्ध किया गया है। ये मान सारणी (13.2) में दिए गए कई गैसों के लिए विशिष्ट ऊष्मा धारिताओं के प्रायोगिक मानों से काफी मेल खाते हैं। यह सत्य है, कि ऐसी कई गैसे हैं (जो सारणी में नहीं दर्शाई गई हैं), जैसे Cl_2, C_2H_6 और बहुत सी बहुपरमाणुक गैसें, जिनके प्रायोगिक और सैद्धांतिक मानों में बहुत अंतर पाया गया है। साधारणतः इन गैसों की

सारणी 13.1 गैसों की विशिष्ट ऊष्मा धारिताओं के पूर्वानुमानित मान (कंपन रूपों की उपेक्षा करते हुए)

गैस की प्रकृति	C_v (J mol^{-1} K^{-1})	C_p (J mol^{-1} K^{-1})	$C_p - C_v$ (J mol^{-1} K^{-1})	γ
एकपरमाणुक	12.5	20.8	8.31	1.67
द्विपरमाणुक	20.8	29.1	8.31	1.40
त्रिपरमाणुक	24.93	33.24	8.31	1.33

सारणी 13.2 कुछ गैसों की विशिष्ट ऊष्मा धारिताओं के मापित मान

गैस की प्रकृति	गैस	C_v (J mol^{-1} K^{-1})	C_p (J mol^{-1} K^{-1})	$C_p - C_v$ (J mol^{-1} K^{-1})	γ
एकपरमाणुक	He	12.5	20.8	8.30	1.66
एकपरमाणुक	Ne	12.7	20.8	8.12	1.64
एकपरमाणुक	Ar	12.5	20.8	8.30	1.67
द्विपरमाणुक	H_2	20.4	28.8	8.45	1.41
द्विपरमाणुक	O_2	21.0	29.3	8.32	1.40
द्विपरमाणुक	N_2	20.8	29.1	8.32	1.40
त्रिपरमाणुक	H_2O	27.0	35.4	8.35	1.31
बहुपरमाणुक	CH_4	27.1	35.4	8.36	1.31

विशिष्ट ऊष्मा धारिताओं के मान सारणी (13.1) में दिए गए सैद्धांतिक मानों से अधिक पाए गए हैं। इसका अर्थ यह हुआ कि यदि हम परिकलनों में कंपन रूपों के योगदान को भी सम्मिलित करें, तो प्रायोगिक एवं सैद्धांतिक मानों में अधिक संगति दृष्टिगोचर होगी। अतः, सामान्य ताप पर ऊर्जा समविभाजन का नियम, प्रायोगिक रूप से अच्छी तरह पुष्ट होता है।

उदाहरण 13.8 44.8 लीटर नियत धारिता के एक बेलनाकार बर्तन में STP पर हीलियम गैस भरी है। इस गैस के ताप में 15.0 °C वृद्धि करने के लिए कितनी ऊष्मा की आवश्यकता होगी? ($R = 8.31$ J mol^{-1} K^{-1})

हल : गैस नियम $PV = \mu RT$ का उपयोग करके आप यह आसानी से दर्शा सकते हैं कि किसी भी आदर्श गैस के 1 मोल का, मानक ताप (273 K) एवं दाब (1 atm = 1.01×10^5 Pa) पर आयतन 22.4 लीटर होता है। इस सार्वत्रिक आयतन को 'मोलर आयतन' कहते हैं। अतः इस उदाहरण में बर्तन के भीतर हीलियम के 2 मोल हैं। क्योंकि हीलियम एकपरमाणु गैस है, इसकी नियत आयतन पर विशिष्ट ऊष्मा धारिता $C_v = (3/2)\ R$, तथा नियत दाब पर विशिष्ट ऊष्मा धारिता

देखें, तो विश्वास करें

क्या परमाणुओं को इधर-उधर दौड़ते हुए देखा जा सकता है, ठीक-ठीक तो नहीं, पर लगभग ऐसा हो सकता है। आप फूलों के परागकणों को जल के अणुओं द्वारा धकेले जाते हुए देख सकते हैं। परागकणों की आमाप ~ 10^{-5} m है। 1827 में, स्कॉटलैंड के वनस्पतिशास्त्री, रॉबर्ट ब्राऊन ने जल में निलंबित फूल के परागकणों का सूक्ष्मदर्शी से परीक्षण करते समय यह पाया कि वे टेढ़े-मेढ़े पथों पर निरंतर यादृच्छिक गति कर रहे हैं।

अणुगति सिद्धांत इस परिघटना की एक सरल व्याख्या प्रस्तुत करता है। जल में निलंबित किसी पिण्ड पर जल के अणु सभी दिशाओं से संघट्ट करते रहते हैं। क्योंकि अणुओं की गति यादृच्छिक है, किसी एक दिशा से संघट्ट करने वाले अणुओं की संख्या लगभग उतनी ही है जितनी विपरीत दिशा से आकर संघट्ट करने वाले परमाणुओं की संख्या होती है। सामान्य आमाप की वस्तु के लिए इन आण्विक संघट्टों की संख्या में अंतर कुल संघट्टों की संख्या की तुलना में उपेक्षणीय होने के कारण हमें अणुओं की गति का प्रभाव दिखाई नहीं पड़ता।

यदि पिण्ड काफी छोटा हो, पर फिर भी सूक्ष्मदर्शी से दिखाई पड़ सकता हो, तो विभिन्न दिशाओं से होने वाले आण्विक संघट्टों की संख्या में अंतर पूर्णरूपेण उपेक्षणीय नहीं होता अर्थात् माध्यम (जल या अन्य तरल) के अणुओं के सतत संघट्टों द्वारा निलंबित पिण्ड पर संघट्टों के कारण आरोपित संवेगों एवं बल आघूर्णों का योग शून्य नहीं होता। किसी न किसी दिशा में कुल संवेग और बल आघूर्ण प्रभावी रह जाते हैं। इसलिए, यह पिण्ड टेढ़े-मेढ़े ढंग से गति करता है और यादृच्छिक ढंग से कलाबाजी खाता है। आजकल **ब्राउनी गति** कहलाने वाली अणुओं की यह गति आण्विक क्रियाशीलता का एक दृष्टव्य प्रमाण है। गत लगभग 50 वर्षो से क्रमवीक्षण सुरंगक (scanning tunneling) एवं अन्य विशिष्ट सूक्ष्मदर्शियों द्वारा, अणुओं को देखा जा रहा है।

1987 में, अमेरिका में कार्यरत मिस्र के वैज्ञानिक अहमद जेवैल ने न केवल अणुओं को देखने में सफलता पाई, वरन् वह उनकी विस्तृत पारस्परिक अन्योन्यक्रियाओं को भी देख सके। ऐसा वे अति अल्प अवधि, दस फेम्टोसेकेंड की कोटि से भी कम अवधि वाले लेसर प्रकाश की क्षणदीप्ति से उनको प्रकाशित कर, और उनके फोटो लेकर संभव कर पाए। (फेम्टो सेकंड = 10^{-15} s) अब तो आप रासायनिक आबंधों के टूटने और बनने का भी अध्ययन कर सकते हैं। इसी को वास्तव में 'देखना' कहते हैं।

$C_P = (5/2)\ R$ है। क्योंकि बर्तन का आयतन नियत है, आवश्यक ऊष्मा ज्ञात करने के लिए C_v का उपयोग करेंगे। अत:

आवश्यक ऊष्मा = मोलों की संख्या × मोलर विशिष्ट ऊष्मा धारिता × तापवृद्धि

$= 2 \times 1.5\ R \times 15.0 = 45\ R$

$= 45 \times 8.31 = 374$ J ◀

13.6.4 ठोसों की विशिष्ट ऊष्मा धारिता

ठोसों की विशिष्ट ऊष्माधारिता ज्ञात करने के लिए भी हम ऊर्जा समविभाजन का नियम लागू कर सकते हैं। किसी ठोस के विषय में विचार कीजिए, जो N परमाणुओं का बना है। प्रत्येक परमाणु अपनी माध्य स्थिति के इधर-उधर कंपन कर रहा है। किसी एकविमीय कंपन की औसत ऊर्जा $2 \times ½\ k_BT = k_BT$ है। त्रिविमीय कंपनों के लिए औसत ऊर्जा $3\ k_BT$ है। ठोस के 1 मोल के लिए $N = N_A$ और इसकी कुल आंतरिक ऊर्जा

$$U = 3\ k_BT \times N_A = 3\ RT$$

अब, नियत दाब पर $\Delta Q = \Delta U + P\Delta V = \Delta U$, क्योंकि किसी ठोस के लिए ΔV उपेक्षणीय है। अत:

$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta T} = \frac{\Delta U}{\Delta T} = 3R \qquad (13.37)$$

सारणी 13.3 कमरे के ताप एवं वायुमंडलीय दाब पर कुछ ठोसों की विशिष्ट ऊष्मा धारिताओं के मान

पदार्थ का नाम	विशिष्ट ऊष्मा धारिता ($J\ kg^{-1}\ K^{-1}$)	मोलर विशिष्ट ऊष्मा धारिता ($J\ mol^{-1}\ K^{-1}$)
ऐलुमिनियम	900.0	24.4
कार्बन	506.5	6.1
ताँबा	386.4	24.5
सीसा	127.7	26.5
चाँदी	236.1	25.5
टंग्स्टन	134.4	24.9

सारणी 13.3 दर्शाती है कि व्यापक रूप से, सामान्य ताप पर प्राप्त प्रायोगिक मान प्रागुक्त मानों से मेल खाते हैं। (कार्बन एक अपवाद है)।

13.6.5 जल की विशिष्ट ऊष्मा धारिता

हम जल को ठोसों की तरह ही लेते हैं। प्रत्येक परमाणु के लिए औसत ऊर्जा $3k_BT$ है। जल के अणु में 3 परमाणु, दो हाइड्रोजन

के और एक ऑक्सीजन के होते हैं। अतः इसके 1 मोल की आंतरिक ऊर्जा,

$$U = 3 \times 3\ k_B T \times N_A\ = 9\ RT$$

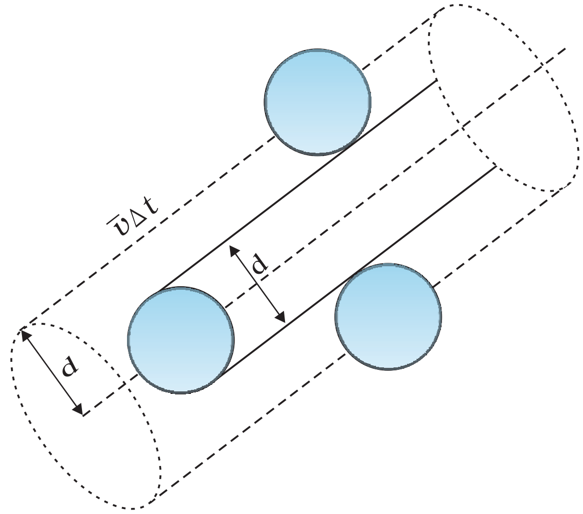
एवं $C = \Delta Q/\ \Delta T = \Delta\ U\ /\ \Delta T\ = 9R$

यह इसका प्रेक्षित मान है और प्रायोगिक और सैद्धांतिक मानों में काफी समानता है। कैलॉरी, ग्राम, डिग्री मात्रक में जल की विशिष्ट ऊष्मा धारिता का मान 1 है। क्योंकि, 1 कैलॉरी = 4.179 J और जल का 1 मोल 18 ग्राम है। अतः जल की प्रति मोल विशिष्ट ऊष्मा धारिता ~ 75 J mol^{-1} K^{-1} ~ 9R है। तथापि, ऐल्कोहॉल या एसिटोन जैसे अधिक जटिल अणुओं के लिए स्वातंत्र्य कोटि पर आधारित तर्क और अधिक उलझा देते हैं।

अंत में, हमें ऊर्जा समविभाजन के चिर प्रतिष्ठित नियम पर आधारित विशिष्ट ऊष्मा धारिताओं के पूर्वानुमान के एक महत्वपूर्ण पक्ष को ध्यान में रखना चाहिए। जिसके अनुसार प्रागुक्त विशिष्ट ऊष्मा धारिताएँ ताप पर निर्भर नहीं करतीं। परंतु जैसे-जैसे हम निम्न तापों की ओर बढ़ते जाते हैं, इस प्रागुक्ति में स्पष्ट विचलन दृष्टिगोचर होने लगता है। जैसे $T \rightarrow 0$। सभी पदार्थों की विशिष्ट ऊष्मा धारिताएँ शून्य की ओर अग्रसर होती जाती हैं। इसका संबंध इस तथ्य से है कि निम्न ताप पर स्वातंत्र्य कोटियाँ अनुपलभ्य और इसलिए अप्रभावी हो जाती हैं। चिरप्रतिष्ठित भौतिकी की दृष्टि से, प्रत्येक स्थिति में स्वातंत्र्य कोटियाँ अपरिवर्तित रहनी चाहिएँ। निम्न ताप पर विशिष्ट ऊष्मा धारिताओं का व्यवहार चिरप्रतिष्ठित भौतिकी की अव्यवहार्यता दर्शाता है और यह व्यवहार केवल क्वांटम धारणाओं के आधार पर ही स्पष्ट किया जा सकता है, जैसा कि सर्वप्रथम आइंस्टीन ने दर्शाया था। क्वांटम यांत्रिकी में स्वातंत्र्य कोटि के प्रभावी होने से पहले ही निकाय में किसी शून्येतर ऊर्जा होना आवश्यक है। यही इस बात का भी कारण है केवल कुछ ही प्रकरणों में क्यों कंपनिक स्वातंत्र्य कोटि प्रभावी होती हैं।

13.7 माध्य मुक्त पथ

गैसों में अणुओं की गति काफी अधिक, वायु में ध्वनि के वेग की कोटि के बराबर होती है। तो भी, रसोईघर में सिलिंडर से लीक हुई गैस को कमरे के दूसरे कोने तक विसरित होने में काफी अधिक समय लगता है। वायुमंडल में धुएँ का बादल घंटों तक बना रहता है। ऐसा इसलिए होता है, क्योंकि, गैस के अणु एक परिमित, पर अत्यंत छोटी आमाप के होते हैं। इसीलिए वे परस्पर टकराते रहने के लिए बाध्य हैं। परिणामस्वरूप, वे अबाध्य रूप से, सरल रेखा में चलते नहीं रह सकते, उनका पथ निरंतर परिवर्तित रहता है।



चित्र 13.7 *Δt समय में किसी अणु द्वारा प्रसर्पित आयतन जिसमें कोई दूसरा अणु इससे टकराएगा।*

मान लीजिए, किसी गैस के अणु d व्यास के गोले हैं। यहाँ हम अपना ध्यान किसी ऐसे गतिमान अणु पर केंद्रित करेंगे जिसकी माध्य चाल $<v>$ है। यह किसी भी ऐसे दूसरे अणु से संघट्ट करेगा जो इन दो अणुओं के केंद्रों के बीच की दूरी d के अंदर आ जाएगा। Δt समय में यह आयतन ($\pi d^2 <v> \Delta t$) तय करता है जिसमें आने वाला कोई अणु इससे टकराएगा (देखें चित्र 13.7)। यदि प्रति एकांक आयतन में अणुओं की संख्या n हो तो कोई अणु Δt समय में $n\pi d^2 <v> \Delta t$ संघट्ट करेगा। इस प्रकार संघट्टों की दर $n\pi d^2 <v>$ है। अथवा दो क्रमिक संघट्टों के बीच औसत अंतराल,

$$\tau\ = 1/(n\pi <v>\ d^2) \qquad (13.38)$$

किन्हीं दो क्रमिक संघट्टों के बीच की औसत दूरी, जिसे माध्य मुक्त पथ (l) कहते हैं, होगा :

$$l\ = <v>\ \tau = 1/(n\pi d^2) \qquad (13.39)$$

इस व्युत्पत्ति में हमने यह कल्पना की है कि दूसरे सभी अणु विरामावस्था में हैं। परंतु वास्तव में सभी अणु गतिमान हैं और संघट्ट दर अणुओं के औसत आपेक्षिक वेग द्वारा निर्धारित की जाती है। अतः हमें समीकरण (13.38) में $<v>$ को $<v_r>$ से प्रतिस्थापित करना होगा। अतः अधिक यथार्थ व्युत्पत्ति द्वारा

$$l = 1/\left(\sqrt{2}\ n\pi d^2\right) \qquad (13.40)$$

आइये, अब हम वायु के अणुओं के लिए, STP पर औसत वेग $<v>$ = (485m/s) लेकर l एवं T का आकलन करते हैं।

$$n = \frac{\left(0.02 \times 10^{23}\right)}{\left(22.4 \times 10^{?3}\right)}$$

$$= 2.7 \times 10^{25}\ m^{-3}$$

$d = 2 \times 10^{-10}$ m लेने पर,

$\tau = 6.1 \times 10^{-10}$ s

तथा, $l = 2.9 \times 10^{-7}$ m $\approx 1500d$ (13.41)

जैसी अपेक्षा थी, समीकरण (13.40) द्वारा दिया गया माध्य मुक्त पथ का मान अणु की आमाप एवं संख्या घनत्व पर प्रतिलोमतः निर्भर करता है। किसी अत्यधिक निर्वातित नली में चाहे n कितना भी कम क्यों न हो, माध्य मुक्त पथ का मान नली की लंबाई के बराबर हो सकता है।

▶ ***उदाहरण 13.9*** 373 K पर, जल वाष्प में, जल के अणु के माध्य मुक्त पथ का आकलन कीजिए। उदाहरण 13.1 और समीकरण (13.41) में दी गई सूचनाओं का उपयोग कीजिए।

हल जल वाष्प के लिए d का मान, इसका वायु के लिए मान बराबर होता है। संख्या घनत्व परम ताप के व्युत्क्रमानुपाती है।

इसलिए $n = 2.7 \times 10^{25} \times \dfrac{273}{373} = 2 \times 10^{25}\,\mathrm{m}^{?\,3}$

अतः माध्य मुक्त पथ $l = 4 \times 10^{-7}$ m ◀

ध्यान दीजिए, माध्य मुक्त पथ, पूर्व परिकलनों द्वारा ज्ञात अंतरापरमाणुक दूरी ~ 40 Å = 4×10^{-9} m की तुलना में 100 गुनी है। माध्य मुक्त पथ का यह बड़ा मान ही गैसों के प्रारूपिक व्यवहार का मार्गदर्शक है। बिना किसी धारक पात्र के गैसों को सीमित नहीं किया जा सकता है।

अणुगति सिद्धांत का उपयोग करके, श्यानता, ऊष्मा–चालकता, एवं विसरण जैसे स्थूल मेय गुणों को आण्विक आमाप जैसे अतिसूक्ष्म प्राचलों से संबंधित किया जा सकता है। इसी तरह के संबंधों से ही सर्वप्रथम अणुओं की आमाप का आकलन किया गया था।

सारांश

1. दाब (P), आयतन (V) और परम ताप (T) में संबंध स्थापित करने वाली आदर्श गैस समीकरण है,

$$PV = \mu RT = k_B NT$$

यहाँ μ गैस में मोलों की संख्या और N अणुओं की संख्या है। R तथा k_B क्रमशः सार्वत्रिक गैस नियतांक एवं बोल्ट्ज़मान नियतांक हैं।

$$R = 8.314\ \mathrm{J\ mol^{-1}\ K^{-1}}, \quad k_B = \frac{R}{N_A} = 1.38 \times 10^{-23}\ \mathrm{J\ K^{-1}}$$

वास्तविक गैसें, आदर्श गैस समीकरण का अधिकाधिक पालन केवल उच्च ताप तथा निम्न दाब पर ही करती हैं।

2. आदर्श गैस के अणुगति सिद्धांत के अनुसार

$$P = \frac{1}{3} n m \overline{v^2}$$

यहाँ n अणुओं का संख्या घनत्व, m अणु का द्रव्यमान एवं इनकी माध्य वर्ग चाल है। इसको आदर्श गैस समीकरण के साथ मिलाने से ताप की एक अणुगतिक व्याख्या प्राप्त होती है,

$$\frac{1}{2} m \overline{v^2} = \frac{3}{2} k_B T, \quad v_{rms} = \left(\overline{v^2}\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$$

इससे हमें यह ज्ञात होता है कि किसी गैस का ताप उसके किसी अणु की औसत गतिज ऊर्जा की माप है और यह गैस या अणु की प्रकृति पर निर्भर नहीं करता। एक नियत ताप पर गैसों के मिश्रण में भारी अणु की औसत चाल अपेक्षाकृत कम होती है।

3. स्थानांतरीय गतिज ऊर्जा

$$E = \frac{3}{2} k_B NT$$

इससे हमें यह सूत्र प्राप्त होता है–

$$PV = \frac{2}{3} E$$

4. ऊर्जा समविभाजन का नियम बताता है कि यदि एक निकाय परमताप T पर साम्यावस्था में है तो कुल ऊर्जा समान रूप से विभिन्न ऊर्जा रूपों में बँट कर अवशोषित होती है और हर रूप के साथ जुड़ी यह ऊर्जा – $k_B T$ होती है। प्रत्येक स्थानांतरीय एवं घूर्णी स्वातंत्र्य कोटि के संगत अवशोषण का एक ऊर्जा रूप होता है और इससे जुड़ी ऊर्जा – $k_B T$ होती है। प्रत्येक कंपन आवृत्ति के साथ ऊर्जा के दो रूप (गतिज एवं स्थितिज) जुड़ते हैं इसलिए इसके संगत ऊर्जा = $2 \times$ – $k_B T = k_B T$

5. ऊर्जा समविभाजन का नियम लागू करके हम गैसों की मोलर विशिष्ट ऊष्मा धारिता ज्ञात कर सकते हैं और इस प्रकार प्राप्त विशिष्ट ऊष्मा धारिताओं के मान कई गैसों के प्रयोगों द्वारा प्राप्त विशिष्ट ऊष्मा धारिताओं के मानों से मिलते हैं। यदि गति के कंपन रूपों को भी परिकलनों में सम्मिलित करें तो यह साम्यता और भी सटीक बैठेगी।

6. माध्य मुक्त पथ l अणु के दो क्रमिक संघट्टों के बीच उसके द्वारा चलित औसत दूरी है

$$\bar{l} = \frac{1}{\sqrt{2}\, n \pi d^2}$$

जहाँ n संख्या घनत्व एवं d अणु का व्यास है।

विचारणीय विषय

1. किसी तरल का दाब केवल धारक की दीवारों पर ही आरोपित नहीं होता, बल्कि यह तरल में हर जगह विद्यमान रहता है। बर्तन में रखे गैस के आयतन में कोई परत साम्यावस्था में होती है क्योंकि इस परत के दोनों ओर समान दाब होता है।

2. गैस में अंतरापरमाणुक दूरी के संबंध में हमें बहुत बढ़ा-चढ़ा कर कोई धारणा नहीं बनानी चाहिए। सामान्य ताप और दाब पर यह ठोसों और द्रवों में अंतरापरमाणुक दूरी के लगभग दस गुने के बराबर है। बहुत भिन्न अगर कुछ है तो वह माध्य मुक्त पथ है जो किसी गैस में अंतरापरमाणुक दूरी का 100 गुना और अणु की आमाप का 1000 गुना होता है।

3. ऊर्जा समविभाजन के नियम को हम इस प्रकार कह सकते हैं– तापीय साम्य में प्रत्येक स्वातंत्र्य कोटि के साथ – $k_B T$ ऊर्जा जुड़ी होती है। अणु की कुल ऊर्जा के व्यंजक में प्रत्येक द्विघाती पद एक स्वातंत्र्य कोटि गिना जाना चाहिए। अतः, प्रत्येक कंपन-विधा में दो स्वातंत्र्य कोटि (न कि एक) होते हैं (गतिज एवं स्थितिज रूपों के संगत) जिनकी ऊर्जा $2 \times$ – $k_B T = k_B T$ होती है।

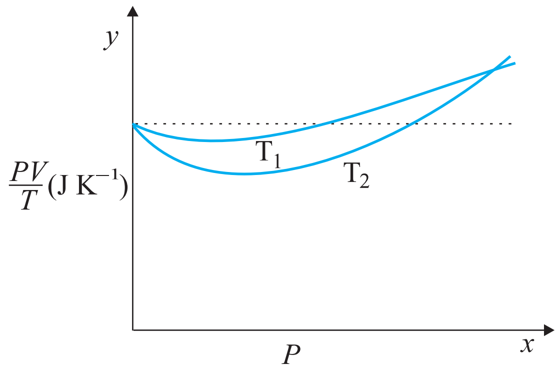
4. किसी कमरे में वायु के सब अणु नीचे नहीं गिर जाते (गुरुत्व के कारण) तथा फर्श पर आकर नहीं ठहर जाते क्योंकि वह बहुत वेग से गतिमान होते हैं और निरंतर संघट्ट करते रहते हैं। साम्यावस्था में कम ऊँचाइयों पर घनत्व थोड़ा अधिक होता है (जैसे वायुमण्डल में)। इसका प्रभाव कम है, क्योंकि सामान्य ऊँचाइयों के लिए स्थितिज ऊर्जा (mgh) का मान अणु की औसत गतिज ऊर्जा $1/2\ mv^2$ की तुलना में काफी कम है।
5. $< v^2 >$ सदैव $(< v >)^2$ के बराबर नहीं होता। किसी राशि के वर्ग का माध्य आवश्यक नहीं है कि उस राशि के माध्य के वर्ग के बराबर हो। क्या आप इस कथन की पुष्टि के लिए उदाहरण बता सकते हैं?

अभ्यास

13.1 ऑक्सीजन के अणुओं के आयतन और STP पर इनके द्वारा घेरे गए कुल आयतन का अनुपात ज्ञात कीजिए। ऑक्सीजन के एक अणु का व्यास 3 Å लीजिए।

13.2 मोलर आयतन, STP पर किसी गैस (आदर्श) के 1 मोल द्वारा घेरा गया आयतन है। (STP : 1 atm दाब, 0 °C)। दर्शाइये कि यह 22.4 लीटर है।

13.3 चित्र 13.8 में ऑक्सीजन के 1.00×10^{-3} kg द्रव्यमान के लिए PV/T एवं P में, दो अलग-अलग तापों पर ग्राफ दर्शाये गए हैं।



चित्र 13.8

(a) बिंदुकित रेखा क्या दर्शाती है?
(b) क्या सत्य है : $T_1 > T_2$ अथवा $T_1 < T_2$?
(c) y-अक्ष पर जहाँ वक्र मिलते हैं वहाँ PV/T का मान क्या है?
(d) यदि हम ऐसे ही ग्राफ 1.00×10^{-3} kg हाइड्रोजन के लिए बनाएँ तो भी क्या उस बिंदु पर जहाँ वक्र y-अक्ष से मिलते हैं PV/T का मान यही होगा? यदि नहीं तो हाइड्रोजन के कितने द्रव्यमान के लिए PV/T का मान (कम दाब और उच्च ताप के क्षेत्र के लिए वही होगा? H_2 का अणु द्रव्यमान = 2.02 u, O_2 का अणु द्रव्यमान = 32.0 u, R = 8.31 J mo1^{-1} K^{-1})

13.4 एक ऑक्सीजन सिलिंडर जिसका आयतन 30 लीटर है, में ऑक्सीजन का आरंभिक दाब 15 atm एवं ताप 27 °C है। इसमें से कुछ गैस निकाल लेने के बाद प्रमापी (गेज) दाब गिर कर 11 atm एवं ताप गिर कर 17 °C हो जाता है। ज्ञात कीजिए कि सिलिंडर से ऑक्सीजन की कितनी मात्रा निकाली गई है। (R = 8.31 J mol^{-1} K^{-1}, ऑक्सीजन का अणु द्रव्यमान O_2 = 32 u)।

13.5 वायु का एक बुलबुला, जिसका आयतन 1.0 cm^3 है, 40 m गहरी झील की तली से जहाँ ताप 12 °C है, उठकर ऊपर पृष्ठ पर आता है जहाँ ताप 35 °C है। अब इसका आयतन क्या होगा?

13.6 एक कमरे में, जिसकी धारिता 25.0 m^3 है, 27 °C ताप और 1 atm दाब पर, वायु के कुल अणुओं (जिनमें नाइट्रोजन, ऑक्सीजन, जलवाष्प और अन्य सभी अवयवों के कण सम्मिलित हैं) की संख्या ज्ञात कीजिए।

13.7 हीलियम परमाणु की औसत तापीय ऊर्जा का आकलन कीजिए (i) कमरे के ताप (27 °C) पर। (ii) सूर्य के पृष्ठीय ताप (6000 K) पर। (iii) 100 लाख केल्विन ताप (तारे के क्रोड का प्रारूपिक ताप) पर।

13.8 समान धारिता के तीन बर्तनों में एक ही ताप और दाब पर गैसें भरी हैं। पहले बर्तन में नियॉन (एकपरमाणुक) गैस है, दूसरे में क्लोरीन (द्विपरमाणुक) गैस है और तीसरे में यूरेनियम हेक्साफ्लोराइड (बहुपरमाणुक) गैस है। क्या तीनों बर्तनों में गैसों के संगत अणुओं की संख्या समान है? क्या तीनों प्रकरणों में अणुओं की v_{rms} (वर्ग माध्य मूल चाल) समान है।

13.9 किस ताप पर आर्गन गैस सिलिंडर में अणुओं की v_{rms}, – 20 °C पर हीलियम गैस परमाणुओं की v_{rms} के बराबर होगी। (Ar का परमाणु द्रव्यमान = 39.9 u, एवं हीलियम का परमाणु द्रव्यमान = 4.0 u)।

13.10 नाइट्रोजन गैस के एक सिलिंडर में, 2.0 atm दाब एवं 17 °C ताप पर, नाइट्रोजन अणुओं के माध्य मुक्त पथ एवं संघट्ट आवृत्ति का आकलन कीजिए। नाइट्रोजन अणु की त्रिज्या लगभग 1.0 Å लीजिए। संघट्ट-काल की

तुलना अणुओं द्वारा दो संघट्टों के बीच स्वतंत्रतापूर्वक चलने में लगे समय से कीजिए। (नाइट्रोजन का आण्विक द्रव्यमान = 28.0 u)।

अतिरिक्त अभ्यास

13.11 1 मीटर लंबी संकरी (और एक सिरे पर बंद) नली क्षैतिज रखी गई है। इसमें 76 cm लंबाई भरा पारद सूत्र, वायु के 15 cm स्तंभ को नली में रोककर रखता है। क्या होगा यदि खुला सिरा नीचे की ओर रखते हुए नली को ऊर्ध्वाधर कर दिया जाए।

13.12 किसी उपकरण से हाइड्रोजन गैस 28.7 $cm^3\ s^{-1}$ की दर से विसरित हो रही है। उन्हीं स्थितियों में कोई दूसरी गैस 7.2 $cm^3\ s^{-1}$ की दर से विसरित होती है। इस दूसरी गैस को पहचानिए।
[**संकेत** : ग्राहम के विसरण नियम $R_1/R_2 = (M_2/M_1)^{1/2}$ का उपयोग कीजिए, यहाँ R_1, R_2 क्रमशः गैसों की विसरण दर तथा M_1 एवं M_2 उनके आण्विक द्रव्यमान हैं। यह नियम अणुगति सिद्धांत का एक सरल परिणाम है।

13.13 साम्यावस्था में किसी गैस का घनत्व और दाब अपने संपूर्ण आयतन में एकसमान हैं । यह पूर्णतया सत्य केवल तभी है जब कोई भी बाह्य प्रभाव न हो । उदाहरण के लिए, गुरुत्व से प्रभावित किसी गैस स्तंभ का घनत्व (और दाब) एकसमान नहीं होता है । जैसा कि आप आशा करेंगे इसका घनत्व ऊँचाई के साथ घटता है । परिशुद्ध निर्भरता 'वातावरण के नियम' $n_2 = n_1 \exp\left[-\frac{mg}{k_B T}(h_2 - h_1)\right]$ से दी जाती है, यहाँ n_2, n_1 क्रमशः h_2 व h_1 ऊँचाइयों पर संख्यात्मक घनत्व को प्रदर्शित करते हैं । इस संबंध का उपयोग द्रव स्तंभ में निलंबित किसी कण के अवसादन साम्य के लिए समीकरण $n_2 = n_1 \exp\left[-\frac{mg\ N_A}{\rho\ RT}(\rho - \rho')\ \ (h_{21} - h)\right]$ को व्युत्पन्न करने के लिए कीजिए, यहाँ ρ निलंबित कण का घनत्व तथा चारों तरफ के माध्यम का घनत्व है । N_A आवोगाद्रो संख्या, तथा R सार्वत्रिक गैस नियतांक है । [**संकेत** : निलंबित कण के आभासी भार को जानने के लिए आर्किमिडीज के सिद्धांत का उपयोग कीजिए ।]

13.14 नीचे कुछ ठोसों व द्रवों के घनत्व दिए गए हैं । उनके परमाणुओं की आमापों का आकलन (लगभग) कीजिए।

पदार्थ	परमाणु द्रव्यमान (u)	घनत्व (10^3 kg m^{-3})
कार्बन (हीरा)	12.01	2.22
गोल्ड	197.00	19.32
नाइट्रोजन (द्रव)	14.01	1.00
लिथियम	6.94	0.53
फ्लुओरीन (द्रव)	19.00	1.14

[**संकेत** : मान लीजिए कि परमाणु ठोस अथवा द्रव प्रावस्था में 'दृढ़ता से बँधे' हैं, तथा आवोगाद्रो संख्या के ज्ञात मान का उपयोग कीजिए। फिर भी आपको विभिन्न परमाण्वीय आकारों के लिए अपने द्वारा प्राप्त वास्तविक संख्याओं का बिलकुल अक्षरशः प्रयोग नहीं करना चाहिए क्योंकि दृढ़ संवेष्टन सन्निकटन की रूक्षता के परमाणवीय आकार कुछ Å के परास में हैं।]

अध्याय 14

दोलन

14.1 भूमिका
14.2 दोलन और आवर्ती गति
14.3 सरल आवर्त गति
14.4 सरल आवर्त गति तथा एकसमान वर्तुल गति
14.5 सरल आवर्त गति में वेग तथा त्वरण
14.6 सरल आवर्त गति के लिए बल नियम
14.7 सरल आवर्त गति में ऊर्जा
14.8 सरल आवर्त गति निष्पादित करने वाले कुछ निकाय
14.9 अवमंदित सरल आवर्त गति
14.10 प्रणोदित दोलन तथा अनुनाद

सारांश
विचारणीय विषय
अभ्यास
अतिरिक्त अभ्यास

14.1 भूमिका

हम अपने दैनिक जीवन में विभिन्न प्रकार की गतियाँ देखते हैं। इनमें से कुछ जैसे सरल रैखिक गति और किसी प्रक्षेप्य की गति के विषय में तो आप अध्ययन कर ही चुके हैं। ये दोनों ही गतियाँ अनावर्ती होती हैं। हमने एकसमान वर्तुल गति तथा सौर परिवार में ग्रहों की कक्षीय गतियों के विषय में भी अध्ययन कर लिया है। इन उदाहरणों में निश्चित समय-अंतराल के पश्चात् गति की पुनरावृत्ति होती है, अर्थात् यह आवर्ती होती है। आपने बचपन में अपने पालने अथवा झूले पर झूलने का आनन्द लिया होगा। यह दोनों गतियाँ पुनरावर्ती होती हैं, परंतु किसी ग्रह की आवर्ती गति से भिन्न होती हैं। यहाँ वस्तु किसी माध्य स्थिति के इधर-उधर गति करती है। दीवार-घड़ी का लोलक भी इसी प्रकार की गति करता है। इस प्रकार की अग्र-पश्च (आगे-पीछे) आवर्ती गति के प्रचुर उदाहरण हैं– नदी में डूबती-उतरती हुई नाव, वाष्प इंजन में अग्र और पश्च चलता हुआ पिस्टन आदि। इस प्रकार की गति को **दोलन गति** कहते हैं। इस अध्याय में हम इस गति के बारे में अध्ययन करेंगे।

दोलन गति का अध्ययन भौतिकी के लिए आधारभूत है; बहुत-सी भौतिक परिघटनाओं को समझने के लिए इसकी संकल्पना की आवश्यकता होती है। वाद्य यंत्रों; जैसे-सितार, गिटार अथवा वायलिन में हम कंपायमान डोरियों द्वारा रोचक ध्वनियाँ उत्पन्न होते हुए देखते हैं। ढोलों में झिल्लियाँ तथा टेलीफोन और ध्वनि विस्तारकों के स्पीकरों में डायफ्राम अपनी माध्य स्थिति के इधर-उधर कंपन करते हैं। वायु के अणुओं के कंपनों द्वारा ही ध्वनि-संचरण संभव हो पाता है। एक ठोस पदार्थ में अणु अपनी माध्य स्थितियों के परित: कम्पन करते हैं, कम्पन की औसत ऊर्जा तापमान के समानुपाती होती है। AC पावर ऐसी वोल्टता का संभरण करता है जो माध्य मान (शून्य) के धनात्मक तथा ऋणात्मक ओर एकांतर क्रम से दोलायमान रहता है।

किसी आवर्ती गति के व्यापक तथा दोलन गति के विशेष विवरण के लिए कुछ मूल संकल्पनाओं; जैसे–आवर्तकाल, आवृत्ति, विस्थापन, आयाम और कला की आवश्यकता होती है। अगले अनुभाग में इन संकल्पनाओं को विकसित किया गया है।

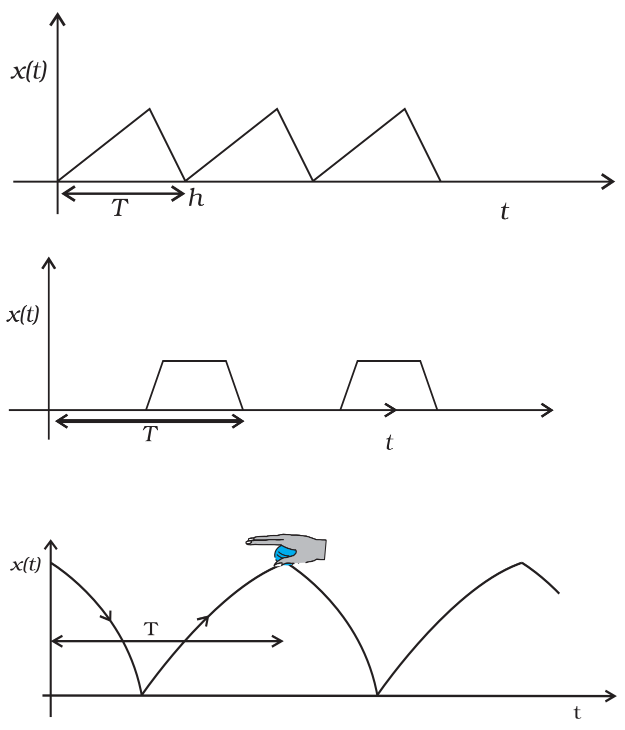
14.2 दोलन और आवर्ती गति

चित्र 14.1 में कुछ आवर्ती गतियाँ दर्शाई गई हैं। मान लीजिए कोई कीट किसी रैम्प पर चढ़ता है और गिर जाता है। वह अपने प्रारंभिक स्थान पर आ जाता है और इस प्रक्रिया को बार-बार दोहराता है। यदि आप जमीन से ऊपर इसकी ऊँचाई तथा समय के बीच ग्राफ खींचें तो यह चित्र 14.1(a) की तरह दिखेगा। यदि कोई बालक किसी सीढ़ी पर चढ़े और उतरे तथा इस प्रक्रिया को बार-बार दोहराये तो उसकी ऊँचाई तथा समय के बीच ग्राफ चित्र 14.1(b) के जैसा दिखेगा। जब आप किसी गेंद को अपनी हथेली से जमीन की तरफ बार-बार मारते हैं तो इसकी ऊँचाई और समय के बीच ग्राफ 14.3(c) के जैसा दिखेगा। ध्यान दीजिए कि चित्र 14.1(c) में दोनों वक्रीय भाग न्यूटन की गति समीकरण के अनुसार परवलय के अंश हैं, अनुभाग (3.6) देखिए।

$h = ut + \frac{1}{2}gt^2$ अधोमुखी गति के लिए, तथा

$h = ut - \frac{1}{2}gt^2$ उपरिमुखी गति के लिए,

इन समीकरणों में u का मान अलग परिस्थितियों के लिए भिन्न होगा। ये सभी आवर्ती गति के उदाहरण हैं। अतः कोई गति जो निश्चित अंतराल के बाद पुनरावृत्ति करती है ***आवर्ती गति*** कहलाती है।



चित्र 14.1 आवृत्ति गति के उदाहरण। प्रत्येक अवस्था में आवर्तकाल T दर्शाया गया है।

सामान्यतः आवर्ती गति करने वाले पिण्ड की एक संतुलन अवस्था होती है जो उसके गति के पथ में स्थित होता है। जब पिण्ड इस संतुलन अवस्था में होता है तो उस पर लगने वाला कुल बाह्य बल शून्य होता है। अतः यदि पिण्ड को इस अवस्था में विराम की स्थिति में छोड़ दें तो यह सदैव विरामावस्था में रहेगा। यदि पिण्ड को इस अवस्था से थोड़ा सा विस्थापित करें तो पिण्ड पर एक बल कार्य करने लगता है जो पिण्ड को पुनः उसकी संतुलन-अवस्था की ओर ले जाने का प्रयास करता है और फलस्वरूप पिण्ड में **दोलन** या **कंपन** उत्पन्न हो जाता है। उदाहरण के लिए यदि किसी कटोरे में एक गेंद रख दें तो गेंद कटोरे की तली पर संतुलन अवस्था में होती है। यदि इसको इस बिंदु से थोड़ा विस्थापित करें तो गेंद कटोरे में दोलन करने लगती है। प्रत्येक दोलन गति आवर्ती होती है परंतु प्रत्येक आवर्ती गति दोलनीय नहीं होती। वर्तुल गति भी आवर्ती होती है, परंतु दोलनीय नहीं होती है।

दोलन एवं कंपन में कोई मुख्य अंतर नहीं है। साधारणतः जब आवृत्ति का मान कम होता है तो हम गति को दोलनीय कहते हैं (जैसे किसी वृक्ष की टहनी की दोलन गति)। इसके विपरीत जब गति की आवृत्ति अधिक होती है तो हम गति को कंपन कहते हैं। जैसे किसी संगीत वाद्य के तार का कंपन।

सरल आवर्ती गति दोलनीय गति का एक सरल रूप है। यह तब होता है जब किसी दोलनीय वस्तु के ऊपर लगने वाला बल संतुलन अवस्था में इसके विस्थापन के समानुपाती होता है। पुनः वस्तु के दोलन के दौरान यह बल सदैव इस संतुलन अवस्था की तरफ निदेशित होता है। यह संतुलन अवस्था वस्तु की गति की माध्य स्थिति भी होती है।

व्यावहारिक रूप में सभी दोलनीय वस्तुएँ अंततोगत्वा अपनी संतुलन अवस्था को प्राप्त कर लेती हैं। क्योंकि इनकी गति में घर्षण तथा अन्य क्षयकारी बलों के कारण अवमंदन उत्पन्न होता है। परंतु कोई बाह्य आवर्ती बल लगाकर हम वस्तु को दोलनीय अवस्था में रख सकते हैं। इस पाठ के अंतिम अनुभागों में हम अवमंदित तथा प्रणोदित दोलनों का अध्ययन करेंगे।

किसी भी द्रव्यात्मक माध्यम को हम युग्मित दलित्रों का एक बड़ा समूह मान सकते हैं। इन दलित्रों के सामूहिक दोलन तरंग का रूप लेते हैं। जल तरंग, भूकम्पित तरंगें, विद्युत चुंबकीय तरंगें इन तरंगों के उदाहरण हैं। तरंगीय घटनाओं के विषय में हम अगले अध्याय में अध्ययन करेंगे।

14.2.1 आवर्तकाल तथा आवृत्ति

हमने देखा है कि कोई गति जिसकी किसी नियमित समय अंतराल पर स्वयं पुनरावृत्ति होती है **आवर्ती गति** कहलाती है। ***वह न्यूनतम समय अंतराल जिसके पश्चात् गति की पुनरावृत्ति होती है, इसका आवर्तकाल कहलाता है।*** अतः समय को हम

T द्वारा दर्शाते हैं। इसका SI मात्रक सेकंड है । उन आवर्ती गतियों के लिए, जो सेकंडों के पैमाने पर या तो बहुत तीव्र अथवा बहुत मंद होती हैं, समय के अन्य सुविधाजनक मात्रक उपयोग में लाए जाते हैं । किसी क्वार्ट्ज़ क्रिस्टल का कंपन काल माइक्रोसेकंड (10^{-6} s) के मात्रकों, जिसका प्रतीक μs है, में व्यक्त किया जाता है । इसके विपरीत बुध ग्रह की कक्षीय अवधि 88 भू-दिवस होती है। हेली धूमकेतु हर 76 वर्ष के पश्चात् पुन: दृष्टिगोचर होता है ।

आवर्तकाल 'T' के व्युत्क्रम से हमें प्रति इकाई समय में दोलनों की संख्या प्राप्त होती है । यह राशि **आवर्ती गति की आवृत्ति** कहलाती है । इसे प्रतीक υ द्वारा निरूपित किया जाता है । ν तथा T के मध्य निम्नलिखित पारस्परिक संबंध होता है:

$$\nu = \frac{1}{T} \tag{14.1}$$

इस प्रकार ν का मात्रक (s^{-1}) है । रेडियो तरंगों के आविष्कारक हेनरिख रुडोल्फ हर्ट्ज़ (1857-1894) के नाम पर आवृत्ति के मात्रक को एक विशेष नाम दिया गया । इसे हर्ट्ज़ (hertz प्रतीक Hz) कहते हैं । इस प्रकार,

$$1 \text{ हर्ट्ज़} = 1 \text{ Hz} = 1 \text{ दोलन प्रति सेकंड} = 1 s^{-1} \tag{14.2}$$

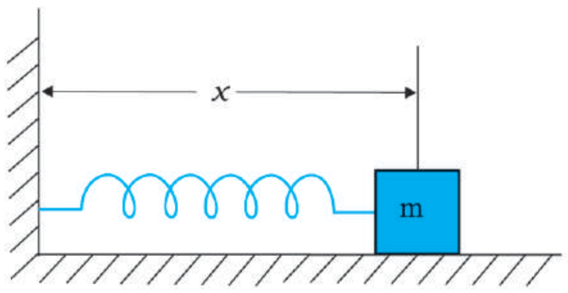
ध्यान दीजिए, आवृत्ति का सदैव ही पूर्णांक होना आवश्यक नहीं है ।

▶ ***उदाहरण 14.1*** कोई मानव हृदय एक मिनट में औसतन 75 बार धड़कन करता पाया जाता है । इसकी आवृत्ति तथा आवर्तकाल परिकलित कीजिए ।

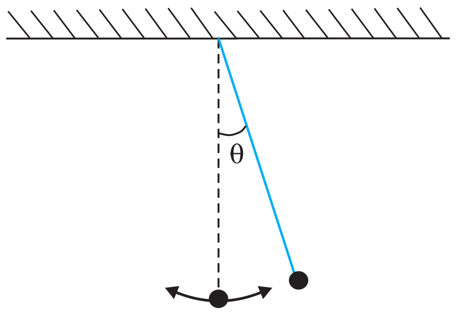
हल हृदय की धड़कन की आवृत्ति = 75/(1 मिनट)
= 75/(60 s)
= 1.25 s^{-1}
आवर्तकाल, T = 1/(1.25 s^{-1})
= 0.8 s ◀

14.2.2 विस्थापन

अनुभाग 4.2 में हमने किसी कण के विस्थापन को उसके स्थिति सदिश में परिवर्तन के रूप में परिभाषित किया था । इस अध्याय में हम विस्थापन नामक इस पद का उपयोग अधिक व्यापक अर्थों में करेंगे । यह किसी भी विचारणीय भौतिक गुण में समय के साथ परिवर्तन को निरूपित करेगा । उदाहरण के लिए, एक पृष्ठ पर किसी स्टील बॉल की सरल रेखीय गति के लिए, समय के फलन के रूप में आरंभ बिंदु से बॉल की दूरी इसका **स्थिति-विस्थापन** है । मूल बिंदु का चुनाव सुविधानुसार किया जा सकता है । मान लीजिए कोई गुटका किसी कमानी से जुड़ा है जिसका दूसरा सिरा किसी दृढ़ दीवार से संबद्ध है [देखिए चित्र 14.2 (a)] साधारणत: किसी पिण्ड का विस्थापन इसकी संतुलन अवस्था से मापना सरल होगा। किसी दोलायमान



चित्र 1.4.2(a) कोई गुटका किसी कमानी से संलग्न, जिसका दूसरा सिरा किसी दृढ़ दीवार से संबद्ध है । गुटका घर्षण रहित पृष्ठ पर गति करता है । गुटके की गति को दीवार से दूरी, अथवा विस्थापन x के पदों में व्यक्त किया जा सकता है ।



चित्र 14.2(b) एक दोलायमान सरल लोलक, इसकी गति को ऊर्ध्वाधर से कोणीय विस्थापन θ के पदों में व्यक्त किया जा सकता है ।

सरल लोलक के लिए, समय के फलन के रूप में ऊर्ध्वाधर से कोण को विस्थापन-चर के रूप में निरूपित किया जा सकता है [देखिए चित्र 14.2(b)]। 'विस्थापन' पद का उल्लेख सदैव स्थिति के संदर्भ में ही नहीं किया जाता। विस्थापन चर कई अन्य प्रकार के भी हो सकते हैं । किसी a.c. परिपथ में संयोजित संधारित्र के सिरों के बीच समय के साथ परिवर्तित हो रही "वोल्टता" को भी एक विस्थापन चर के रूप में लिया जा सकता है । इसी प्रकार, ध्वनि तरंगों के संचरण में समय के साथ 'दाब' में परिवर्तन, प्रकाश तरंगों में परिवर्तित हो रहे वैद्युत तथा चुंबकीय क्षेत्र अन्य संदर्भों में विस्थापन के उदाहरण हैं। विस्थापन चर का मान धनात्मक या ऋणात्मक हो सकता है। दोलनों के प्रयोगों में, भिन्न समयों के लिए विस्थापन चरों की माप ली जाती है ।

विस्थापन को सदैव ही समय के गणितीय फलन द्वारा निरूपित किया जा सकता है । आवर्ती गतियों में यह फलन समय का आवर्ती होता है । आवर्ती फलनों में से एक सरलतम आवर्ती फलन को निम्न प्रकार से व्यक्त कर सकते हैं,

$$f(t) = A \cos \omega t \qquad (14.3a)$$

यदि इस फलन के कोणांक, ωt, में 2π रेडियन या इसके किसी पूर्णांक गुणज की वृद्धि कर दी जाए, तो फलन का मान वही f रहता है । तब भी फलन $f(t)$ आवर्ती ही रहता है जिसका आवर्तकाल, T निम्नलिखित होगा,

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad (14.3b)$$

अतः कोई फलन $f(t)$ काल T का आवर्ती होता है,

$$f(t) = f\ (t+T)$$

यदि हम ज्या (sin) फलन, $f(t) = A \sin \omega t$ भी लें तो स्पष्ट रूप से यही परिणाम सही होता है । साथ ही ज्या (sin) एवं कोज्या (cos) फलनों का एक घात संचय, जैसे

$$f(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t \qquad (14.3c)$$

भी आवर्ती फलन होता है, जिसका आवर्तकाल T होता है । यदि हम

$$A = D \cos \phi \text{ तथा } B = D \sin \phi$$

लें, तो समीकरण (14.3c) को इस प्रकार लिख सकते हैं

$$f(t) = D \sin (\omega t + \phi)\ , \qquad (14.3d)$$

यहाँ अचर D और ϕ दिए गए हैं

$$D = \sqrt{A^2 + B^2} \text{ तथा } \phi = \tan^{-1}\left(\frac{B}{A}\right)$$

आवर्ती ज्या और कोज्या फलनों का विशेष महत्त्व फ्रांसीसी गणितज्ञ जीन बापटिस्ट जोसेफ फूरिए (1768–1830) द्वारा सिद्ध असाधारण परिणाम के कारण है, जो इस प्रकार है : ***किसी भी आवर्ती फलन को उचित गुणांक वाले विभिन्न आवर्तकाल के ज्या व कोज्या फलनों के अध्यारोपण द्वारा व्यक्त किया जा सकता है ।***

▸ ***उदाहरण 14.2*** निम्नलिखित समय के फलनों में कौन (a) आवर्ती तथा (b) अनावर्ती गति को निरूपित करते हैं ? प्रत्येक आवर्ती गति का आवर्तकाल लिखिए [ω कोई धनात्मक नियतांक है] ।

(i) $\sin \omega t + \cos \omega t$

(ii) $\sin \omega t + \cos 2\omega t + \sin 4\,\omega t$

(iii) $e^{-\omega t}$

(iv) $\log (\omega t)$

हल (i) $\sin\ \omega t + \cos\ \omega t$ एक आवर्ती फलन है। इसे $\sqrt{2} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$ के रूप में भी व्यक्त किया जा सकता है।

अब, $\sqrt{2}\ \sin (\omega t + \pi/4) = \sqrt{2}\ \sin (\omega t + \pi/4 + 2\pi)$

$$= \sqrt{2} \sin\left[\omega\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) + \frac{\pi}{4}\right]$$

इस फलन का आवर्तकाल $\frac{2\pi}{\omega}$ है ।

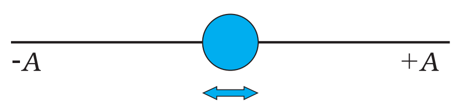
(ii) यह आवर्ती गति का एक उदाहरण है । ध्यान दीजिए, यहाँ प्रत्येक पद एक विभिन्न कोणीय आवृत्ति के आवर्ती फलन को निरूपित करता है । चूँकि आवर्तकाल वह न्यूनतम समय अंतराल होता है जिसके पश्चात् फलन अपने मान की स्वयं पुनरावृत्ति करता है, $\sin\ \omega t$ का आवर्तकाल $T_0 = 2\pi/\omega$; $\cos 2\omega t$ का आवर्तकाल $\pi/\omega = T_0/2$; तथा $\sin 4\ \omega t$ का आवर्तकाल $2\pi/4\ \omega = T_0/4$ होता है । प्रथम पद का आवर्तकाल अंतिम दो पदों के आवर्तकालों का गुणनफल होता है। अतः अंतिम समय का निम्न अंतराल जिसके उपरांत तीनों पदों का योग पुनरावृत्ति करता है T_0 होता है जिसका आवर्त काल $2\pi/\omega$ है।

(iii) फलन $e^{-\omega t}$ अनावर्ती है, यह समय में वृद्धि के साथ एक दिष्टत: घटता है तथा $t\rightarrow\infty$ होने पर शून्य की ओर प्रवृत्त होता है और इस प्रकार कभी भी अपने मान की पुनरावृत्ति नहीं करता ।

(iv) फलन $\log (\omega t)$ समय के साथ एकदिष्टत: बढ़ता है । अत: यह अपने मान की कभी भी पुनरावृत्ति नहीं करता और यह एक अनावर्ती फलन है । ध्यान दीजिए, $t\rightarrow\infty$ होने पर $\log\ \omega t$ अपसारित होकर ∞ तक पहुँच जाता है। अत: यह किसी भी प्रकार के भौतिक विस्थापन को निरूपित नहीं कर सकता । ◂

14.3 सरल आवर्त गति

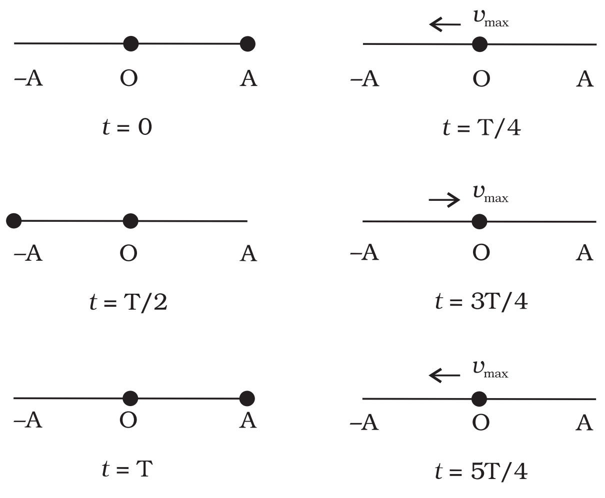
हम चित्र 14.3 के अनुसार x-अक्ष के मूल बिंदु पर $+A$ और $-A$ चरम सीमाओं के मध्य अग्र और पश्च कंपन करने वाले किसी कण पर विचार करें । इस दोलायमान गति को **सरल आवर्त गति** कहते हैं, यदि मूल बिन्दु से कण का विस्थापन x समय के साथ निम्न समीकरण के अनुसार परिवर्तित हो:



चित्र 14.3 x-अक्ष के मूल बिंदु पर +A और –A सीमाओं के भीतर अग्र और पश्च कंपन करते हुए कोई कण ।

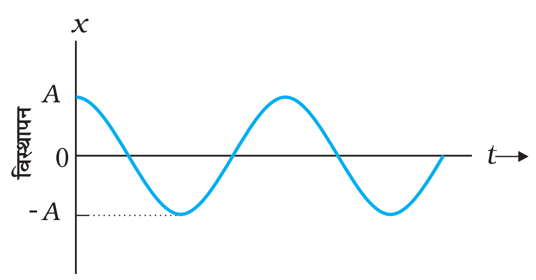
$$x\,(t) \ = A \cos\,(\omega t + \phi) \qquad (14.4)$$

यहाँ A, ω तथा ϕ स्थिरांक हैं। अतः प्रत्येक आवर्त गति सरल आवर्त गति (SHM) नहीं है; केवल ऐसी आवर्त गति जिसमें विस्थापन-समय का फलन ज्यावक्रीय है, सरल आवर्त गति होती है। चित्र 14.4 में सरल आवर्त गति करते हुए एक कण की



चित्र 14.4 सरल आवर्त गति करते हुए समय के असतत मान t = 0. T/4, T/2, 3T/4, T, 5T/4 पर कण की स्थिति। वह समय जिसके पश्चात गति की पुनरावृत्ति होती है, T कहलाती है। प्रारंभिक स्थिति (t = 0) आप कुछ भी चुनें, T का मान स्थिर रहेगा। कण की चाल शून्य विस्थापन (x = 0 पर) पर अधिकतम तथा गति की चरम स्थितियों पर शून्य होती है।

समय के असतत् मानों पर स्थिति दर्शायी गई है। प्रत्येक समय अन्तराल $T/4$ है जहाँ T गति का आवर्तकाल है।



चित्र 14.5 सरल आवर्त गति करते हुए कण का विस्थापन समय के सतत फलन के रूप में

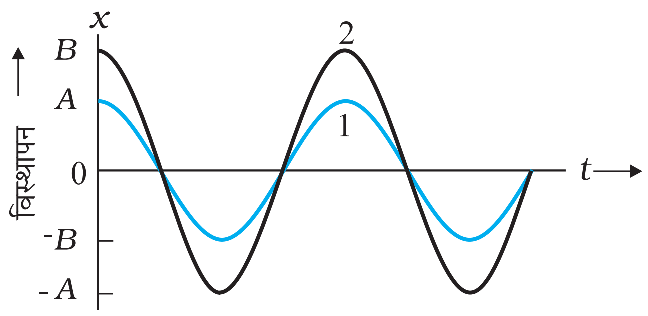
चित्र 14.5 में x के साथ t का ग्राफ आलेखित है जो समय के सतत फलन के रूप में कण के विस्थापन का मान देती है। राशियाँ A, ω तथा ϕ जो दी गई आवर्त गति की विशेषता बताती

$x(t)$	:	विस्थापन x, समय t के फलन के रूप में
A	:	आयाम
ω	:	कोणीय आवृत्ति
$\omega t + \phi$	:	कला (समय पर आश्रित)
ϕ	:	कला स्थिरांक

चित्र 14.6 समीकरण (14.4) में दिए मानक संकेतों का अर्थ

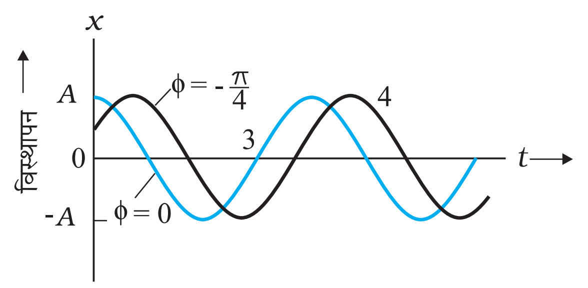
हैं, के मानक नाम हैं, जैसा कि चित्र 14.6 में संक्षिप्त किया गया है। आइए, इन राशियों को हम समझें।

SHM का आयाम A, कण के अधिकतम विस्थापन का परिमाण होता है। [ध्यान दें, व्यापकीकृकता के बिना किसी नुकसान के, A को धनात्मक लिया जा सकता है]। चूंकि समय का कोज्या फलन $+1$ से -1 के बीच विचरण करता है, इसलिए विस्थापन चरम स्थिति $+A$ से $-A$ के बीच विचरण करेगा। दो सरल आवर्त गतियों के ω तथा ϕ समान, लेकिन आयाम अलग हो सकते हैं, जैसा कि चित्र 14.7(a) में दिखाया गया है।



चित्र 14.7 (a) समीकरण (14.4) से प्राप्त $\phi = 0$ पर समय के फलन के रूप में विस्थापन का आलेख । वक्र 1 और 2 दो भिन्न आयामों A तथा A के लिए हैं ।

जब किसी दिए गए आवर्त गति का आयाम A नियत है, किसी समय t पर कण की गति की आवस्था को कोज्या फलन के कोणांक $(\omega t + \phi)$ के द्वारा दर्शाया जाता है। समय पर आश्रित रहने वाली इस राशि $(\omega t + \phi)$ को गति की कला कहते हैं। $t = 0$ पर कला का परिमाण ϕ होता है जिसे कला नियतांक (अथवा कला-कोण) कहते हैं। यदि आयाम ज्ञात हो तो $t = 0$ पर के विस्थापन मान से ϕ ज्ञात किया जा सकता है। दो सरल आवर्त गतियों के A तथा ω समान लेकिन कला-कोण ϕ विभिन्न हो सकते हैं, जैसा कि चित्र 14.7 (b) में दर्शाया गया है।



चित्र 14.7(b) समीकरण (14.4) से प्राप्त (x-t) आलेख । वक्र 3 तथा 4 क्रमश: कला कोण ϕ = 0 rad तथा $\phi = -\pi/4$ rad के लिए हैं। दोनों आलेखों के लिए आयाम A समान है।

अंतत: राशि ω को गति के आवर्तकाल T से संबंधित देखा जा सकता है। सरलता के लिए समीकरण (14.4) में ϕ = 0 rad लेने पर हमें प्राप्त होता है–

$$x(t) = A\cos \omega t \qquad (14.5)$$

चूँकि गति का आवर्तकाल T है, $x(t)$ का मान $x(t+T)$ के समान होगा। अर्थात्,

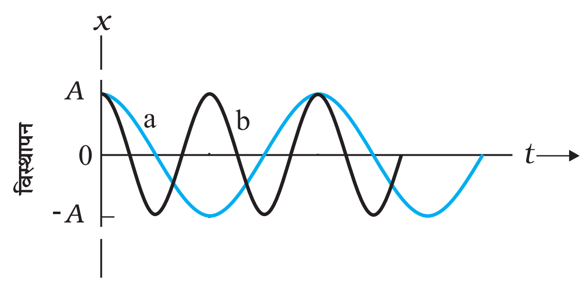
$$A \cos \omega t = A \cos \omega(t+T) \qquad (14.6)$$

अब चूँकि 2π आवर्त काल वाला कोज्या फलन आवर्ती है, अर्थात् जब कोणांक 2π रेडियन से परिवर्तित होता है, यह प्रथम बार स्वयं की पुनरावृत्ति करता है। अत:

$$\omega(t+T) = \omega t + 2\pi$$

अर्थात् $$\omega = 2\pi/T \qquad (14.7)$$

ω को SHM की कोणीय आवृत्ति कहते हैं। इसका S.I. मात्रक रेडियन प्रति सेकेंड है। चूंकि दोलन की आवृत्ति मात्र $1/T$ है, ω दोलन की आवृत्ति का 2π गुणा होता है। दो सरल आवर्त गति के A तथा ϕ समान, किन्तु ω विभिन्न हो सकते हैं, जैसा कि चित्र 11.8 में देखा जा सकता है। इस आलेख में वक्र b का आवर्त काल वक्र a के आवर्त काल का आधा है जबकि इसकी आवृत्ति वक्र a की आवृत्ति की दुगुनी है।



चित्र 14.8 समीकरण (14.4) के ϕ = 0 rad पर दो भिन्न आवर्तकालों के लिए आलेख।

उदाहरण 14.3 समय के निम्नलिखित फलनों में से कौन (a) सरल आवर्त गति तथा (b) आवर्ती गति को निरूपित करता है परंतु सरल आवर्त गति नहीं ? प्रत्येक का आवर्तकाल निकालिए ।

(a) $\sin \omega t - \cos \omega t$

(b) $\sin^2 \omega t$

हल (a) $\sin \omega t - \cos \omega t$

$= \sin \omega t - \sin (\pi/2 - \omega t)$

$= 2 \cos (\pi/4) \sin (\omega t - \pi/4)$

$= \sqrt{2} \sin (\omega t - \pi/4)$

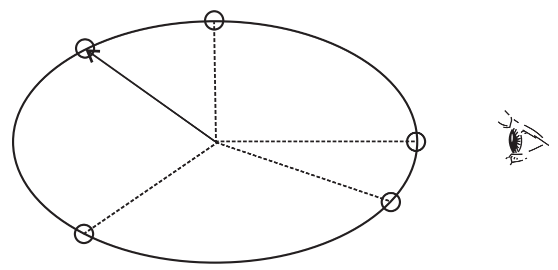
यह फलन सरल आवर्त गति का निरूपण करता है, जिसका आवर्तकाल $T = 2\pi/\omega$ तथा कला-कोण $(-\pi/4)$ rad अथवा $(7\pi/4)$ rad है ।

(b) $\sin^2 \omega t = ½ - ½ \cos 2\omega t$

यह फलन आवर्ती है, जिसका आवर्तकाल $T=\pi/\omega$ है । ये संतुलन बिंदु शून्य के बदले ½ पर सरल आवर्त गति को भी दर्शाता है। ◂

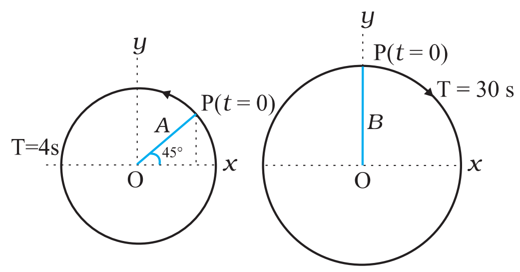
14.4 सरल आवर्त गति तथा एकसमान वर्तुल गति

इस अनुभाग में हम देखेंगे कि वृत्त के व्यास पर एकसमान वर्तुल गति का प्रक्षेप सरल आवर्त गति करता है। एक सरल प्रयोग (चित्र 14.9) इस संबंध की सजीव कल्पना करने में हमारी मदद करता है। एक गेंद को किसी डोरी के सिरे से बाँधकर क्षैतिज तल में उसे किसी निश्चित बिंदु के परित: अचर कोणीय चाल से गति कराइये। तब गेंद क्षैतिज तल में एकसमान वर्तुल गति करेगी। अपनी आंख को गति के तल पर केन्द्रित रखते हुए तिरछी ओर से अथवा सामने से गेंद का अवलोकन कीजिए। घूर्णन बिन्दु को यदि हम मध्य बिन्दु मानें तो यह गेंद एक क्षैतिज तल के अनुदिश इधर-उधर गति करती हुई प्रतीत होगी। विकल्पत: आप गेंद की परछाई वृत्त के तल के लंबवत् किसी दीवार पर भी देख सकते हैं। इस प्रक्रिया में हम जो कुछ अवलोकन करते हैं, वास्तव में वह हमारी दृष्टि की दिशा के अभिलंबवत् व्यास पर बॉल की गति होती है।



चित्र 14.9 किनारे से देखे गए एक समतल में बॉल की वृत्तीय गति सरल आवर्त गति है।

चित्र 14.10 इसी स्थिति को गणितीय रूप में वर्णन करता है। मान लीजिए कोई कण P, त्रिज्या A के एक वृत्त पर कोणीय चाल ω से एकसमानीय गति कर रहा है। घूमने की दिशा वामावर्त है। कण की प्रारंभिक 'स्थिति सदिश' अर्थात् $t = 0$ पर सदिश $\overline{OP}$, धनात्मक x अक्ष के साथ कोण ϕ बनाता है।



चित्र 14.10

t समय के बाद यह अगला कोण ωt पूरा करता है और इसकी 'स्थिति सदिश' +ve x-अक्ष के साथ एक कोण $\omega t+\phi$ बनाती है। अब x-अक्ष पर 'स्थिति सदिश' OP के प्रक्षेप पर विचार करें। यह OP′ होगा। जब कण P वृत्त पर गति करता है तो x-अक्ष पर P′ की स्थिति प्रदत्त की जाती है

$$x(t) = A \cos (\omega t + \phi)$$

जो कि SHM का पारिभाषिक समीकरण है। यह दर्शाता है कि यदि P किसी वृत्त पर एकसमानीय गति करता है तो इसका प्रक्षेप P′ वृत्त के व्यास पर सरल आवर्त गति करता है। कण P तथा वह वृत्त जिसपर यह गति करता है उसे क्रमश: संदर्भ कण तथा संदर्भ वृत्त कहते हैं।

P की गति के प्रक्षेप को हम किसी भी व्यास, जैसे कि y-अक्ष पर ले सकते हैं। इस स्थिति में y-अक्ष पर P′ का विस्थापन $y(t)$ होगा।

$$y(t) = A \sin (\omega t + \phi)$$

यह भी एक SHM है जिसका आयाम x-अक्ष पर प्रक्षेप के समान ही है, लेकिन इसकी कला $\pi/2$ से भिन्न है।

वर्तुल गति तथा SHM के बीच इस संबंध के बावजूद रैखिक सरल आवर्ती गति में किसी कण पर लगता हुआ बल किसी कण को एकसमान वर्तुल गति में रखने के लिए आवश्यक अभिकेन्द्रीय बल से काफी अलग है।

▶ ***उदाहरण 14.4*** चित्र 14.10 में दो वर्तुल गतियाँ दर्शायी गई हैं । इन चित्रों पर वृत्त की त्रिज्या, घूर्णन का आवर्तकाल, आरंभिक स्थिति तथा घूर्णन की दिशा अंकित की गई है । प्रत्येक स्थिति में घूर्णी कण P के त्रिज्या सदिश के x-प्रक्षेप की सरल आवर्त गति प्राप्त कीजिए ।

हल

(a) $t = 0$ पर, OP x-अक्ष (की धनात्मक दिशा) से 45° $= \pi/4$ rad का कोण बनाता है । t समय पश्चात् यह वामावर्त दिशा में $\frac{2\pi}{T}t$ rad कोण पूरा करता है, तथा x-अक्ष से $\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{\pi}{4}\right)$ rad कोण बनाता है । समय t पर x-अक्ष पर OP के प्रक्षेप इस प्रकार व्यक्त करते हैं :

$$x(t) = A \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{\pi}{4}\right)$$

$T = 4$ s के लिए

$$x(t) = A \cos\left(\frac{2\pi}{4}t + \frac{\pi}{4}\right)$$

जो कि A आयाम, 4 s आवर्तकाल तथा प्रारंभिक कला* $\frac{\pi}{4}$ की सरल आवर्त गति है ।

(b) इस स्थिति में $t = 0$ पर, OP x-अक्ष से 90° = $\pi/2$ का कोण बनाता है । यह दक्षिणावर्त दिशा में $\frac{2\pi}{T}t$ कोण

* कोण की प्राकृतिक इकाई रेडियन है जिसे त्रिज्या की चाप के अनुपात द्वारा परिभाषित करते हैं। कोण अदिश राशि है। जब हम π को उसके बहुगुण या अपवर्तक लिखते हैं तो रेडियन इकाई का उल्लेख करना आवश्यक नहीं है। रेडियन और डिग्री के बीच रूपांतरण, मीटर, सेंटीमीटर या मील के बीच रूपांतरण के समरूप नहीं है। यदि किसी त्रिकोणमितीय फलन के कोणांक में इकाई नहीं दिया है तो मानना चाहिए कि इकाई रेडियन है। यदि कोण की इकाई डिग्री है तो उसको स्पष्टत: दर्शाना होगा। उदाहरण के लिए $\sin(15^0)$ का अर्थ है 15 डिग्री का sin। परन्तु sin (15) का तात्पर्य 15 रेडियन का sin है। आगे से 'rad' इकाई नहीं दर्शाया जाएगा। जब भी कोण का अंकिक मान बिना इकाई के दिया हुआ है तो इकाई वास्तव में रेडियन है।

पूरा करता है, तथा x-अक्ष से $\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{T}t\right)$ कोण बनाता है । समय t पर x-अक्ष पर OP प्रक्षेप को इस प्रकार व्यक्त करते हैं :

$$x(t) = B\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{T}t\right)$$

$$= B\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

T = 30 s के लिए,

$$x(t) = B\sin\left(\frac{\pi}{15}t\right)$$

इसे इस प्रकार $x(t) = B\cos\left(\frac{\pi}{15}t-\frac{\pi}{2}\right)$ लिखकर इसकी समीकरण (14.4) से तुलना करने पर हमें यह ज्ञात होता है कि यह B आयाम, 30 s आवर्तकाल तथा प्रारंभिक कला $-\frac{\pi}{2}$ rad की सरल आवर्त गति को निरूपित करता है । ◀

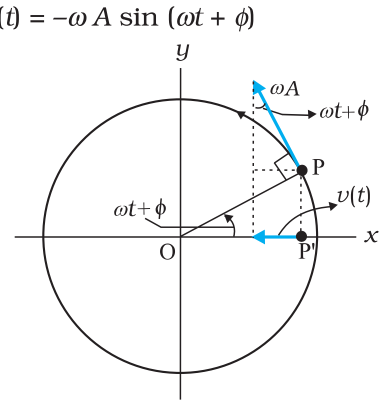
14.5 सरल आवर्त गति में वेग तथा त्वरण

एकसमानीय वर्तुल गति करते हुए किसी कण की चाल इसकी कोणीय चाल गुणा वृत्त की त्रिज्या A के बराबर होती है।

$$v = \omega A \qquad (14.8)$$

किसी समय t पर, वेग की दिशा वृत्त के उस बिन्दु पर स्पर्शज्या के अनुदिश होती है जहाँ कण उस क्षण पर अवस्थित रहता है। चित्र 14.11 की ज्यामिति से यह स्पष्ट है कि समय t पर प्रक्षेप कण P′ का वेग है

$$v(t) = -\omega A\sin(\omega t+\phi) \qquad (14.9)$$



चित्र 14.11 कण P′ का वेग $v(t)$ संदर्भ कण P के वेग $\bar{v}$ का प्रक्षेप है ।

यहाँ ऋणात्मक चिह्न यह दर्शाता है कि $v(t)$ की दिशा x-अक्ष की धनात्मक दिशा के विपरीत है। समीकरण (14.9), सरल आवर्त गति करते हुए कण की तात्क्षणिक वेग प्रदत्त करता है, जहाँ विस्थापन समीकरण (14.4) से प्राप्त होता है। निस्संदेह इस समीकरण को हम बिना ज्यामितीय कोणांक के भी प्राप्त कर सकते हैं। इसके लिए सीधे समीकरण (14.4) को t के सापेक्ष अवकलित करते हैं :

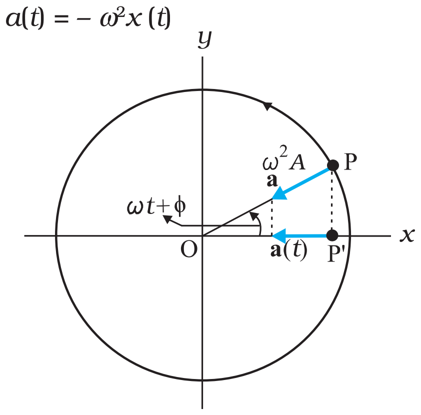
$$v(t) = \frac{d}{dt}x(t) \qquad (14.10)$$

सरल आवर्त गति करते हुए कण के तात्क्षणिक त्वरण को प्राप्त करने के लिए संदर्भ वृत्त की विधि को इसी प्रकार प्रयोग में लाया जा सकता है।

हमें ज्ञात है कि एकसमानीय वर्तुल गति में कण के अभिकेन्द्रीय त्वरण का परिमाण v^2/A अथवा $\omega^2 A$ है तथा यह केन्द्र की ओर निर्दिष्ट है, अर्थात इसकी दिशा PO की ओर है। प्रक्षेप कण P′ का तात्क्षणिक त्वरण तब होगा (चित्र 14.12 देखें)

$$a(t) = -\omega^2 A\cos(\omega t+\phi)$$

$$a(t) = -\omega^2 x(t) \qquad (14.11)$$



*चित्र 14.12 बिंदु P′ का त्वरण $a(t)$, संदर्भ बिंदु P के त्वरण **a** का प्रक्षेप होता है ।*

समीकरण (14.11) सरल आवर्त गति करते हुए कण का त्वरण व्यक्त करता है। इसी समीकरण को, समीकरण (14.9) से प्रदत्त वेग $v(t)$ को समय के सापेक्ष अवकलित करके सीधे प्राप्त किया जा सकता है:

$$a(t) = \frac{d}{dt}v(t) \qquad (14.12)$$

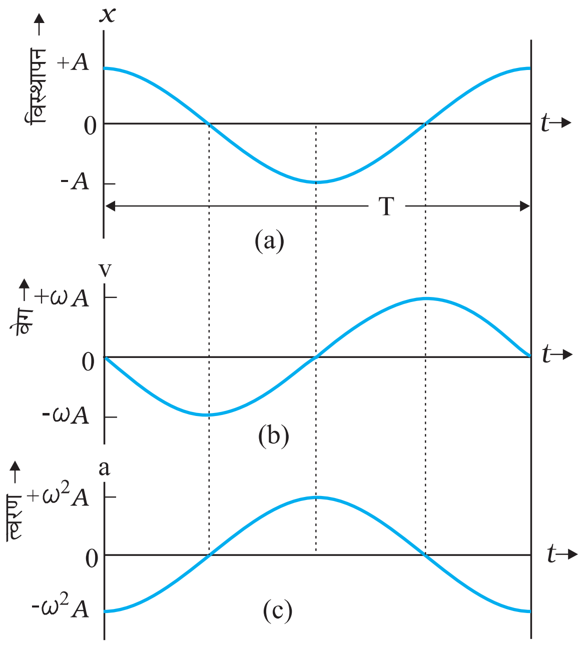
समीकरण (14.11) से हम एक महत्त्वपूर्ण परिणाम पर ध्यान देते हैं कि सरल आवर्त गति में कण का त्वरण इसके विस्थापन के अनुक्रमानुपाती होता है। $x(t) > 0$ के लिए $a(t) < 0$ तथा $x(t) < 0$ के लिए $a(t) > 0$ होता है। अत: $-A$ तथा A के

बीच x का मान कुछ भी हो, त्वरण a(t) हमेशा केन्द्र की ओर निर्दिष्ट रहता है।

सरलता के लिए हम $\phi = 0$ रख कर $x(t)$, $\upsilon(t)$ और $a(t)$ के व्यंजक को लिखते हैं

$x(t)=A \cos \omega t$, $\upsilon(t)=-\omega A \sin \omega t$, $a(t)=-\omega^2 A \cos \omega t$

संगत आलेख को चित्र 14.13 में दर्शाया गया है। सभी राशियाँ समय के साथ ज्यावक्रीय विचरण करती हैं; केवल उनकी उच्चिष्ठ (maxima) में अन्तर होता है तथा उनके आलेखों में कलाओं की भिन्नता होती है। x, $-A$ तथा A के मध्य विचरण करता है; $\upsilon(t)$, $-\omega A$ तथा ωA के मध्य विचरण करता है एवं $a(t)$, $-\omega^2 A$ तथा $\omega^2 A$ के मध्य विचरण करता है। विस्थापन आलेख के सापेक्ष, वेग आलेख की कला में $\pi/2$ का अंतर है तथा त्वरण आलेख की कला में π का अंतर है।



चित्र 14.13 सरल आवर्त गति में किसी कण का विस्थापन, वेग तथा त्वरण का आवर्तकाल T समान होता है, लेकिन उनकी कलाओं में भिन्नता होती है।

उदाहरण 14.5 : कोई पिंड निम्नलिखित समीकरण के अनुसार सरल आवर्त गति से दोलन करता है,

$x = (5.0 \text{ m}) \cos [(2\pi \text{ rad/s})\, t + \pi/4]$

$t = 1.5$ s पर, पिंड का (a) विस्थापन, (b) वेग तथा (c) त्वरण परिकलित कीजिए।

हल पिंड की कोणीय आवृत्ति $\omega = 2\pi \text{ s}^{-1}$ तथा इसका आवर्तकाल $T = 1$ s

$t = 1.5$ s पर,

(a) विस्थापन $= (5.0 \text{ m}) \cos [(2\pi \text{ s}^{-1}) \times 1.5 \text{ s} + \frac{\pi}{4}]$

$= (5.0 \text{ m}) \cos [(3\pi + \frac{\pi}{4})]$

$= -5.0 \times 0.707 \text{ m}$

$= -3.535 \text{ m}$

(b) समीकरण (14.9) का उपयोग करने पर पिंड का वेग

$= -(5.0 \text{ m})\,(2\pi \text{ s}^{-1}) \sin [(2\pi \text{ s}^{-1}) \times (1.5 \text{ s} + \frac{\pi}{4})]$

$= -(5.0 \text{ m})\,(2\pi \text{ s}^{-1}) \sin [(3\pi + \frac{\pi}{4})]$

$= 10\pi \times 0.707 \text{ m s}^{-1}$

$= 22 \text{ m s}^{-1}$

(c) समीकरण (14.10) का उपयोग करने पर पिंड का त्वरण

$= -(2\pi \text{ s}^{-1})^2 \times$ विस्थापन

$= -(2\pi \text{ s}^{-1})^2 \times (-3.535 \text{ m})$

$= 140 \text{ m s}^{-2}$ ◀

14.6 सरल आवर्त गति के लिए बल का नियम

न्यूटन की गति के दूसरे नियम तथा आवर्त गति करते किसी कण के लिए त्वरण के व्यंजक (समीकरण 14.11) प्रयोग करने पर

$$F(t) = ma$$

$$= -m\omega^2 x(t)$$

अथवा, $F(t) = -k\,x(t)$ (14.13)

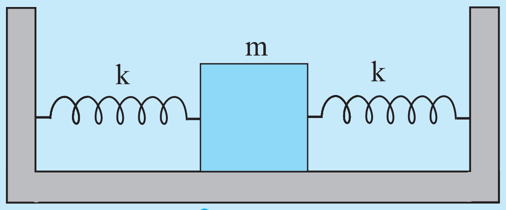
यहाँ $k = m\omega^2$ (14.14a)

अथवा, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ (14.14b)

त्वरण की तरह, बल हमेशा माध्य स्थिति की ओर निर्दिष्ट रहता है – इसलिए यह सरल आवर्त गति में प्रत्यानयन बल कहलाता है। अब तक की गई चर्चाओं को संक्षिप्त करने पर हम पाते हैं कि सरल आवर्त गति को दो प्रकार से परिभाषित किया जा सकता है, या तो विस्थापन के लिए समीकरण (14.4) द्वारा अथवा समीकरण (14.13) द्वारा जो कि बल के नियम प्रदान करता है। समीकरण (14.4) से समीकरण (14.13) प्राप्त करने के लिए हमें इसे दो बार अवकलित करना पड़ा। इसी प्रकार बल के नियम, समीकरण (14.13) को दो बार समाकलित करने पर हमें वापस समीकरण (14.4) प्राप्त हो सकता है।

ध्यान दीजिए कि समीकरण (14.13) में बल $x(t)$ के रैखिकीय समानुपाती है। अतः इस तरह के बल के प्रभाव से दोलन करते हुए किसी कण को रैखिक आवर्ती दोलक कहते हैं। वास्तव में, बल के व्यंजक में x^2, x^3 आदि के समानुपाती कुछ पद हो सकते हैं। अतः इन्हें अरैखिक दोलक कहते हैं।

▸ ***उदाहरण 14.6*** कमानी स्थिरांक k की दो सर्वसम कमानियाँ M संहति के किसी गुटके तथा स्थिर आधारों से चित्र 14.14 में दर्शाए गए अनुसार जुड़ी हुई हैं।



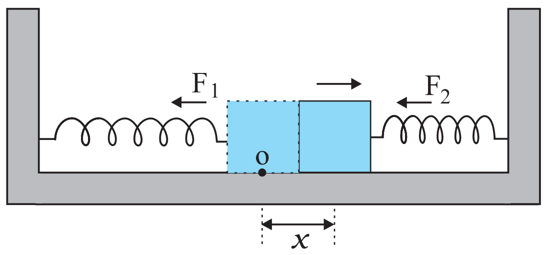
चित्र 14.14

यह दर्शाइए कि जब गुटके को अपनी साम्यावस्था की स्थिति से किसी ओर विस्थापित किया जाता है, तब यह सरल आवर्त गति करता है। दोलन का आवर्तकाल ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए गुटके को अपनी साम्यावस्था की स्थिति से दाईं ओर x दूरी तक विस्थापित किया जाता है। इसे चित्र 14.15 में दिखाया गया है। इस स्थिति में बाईं ओर की कमानी x लंबाई द्वारा दीर्घित हो जाती है तथा दाईं ओर की कमानी भी उतनी ही लंबाई द्वारा संपीडित हो जाती है। तब गुटके पर कार्यरत बल

$F_1 = -k\,x$ (कमानी द्वारा बाईं ओर आरोपित बल, जो गुटके को माध्य स्थिति की ओर खींचने का प्रयास करता है।)

$F_2 = -k\,x$ (कमानी द्वारा दाईं ओर आरोपित बल, जो गुटके को माध्य स्थिति की ओर धकेलने का प्रयास करता है।)



चित्र 14.15

तब गुटके पर आरोपित नेट बल,

$F = -2\,kx$

अतः, गुटके पर आरोपित बल विस्थापन के अनुक्रमानुपाती तथा माध्य-स्थिति की ओर निर्दिष्ट होता है; इसलिए, गुटके की गति सरल आवर्त गति है। इसमें दोलन का आवर्तकाल,

$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}$ है। ◂

14.7 सरल आवर्त गति में ऊर्जा

सरल आवर्त गति करते हुए कण की स्थितिज तथा गतिज ऊर्जाएँ दोनों शून्य तथा अपने अधिकतम परिमाण के बीच विचरण करती हैं।

अनुभाग 14.5 में हमने देखा है कि सरल आवर्त गति करते किसी कण का वेग समय का आवर्ती फलन होता है। विस्थापन की चरम स्थितियों में यह शून्य होता है। अतः ऐसे कण की गतिज ऊर्जा (K), जिसे हम इस प्रकार परिभाषित करते हैं,

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

$$= \frac{1}{2}m\,\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi)$$

$$= \frac{1}{2}k\,A^2 \sin^2(\omega t + \phi) \qquad (14.15)$$

भी समय का आवर्ती फलन होती है जिसका परिमाण विस्थापन अधिकतम होने पर शून्य तथा कण के माध्य स्थिति पर होने पर अधिकतम होता है। ध्यान दीजिए, चूँकि गतिज ऊर्जा K में, v के चिह्न का कोई अर्थ नहीं होता, अतः K का आवर्तकाल $T/2$ है।

सरल आवर्त गति करने वाले किसी कण की स्थितिज ऊर्जा कितनी होती है ? अध्याय 6 में हमने देखा है कि स्थितिज ऊर्जा की संकल्पना केवल संरक्षी बलों के लिए ही होती है। कमानी बल $F = -kx$ एक संरक्षी बल है जिससे स्थितिज ऊर्जा संयुक्त होती है।

$$U = \frac{1}{2}k\,x^2 \qquad (14.16)$$

अतः सरल आवर्त गति करते किसी कण की स्थितिज ऊर्जा,

$$U(x) = \frac{1}{2}k\,x^2$$

$$= \frac{1}{2}k\,A^2\cos^2(\omega t + \phi) \qquad (14.17)$$

इस प्रकार, सरल आवर्त गति करते किसी कण की स्थितिज ऊर्जा भी आवर्ती होती है जिसका आवर्तकाल $T/2$ होता है, यह ऊर्जा माध्य स्थिति में शून्य तथा चरम विस्थापनों पर अधिकतम होती है। अतः समीकरणों (14.15) तथा (14.17) से हमें निकाय की कुल ऊर्जा E, प्राप्त होती है,

$$E = U + K$$

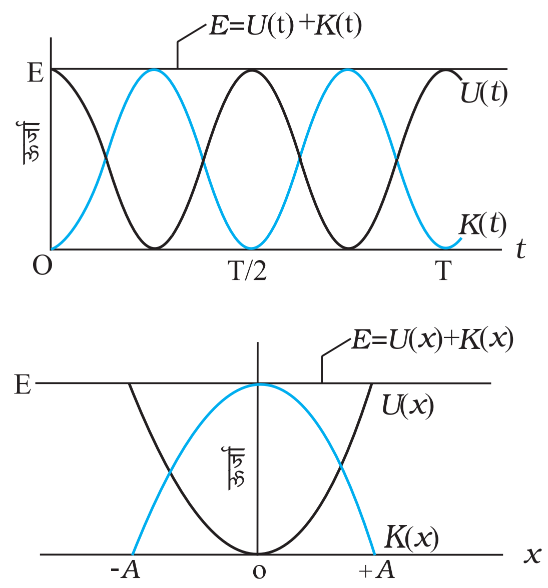
$$= \frac{1}{2} k\, A^2 \cos^2(\omega t + \phi) + \frac{1}{2} k\, A^2 \sin^2(\omega t + \phi)$$

$$= \frac{1}{2} k\, A^2 \left[\cos^2(\omega t + \phi) + \sin^2(\omega t + \phi)\right]$$

त्रिकोणमिति की सामान्य तादात्मक को प्रयोग करने पर कोष्ठक में दी गई राशि का मान एक प्राप्त होता है। अत:

$$E = \frac{1}{2} k\, A^2 \qquad (14.18)$$

जैसा कि संरक्षी बलों के अधीन गतियों के लिए आशा की जाती है किसी भी सरल आवर्ती दोलक की कुल यांत्रिक ऊर्जा कालाश्रित नहीं होती । किसी रैखिक सरल आवर्ती दोलक की गतिज तथा स्थितिज ऊर्जाओं की समय और विस्थापन पर निर्भरता चित्र 14.16 में दर्शायी गई है ।



चित्र 14.16 *गतिज ऊर्जा, स्थितिज ऊर्जा तथा कुल ऊर्जा समय के फलन के रूप में [(a) में दर्शित] तथा सरल आवर्त गति करते हुए कण का विस्थापन [(b) में दर्शित]। गतिज ऊर्जा तथा स्थितिज ऊर्जा दोनों आवर्तकाल T/2 के पश्चात पुनरावृत्ति करते हैं। t तथा x के सभी मानों के लिए कुल ऊर्जा नियत रहती है।*

ध्यान दीजिए कि सरल आवर्त गति में स्थितिज तथा गतिज दोनों ऊर्जाएँ चित्र 14.16 में हमेशा धनात्मक मानी गई हैं। निस्सन्देह गतिज ऊर्जा कभी ऋणात्मक नहीं हो सकती, क्योंकि यह चाल के वर्ग के समानुपाती होती है। स्थितिज ऊर्जा के समीकरण में गुप्त नियतांक के चयन के कारण स्थितिज ऊर्जा धनात्मक होती है। गतिज तथा स्थितिज दोनों ऊर्जाएँ SHM के प्रत्येक आवर्तकाल में दो बार अपनी चरम स्थिति को प्राप्त करती हैं। $x = 0$ के लिए, ऊर्जा गतिज है; चरम स्थिति $x = \pm A$ पर यह पूरे तौर पर स्थितिज ऊर्जा है। इन सीमाओं के बीच गति करते हुए, स्थितिज ऊर्जा के घटने से गतिज ऊर्जा बढ़ती है तथा गतिज ऊर्जा के घटने से स्थितिज ऊर्जा बढ़ती है।

▶ ***उदाहरण 14.7*** 1kg संहति के किसी गुटके को एक कमानी से बाँधा गया है । कमानी का कमानी स्थिरांक $50\, N\, m^{-1}$ है । गुटके को उसकी साम्यावस्था की स्थिति $x = 0$ से $t = 0$ पर किसी घर्षणहीन पृष्ठ पर कुछ दूरी $x = 10$ cm तक खींचा जाता है । जब गुटका अपनी माध्य-स्थिति से 5 cm दूर है, तब उसकी गतिज, स्थितिज तथा कुल ऊर्जाएँ परिकलित कीजिए ।

हल

गुटका सरल आवर्त गति करता है । समीकरण [14.14(b)] से इसकी कोणीय आवृत्ति

$$\omega = \sqrt{k/m}$$

$$= \sqrt{\frac{50\ N\ m^{-1}}{1kg}}$$

$= 7.07\ rad\ s^{-1}$ होगी,

तब किसी समय t पर इसका विस्थापन

$x(t) = 0.1 \cos(7.07t)$ होगा ।

अत:, जब कण अपनी माध्य स्थिति से 5 cm दूर है, तब

$0.05 = 0.1 \cos(7.07t)$

अथवा $\cos(7.07t) = 0.5$,

अत:, $\sin(7.07t) = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.866$

तब गुटके का $x = 5$ cm पर वेग $= 0.1\times 7.07\times 0.866 \text{m s}^{-1}$

$$= 0.61 \text{m s}^{-1}$$

अतः, गुटके की गतिज ऊर्जा $= \frac{1}{2}mv^2$

$$= \frac{1}{2}\left[1kg\times(0.6123\,\text{ms}^{-1})^2\right]$$

$$= 0.19 \text{ J}$$

तथा गुटके की स्थितिज ऊर्जा $= \frac{1}{2}kx^2$

$$= \frac{1}{2}\left(50\text{ N m}^{-1}\times 0.05\times 0.05\text{ m}\right)$$

$$= 0.0625 \text{ J}$$

$\therefore$ $x = 5$ cm पर गुटके की कुल ऊर्जा

$$= (0.19 + 0.0625)\text{ J}$$

$$= 0.25 \text{ J}$$

हम यह भी जानते हैं कि अधिकतम विस्थापन पर, गतिज ऊर्जा शून्य होती है, अत: निकाय की कुल ऊर्जा स्थितिज ऊर्जा के बराबर होती है। अत: निकाय की कुल ऊर्जा,

$$= \frac{1}{2}(50\text{ N m}^{-1}\times 0.1\text{ m}\times 0.1\text{ m})$$

$$= 0.25 \text{ J}$$

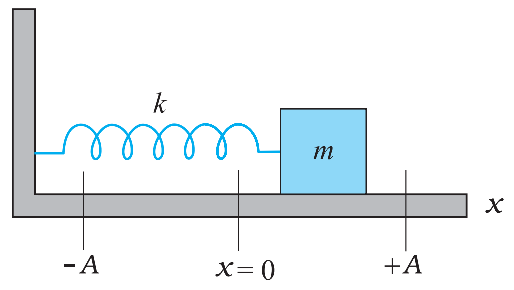
यह ऊर्जा 5 cm विस्थापन पर दोनों ऊर्जाओं के योग के बराबर ही है। यह ऊर्जा संरक्षण सिद्धांत के अनुकूल है। ◂

14.8 सरल आवर्त गति निष्पादित करने वाले कुछ निकाय

निरपेक्षत: शुद्ध सरल आवर्त गति के कोई भौतिक उदाहरण नहीं हैं। अपने व्यावहारिक जीवन में हम ऐसे निकाय देखते हैं जो किन्ही निश्चित परिस्थितियों में लगभग सरल आवर्त गति करते हैं। इस अनुभाग में इसके पश्चात् हम ऐसे ही कुछ निकायों की गतियों की चर्चा करेंगे।

14.8.1 कमानी के दोलन

सरल आवर्त गति का सरलतम प्रेक्षण योग्य उदाहरण, चित्र 14.17 की भाँति, किसी कमानी के एक सिरे से जुड़े m संहति के किसी गुटके के छोटे दोलन होते हैं। कमानी का दूसरा सिरा एक दृढ़ दीवार से जुड़ा होता है। गुटके को किसी समतल घर्षणरहित पृष्ठ पर रखते हैं। यदि गुटके को एक ओर थोड़ा खींचकर छोड़ दें, तो वह किसी माध्य स्थिति पर इधर-उधर गति करने लगता है। मान लीजिए $x = 0$ गुटके के केंद्र की उस स्थिति को सूचित करता है जब कमानी विश्रांत अवस्था में है। चित्र में अंकित स्थितियाँ $-A$ तथा $+A$ माध्य स्थिति से बाईं तथा



चित्र 14.17 एक रैखिक सरल आवर्ती दोलक जिसमें m संहति का एक गुटका किसी कमानी से जुड़ा है। गुटका एक घर्षणरहित पृष्ठ पर गति करता है। एक बार किसी ओर खींचकर छोड़ने पर गुटका सरल आवर्त गति करता है।

दाईं ओर के अधिकतम विस्थापनों को इंगित करती हैं। हम पहले ही पढ़ चुके हैं कि कमानियों में विशेष गुण होते हैं, जिन्हें सर्वप्रथम एक अंग्रेज भौतिकीवेत्ता रॉबर्ट हुक ने खोजा था। उन्होंने दर्शाया कि जब ऐसे किसी निकाय को विरूपित किया जाता है, तो उस पर एक प्रत्यानयन बल लगता है, जिसका परिमाण विरूपण अथवा विस्थापन के अनुक्रमानुपाती होता है तथा यह विपरीत दिशा में कार्य करता है। इसे हुक का नियम (अध्याय 9) कहते हैं। यह नियम तब भलीभाँति लागू होता है जब विस्थापन कमानी की लंबाई की तुलना में काफी कम होते हैं। किसी समय t पर, यदि गुटके का उसकी माध्य स्थिति से विस्थापन x है, तो गुटके पर कार्यरत बल F इस प्रकार व्यक्त किया जाता है,

$$F(x) = -kx \quad (14.19)$$

यहाँ k आनुपातिकता स्थिरांक है जिसे कमानी-स्थिरांक कहते हैं, तथा इसका मान कमानी के प्रत्यास्थ गुणों से ज्ञात किया जाता है। किसी दृढ़ कमानी के लिए k का मान अधिक तथा मृदु कमानी के k का मान कम होता है। समीकरण (14.19), सरल आवर्त गति के लिए बल-नियम के समान है, अत: यह निकाय सरल आवर्त गति करता है। समीकरण (14.14) से हमें यह संबंध प्राप्त होता है,

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (14.20)$$

तथा दोलक का आवर्तकाल, T इस प्रकार व्यक्त किया जाता है,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad (14.21)$$

दृढ़ कमानियों के k (कमानी स्थिरांक) के मान ज्यादा होते हैं। दृढ़ कमानी से जुड़े लघु संहति के एक गुटके की दोलन आवृत्ति समीकरण (14.20) के अनुसार ज्यादा होगी, जैसा की भौतिक रूप से अपेक्षित है।

▸ *उदाहरण 14.8* 500N m^{-1} कमानी स्थिरांक की किसी कमानी से 5 kg संहति का कोई कॉलर जुड़ा है जो एक क्षैतिज छड़ पर बिना किसी घर्षण के सरकता है । कॉलर को उसकी साम्यावस्था की स्थिति से 10.0cm विस्थापित करके छोड़ दिया जाता है । कॉलर के (a) दोलन का आवर्तकाल (b) अधिकतम चाल तथा (c) अधिकतम त्वरण परिकलित कीजिए ।

हल (a) समीकरण (14.21) के अनुसार दोलन का आवर्त काल होता है :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{5.0\,\text{kg}}{500\,\text{N m}^{-1}}} = (2\pi/10)\text{s}$$

$$= 0.63\ \text{s}$$

(b) सरल आवर्त गति करते कॉलर का वेग इस प्रकार व्यक्त किया जाता है,

$$\upsilon(t) = -A\,\omega\sin(\omega t + \phi)$$

अत: अधिकतम चाल,

$$\upsilon_m = A\,\omega$$

$$= 0.1 \times \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$= 0.1 \times \sqrt{\frac{500\ \text{Nm}^{-1}}{5\text{kg}}}$$

$$= 1\text{ms}^{-1}$$

और यहाँ $x = 0$

(c) साम्यावस्था की स्थिति से $x(t)$ विस्थापन पर कॉलर का त्वरण इस प्रकार व्यक्त किया जाता है,

$$a(t) = -\omega^2 x(t)$$

$$= -\frac{k}{m}x(t)$$

अत: अधिकतम त्वरण

$$a_{max} = \omega^2 A$$

$$= \frac{500\text{Nm}^{-1}}{5\text{kg}} \times 0.1\text{m}$$

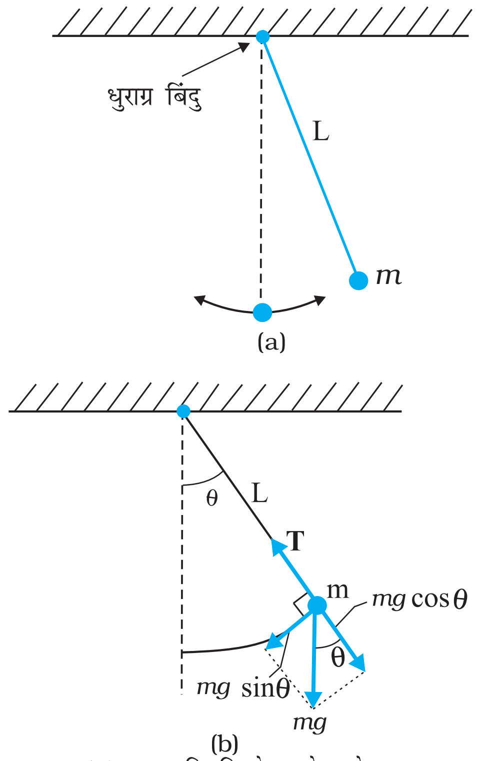
$$= 10\ \text{m s}^{-2}$$

और यह अग्रान्त पर घटित होता है। ◂

14.8.2 सरल लोलक

यह कहा जाता है कि गैलीलियो ने किसी चर्च में एक दोलायमान झाड़फानूस का आवर्तकाल अपनी नाड़ी की स्पंद गति द्वारा मापा था । उसने यह निष्कर्ष निकाला कि झाड़फानूस की गति आवर्ती है । यह निकाय लोलक का ही एक प्रकार होता है । लगभग 1 मीटर लंबे न खिंचने वाले धागे को लेकर उसके एक सिरे से पत्थर का टुकड़ा बाँधकर आप भी अपना एक लोलक बना सकते हैं । अपने लोलक को किसी उचित टेक से बाँधकर इस प्रकार लटकाइए कि वह स्वतंत्रतापूर्वक दोलन कर सके । पत्थर के टुकड़े को कम दूरी तक विस्थापित करके छोड़ दीजिए । पत्थर इधर-उधर गति करने लगता है । पत्थर की यह गति आवर्ती होती है जिसका आवर्तकाल लगभग 2 सेकंड होता है।

हम यह स्थापित करेंगे कि मध्यमान स्थिति से लघु विस्थापनों के लिए इस लोलक की आवर्त गति सरल आवर्त गति होती है। किसी ऐसे सरल लोलक पर विचार कीजिए जिसमें m द्रव्यमान का कोई लघु आमाप का गोलक L लम्बाई के द्रव्यमानहीन तथा न खिंचने योग्य डोरी के एक सिरे से बंधा हो। डोरी का दूसरा सिरा छत पर स्थित किसी दृढ़ टेक से जुड़ा है। गोलक इस ऊर्ध्वाधर दृढ़ टेक से होकर जाने वाली रेखा के अनुदिश तल में दोलन करता है। यह व्यवस्था चित्र 14.18(a) द्वारा दर्शाई गई है। चित्र 14.18 (b) में दोलक पर कार्यरत बल प्रदर्शित किए गए हैं जो एक प्रकार का बल-निर्देशक आरेख है।



चित्र 14.18 (a) माध्य स्थिति के सापेक्ष दोलन करता कोई सरल लोलक, (b) त्रिज्य बल T–mg cosθ अभिकेन्द्र बल प्रदान करता है परंतु धुराग्र के सापेक्ष इसका कोई बल-आघूर्ण नहीं होता। स्पर्श रेखीय बल mg sinθ प्रत्यानयन बल प्रदान करता है।

माना कि डोरी ऊर्ध्वाधर से θ कोण बनाती है। जब गोलक माध्य स्थिति में होता है तो $\theta = 0$

गोलक पर केवल दो बल कार्यरत हैं : डोरी की लंबाई के अनुदिश तनाव T तथा गुरुत्व के कारण ऊर्ध्वाधर बल (=mg)। हम बल mg का वियोजन डोरी के अनुदिश घटक $mg\cos\theta$ तथा उसके लंबवत् $mg\sin\theta$ के रूप में कर सकते हैं। चूँकि गोलक की गति L त्रिज्या के किसी वृत्त के अनुदिश है जिसका केन्द्र धुराग्र बिन्दु पर स्थित है, अत: गोलक का कोई त्रिज्य त्वरण ($\omega^2 L$) तथा साथ ही स्पर्शरेखीय त्वरण होगा। स्पर्शरेखीय त्वरण का कारण वृत्त के चाप के अनुरूप गति का एकसमान न होना है। त्रिज्य त्वरण नेट त्रिज्य बल $T - mg\cos\theta$ के कारण होता है जबकि स्पर्शरेखीय त्वरण $mg\sin\theta$ के कारण उत्पन्न होता है। धुराग्र के सापेक्ष बल आघूर्ण पर विचार करना अधिक सुविधाजनक होता है क्योंकि तब त्रिज्य बल का आघूर्ण शून्य हो जाता है। इस प्रकार आधार के सापेक्ष बल आघूर्ण τ बल के स्पर्शरेखीय घटक द्वारा ही पूर्णतया प्राप्त होता है।

$$\tau = -L\,(mg\sin\theta) \qquad (14.22)$$

यह एक प्रत्यानयन बल आघूर्ण है जो विस्थापन के परिणाम को कम करने का प्रयास करता है; इसी कारण इसे ऋणात्मक चिह्न द्वारा व्यक्त किया गया है। घूर्णी गति के लिए न्यूटन के नियम के अनुसार

$$\tau = I\,\alpha \qquad (14.23)$$

यहाँ I धुराग्र बिंदु के परित: लोलक का घूर्णी जड़त्व है तथा α उसी बिंदु के परित: कोणीय त्वरण है । इस प्रकार

$$I\alpha = -mgL\sin\theta \qquad (14.24)$$

अथवा
$$\alpha = -\frac{mgL\sin\theta}{I} \qquad (14.25)$$

यदि हम यह मानें कि विस्थापन θ छोटा है, तो समीकरण (14.25) को सरल बना सकते हैं । हम जानते हैं कि $\sin\theta$ को इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है,

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots\cdots \qquad (14.26)$$

यहाँ θ रेडियन में है।

अब यदि θ छोटा है, तो $\sin\theta$ का सन्निकटन θ द्वारा किया जा सकता है । ऐसी परिस्थिति के समीकरण (14.25) को इस प्रकार भी लिख सकते हैं,

$$\alpha = -\frac{mgL}{I}\theta \qquad (14.27)$$

सारणी 14.1 में हमने कोण θ को अंशों में, इसके तुल्यांक रेडियनों में, तथा फलन $\sin\theta$ के मान सूचीबद्ध किए हैं । सारणी से यह देखा जा सकता है कि θ के 20 अंश तक बड़े मानों के लिए $\sin\theta$ के मान लगभग वही होते हैं जैसे θ को **रेडियनों में व्यक्त** करने पर मिलते हैं

सरल आवर्त गति–आयाम कितना छोटा होना चाहिए?

जब आप किसी सरल लोलक का आवर्त काल ज्ञात करने के लिए प्रयोग करते हैं तो आपके अध्यापक आयाम को कम रखने की सलाह देते हैं। परन्तु क्या आपने कभी सोचा है कि यह 'कम' कितना कम होना चाहिए? क्या आयाम 5°, 2°, 1°, या 0.5° होना चाहिए या यह 10°, 20°, या 30° भी हो सकता है।

इसकी मात्रा समझने के लिए यह अच्छा होगा कि हम लोलक का आवर्तकाल भिन्न आयामों के लिए ज्ञात करें। परंतु प्रयोग के दौरान आपको ध्यान रखना होगा कि अधिक आयामों की अवस्था में भी लोलक ऊर्ध्वाधर तल में ही दोलन करे। मान लीजिए कम आयाम वाले दोलनों के लिए आवर्तकाल $T(0)$ है। तथा θ आयाम के लिए आवर्तकाल $T(\theta_0) = cT(0)$, यहाँ c गुणककाल है। यदि आप c और θ_0 में ग्राफ खींचे तो इनके विभिन्न मान इस प्रकार होंगे।

θ_0	:	20°	45°	50°	70°	90°
c	:	1.02	1.04	1.05	1.10	1.18

इस सारणी से स्पष्ट है कि लगभग 20° के आयाम पर आवर्तकाल में त्रुटि लगभग 2%, 50° के आयाम पर 5%, 70% के आयाम पर 10% तथा 90° के आयाम पर 18% है।

प्रयोग से आप कभी भी $T(0)$ नहीं माप सकते। क्योंकि यह शून्य दोलन का सूचक है। सैद्धांतिक रूप से भी $\theta = 0$ पर $\sin\theta$, θ के बराबर होता है। θ के अन्य मानों के लिए कुछ त्रुटि तो आ ही जाएगी। यह त्रुटि θ के मान में वृद्धि से बढ़ती है। अत: हमें यह पहले ही निश्चित कर लेना होगा कि त्रुटि की कितनी सीमा होनी चाहिए। वास्तव में कोई भी मापन पूर्ण रूप से त्रुटिरहित नहीं होता है। आपको निम्न प्रश्नों पर भी विचार करना होगा जैसे विराम घड़ी के मान में यथार्थता क्या है? घड़ी के शुरू करने तथा रोकने में आपकी यथार्थता क्या है? आपको पता चलेगा कि इस स्तर पर प्रयोगों में यथार्थता कभी भी 5% या 10% से अधिक नहीं होती। उपरोक्त सारणी से स्पष्ट है कि किसी दोलक के आवर्तकाल में वृद्धि 50° के आयाम पर भी 5% से अधिक नहीं होती है। अत: आप अपने प्रयोगों में लोलक का आयाम 50° या इससे कम रख सकते हैं।

सारणी 14.1 $\sin\theta$ कोण θ के फलन के रूप में

θ (अंशों में)	θ (रेडियनों में)	$\sin\theta$
0	0	0
5	0.087	0.087
10	0.174	0.174
15	0.262	0.256
20	0.349	0.342

गणितीय रूप में समीकरण (14.27) समीकरण (14.11) के तुल्य है, अंतर केवल यह है कि यहाँ चर राशि कोणीय त्वरण है। अत: हमने यह सिद्ध कर दिया है कि θ के लघु मानों के लिए गोलक की गति सरल आवर्त गति है।

समीकरण (14.27) तथा समीकरण (14.11) से हम यह देखते हैं कि

$$\omega = \sqrt{\frac{mgL}{I}}$$

तथा लोलक का आवर्तकाल

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgL}} \tag{14.28}$$

अब क्योंकि लोलक की डोरी द्रव्यहीन है, अत: जड़त्व आघूर्ण I केवल mL^2 के तुल्य होगा। इससे हमें सरल लोलक के आवर्त काल के लिए सुपरिचित सूत्र मिल जाता है

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \tag{14.29}$$

▶ **उदाहरण 14.9** उस सरल लोलक की लंबाई क्या है, जो हर सेकंड के बाद टिक करता है ?

हल समीकरण (14.29) से किसी सरल लोलक का आवर्तकाल,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

इस संबंध से हमें प्राप्त होता है,

$$L = \frac{gT^2}{4\pi^2}$$

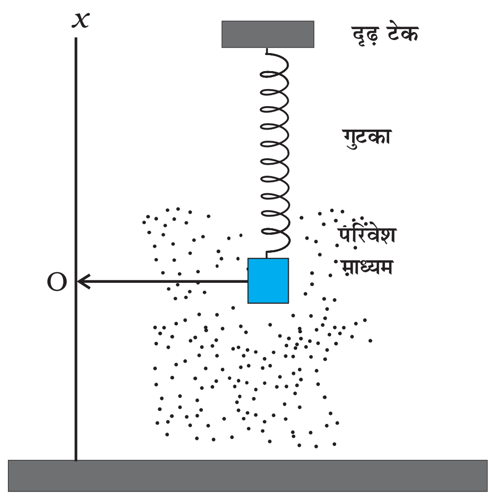
हर एक सेकंड के बाद टिक करने वाले सरल लोलक का आवर्तकाल T, 2 s होता है । अत: $g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$ तथा $T = 2$ s के लिए सरल लोलक की लंबाई

$$L = \frac{9.8\,(\text{m s}^{-2}) \times 4\,(\text{s}^2)}{4\pi^2}$$

$$= 1 \text{ m}$$ ◀

14.9 अवमंदित सरल आवर्त गति

हम जानते हैं कि वायु में दोलन करने वाले किसी सरल लोलक की गति धीरे-धीरे समाप्त हो जाती है । ऐसा क्यों होता है ? इसका कारण यह है कि वायु का कर्षण बल तथा टेक पर घर्षण बल लोलक की गति का विरोध करते हैं जिससे धीरे-धीरे इसका ऊर्जा-क्षय होता रहता है । लोलक के इस प्रकार के दोलनों को **अवमंदित दोलन** कहते हैं । अवमंदित दोलनों में यद्यपि निकाय की ऊर्जा का धीरे-धीरे क्षय होता रहता है तथापि आभासी रूप से दोलन आवर्ती रहते हैं । व्यापक रूप में क्षयकारी बल घर्षण बल ही होते हैं । इस प्रकार के बाह्य बलों का किसी दोलक की गति पर प्रभाव समझने के लिए आइए चित्र 14.19 में दर्शाए किसी निकाय पर विचार करें । यहाँ k कमानी-स्थिरांक



चित्र 14.19 परिवेश में उपस्थित श्यान माध्यम दोलन करते गुटके पर अवमंदन बल आरोपित करता है जिसके कारण वह अंतत: विराम स्थिति में आ जाता है।

की किसी प्रत्यास्थ कमानी से जुड़ा कोई गुटका ऊर्ध्वाधर दोलन करता दिखाया गया है। यदि गुटके को नीचे की ओर थोड़ा खींचकर छोड़ दिया जाए तो समीकरण (14.20) के अनुसार यह $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ की कोणीय आवृत्ति से दोलन करने लगेगा। तथापि वास्तविक स्थिति में गुटके के परिवेश में स्थित माध्यम (वायु) उसकी गति पर कोई अवमंदन बल आरोपित करेगा तथा गुटका-कमानी निकाय की यांत्रिक ऊर्जा घटती जाएगी। ऊर्जा ह्रास परिवेश माध्यम के (तथा गुटके के भी) ताप के रूप में परिलक्षित होगा (चित्र 14.19)।

अवमंदन बल परिवेश माध्यम की प्रकृति पर निर्भर करेगा। यदि गुटका किसी द्रव में डूबा हो तो अवमंदन बल का परिमाण

उच्च होगा तथा ऊर्जा क्षय की दर भी द्रुत होगी। सामान्यत: अवमंदन बल गोलक के वेग के अनुक्रमानुपाती होता है [स्टोक्स के नियम का स्मरण कीजिए, समीकरण (10.19)] तथा यह वेग की दिशा की विपरीत दिशा में कार्यरत होता है। यदि अवमंदन बल को $\mathbf{F}_d$ से निरूपित किया जाए तो

$$\mathbf{F}_d = -b\mathbf{v} \qquad (14.30)$$

जहाँ धनात्मक स्थिरांक b माध्यम के गुणों (उदाहरण के लिए श्यानता), तथा गुटके की अमाप तथा आकृति पर निर्भर करता है। समीकरण (14.30) सामान्यत: वेग के न्यून मानों के लिए ही वैध है।

जब कमानी से कोई द्रव्यमान m से जोड़कर छोड़ते हैं तो कमानी की लंबाई में कुछ वृद्धि होती है तथा द्रव्यमान एक ऊँचाई पर आकर स्थिर हो जाता है। इस अवस्था को द्रव्यमान की संतुलन अवस्था कहते हैं जिसे चित्र 14.19 में O से दर्शाया गया है। जब द्रव्यमान को थोड़ा नीचे या ऊपर खींचते हैं तो इस पर एक प्रत्यावस्था (प्रत्यानयन) बल $\mathbf{F}_S = -k\mathbf{x}$, कार्य करता है। जहाँ $\mathbf{x}$ द्रव्यमान की संतुलन अवस्था से विस्थापन* है। इस प्रकार किसी क्षण द्रव्यमान पर कार्य करने वाला कुल बल होता है $\mathbf{F} = -k\mathbf{x} - b\mathbf{v}$। यदि किसी क्षण t पर द्रव्यमान का त्वरण $\mathbf{a}(t)$ हो तो न्यूटन की गति के द्वितीय नियम को गति की दिशा में लागू करने पर हमें प्राप्त होता है

$$m\,a(t) = -k\,x(t) - b\,v(t) \qquad (14.31)$$

यहाँ पर हमने सदिश संकेत का प्रयोग नहीं किया है क्योंकि हम एकविमीय गति का वर्णन कर रहे हैं।

$v(t)$ तथा $a(t)$ के लिए $x(t)$ के प्रथम तथा द्वितीय अवकलज क्रमश: प्रतिस्थापित करने पर हमें प्राप्त होता है

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + k\,x = 0 \qquad (14.32)$$

समीकरण (14.32) का हल वेग के अनुपाती अवमंदन बल के प्रभाव में गुटके की गति का वर्णन करता है। इसका हल निम्न रूप में होता है

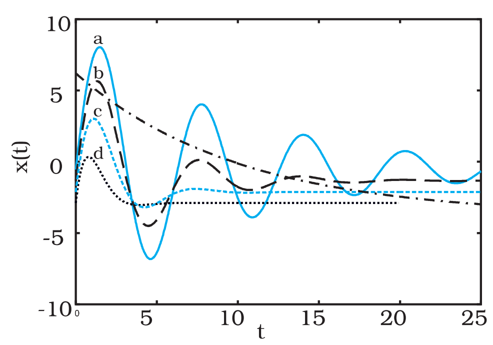
$$x(t) = A\,e^{-b\,t/2m}\cos(\omega' t + \phi) \qquad (14.33)$$

जहाँ a अवमंदित दोलन का आयाम तथा ω' इसकी कोणीय आवृत्ति होता है

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}} \qquad (14.34)$$

इस फलन में, कोज्या (cos) फलन का आवर्तकाल $2\pi/\omega'$ है परंतु यह फलन वस्तुत: आवर्ती नहीं है क्योंकि कारक $e^{-bt/2m}$ समय के साथ निरंतर घटता है। फिर भी यदि एक आवर्तकाल T में घटोतरी कम है, तो समीकरण (14.33) द्वारा निरूपित गति सन्निकट रूप से आवर्ती है।

समीकरण (14.33) द्वारा दर्शाए गए हल को चित्र 14.20 में दिए अनुसार ग्राफीय निरूपण द्वारा दर्शाया जा सकता है। इसे हम एक कोज्या फलन की भाँति मान सकते हैं जिसका आयाम $Ae^{-bt/2m}$ समय के साथ धीरे-धीरे घटता है।



चित्र 14.20 दोलन के घटते हुए आयाम के साथ एक अवमंदित दोलक सन्निकट रूप से आवर्ती होता है। ज्यादा अवमंदन होने पर दोलन द्रुत रूप से क्षीण हो जाती है।

किसी अनवमंदित दोलक की यांत्रिक ऊर्जा $\frac{1}{2}kA^2$ होती है। यदि दोलक में अवमंदन है, तो आयाम अचर नहीं होता, वरन समय पर निर्भर करता है। यदि अवमंदन लघु है, तो हम आयाम को $Ae^{-bt/2m}$ मानकर उसी व्यंजक का उपयोग कर सकते हैं।

$$E(t) = \frac{1}{2}kA^2e^{-bt/m} \qquad (14.35)$$

समीकरण (14.35) यह दर्शाता है कि निकाय की कुल ऊर्जा समय के साथ चरघातांकी रूप में घटती है। ध्यान दीजिए, लघु अवमंदन का तात्पर्य यह है कि विमाहीन अनुपात $\left(\frac{b}{\sqrt{k\,m}}\right)$ का मान 1 से बहुत कम है।

▶ ***उदाहरण 14.10:*** चित्र 14.19 में दर्शाए अवमंदित दोलक के लिए गुटके का द्रव्यमान $m = 200$ g, $k = 90$ N m^{-1} तथा अवमंदन स्थिरांक $b = 40$ g s^{-1} है। (a) दोलन का आवर्तकाल, (b) वह समय जिसमें इसके कंपन का आयाम अपने आरंभिक मान का आधा रह जाता है तथा (c) वह समय जिसमें यांत्रिक ऊर्जा अपने आरंभिक मान की आधी रह जाती है, परिकलित कीजिए।

हल (a) $km = 90\times0.2 = 18$ kg N m^{-1} = 18kg^2 s^{-2}; इसलिए $\sqrt{km} = 4.243$ kg s^{-1} और $b = 0.04$ kg s^{-1} अत:

* गुरुत्व के प्रभाव में गुटका डोरी पर किसी निश्चित साम्यावस्था की स्थिति O पर होगा। यहाँ x उस भाग से विस्थापन को निरूपित करता है।

b, $\sqrt{km}$ से अति निम्न है। समीकरण (14.34) से आवर्त काल T

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{0.2\ \text{kg}}{90\ \text{N m}^{-1}}}$$

$$= 0.3\ \text{s}$$

(b) अब, समीकरण (14.33) से, वह समय, $T_{1/2}$ जिसमें आयाम घटकर अपने आरंभिक आयाम का आधा रह जाता है,

$$T_{1/2} = \frac{\ln(1/2)}{b/2m}$$

$$= \frac{0.693}{40} \times 2 \times 200\ \text{s}$$

$$= 6.93\ \text{s}$$

(c) वह समय $t_{1/2}$, जिसमें दोलन की यांत्रिक ऊर्जा घटकर अपने आरंभिक मान की आधी रह जाती है, परिकलित करने के लिए हमें समीकरण (14.35) की सहायता लेनी होती है । इस समीकरण से,

$$E(t_{1/2})/E(0) = \exp(-bt_{1/2}/m)$$

अथवा $$½ = \exp(-bt_{1/2}/m)$$

$$\ln(1/2) = -(bt_{1/2}/m)$$

अथवा $$t_{1/2} = \frac{0.693}{40\ \text{g s}^{-1}} \times 200\text{g} = 3.46\ \text{s}$$

यह वास्तव में क्षय काल का आधा है। यह उचित ही है क्योंकि समीकरण (14.33) और (14.35) के अनुसार ऊर्जा आयाम के वर्ग पर निर्भर करती है। ध्यान दें कि दोनों समीकरणों के घातांकों में गुणज 2 है। ◀

14.10 प्रणोदित दोलन तथा अनुनाद

जब किसी निकाय (जैसे कोई सरल दोलक या कमानी से लटका हुआ कोई गुटका) को उसकी साम्यावस्था से विस्थापित कर मुक्त किया जाता है तो वह अपनी प्राकृतिक आवृत्ति ω से दोलन करने लगता है। इस प्रकार के दोलन **मुक्त दोलन** कहलाते हैं। सभी मुक्त दोलन सदैव उपस्थित रहने वाले क्षय बलों के कारण अंततः रुक जाते हैं, तथापि कोई बाह्य कारक (बल) इन दोलनों को बनाए रख सकता है। ऐसे दोलनों को **प्रणोदित** अथवा **परिचालित दोलन** कहते हैं। हम किसी ऐसी स्थिति पर विचार करेंगे जब कार्यरत बाह्य बल की प्रकृति आवर्ती हो जिसकी प्राकृतिक आवृत्ति ω_d को परिचालित आवृत्ति कहा जाता है। प्रणोदित अथवा परिचालित आवर्ती दोलनों के संदर्भ में सबसे महत्वपूर्ण तथ्य यह है कि निकाय अपनी प्राकृतिक आवृत्ति ω से दोलन नहीं करता वरन यह बाह्य बल की आवृत्ति ω_d से दोलन करता है; मुक्त दोलन अवमंदन के कारण समाप्त (रुक) हो जाते हैं। इसका सबसे सामान्य उदाहरण किसी पार्क में झूले के वह प्रणोदित दोलन हैं जो बच्चे द्वारा फर्श को अपने पैरों से धक्का देकर (अथवा किसी अन्य व्यक्ति द्वारा आवर्ती रूप में धक्का देकर) आवर्ती बल आरोपित करने के फलस्वरूप स्थापित होते हैं।

मान लीजिए किसी अवमंदित दोलक पर समय के साथ विचरण करने वाले F_0 आयाम का कोई आवर्ती बाह्य बल $F(t)$ आरोपित किया जाता है । इस बल को इस प्रकार निरूपित करते हैं,

$$F(t) = F_o \cos \omega_d t \qquad (14.36)$$

समीकरण (14.36) द्वारा निरूपित किसी कण का रैखिक प्रत्यानयन बल, अवमंदित बल तथा कालाश्रित प्रणोदित बल के संयोजी प्रभाव के अंतर्गत गति को इस प्रकार व्यक्त करते हैं,

$$m\,a(t) = -k\,x(t) - bv(t) + F_o \cos \omega_d t \qquad (14.37a)$$

समीकरण (14.37a) में त्वरण को d^2x/dt^2 द्वारा प्रतिस्थापित तथा उसे पुनर्व्यवस्थित करने पर,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = F_o \cos \omega_d t \qquad (14.37b)$$

यह m द्रव्यमान वाले उस दोलित्र का गति समीकरण है जिस पर ω_d (कोणीय) आवृत्ति वाला बल कार्यरत है। प्रारंभ में दोलित्र अपने प्राकृतिक आवृत्ति ω से दोलन करता है। जब हम इस पर एक बाह्य आवृत्ति बल लगाते हैं तो प्राकृतिक आवृत्ति वाला दोलन क्षीण हो जाता है और वस्तु आरोपित बाह्य बल की (कोणीय) आवृत्ति से दोलन करने लगता है। प्राकृतिक दोलन के शांत हो जाने के उपरांत दोलित्र का विस्थापन होता है

$$x(t) = A \cos(\omega_d t + \phi) \qquad (14.38)$$

जहाँ t आवृत्ति बल के लगाए जाने के क्षण से मापा समय है।

आयाम A कोणीय आवृत्तियों ω_d तथा प्राणोदित आवृत्ति ω का फलन है जिसे हम इस प्रकार व्यक्त करते हैं :

$$A = \frac{F_o}{\left\{m^2\left(\omega^2 - \omega_d^2\right)^2 + \omega_d^2 b^2\right\}^{1/2}} \qquad (14.39a)$$

तथा $$\tan\phi = \frac{-v_o}{\omega_d x_o} \qquad (14.39b)$$

यहाँ m कण का द्रव्यमान तथा v_0 और x_0 समय $t = 0$ पर कण के क्रमशः वेग और विस्थापन हैं । यह वह क्षण है जब हम आवर्ती बल आरोपित करते हैं।

समीकरण (14.39) दर्शाता है कि आयाम परिचालन बल की (कोणीय) आवृत्ति पर निर्भर करता है। ω_d के ω से

अत्यधिक भिन्न होने और समीप होने की अवस्थाओं में हम दोलित्र का भिन्न-भिन्न व्यवहार देखते हैं। अब हम इन दोनों परिस्थितियों पर विचार करते हैं:

(a) ***अल्प अवमंदन जब परिचालक आवृत्ति प्राकृतिक आवृत्ति से अधिक भिन्न है:*** इस स्थिति में $\omega_d b$, $m(\omega^2 - \omega_d^2)$ से अति कम होगा। अत: समीकरण 14.39(a) में उस पद को नगण्य मान सकते हैं:

$$A = \frac{F_0}{m(\omega^2 - \omega_d^2)} \qquad (14.40)$$

चित्र 14.21 में निकाय में उपस्थित विभिन्न सीमाओं के अवमंदक बलों के लिए किसी दोलक के विस्थापन आयाम की परिचालन बल की कोणीय आवृत्ति पर निर्भरता दर्शायी गई है। ध्यान दीजिए, तीनों परिस्थितियों में $\omega_d/\omega = 1$ होने पर ही आयाम अधिकतम होता है। इस चित्र के वक्र यह दर्शाते हैं कि अवमंदन कम होने पर ऊँचा और संकीर्ण **अनुनाद** शिखर प्राप्त होता है।

यदि हम परिचालक आवृत्ति को बदलते रहें तो जब यह आवृत्ति वस्तु की प्राकृतिक आवृत्ति के बराबर हो जाती है तो दोलन का आयाम अनंत की ओर अग्रसर होता है। परन्तु यह शून्य अवमंदन की आदर्श स्थिति होती है जो किसी वास्तविक निकाय में नहीं होती है क्योंकि अवमंदन किसी भी अवस्था में पूर्ण रूप से शून्य नहीं हो सकता। आपने झूला झूलते हुए निश्चय ही अनुभव किया होगा कि जब आप झूले पर इस आवृत्ति से बल लगाते हैं कि बल का आवर्तकाल झूले के प्राकृतिक आवर्तकाल के बराबर होता है तो झूले के दोलन का आयाम अधिकतम होता है। यह आयाम अधिक तो होता है परन्तु अनंत नहीं होता है। क्योंकि झूले की दोलन गति में कुछ न कुछ अवमंदन तो होता ही है। यह अगले भाग (b) में स्पष्ट हो जाएगा।

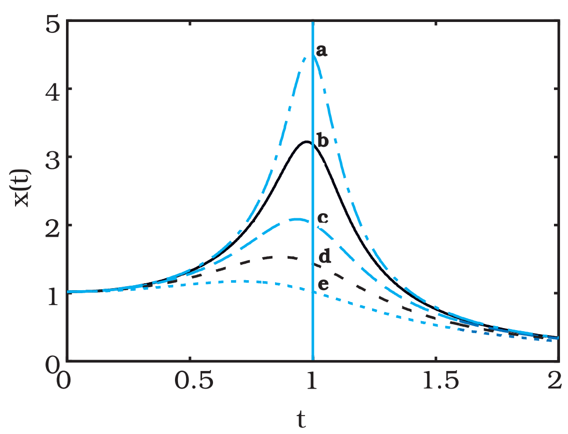
(b) ***जब परिचालक आवृत्ति प्राकृतिक आवृत्ति के निकट हो :*** यदि ω, ω_d के अति निकट हो $m(\omega^2 - \omega_d^2)$, b के उचित मानों के लिए $\omega_d b$ से बहुत कम होगा। इस अवस्था में समीकरण (14.39) हो जाता है।

$$A = \frac{F_o}{\omega_d b} \qquad (14.41)$$

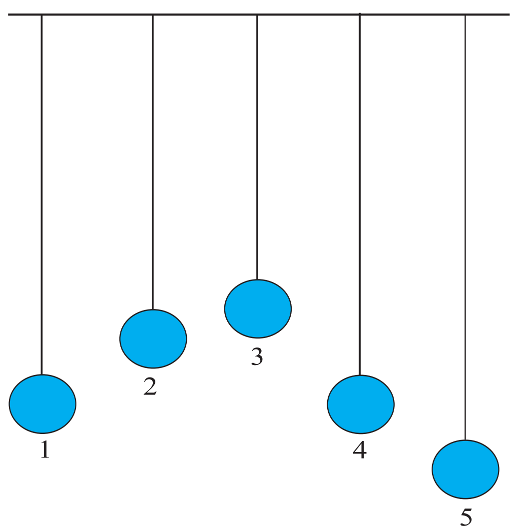
इससे स्पष्ट है कि किसी निश्चित परिचालक आवृत्ति के लिए अधिकतम संभव आयाम परिचालक आवृत्ति तथा अवमंदन पर निर्भर करता है और इस प्रकार कभी भी अनंत नहीं होता। जब परिचालक आवृत्ति, दोलक की प्राकृतिक आवृत्ति के बराबर हो जाती है तो दोलन का आयाम अधिकतम हो जाता है। इस परिघटना को **अनुनाद** कहते हैं।

अपने दैनिक जीवन में हमें अनुनाद से संबंधित परिघटनाएँ देखने को मिलती हैं। झूलों से झूलने का हमारा अनुभव अनुनाद का अच्छा उदाहरण है। आपने यह अनुभव किया होगा कि झूले को अधिक ऊँचाई तक झुलाने की कुशलता धरती पर जोर लगाने की लय को झूले की प्राकृतिक आवृत्ति के समकालिक बनाने में है।

इस तथ्य की और अधिक व्याख्या करने के लिए मान लीजिए चित्र 14.22 की भाँति एक ही डोरी से वर्गीकृत लंबाइयों के 5 सरल लोलक लटकाये गए हैं। लोलक 1 व 4 की लंबाइयां समान हैं तथा अन्य तीनों की लंबाइयाँ भिन्न-भिन्न हैं। अब हम लोलक 1 को गतिमान बनाते हैं। संबद्ध डोरी से होकर ऊर्जा इस लोलक से अन्य लोलकों को स्थानांतरित होती है, फलस्वरूप वे दोलन करने लगते हैं। संबद्ध डोरी द्वारा परिचालन बल प्रदान किया जाता है। इस परिचालन बल की आवृत्ति लोलक 1 के दोलन की आवृत्ति के समान होती है। यदि हम लोलकों 2, 3 तथा 5 की अनुक्रियाओं का अवलोकन करें, तो



चित्र 14.21 *ग्राफ समीकरण (14.41) को निरूपित करता है। अवमंदन बढ़ने पर अनुनाद आयाम ($\omega = \omega_d$) घटता जाता है*



चित्र 14.22 *एक ही आधार से निर्लंबित भिन्न-भिन्न लंबाई के 5 सरल लोलक।*

हम यह पाते हैं कि आरंभ में वे सभी विभिन्न आयामों से अपनी-अपनी प्राकृतिक आवृत्तियों के दोलन करते हैं, परंतु ये गतियाँ अत्यधिक अवमंदित होती हैं और कायम नहीं रह पातीं। धीरे-धीरे उनके दोलन की आवृत्तियाँ परिवर्तित होती हैं और अंत में वे लोलक 1 की आवृत्ति अर्थात् परिचालन बल की आवृत्ति से भिन्न-भिन्न आयामों से दोलन करते हैं। ये दोलन आयाम छोटे होते हैं किन्तु लोलक 4 की अनुक्रिया अन्य तीनों लोलकों से विपरीत होती है। यह लोलक 1 की ही आवृत्ति से दोलन करता है परंतु इसका आयाम धीरे-धीरे बढ़ता हुआ अत्यधिक हो जाता है। अनुनाद की भाँति अनुक्रिया दिखाई देती है। ऐसा होने का कारण यह है कि यहाँ अनुनाद की शर्त, अर्थात् निकाय की प्राकृतिक आवृत्ति परिचालन बल की आवृत्ति के संपाती होनी चाहिए, संतुष्ट होती है।

अब तक हमने केवल ऐसे निकायों पर विचार किया है जिनकी केवल एक प्राकृतिक आवृत्ति होती है। सामान्यतः किसी निकाय की अनेक प्राकृतिक आवृत्तियाँ हो सकती हैं। आप इस प्रकार के निकायों (कंपायमान डोरी, वायु स्तंभ आदि) के विषय में अगले अध्याय में पढ़ेंगे। किसी यांत्रिक संरचना यथा कोई भवन, कोई पुल अथवा वायुयान की अनेक प्राकृतिक आवृत्तियाँ संभव हैं। कोई बाह्य आवर्ती बल अथवा विक्षोभ निकाय को प्रणोदित दोलन प्रदान कर सकता है। यदि संयोगवश प्रणोदित बल की आवृत्ति ω_d निकाय की किसी एक प्राकृतिक आवृत्ति के सन्निकट हो तो दोलन के आयाम (अनुनाद) में आशातीत वृद्धि हो सकती है जिससे विनाश की स्थिति उत्पन्न हो सकती है। इसी कारण किसी पुल से गुजरते समय सैनिकों को कदम से कदम मिलाकर न चलने की सलाह दी जाती है। किसी क्षेत्र में भूकंप के कारण सभी भवनों को एकसमान रूप से क्षति न पहुँचने का भी यही कारण है चाहे वह सभी एक ही सामग्री तथा सामान मजबूती से बने हों। किसी भवन की प्राकृतिक आवृत्ति उसकी ऊँचाई, आमाप के अन्य प्राचलों तथा उसके निर्माण में प्रयुक्त सामग्री की प्रकृति पर निर्भर करती है। जिस भवन की प्राकृतिक आवृत्ति भूकंपी तरंग की आवृत्ति के सन्निकट होती है उसे क्षति पहुँचने की आशंका सर्वाधिक होती है।

सारांश

1. वे गतियाँ जो स्वयं दोहराती हैं *आवर्ती गतियाँ* कहलाती हैं।

2. एक दोलन अथवा चक्र को पूरा करने के लिए आवश्यक समय T को *आवर्तकाल* कहते हैं। यह आवृत्ति से इस प्रकार संबंधित है,

$$T = \frac{1}{\nu}$$

किसी आवर्ती अथवा दोलनी गति की *आवृत्ति* उसके द्वारा 1 सेकंड में पूरे किए गए दोलनों की संख्या होती है। SI मात्रक पद्धति में इसे हर्ट्ज़ में मापा जाता है;

$$1 \text{ हर्ट्ज़} = 1\text{Hz} = 1 \text{ दोलन प्रति सेकंड} = 1\text{s}^{-1}$$

3. *सरल आवर्त गति* में, किसी कण का उसकी साम्यावस्था की स्थिति से विस्थापन $x(t)$ इस प्रकार व्यक्त किया जाता है,

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi) \quad \text{(विस्थापन)}$$

यहाँ x_m *विस्थापन का आयाम* $(\omega t + \phi)$ *गति की कला*, तथा ϕ *कला स्थिरांक* है। कोणीय आवृत्ति ω गति के आवर्तकाल तथा आवृत्ति से इस प्रकार संबंधित होती है

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu \quad \text{(कोणीय आवृत्ति)}$$

4. सरल आवर्त गति, एकसमान वर्तुल गति के उस वृत्त के व्यास पर प्रक्षेप होती है, जिस पर गति हो रही है।

5. सरल आवर्त गति के समय कण के वेग तथा त्वरण को समय t के फलन के रूप में इस प्रकार व्यक्त करते हैं,

$$v(t) = -\omega A_m \sin(\omega t + \phi) \quad \text{(वेग)}$$

$$a(t) = -\omega^2 A_m \cos(\omega t + \phi)$$

$$= -\omega^2 x(t) \quad \text{(त्वरण)}$$

समयकालिक क्रिया और सरल आवर्त गति द्वारा हम वेग और गति को इस प्रकार देख सकते हैं।

6. सरल आवर्त गति किसी कण की वह गति होती है जिसमें उस कण पर कोई ऐसा बल आरोपित रहता है, जो कण के विस्थापन के अनुक्रमानुपाती, तथा सदैव गति के केंद्र की ओर निर्दिष्ट होता है ।

7. सरल आवर्त गति करते किसी कण में, किसी भी क्षण, गतिज ऊर्जा $K = \frac{1}{2}mv^2$ तथा स्थितिज ऊर्जा $U = \frac{1}{2}kx^2$ होती है । यदि कोई घर्षण न हो, तो निकाय की कुल यांत्रिक ऊर्जा, $E = K+U$ सदैव ही अचर रहती है यद्यपि K और U परिवर्तित होते हैं ।

8. m द्रव्यमान का कोई कण जो हुक के नियम के अनुसार लगे प्रत्यानयन बल $F = -kx$ के प्रभाव में दोलन करता है, सरल आवर्त गति दर्शाता है जिसके लिए,

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{(कोणीय आवृत्ति)}$$

तथा

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad \text{(आवर्तकाल)}$$

ऐसे निकाय को रैखिक दोलक भी कहते हैं ।

9. लघु कोणों में दोलन करते सरल लोलक की गति सन्निकट सरल आवर्त गति होती है । इसका आवर्तकाल,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

10. किसी भी वास्तविक दोलायनमान निकाय की यांत्रिक ऊर्जा दोलन करते समय घट जाती है क्योंकि बाह्य बल जैसे कर्षण दोलनों को रोकते हैं तथा यांत्रिक ऊर्जा को ऊष्मीय ऊर्जा में स्थानांतरित कर देते हैं । तब वास्तविक दोलक तथा उसकी गति को *अवमंदित गति* कहते हैं । यदि *अवमंदन बल* $F_d = -bv$ है, यहाँ v दोलक का वेग तथा b *अवमंदन स्थिरांक* है, तब दोलक का विस्थापन,

$$x(t) = A\, e^{-bt/2m} \cos(\omega' t + \phi)$$

यहाँ ω', अवमंदित दोलनों की कोणीय आवृत्ति है जिसे इस प्रकार व्यक्त करते हैं,

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$$

यदि अवमंदन स्थिरांक का मान कम है, तो $\omega' \approx \omega$, यहाँ ω अवमंदित दोलक की कोणीय आवृत्ति है । अवमंदित दोलक की यांत्रिक ऊर्जा E को इस प्रकार व्यक्त करते हैं,

$$E(t) = \frac{1}{2}kA^2 e^{-bt/m}$$

11. यदि प्राकृतिक कोणीय आवृत्ति ω के किसी दोलायमान निकाय पर ω_d कोणीय आवृत्ति का कोई बाह्य आवर्ती बल आरोपित किया जाए, तो वह निकाय ω_d कोणीय आवृत्ति से दोलन करता है । इन दोलनों का आयाम तब अधिक होता है जब,

$$\omega_d = \omega$$

जो *अनुनाद* की शर्त होती है ।

भौतिक राशि	प्रतीक	विमाएँ	मात्रक	टिप्पणी
आवर्तकाल	T	[T]	s	गति की स्वयं पुनरावृत्ति के लिए न्यूनतम समय
आवृत्ति	f या ν	$[T^{-1}]$	s^{-1}	$\nu = \frac{1}{T}$
कोणीय आवृत्ति	ω	$[T^{-1}]$	s^{-1}	$= 2\pi\nu$
कला नियतांक	ϕ	विमाहीन	रेडियन	सरल आवर्त गति में विस्थापन की कला का आरंभिक मान
बल नियतांक	k	$[MT^{-2}]$	$N\ m^{-1}$	सरल आवर्त गति में $F = -k\,x$

विचारणीय विषय

1. आवर्तकाल T वह *न्यूनतम समय* होता है जिसके पश्चात् गति की स्वयं पुनरावृत्ति होती है। इस प्रकार, समय अंतराल nT के पश्चात् गति की स्वयं पुनरावृत्ति होती है, यहाँ n कोई पूर्णांक है।
2. प्रत्येक आवर्ती गति सरल आवर्त गति नहीं होती। केवल वही आवर्ती गति जो बल-नियम $F = -k\,x$ द्वारा नियंत्रित होती है, सरल आवर्त गति होती है।
3. वर्तुल गति व्युत्क्रम-वर्ग नियम बल (जैसे ग्रहीय गति में) तथा द्विविमा में सरल आवर्त बल $-m\omega^2 r$ के कारण उत्पन्न हो सकती है। बाद के प्रकरण में, गति की कलाएँ, दो लंबवत् दिशाओं (x तथा y) में $\pi/2$ rad द्वारा भिन्न होनी चाहिए। इस प्रकार, कोई कण जिसकी आरंभिक स्थिति (o, a) तथा वेग $(\omega A, o)$ है $-m\,\omega^2 r$ बल आरोपित किए जाने पर A त्रिज्या के वृत्त में एकसमान वर्तुल गति करेगा।
4. ω के किसी दिए गए मान की रैखिक सरल आवर्त गति के लिए दो यादृच्छिक आरंभिक शर्तें आवश्यक हैं और ये शर्तें गति को पूर्णत: निर्धारित करने के लिए पर्याप्त हैं। ये आवश्यक शर्तें हो सकती हैं (i) आरंभिक स्थिति तथा आरंभिक वेग, अथवा (ii) आयाम तथा कला, अथवा (iii) ऊर्जा तथा कला।
5. उपरोक्त बिंदु (4) से, दिए गए आयाम अथवा ऊर्जा गति की कला का निर्धारण आरंभिक स्थिति अथवा आरंभिक वेग द्वारा किया जाता है।
6. यादृच्छिक आयामों तथा कलाओं वाली दो सरल आवर्त गतियों का संयोजन व्यापक रूप में आवर्ती नहीं होता। यह केवल तभी आवर्ती होता है जब एक गति की आवृत्ति दूसरी गति की आवृत्ति की पूर्णांक गुणज हो। तथापि, किसी आवर्ती गति को सदैव ही उपयुक्त आयामों की अनंत सरल आवर्त गतियों के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।
7. सरल आवर्त गति का आवर्तकाल आयाम अथवा ऊर्जा अथवा कला नियतांक पर निर्भर नहीं करता। गुरुत्वाकर्षण के अधीन ग्रहीय कक्षों के आवर्तकाल इसके विपरीत हैं (केप्लर का तृतीय नियम)।
8. किसी सरल लोलक की गति लघु कोणीय विस्थापन के लिए ही सरल आवर्त गति होती है।
9. किसी कण की गति यदि सरल आवर्त गति है, तो उसके विस्थापन को निम्न रूपों में से किसी एक रूप में व्यक्त किया जाना चाहिए :

$$x = A\cos\omega t + B\sin\omega t;$$

$$x = A\cos(\omega t + \alpha);\ x = B\sin(\omega t + \beta)$$

ये तीनों रूप पूर्णत: समतुल्य हैं (किसी भी एक रूप को अन्य दो रूपों के पदों में व्यक्त किया जा सकता है।)

इस प्रकार अवमंदित सरल आवर्त गति समीकरण (14.31) सही अर्थों में सरल आवर्त गति नहीं होती। यह केवल

$2m/b$ से बहुत छोटे समय अन्तरालों के लिए ही सन्निकटत: सरल आवर्त गति होती है, यहाँ b अवमंदन नियतांक है।

10. प्रणोदित दोलनों में, कण की स्थायी अवस्था गति (प्रणोदित दोलनों की समाप्ति के पश्चात्) एक ऐसी सरल आवर्त गति होती है जिसकी आवृत्ति उस कण की प्राकृतिक आवृत्ति ω नहीं होती वरन् प्रणोदित दोलन उत्पन्न करने वाले बाह्य बल की आवृत्ति ω_d होती है।

11. शून्य अवमंदन की आदर्श अवस्था में न होने की स्थिति में अनुनाद पर सरल आवर्त गति का आयाम अनंत होता है। यह कोई समस्या नहीं है, क्योंकि सभी वास्तविक निकायों में कुछ न कुछ अवमंदन अवश्य ही होता है, चाहे यह छोटा ही क्यों न हो।

12. प्रणोदित दोलनों के अधीन, कण की सरल आवर्त गति की कला प्रणोदित दोलन उत्पन्न करने वाले बाह्य बल की कला से भिन्न होती है।

अभ्यास

14.1 नीचे दिए गए उदाहरणों में कौन आवर्ती गति को निरूपित करता है?

(i) किसी तैराक द्वारा नदी के एक तट से दूसरे तट तक जाना और अपनी एक वापसी यात्रा पूरी करना।

(ii) किसी स्वतंत्रतापूर्वक लटकाए गए दंड चुंबक को उसकी N-S दिशा से विस्थापित कर छोड़ देना।

(iii) अपने द्रव्यमान केंद्र के परित: घूर्णी गति करता कोई हाइड्रोजन अणु।

(iv) किसी कमान से छोड़ा गया तीर।

14.2 नीचे दिए गए उदाहरणों में कौन (लगभग) सरल आवर्त गति को तथा कौन आवर्ती परंतु सरल आवर्त गति नहीं निरूपित करते हैं?

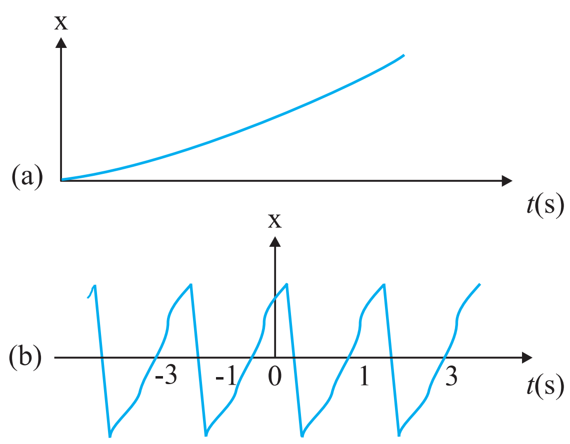
(i) पृथ्वी की अपने अक्ष के परित: घूर्णन गति।

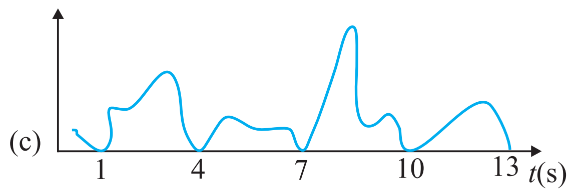
(ii) किसी U–नली में दोलायमान पारे के स्तंभ की गति।

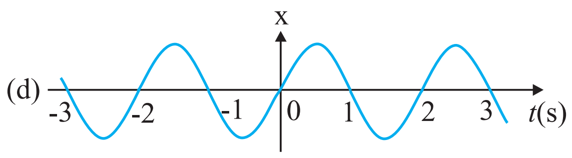
(iii) किसी चिकने वक्रीय कटोरे के भीतर एक बॉल बेयरिंग की गति जब उसे निम्नतम बिंदु से कुछ ऊपर के बिंदु से मुक्त रूप से छोड़ा जाए।

(iv) किसी बहुपरमाणुक अणु की अपनी साम्यावस्था की स्थिति के परित: व्यापक कंपन।

14.3 चित्र 14.24 में किसी कण की रैखिक गति के लिए चार x-t आरेख दिए गए हैं। इनमें से कौन-सा आरेख आवर्ती गति का निरूपण करता है? उस गति का आवर्तकाल क्या है (आवर्ती गति वाली गति का)।







चित्र 14.24

14.4 नीचे दिए गए समय के फलनों में कौन (a) सरल आवर्त गति (b) आवर्ती परंतु सरल आवर्त गति नहीं, तथा (c) अनावर्ती गति का निरूपण करते हैं। प्रत्येक आवर्ती गति का आवर्तकाल ज्ञात कीजिए : (ω कोई धनात्मक अचर है।)

(a) $\sin \omega t - \cos \omega t$

(b) $\sin^3 \omega t$

(c) $3 \cos \left(\frac{\pi}{4} - 2\,\omega t\right)$

(d) $\cos \omega t + \cos 3\,\omega t + \cos 5\,\omega t$

(e) $\exp(-\omega^2 t^2)$

(f) $1 + \omega t + \omega^2 t^2$

14.5 कोई कण एक दूसरे से 10 cm दूरी पर स्थित दो बिंदुओं A तथा B के बीच रैखिक सरल आवर्त गति कर रहा है। A से B की ओर की दिशा को धनात्मक दिशा मानकर वेग, त्वरण तथा कण पर लगे बल के चिह्न ज्ञात कीजिए जबकि यह कण

(a) A सिरे पर है,

(b) B सिरे पर है,

(c) A की ओर जाते हुए AB के मध्य बिंदु पर है,

(d) A की ओर जाते हुए B से 2 cm दूर है,

(e) B की ओर जाते हुए A से 3 cm दूर है, तथा

(f) A की ओर जाते हुए B से 4 cm दूर है।

14.6 नीचे दिए गए किसी कण के त्वरण a तथा विस्थापन x के बीच संबंधों में से किससे सरल आवर्त गति संबद्ध है :

(a) $a = 0.7\,x$

(b) $a = -200\,x^2$

(c) $a = -10\,x$

(d) $a = 100\,x^3$

14.7 सरल आवर्त गति करते किसी कण की गति का वर्णन नीचे दिए गए विस्थापन फलन द्वारा किया जाता है,

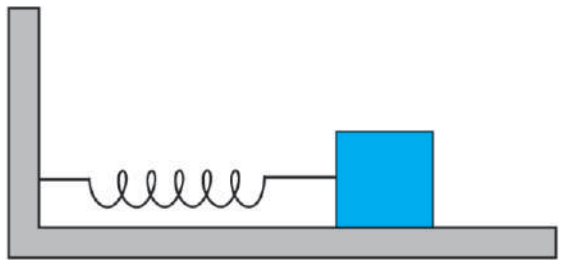
$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

यदि कण की आरंभिक ($t = 0$) स्थिति 1 cm तथा उसका आरंभिक वेग π cm s^{-1} है, तो कण का आयाम तथा आरंभिक

कला कोण क्या है ? कण की कोणीय आवृत्ति $\pi\ s^{-1}$ है। यदि सरल आवर्त गति का वर्णन करने के लिए कोज्या (cos) फलन के स्थान पर हम ज्या (sin) फलन चुनें; $x = B \sin(\omega t + \alpha)$, तो उपरोक्त आरंभिक प्रतिबंधों में कण का आयाम तथा आरंभिक कला कोण क्या होगा ?

14.8 किसी कमानीदार तुला का पैमाना 0 से 50 kg तक अंकित है और पैमाने की लंबाई 20 cm है। इस तुला से लटकाया गया कोई पिण्ड, जब विस्थापित करके मुक्त किया जाता है, 0.6 s के आवर्तकाल से दोलन करता है। पिंड का भार कितना है ?

14.9 1200 N m^{-1} कमानी-स्थिरांक की कोई कमानी चित्र 14.25 में दर्शाए अनुसार किसी क्षैतिज मेज से जड़ी है। कमानी के मुक्त सिरे से 3 kg द्रव्यमान का कोई पिण्ड जुड़ा है। इस पिण्ड को एक ओर 2.0 cm दूरी तक खींच कर मुक्त किया जाता है,



चित्र 14.25

(i) पिण्ड के दोलन की आवृत्ति,

(ii) पिण्ड का अधिकतम त्वरण, तथा

(iii) पिण्ड की अधिकतम चाल ज्ञात कीजिए।

14.10 अभ्यास 14.9 में, मान लीजिए जब कमानी अतानित अवस्था में है तब पिण्ड की स्थिति $x = 0$ है तथा बाएँ से दाएँ की दिशा x-अक्ष की धनात्मक दिशा है। दोलन करते पिण्ड के विस्थापन x को समय के फलन के रूप मे दर्शाइए, जबकि विराम घड़ी को आरंभ ($t = 0$) करते समय पिण्ड,

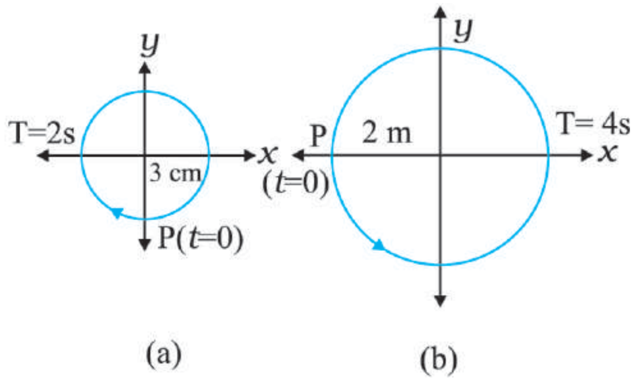
(a) अपनी माध्य स्थिति,

(b) अधिकतम तानित स्थिति, तथा

(c) अधिकतम संपीडन की स्थिति पर है।

सरल आवर्त गति के लिए ये फलन एक दूसरे से आवृत्ति में, आयाम में अथवा आरंभिक कला में किस रूप में भिन्न हैं ?

14.11 चित्र 14.26 में दिए गए दो आरेख दो वर्तुल गतियों के तदनुरूपी हैं। प्रत्येक आरेख पर वृत्त की त्रिज्य, परिक्रमण-काल, आरंभिक स्थिति और परिक्रमण की दिशा दर्शायी गई है। प्रत्येक प्रकरण में, परिक्रमण करते कण के त्रिज्य-सदिश के x-अक्ष पर प्रक्षेप की तदनुरूपी सरल आवर्त गति ज्ञात कीजिए।



चित्र 14.26

14.12 नीचे दी गई प्रत्येक सरल आवर्त गति के लिए तदनुरूपी निर्देश वृत्त का आरेख खींचिए। घूर्णी कण की आरंभिक (t = 0) स्थिति, वृत्त की त्रिज्या तथा कोणीय चाल दर्शाइए। सुगमता के लिए प्रत्येक प्रकरण में परिक्रमण की दिशा वामावर्त लीजिए। (x को cm में तथा t को s में लीजिए।)

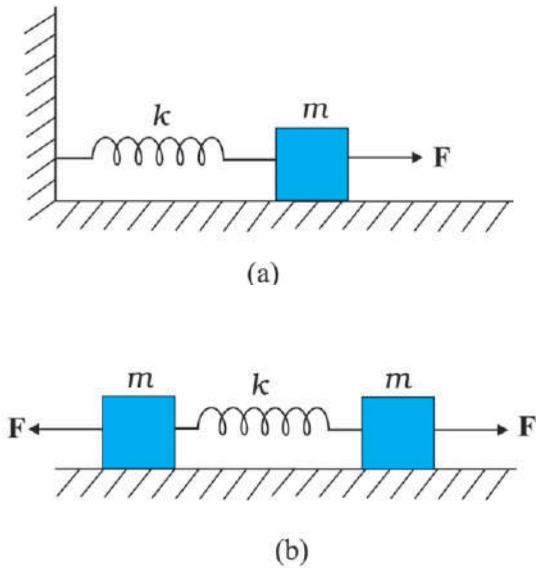
(a) $x = -2 \sin (3t + \pi/3)$

(b) $x = \cos (\pi/6 - t)$

(c) $x = 3 \sin (2\pi t + \pi/4)$

(d) $x = 2 \cos \pi t$

14.13 चित्र 14.27(a) में k बल-स्थिरांक की किसी कमानी के एक सिरे को किसी दृढ़ आधार से जकड़ा तथा दूसरे मुक्त सिरे से एक द्रव्यमान m जुड़ा दर्शाया गया है। कमानी के मुक्त सिरे पर बल **F** आरोपित करने से कमानी तन जाती है। चित्र 14.30(b) में उसी कमानी के दोनों मुक्त सिरों से द्रव्यमान m जुड़ा दर्शाया गया है। कमानी के दोनों सिरों को चित्र 14.30 में समान बल **F** द्वारा तानित किया गया है।



चित्र 14.27

(a) दोनों प्रकरणों में कमानी का अधिकतम विस्तार क्या है?

(b) यदि (a) का द्रव्यमान तथा (b) के दोनों द्रव्यमानों को मुक्त छोड़ दिया जाए, तो प्रत्येक प्रकरण में दोलन का आवर्तकाल ज्ञात कीजिए।

14.14 किसी रेलगाड़ी के इंजन के सिलिंडर हैड में पिस्टन का स्ट्रोक (आयाम का दो गुना) 1.0 m का है। यदि पिस्टन 200 rad/min की कोणीय आवृत्ति से सरल आवर्त गति करता है, तो उसकी अधिकतम चाल कितनी है ?

14.15 चंद्रमा के पृष्ठ पर गुरुत्वीय त्वरण 1.7 m s^{-2} है। यदि किसी सरल लोलक का पृथ्वी के पृष्ठ पर आवर्तकाल 3.5 s है, तो उसका चंद्रमा के पृष्ठ पर आवर्तकाल कितना होगा ? (पृथ्वी के पृष्ठ पर g = 9.8 m s^{-2})

14.16 नीचे दिए गए प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

(a) किसी कण की सरल आवर्त गति के आवर्तकाल का मान उस कण के द्रव्यमान तथा बल-स्थिरांक पर निर्भर करता है : $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$ । कोई सरल लोलक सन्निकट सरल आवर्त गति करता है। तब फिर किसी लोलक का आवर्तकाल लोलक के द्रव्यमान पर निर्भर क्यों नहीं करता ?

(b) किसी सरल लोलक की गति छोटे कोण के सभी दोलनों के लिए सन्निकट सरल आवर्त गति होती है। बड़े कोणों के दोलनों के लिए एक अधिक गूढ़ विश्लेषण यह दर्शाता है कि T का मान $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ से अधिक होता है। इस

परिणाम को समझने के लिए किसी गुणात्मक कारण का चिंतन कीजिए ।

(c) कोई व्यक्ति कलाई घड़ी बाँधे किसी मीनार की चोटी से गिरता है । क्या मुक्त रूप से गिरते समय उसकी घड़ी यथार्थ समय बताती है ?

(d) गुरुत्व बल के अंतर्गत मुक्त रूप से गिरते किसी केबिन में लगे सरल लोलक के दोलन की आवृत्ति क्या होती है?

14.17 किसी कार की छत से l लंबाई का कोई सरल लोलक, जिसके लोलक का द्रव्यमान M है, लटकाया गया है । कार R त्रिज्या की वृत्तीय पथ पर एकसमान चाल v से गतिमान है । यदि लोलक त्रिज्य दिशा में अपनी साम्यावस्था की स्थिति के इधर-उधर छोटे दोलन करता है, तो इसका आवर्तकाल क्या होगा ?

14.18 आधार क्षेत्रफल A तथा ऊँचाई h के एक कॉर्क का बेलनाकार टुकड़ा ρ_l घनत्व के किसी द्रव में तैर रहा है । कॉर्क को थोड़ा नीचे दबाकर स्वतंत्र छोड़ देते हैं, यह दर्शाइए कि कॉर्क ऊपर-नीचे सरल आवर्त दोलन करता है जिसका

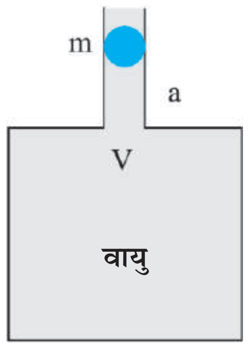
आवर्तकाल $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{h\rho}{\rho_l g}}$ है ।

यहाँ ρ कॉर्क का घनत्व है (द्रव की श्यानता के कारण अवमंदन को नगण्य मानिए) ।

14.19 पारे से भरी किसी U नली का एक सिरा किसी चूषण पंप से जुड़ा है, तथा दूसरा सिरा वायुमंडल में खुला छोड़ दिया गया है । दोनों स्तंभों में कुछ दाबांतर बनाए रखा जाता है । यह दर्शाइए कि जब चूषण पंप को हटा देते हैं, तब U नली में पारे का स्तंभ सरल आवर्त गति करता है ।

अतिरिक्त अभ्यास

14.20 चित्र 14.28 में दर्शाए अनुसार V आयतन के किसी वायु कक्ष की ग्रीवा (गर्दन) की अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल a है। इस ग्रीवा में m द्रव्यमान की कोई गोली बिना किसी घर्षण के ऊपर-नीचे गति कर सकती है । यह दर्शाइए कि जब गोली को थोड़ा नीचे दबाकर मुक्त छोड़ देते हैं, तो वह सरल आवर्त गति करती है । दाब-आयतन विचरण को समतापी मानकर दोलनों के आवर्तकाल का व्यंजक ज्ञात कीजिए [चित्र 14.28 देखिए]।



चित्र 14.28

14.21 आप किसी 3000 kg द्रव्यमान के स्वचालित वाहन पर सवार हैं । यह मानिए कि आप इस वाहन की निलंबन प्रणाली के दोलनी अभिलक्षणों का परीक्षण कर रहे हैं । जब समस्त वाहन इस पर रखा जाता है, तब निलंबन 15 cm आनमित होता है । साथ ही, एक पूर्ण दोलन की अवधि में दोलन के आयाम में 50% घटोतरी हो जाती है । निम्नलिखित के मानों का आकलन कीजिए :

(a) कमानी स्थिरांक, तथा

(b) कमानी तथा एक पहिए के प्रघात अवशोषक तंत्र के लिए अवमंदन स्थिरांक b

यह मानिए कि प्रत्येक पहिया 750 kg द्रव्यमान वहन करता है ।

14.22 यह दर्शाइए कि रैखिक सरल आवर्त गति करते किसी कण के लिए दोलन की किसी अवधि की औसत गतिज ऊर्जा उसी अवधि की औसत स्थितिज ऊर्जा के समान होती है ।

14.23 10kg द्रव्यमान की कोई वृत्तीय चक्रिका अपने केंद्र से जुड़े किसी तार से लटकी है । चक्रिका को घूर्णन देकर तार में ऐंठन उत्पन्न करके मुक्त कर दिया जाता है । मरोड़ी दोलन का आवर्तकाल 1.5 s है । चक्रिका की त्रिज्या 15 cm है । तार का मरोड़ी कमानी नियतांक ज्ञात कीजिए । [मरोड़ी कमानी नियतांक α संबंध $J = -\alpha\,\theta$ द्वारा परिभाषित किया जाता है, यहाँ J प्रत्यानयन बल युग्म है तथा θ ऐंठन कोण है]

14.24 कोई वस्तु 5 cm के आयाम तथा 0.2 सेकंड की आवृत्ति से सरल आवृत्ति गति करती है। वस्तु का त्वरण तथा वेग ज्ञात कीजिए जब वस्तु का विस्थापन (a) 5 cm (b) 3 cm (c) 0 cm हो।

14.25 किसी कमानी से लटका एक पिण्ड एक क्षैतिज तल में कोणीय वेग ω से घर्षण या अवमंदन रहित दोलन कर सकता है। इसे जब x_0 दूरी तक खींचते हैं और खींचकर छोड़ देते हैं तो यह संतुलन केन्द्र से समय $t = 0$ पर v_0 वेग से गुजरता है। प्राचल ω, x_0 तथा v_0 के पदों में परिणामी दोलन का आयाम ज्ञात करिये। [संकेत: समीकरण $x = a \cos(\omega t+\theta)$ से प्रारंभ कीजिए। ध्यान रहे कि प्रारंभिक वेग ऋणात्मक है।]

अध्याय 15

तरंगें

15.1 भूमिका

15.2 अनुप्रस्थ तथा अनुदैर्घ्य तरंगें

15.3 प्रगामी तरंगों में विस्थापन संबंध

15.4 प्रगामी तरंग की चाल

15.5 तरंगों के अध्यारोपण का सिद्धांत

15.6 तरंगों का परावर्तन

15.7 विस्पंदें

15.8 डॉप्लर प्रभाव

सारांश

विचारणीय विषय

अभ्यास

अतिरिक्त अभ्यास

15.1 भूमिका

पिछले अध्याय में हमने ऐसे पिण्डों की गति के बारे में अध्ययन किया जो एकाकी दोलन करते हैं। यदि कोई निकाय इसी प्रकार के पिण्डों का समूह है, तो उस निकाय में क्या होगा? एक द्रव्यमान युक्त माध्यम इसी प्रकार के निकाय का उदाहरण है। इस प्रकार के माध्यम में प्रत्यास्थ बल माध्यम के अवयवों को एक-दूसरे से बाँध रखते हैं जिसके कारण किसी एक अवयव की गति दूसरे अवयव की गति को प्रभावित करती है। यदि आप एक छोटे कंकड़ को किसी तालाब के शांत जल में धीरे से गिराएँ, तो जल का पृष्ठ विक्षुब्ध हो जाता है । यह विक्षोभ किसी एक स्थान तक ही सीमित नहीं रहता, वरन् एक वृत्त के अनुदिश बाहर की ओर संचरित होता है। यदि आप इसी प्रकार तालाब में निरंतर कंकड़ गिराते रहें, तो आप यह देखेंगे कि तालाब के पृष्ठ के जिस बिंदु पर विक्षोभ उत्पन्न हुआ है वहाँ से यह विक्षोभ वृत्तों के रूप में तीव्रता से बाहर की ओर गति करता है । हमें ऐसा प्रतीत होता है जैसे विक्षोभ बिंदु से जल स्वयं बाहर की ओर गति कर रहा हो । यदि आप विक्षुब्ध पृष्ठ पर कुछ छोटे-छोटे कॉर्क के टुकड़े धीरे से रख दें, तो आप पाएँगे कि ये कॉर्क के टुकड़े अपने-अपने स्थानों पर ही ऊपर-नीचे गति करते हैं, परंतु विक्षोभ के केंद्र बिंदु से दूर नहीं जाते अर्थात् उनकी विक्षोभ के केंद्र से दूरी नियत बनी रहती है। इससे यह प्रदर्शित होता है कि जल का द्रव्यमान स्वयं वृत्तों के साथ बाहर की ओर गति नहीं करता, बस, एक गतिशील विक्षोभ उत्पन्न हो जाता है । इसी प्रकार जब हम बोलते हैं, तो ध्वनि हवा (माध्यम) में हमसे दूर जाती है । परंतु इस प्रक्रिया में (वायु) एक भाग से दूसरे भाग में प्रवाहित नहीं होती। वायु में उत्पन्न हुए विक्षोभ हमें स्पष्ट रूप से दिखाई नहीं देते, हमारे कानों अथवा माइक्रोफोनों द्वारा ही हम इनको जान पाते हैं। इस प्रकार के विक्षोभों के प्रतिरूप या पैटर्न जो द्रव्य के वास्तविक भौतिक स्थानांतरण अथवा समूचे द्रव्य के प्रवाह के बिना ही माध्यम के एक स्थान से दूसरे स्थान तक गति करते हैं, **तरंग** कहलाते हैं । इस अध्याय में हम तरंगों के विषय में अध्ययन करेंगे ।

तरंगों द्वारा एक बिंदु से दूसरे बिंदु तक ऊर्जा तथा विक्षोभ के पैटर्न की सूचना का संचरण होता है। हमारा समस्त संचार-तंत्र तरंगों द्वारा संकेतों के संचरण पर निर्भर करता है। वाक् (बातचीत) का अर्थ है वायु में ध्वनि तरंगें उत्पन्न करना तथा श्रवण

उनके संसूचन को व्यक्त करता है। सूचना का आदान-प्रदान प्राय: विभिन्न प्रकार की तरंगों के माध्यम द्वारा होता है। उदाहरण के लिए ध्वनि तरंगों को सर्वप्रथम विद्युत संकेतों के रूप में परिवर्तित किया जा सकता है जिनसे विद्युत-चुंबकीय तरंगें जनित की जा सकती हैं जिनका संचरण प्रकाशिक रेशों की केबिल अथवा उपग्रह द्वारा हो सकता है। मूल संकेत के संसूचन में समान्यतया यही चरण व्युत्क्रम क्रम में अपनाए जाते हैं।

सभी तरंगों को संचरण के लिए माध्यम की आवश्यकता नहीं होती । हम जानते हैं कि प्रकाश तरंगें निर्वात से गमन कर सकती हैं । हमसे सैकड़ों प्रकाश वर्ष की दूरी पर स्थित तारों से उत्सर्जित प्रकाश अंतरतारकीय अंतरिक्ष, जो व्यावहारिक रूप से निर्वात ही है, से गमन करता हुआ हम तक पहुँचता है ।

किसी डोरी तथा जल में उत्पन्न तरंगों, ध्वनि तरंगों, भूकंपी तरंगों जैसी सुपरिचित तरंगें यांत्रिक तरंगों के रूप में जानी जाती हैं। इन सभी तरंगों के संचरण के लिए माध्यम की आवश्यकता होती है, ये बिना माध्यम के संचरित नहीं हो सकतीं। इनका संचरण माध्यम के कणों के दोलनों के कारण संभव हो पाता है तथा माध्यम के प्रत्यास्थ गुणों पर निर्भर करता है। विद्युत-चुंबकीय तरंगें सर्वथा भिन्न प्रकार की तरंगें होती हैं जिनके विषय में आप कक्षा 12 में अध्ययन करेंगे। विद्युत-चुंबकीय तरंगों के संचरण के लिए माध्यम का होना आवश्यक नहीं है– इनका संचरण निर्वात में भी होता है। प्रकाश, रेडियो तरंगें, X-किरणें सभी विद्युत-चुंबकीय किरणें हैं। निर्वात में सभी विद्युत-चुंबकीय तरंगों की चाल, c, समान होती है जिसका मान है:

$$c = 29{,}97{,}92{,}458 \text{ m s}^{-1} \qquad (15.1)$$

तीसरी प्रकार की एक अन्य तरंग है जिसे द्रव्य तरंग के नाम से जाना जाता है। यह द्रव्य के इलेक्ट्रॉन, प्रोटान, न्यूट्रान, परमाणु तथा अणु जैसे घटकों से संबद्ध हैं। ये तरंगें प्रकृति के क्वांटम यांत्रिकीय विवरण में प्रकट होती हैं जिसके विषय में आप अगली कक्षाओं में पढ़ेंगे । यद्यपि ये तरंगें संकल्पनात्मक रूप में यांत्रिक तथा विद्युत चुंबकीय तरंगों की तुलना में अधिक अमूर्त हैं, तथापि इनका अनुप्रयोग आधुनिक प्रौद्योगिकी की बहुत सी मूल युक्तियों में पाया जाता है; इलेक्ट्रॉन से संबद्ध द्रव्य तरंगों का उपयोग इलेक्ट्रॉन सूक्ष्मदर्शी में किया जाता है ।

इस अध्याय में हम केवल यांत्रिक तरंगों के बारे में, जिनके संचरण के लिए द्रव्यात्मक माध्यम आवश्यक है, अध्ययन करेंगे ।

पुरातन काल से ही हमारी कला तथा साहित्य पर तरंगों का सौंदर्यबोधात्मक प्रभाव दृष्टिगोचर होता है, फिर भी तरंग गति का वैज्ञानिक विश्लेषण सर्वप्रथम सत्रहवीं शताब्दी में किया गया था । क्रिश्चियन हाइगेन्स (1629-1695), राबर्ट हुक तथा आइज़क न्यूटन कुछ ऐसे प्रसिद्ध भौतिकविद हैं जिनके नाम तरंग गति की भौतिकी से संबद्ध हैं । कमानी से बँधे पिण्डों के दोलनों की भौतिकी तथा सरल लोलक की भौतिकी के पश्चात् ही तरंगों की भौतिकी को समझा गया । प्रत्यास्थ माध्यमों में तरंगों का आवर्ती दोलनों के साथ अंतरंग संबंध होता है । (तानित डोरियाँ, कुंडलित कमानियाँ, वायु आदि प्रत्यास्थ माध्यमों के उदाहरण हैं ।) इस संबंध की व्याख्या हम सरल उदाहरणों द्वारा करेंगे ।

चित्र 15.1 में दर्शाए अनुसार एक दूसरे से संबद्ध कमानियों की व्यवस्था पर विचार कीजिए । यदि इसके एक सिरे की कमानी को यकायक खींचकर छोड़ दें, तो उत्पन्न विक्षोभ दूसरे सिरे तक गमन करता है । इस प्रक्रिया में क्या होता है ? यकायक खींचने पर पहली कमानी अपनी साम्यावस्था की लंबाई से विक्षोभित होती है । चूँकि दूसरी कमानी पहली कमानी से संबद्ध है, अत: उसमें तनाव अथवा संपीडन होता है और इस प्रकार यह प्रक्रिया आगे बढ़ती जाती है । यहाँ विक्षोभ तो एक सिरे से दूसरे तक संचरित हो जाता है, परंतु प्रत्येक कमानी अपनी साम्यावस्था की स्थिति के इधर-उधर ही लघु दोलन करती रहती है । ऐसे ही एक व्यावहारिक उदाहरण के रूप में रेलवे स्टेशन पर विराम की स्थिति में खड़ी किसी रेलगाड़ी पर विचार कीजिए । रेलगाड़ी के विभिन्न

चित्र 15.1 एक-दूसरे से संबद्ध कमानियों का संग्रह । सिरे A को यकायक खींचा जाता है; तब विक्षोभ दूसरे सिरे तक संचरित हो जाता है ।

डिब्बे, कमानी युग्मकों द्वारा एक-दूसरे से युग्मित होते हैं । जब इन डिब्बों के किसी एक सिरे से किसी इंजन को जोड़ते हैं, तो वह अपने से अगले डिब्बे को धक्का देता है तथा यह धक्का एक डिब्बे से दूसरे डिब्बे में, दूसरे से फिर तीसरे में, इसी प्रकार आगे संचरित होते हुए आखिरी डिब्बे तक पहुँच जाता है, लेकिन समस्त रेलगाड़ी अपने ही स्थान पर खड़ी रहती है ।

आइए, अब हम वायु में ध्वनि तरंगों के संचरण पर विचार करते हैं । जैसे ही कोई ध्वनि तरंग वायु से होकर गुजरती है, तो वह उस स्थान की वायु के छोटे से क्षेत्र को संपीडित अथवा विस्तारित करती है । इसके कारण उस छोटे क्षेत्र की वायु के घनत्व में, मान लीजिए ($\delta\rho$), परिवर्तन होता है । दाब, प्रति एकांक क्षेत्रफल पर आरोपित बल होता है, अत: कमानी की ही भाँति

इस स्थिति में भी विक्षोभ के अनुक्रमानुपात में 'प्रत्यानयन बल' उत्पन्न हो जाता है । यहाँ इस प्रकरण में, घनत्व में परिवर्तन, कमानी में उत्पन्न संपीडन अथवा विस्तारण के समरूप है । यदि किसी क्षेत्र को संपीडित किया जाता है, तो उस क्षेत्र के अणु बाहर निकलकर समीपवर्ती क्षेत्र में जाने का प्रयास करते हैं । इस प्रकार, समीपवर्ती क्षेत्र में घनत्व बढ़ता है, अथवा उस क्षेत्र में 'संपीडन' उत्पन्न होता है जिसके फलस्वरूप पूर्ववर्ती क्षेत्र में 'विरलन' उत्पन्न हो जाता है । यदि कोई क्षेत्र अपने चारों ओर के क्षेत्रों की तुलना में विरलित हो, तो उस क्षेत्र के चारों ओर के परिवेश की वायु उस क्षेत्र में प्रवेश करके विरलन को समीपवर्ती क्षेत्र की ओर धकेल देती है । इस प्रकार, संपीडन अथवा विरलन एक क्षेत्र से दूसरे क्षेत्र की ओर गति करते हैं, जिसके कारण वायु में विक्षोभ का संचरण संभव हो पाता है ।

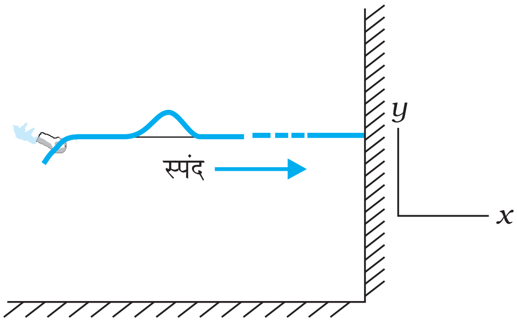
ठोसों में भी इसी के सदृश तर्क दिया जा सकता है । क्रिस्टलीय ठोसों में परमाणु अथवा परमाणुओं के समूह आवर्ती जालकों में व्यवस्थित होते हैं । इनमें, प्रत्येक परमाणु अथवा परमाणुओं का समूह, अपने चारों ओर के परमाणुओं द्वारा आरोपित बलों के कारण, साम्यावस्था में होता है । यदि अन्य परमाणुओं को स्थिर रखते हुए किसी एक परमाणु को विस्थापित किया जाए, तो ठीक उसी प्रकार जैसा कि कमानी के प्रकरण में था, इस स्थिति में भी एक प्रत्यानयन बल उत्पन्न हो जाता है । अतः हम जालक (lattice) के परमाणुओं को अंत्य बिंदुओं की भाँति ले सकते हैं तथा परमाणु-युगलों के बीच कमानियाँ लगी मान सकते हैं ।

अब हम इस अध्याय के अगले अनुभागों में तरंगों के विभिन्न अभिलाक्षणिक गुणों की चर्चा करेंगे ।

15.2 अनुप्रस्थ तथा अनुदैर्घ्य तरंगें

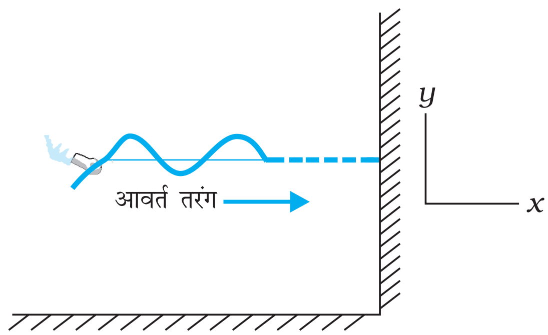
हम जानते हैं कि यांत्रिक तरंगों की गति में माध्यम के घटक दोलन करते हैं। यदि माध्यम के घटक तरंग की गति की दिशा के लंबवत् दोलन करते हैं तो ऐसी तरंग को हम अनुप्रस्थ तरंग कहते हैं। यदि माध्यम के घटक तरंग की गति की दिशा के अनुदिश दोलन करते हैं तो तरंग को अनुदैर्घ्य तरंग के रूप में जाना जाता है।

चित्र 15.2 में किसी डोरी के अनुदिश एक ऐसे स्पंद को गति करते दिखाया गया है जिसे डोरी को एक बार ऊपर-नीचे झटकने के बाद उत्पन्न किया गया है। यदि स्पंद के आमाप की तुलना में डोरी की लंबाई अत्यधिक हो तो उसके दूसरे सिरे तक पहुँचने से पहले ही स्पंद का अवमंदन हो जाएगा। अतः दूसरे सिरे



चित्र 15.2 *जब किसी तानित डोरी के अनुदिश (x-अक्ष) कोई एकल स्पंद गतिशील होता है तो डोरी का कोई प्रतिरूपी अवयव ऊपर-नीचे (y-अक्ष) दोलन करता है ।*

पर स्पंद के परावर्तन को अनदेखा किया जा सकता है। चित्र 15.3 में भी ऐसी ही एक स्थिति प्रदर्शित की गई है अंतर केवल इतना है कि इसमें बाह्य कारक द्वारा डोरी के एक सिरे पर ऊपर-नीचे की ओर सतत आवर्ती ज्यावक्रीय झटके प्रदान किए जा रहे हैं।



चित्र 15.3 *किसी डोरी के अनुदिश प्रेषित कोई आवर्त (ज्यावक्रीय) तरंग अनुप्रस्थ तरंग का एक उदाहरण है। तरंग के क्षेत्र में डोरी का कोई प्रतिरूपी अवयव तरंग की गमन दिशा के लंबवत् अपनी साम्यावस्था के सापेक्ष दोलन करता है।*

इस प्रकार से डोरी में उत्पन्न विक्षोभ का परिणाम उसमें प्रग्रामी ज्यावक्रीय तरंग होता है। दोनों ही परिस्थितियों में माध्यम के अवयव अपनी माध्य साम्यावस्था के इर्द-गिर्द दोलन करते हैं जबकि स्पंद अथवा तरंग उनसे संचरित होती है। दोलन डोरी में तरंग की गति की दिशा के लंबवत् हैं, अतः यह अनुप्रस्थ तरंग का एक उदाहरण है।

हम किसी तरंग पर दो प्रकार से विचार कर सकते हैं। हम किसी निश्चित काल-क्षण पर आकाश में तरंग का चित्रण कर

सकते हैं। इससे हमें किसी काल-क्षण पर तरंग की आकृति मिल जाएगी। एक अन्य विधि तरंग की किसी स्थान विशेष पर विचार करना है अर्थात् हम अपना ध्यान डोरी के किसी निश्चित अवयव पर केंद्रित करें तथा समय के साथ इसके दोलनों को देखें।

चित्र 15.4 में अनुदैर्घ्य तरंगों के सबसे सामान्य उदाहरण ध्वनि तरंगों की स्थिति प्रदर्शित की गई है। वायु से भरे किसी लंबे पाइप के एक सिरे पर एक पिस्टन लगा है। पिस्टन को एक बार अंदर की ओर धकेलते और फिर बाहर की ओर खींचने से संपीडन

चित्र 15.4 *पिस्टन को आगे-पीछे गति कराकर वायु से भरी नली में ध्वनि तरंग उत्पन्न की जाती है। चूँकि वायु-अवयव के दोलन तरंग गति की दिशा के समांतर हैं, अतः यह अनुदैर्घ्य तरंग है।*

(उच्च घनत्व) तथा विरलन (न्यून घनत्व) का स्पंद उत्पन्न हो जाएगा। यदि पिस्टन को अंदर की ओर धकेलने तथा बाहर की ओर खींचने का क्रम सतत तथा आवर्ती (ज्यावक्रीय) हो तो एक ज्यावक्रीय तरंग उत्पन्न होगी जो पाइप की लंबाई के अनुदिश वायु में गमन करेगी। स्पष्ट रूप से यह अनुदैर्घ्य तरंग का उदाहरण है।

उपरोक्त वर्णित तरंगें, चाहे वह अनुप्रस्थ हों अथवा अनुदैर्घ्य, प्रगामी तरंगें हैं क्योंकि वह माध्यम के एक बिन्दु से दूसरे बिंदु तक गमन करती हैं। जैसा कि पहले बताया गया है, वह द्रव्य जिससे तरंग संचरित होती है, गति नहीं करता है। उदाहरणार्थ, किसी धारा में जल की पूर्ण रूप से गति होती है। परन्तु, किसी जल तरंग में विक्षोभ गति करते हैं न कि पूर्ण रूप से जल। इसी प्रकार, पवन (वायु का पूर्ण रूप से गति) तथा ध्वनि तरंग को एक नहीं समझना चाहिए– ध्वनि तरंग में विक्षोभ (दाब घनत्व में) का वायु में संचरण होता है वायु माध्यम पूर्ण रूपेण गति नहीं करता है।

यांत्रिक तरंगें माध्यम के प्रत्यास्थ गुणधर्म से संबंधित हैं। अनुप्रस्थ तरंगों में माध्यम के अवयव संचरण की दिशा के लंबवत दोलन करते हैं जिसमें आकृति में परिवर्तन होता है अर्थात माध्यम के प्रत्येक अवयव में अपरूपण विकृति होती है। ठोसों एवं डोरियों में अपरूपण गुणांक होता है अर्थात ये अपरूपक प्रतिबलों का प्रतिपालन कर सकते हैं। तरलों का अपना कोई आकार नहीं होता है इसलिए तरल अपरूपक प्रतिबल का प्रतिपालन नहीं कर सकते हैं। अतः अनुप्रस्थ तरंगें ठोसों एवं डोरियों (तनाव में) में संभव हैं परन्तु तरलों में नहीं। यथा, ठोसों तथा तरलों दोनों में आयतन प्रत्यास्थता गुणांक होता है अर्थात ये संपीडन विकृति का प्रतिपालन कर सकते हैं। चूंकि अनुदैर्घ्य तरंगें संपीडन विकृति (दाब) से संबंधित हैं, ये ठोसों तथा तरलों दोनों में संचरण कर सकती हैं। अतः स्टील की छड़ (जिसमें अपरूपण तथा आयतन प्रत्यास्थता गुणांक दोनों होता है) में अनुदैर्घ्य तथा अनुप्रस्थ दोनों प्रकार की तरंगें संचरित हो सकती हैं। परन्तु वायु में केवल अनुदैर्घ्य दाब तरंगों (ध्वनि) का संचरण संभव है। जब स्टील की छड़ जैसे माध्यम में अनुदैर्घ्य एवं अनुप्रस्थ दोनों प्रकार की तरंगें संचरित होती हैं तो उनकी चाल भिन्न हो सकती है क्योंकि दोनों भिन्न प्रत्यास्थता गुणांक के फलस्वरूप हैं।

▶ ***उदाहरण 15.1*** नीचे तरंग गति के कुछ उदाहरण दिए गए हैं, प्रत्येक स्थिति में यह बताइए कि क्या तरंग गति अनुप्रस्थ है, अनुदैर्घ्य है अथवा दोनों का संयोजन है :

(a) किसी लंबी कुंडलित कमानी के एक सिरे को एक ओर विस्थापित करने पर उस कमानी की किसी विभंग (ऐंठन) की गति।

(b) द्रव से भरे किसी सिलिंडर में इसके पिस्टन को आगे-पीछे करके सिलिंडर में उत्पन्न तरंगें।

(c) जल के पृष्ठ पर चलती मोटरबोट द्वारा उत्पन्न तरंगें।

(d) किसी कंपायमान क्वार्ट्ज़ क्रिस्टल द्वारा वायु में उत्पन्न पराश्रव्य तरंगें।

हल

(a) अनुप्रस्थ

(b) अनुदैर्घ्य

(c) अनुप्रस्थ तथा अनुदैर्घ्य

(d) अनुदैर्घ्य ◀

15.3 प्रगामी तरंगों में विस्थापन संबंध

किसी प्रगामी तरंग के गणितीय विवरण के लिए, हमें स्थिति x तथा समय t दोनों के किसी फलन की आवश्यकता होती है। प्रत्येक क्षण पर यह फलन तरंग की उस क्षण पर आकृति का विवरण देता है। साथ ही दी हुई प्रत्येक स्थिति पर यह फलन उस स्थिति पर माध्यम की अवयव की गति का विवरण भी देता है। यदि हम किसी ज्यावक्रीय प्रगामी तरंग (ऐसी एक तरंग चित्र 15.3 में दर्शायी गई है) का वर्णन

करना चाहते हैं तो संलग्न फलन भी ज्यावक्रीय होना चाहिए। सुविधा के लिए हम किसी अनुप्रस्थ तरंग पर विचार करेंगे जिससे यदि माध्यम के किसी अवयव की स्थिति को x से निरूपित करें तो अवयव की माध्य स्थिति से विस्थापन को y से निरूपित करना होगा। किसी ज्यावक्रीय प्रगामी तरंग को तब निम्न रूप से वर्णित करते हैं

$$y(x, t) = a \sin(kx - \omega t + \phi) \qquad (15.2)$$

ज्या फलन के कोणांक में पद ϕ का तात्पर्य है कि हम ज्या और कोज्या फलनों के रैखिक संयोजन पर विचार कर रहे हैं :

$$y(x, t) = A \sin(kx - \omega t) + B \cos(kx - \omega t) \qquad (15.3)$$

तब समीकरण (15.2) एवं (15.3) से

$$a = \sqrt{A^2 + B^2} \quad \text{तथा} \quad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{B}{A}\right)$$

समीकरण (15.2) क्यों ज्यावक्रीय प्रगामी तरंग निरूपित करता है यह समझने के लिए किसी निश्चित क्षण, मान लीजिए $t = t_0$, पर विचार करें। तब समीकरण (15.2) में ज्या फलन का कोणांक (kx + स्थिरांक) होगा। अत: तरंग का आकार (किसी निश्चित क्षण पर) x के फलन के रूप में ज्या तरंग है। इसी प्रकार, किसी निश्चित स्थिति $x = x_0$ पर विचार करें। तब समीकरण (15.2) में ज्या फलन का कोणांक एक स्थिरांक $-\omega t$ है। अत: किसी निश्चित स्थिति पर विस्थापन y समय के साथ ज्यावक्रीय रूप से परिवर्तित होता है। अर्थात, विभिन्न स्थितियों पर माध्यम के अवयव सरल आवर्त गति करते हैं। ध्यान दीजिए कि जैसे t का मान बढ़ता है, x का मान भी धनात्मक दिशा में बढ़ेगा जिससे $kx - \omega t + \phi$ का मान अचर रहे। अत: समीकरण (15.2) x - अक्ष के धनात्मक दिशा के अनुदिश ज्यावक्रीय (आवर्त) तरंग निरूपित करता है। इसके विपरीत, फलन

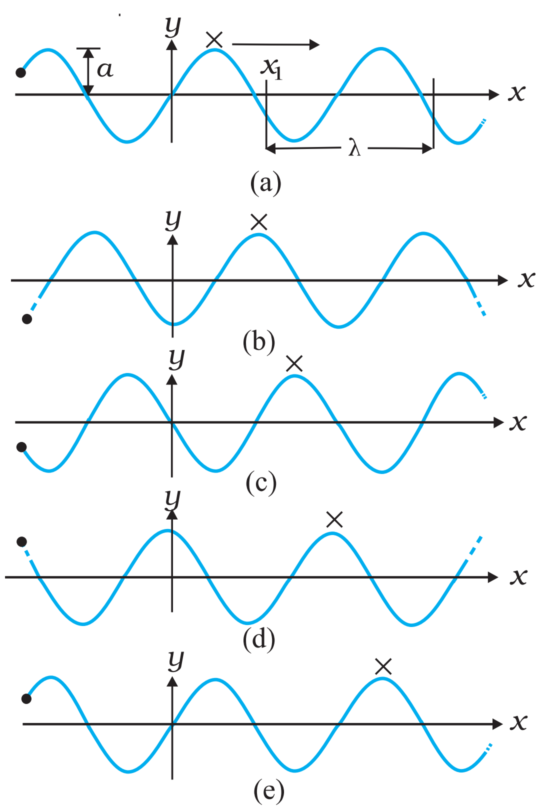
$$y(x, t) = a \sin(kx + \omega t + \phi) \qquad (15.4)$$

x-अक्ष की ऋणात्मक दिशा के अनुदिश गतिशील तरंग को निरूपित करता है । चित्र 15.5 समीकरण (15.2) के विभिन्न भौतिक राशियों के नाम दर्शाता है जिसको हम अब परिभाषित करेंगे।

$y(x,t)$	:	स्थिति x तथा समय t के फलन के रूप में विस्थापन
a	:	तरंग का आयाम
ω	:	तरंग की कोणीय आवृत्ति
k	:	कोणीय तरंग संख्या
$kx-\omega t+\phi$	:	आरंभिक कला कोण $(a+x = 0,\ t = 0)$

चित्र 15.5 *समीकरण (15.2) के मानक चिह्नों की परिभाषा।*

चित्र 15.6 समान अंतराल पर पाँच भिन्न मानों के लिए समीकरण (15.2) के आलेख दर्शाता है। किसी तरंग में अधिकतम धनात्मक विस्थापन वाले बिंदु को शीर्ष कहते हैं तथा अधिकतम ऋणात्मक विस्थापन वाले बिंदु को गर्त कहते हैं। यह देखने के लिए कि कोई तरंग कैसे गति करती है हम शीर्ष पर ध्यान केन्द्रित कर सकते हैं और फिर देखें कि यह शीर्ष समय के साथ कैसे गति करता है। चित्र में इसे शीर्ष पर क्रास (×) से दर्शाया गया है। इसी प्रकार हम माध्यम के किसी निश्चित स्थिति, मान लीजिए



चित्र 15.6 *भिन्न समयों पर x-अक्ष की धनात्मक दिशा के अनुदिश गतिशील कोई आवर्ती तरंग*

x अक्ष के मूल बिंदु पर किसी अवयव की गति पर विचार कर सकते हैं। इसे चित्र पर ठोस बिन्दु (•) से दर्शाया गया है। चित्र 15.6 के आलेख दर्शाते हैं कि मूल बिंदु पर ठोस बिंदु (•) समय के साथ आवर्ती रूप से गति करता है। अर्थात, तरंग के गति के साथ मूल बिंदु पर स्थित कण अपनी माध्य स्थिति के पारित: दोलन करता है। यह किसी अन्य स्थिति के कण के लिए भी सत्य है। हम यह भी देखते हैं कि जितने समय में ठोस बिंदु (•) एक पूर्ण दोलन करता है उतने में शीर्ष एक निश्चित दूरी चल लेता है।

चित्र 15.6 के आलेखों के आधार पर अब हम समीकरण (15.2) की विभिन्न राशियों को परिभाषित करेंगे

15.3.1 आयाम तथा कला

समीकरण (15.2) में, चूंकि ज्या फलन का मान +1 तथा –1 के बीच परिवर्तित होता है, विस्थापन $y(x,t)$ का मान a तथा $-a$ के बीच परिवर्तित होता है। हम यदि a को धनात्मक अचर मानें तो व्यापकता का कोई ह्रास नहीं होता है। तब a माध्यक के किसी अवयव का अपने माध्य स्थिति से अधिकतम विस्थापन दर्शाता है। ध्यान दें कि विस्थापन y धनात्मक या ऋणात्मक हो सकता है परंतु a धनात्मक है। a को तरंग का *आयाम* कहते हैं।

समीकरण (15.2) के कोणांक की राशि $(kx - \omega t + \phi)$ को तरंग की कला कहते हैं। दिये हुए आयाम a के लिए, किसी स्थिति एवं समय पर कला तरंग का विस्थापन निर्धारित करता है। स्पष्टत: $x = 0$ तथा $t = 0$ पर कला ϕ है। अत: ϕ को आरंभिक कला कोण कहते हैं। x- अक्ष पर मूल बिंदु तथा आरंभिक क्षण का इस प्रकार चुनाव सदैव ही संभव होता है कि $\phi = 0$ । अत: समीकरण (15.2) में $\phi = 0$ लेने पर व्यापकता का कोई ह्रास नहीं होता है।

15.3.2 तरंगदैर्घ्य तथा कोणीय तरंग संख्या

समान कला के दो बिंदुओं के बीच की न्यूनतम दूरी को तरंगदैर्घ्य कहते हैं और इसे सामान्यत: λ से दर्शाते हैं। सुविधा के लिए हम समान कला वाले बिंदुओं को शीर्ष या गर्त ले सकते हैं। तब तरंगदैर्घ्य दो क्रमागत शीर्षों अथवा गर्तों के बीच की दूरी है। समीकरण (15.2) में $\phi = 0$ लेने पर, $t = 0$ पर विस्थापन होगा

$$y(x, 0) = a \sin kx \qquad (15.5)$$

चूंकि कोण में 2π से प्रत्येक परिवर्तन पर ज्या फलन का मान वही रहता है :

$$\sin kx = \sin (kx + 2n\pi) = \sin k\left[x + \frac{2n\pi}{k}\right]$$

अर्थात बिंदुओं x तथा $x + \frac{2n\pi}{k} a$ पर विस्थापन समान होते हैं – यहाँ $n = 1, 2, 3, ...$ । समान विस्थापन किसी दिये हुए क्षण पर वाले बिंदुओं के मध्य न्यूनतम दूरी $n = 1$ लेने पर प्राप्त होती है। λ तब दिया जाता है समीकरण

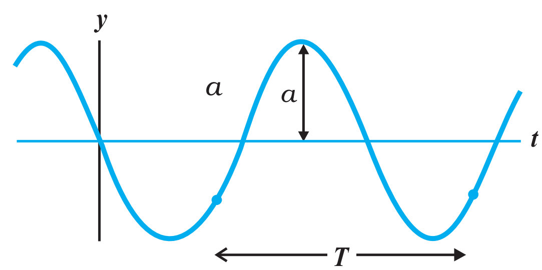
$$\lambda = \frac{2\pi}{k}, \text{ या } k = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad (15.6)$$

k को **संचरण स्थिरांक** अथवा **कोणीय तरंग संख्या** कहते हैं । इसका SI मात्रक रेडियन प्रति मीटर अथवा rad m^{-1} है।*

15.3.3 आवर्तकाल, कोणीय आवृत्ति तथा आवृत्ति

चित्र 15.7 में एक ज्यावक्रीय आलेख दिखाया गया है। यह किसी निश्चित क्षण पर तरंग का आकार नहीं दर्शाता है बल्कि माध्यम के एक अवयव (किसी निश्चित स्थिति पर) का समय के साथ विस्थापन दर्शाता है। सुविधा के लिए हम समीकरण (15.2) में $\phi = 0$ लेते हैं और अवयव (मान लीजिए $x=0$ पर) की गति पर ध्यान देते हैं। तब हमें प्राप्त होता है

$$y(0,t) = a \sin(-\omega t)$$
$$= -a \sin \omega t$$



चित्र 15.7 जब तरंग डोरी में से गुजरती है तो किसी निश्चित स्थिति पर डोरी का अवयव आयाम a से समय के साथ दोलन करता है।

तरंग के दोलन का आवर्त काल डोरी के किसी अवयव द्वारा एक पूर्ण दोलन में लिया गया समय है। अर्थात्

$$-a \sin \omega t = -a \sin \omega(t + T)$$
$$= -a \sin(\omega t + \omega T)$$

चूंकि ज्या फलन प्रत्येक 2π कोण पर पुनरावृत्ति करता है,

$$\omega T = 2\pi, \text{ या } \omega = \frac{2\pi}{T} \qquad (15.7)$$

ω को तरंग की **कोणीय आवृत्ति** कहते हैं । इसका SI मात्रक रेडियन प्रति सेकंड अथवा rad s^{-1} है। किसी तरंग की आवृत्ति ν प्रति सेकंड दोलनों की संख्या है। अत:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \qquad (15.8)$$

*यहाँ भी rad को छोड़ सकते हैं और मात्रक को केवल m^{-1} से व्यक्त कर सकते हैं। अत:, k, इकाई लंबाई में समा सकने वाली तरंगों की संख्या का 2π से गुणा करने पर प्राप्त होने वाली m^{-1} SI मात्रक में मापी जाने वाली राशि है।

ν को हर्ट्ज (Hz) में मापते हैं।

उपर्युक्त चर्चा में सदैव ही किसी डोरी के अनुदिश गतिशील तरंग अथवा अनुप्रस्थ तरंग का संदर्भ लिया गया है । अनुदैर्घ्य तरंग में माध्यम के किसी अवयव में तरंग संचरण की दिशा के समांतर विस्थापन होता है । समीकरण (15.2) में किसी अनुदैर्घ्य तरंग के लिए विस्थापन फलन इस प्रकार लिखा जाता है,

$$s(x, t) = a \sin (kx - \omega t + \phi) \tag{15.9}$$

यहाँ $s(x, t)$ स्थिति x तथा समय t पर माध्यम के किसी अवयव का तरंग संचरण की दिशा में विस्थापन है । समीकरण (15.9) में a विस्थापन आयाम है। अन्य सभी राशियों के वही अर्थ हैं जो अनुप्रस्थ तरंग के प्रकरण में थे । केवल एक ही अंतर है कि विस्थापन फलन $y(x, t)$ के स्थान पर फलन $s(x, t)$ लिया गया है।

▶ ***उदाहरण 15.2 :*** किसी डोरी के अनुदिश गमन करती तरंग का विवरण इस प्रकार दिया गया है,

$y(x, t) = 0.005 \sin (80.0\, x - 3.0\, t)$

यहाँ आंकिक स्थिरांक SI मात्रकों में हैं (0.005 m, 80.0 rad/m तथा 3.0 rad/s)। तरंग का (a) आयाम, (b) तरंगदैर्घ्य (c) आवर्तकाल एवं आवृत्ति परिकलित कीजिए। दूरी $x = 30.0$ cm तथा समय $t = 20$ s पर तरंग का विस्थापन y भी परिकलित कीजिए ।

हल इस विस्थापन की तुलना समीकरण (15.2) से करने पर

$$y (x, t) = a \sin (kx - \omega t)$$

हमें निम्नलिखित मान प्राप्त होते हैं,

(a) तरंग का आयाम = 0.005 m = 5 mm

(b) कोणीय तरंग संख्या = 80.0 m^{-1} तथा कोणीय आवृत्ति $\omega = 30\ s^{-1}$

अब हम समीकरण (15.6) के द्वारा तरंगदैर्घ्य λ तथा k में संबंध लिखते हैं

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{80.0\ m^{-1}} = 7.85\ \text{cm}$$

(c) अब हम नीचे दिए गए T तथा ω में संबंध द्वारा T का मान ज्ञात करते हैं,

$$T = 2\pi/\omega = \frac{2\pi}{3.0\ s^{-1}} = 2.09\ s$$

अब चूँकि आवृत्ति $\nu = 1/T$

$= 0.48$ Hz

दूरी $x = 30.0$ cm तथा समय $t = 20$ s पर विस्थापन

$$y = 0.005\text{m} \sin$$
$$= 0.005\text{m} \sin (-36 + 12\pi) = (0.005\ \text{m}) \sin (1.699)$$
$$= (0.005\ \text{m}) \sin (97°) \simeq 5\ \text{mm}$$ ◀

15.4 प्रगामी तरंग की चाल

किसी प्रगामी तरंग की चाल निरूपित करने के लिए हम तरंग के किसी बिन्दु (किसी कला कोण द्वारा अभिलक्षित) पर ध्यान केंद्रित कर सकते हैं और देखते हैं कि यह बिंदु समय के साथ किस तरह गमन करता है। तरंग के शीर्ष की गति पर ध्यान देना सुविधाजनक होता है। चित्र 15.8 में दो विभिन्न समयों, जिनके बीच Δt का लघु समय अंतराल है, पर तरंग का आकार दर्शाया गया है। समस्त तरंग पैटर्न दाईं ओर (x-अक्ष की धनात्मक दिशा) Δx दूरी चलता है। वास्तव में, क्रास (×) द्वारा दर्शाया शीर्ष समय Δt में दूरी Δx चलता है। इस प्रकार तरंग की चाल $\Delta x/\Delta t$ है। किसी अन्य कला वाले बिंदु पर भी हम क्रास (×) लगा सकते हैं। यह उसी वेग υ से गमन करेगा (अन्यथा तरंग पैटर्न अपरिवर्तित नहीं रहेगा)। तरंग पर किसी निश्चित कला बिंदु की गति को दिया जाता है

$$kx - \omega t = \text{नियतांक} \tag{15.10}$$

अत: जब समय t बदलता है, तो निश्चित कला बिंदु की स्थिति x भी इस प्रकार बदलती है कि कला कोणांक अचर रहे। अत:

$$kx - \omega t = k (x+\Delta x) - \omega(t + \Delta t)$$

या $\quad k\Delta x - \omega\Delta t = 0$

$\Delta x, \Delta t$ का अल्पतम मान लेने पर

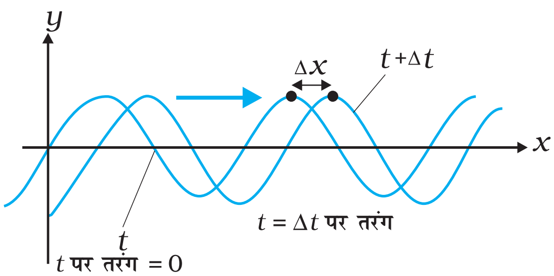
$$\frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = \upsilon \tag{15.11}$$

ω को T से तथा k को λ से संबंधित करने पर हमें प्राप्त होता है

$$\upsilon = \frac{2\pi\omega}{2\pi k} = \lambda\nu = \frac{\lambda}{T} \tag{15.12}$$

समीकरण (15.12) सभी प्रगामी तरंगों के लिए एक व्यापक संबंध है। यह बताती है कि माध्यम के किसी अवयव के एक

पूर्ण दोलन काल में तरंग पैटर्न एक तरंगदैर्घ्य के बराबर दूरी तय करती है। ध्यान दीजिए कि किसी यांत्रिक तरंग की चाल माध्यम के जड़त्वीय गुणों (डोरी के लिए रैखिक द्रव्यमान घनत्व, सामान्यतया द्रव्यमान घनत्व) तथा प्रत्यास्थ गुणों (रैखिक निकायों के लिए यंग प्रत्यास्थता गुणांक/अपरूपण गुणांक, आयतन प्रत्यास्थता गुणांक) द्वारा निर्धारित होता है। माध्यम चाल निर्धारित करता है। यथा समीकरण (15.2) एक निश्चित चाल के लिए तरंगदैर्घ्य और आवृत्ति का संबंध देता है। वास्तव में, जैसा पहले बताया जा चुका है, माध्यम में अनुप्रस्थ तथा अनुदैर्घ्य दोनों तरंगें संभव हैं तथा इनकी चाल उसी माध्यम में अलग-अलग होगी। इस अध्याय के अनुवर्ती उपभागों में कुछ माध्य यांत्रिक तरंगों की चाल के लिए हम विशिष्ट व्यंजक प्राप्त करेंगे।

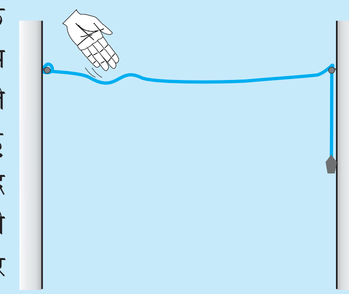


चित्र 15.8 समय t से $t+\Delta t$ तक किसी आवृत्ति तरंग का गमन, जहाँ Δt लघु समय अंतराल है। तरंग पैटर्न समस्त रूप से दाईं ओर स्थानांतरित हो जाता है। तरंग का शीर्ष (या निश्चित कला वाला कोई और बिंदु) समय Δt में दूरी Δx गमन करता है।

15.4.1 तनित डोरी पर अनुप्रस्थ तरंग की चाल

किसी यांत्रिक तरंग की चाल विक्षोभ के कारण माध्यम में उत्पन्न प्रत्यानयन बल और जड़त्वीय गुणों (द्रव्यमान घनत्व) द्वारा निर्धारित होती है। चाल प्रथम कारक से अनुलोम रूप से तथा दूसरे कारक से प्रतिलोम रूप से संबंधित होती है। किसी डोरी पर तरंग के लिए प्रत्यानयन बल डोरी में तनाव T प्रदान करता है। इस संदर्भ में जड़त्वीय गुण रैखिक द्रव्यमान घनत्व μ है जो डोरी के द्रव्यमान m को उसकी लंबाई l से विभाजित करने पर प्राप्त होता है। न्यूटन के गतिकीय नियमों का उपयोग करके किसी डोरी पर तरंग की चाल के लिए यथार्थ सूत्र प्राप्त किया जा सकता है परन्तु यह उत्पत्ति इस पुस्तक की सीमा के बाहर है। अत: हम विमीय विश्लेषण का उपयोग करेंगे। परन्तु हम यह जान चुके हैं कि केवल विमीय विश्लेषण से यथार्थ सूत्र नहीं प्राप्त हो सकता है। इस विधि से प्राप्त संबंध में स्थिरांक संबंधी अनिश्चितता रहती है। μ की विमा $[ML^{-1}]$ है तथा T की बल की, अर्थात $[MLT^{-2}]$ है। हमें इन विमाओं को इस प्रकार

किसी रस्सी पर स्पंद का संचरण



किसी रस्सी पर एक स्पंद का संचरण आप आसानी से देख सकते हैं। आप एक दृढ़ परिसीमा से इस स्पंद का परिवर्तन होना भी देख सकते हैं और इसके गमन वेग की गणना भी कर सकते हैं। इसके लिए आपको 1 से 3 cm व्यास के एक रस्से, दो हुकों और कुछ भारों की आवश्यकता होगी। आप यह प्रयोग अपनी कक्षा में भी कर सकते हैं और प्रयोगशाला में भी।

1 से 3 cm व्यास की लंबी रस्सी लीजिए। किसी सभागार या प्रयोगशाला के आमने-सामने की दीवारों पर दो हुक लगाकर इसका एक सिरा एक हुक से कस कर बाँध दीजिए और दूसरे सिरे को सामने वाले हुक से गुजार कर इस पर कोई भार (1 से 5kg) लटकाइये। दीवारों के बीच की दूरी 3 से 5 मीटर हो सकती है। एक छड़ लीजिए और रस्सी के एक सिरे के पास इस पर ज़ोर से प्रहार कीजिए। इससे रस्सी पर एक स्पंद बनेगा जो फिर इस पर दूसरे सिरे तक जाएगा। आप इसे दूसरे सिरे तक जाकर परावर्तित होता हुआ देख सकते हैं। आप आपाती स्पंद और परावर्तित स्पंद की कलाओं का संबंध भी जाँच सकते हैं। स्पंद के समाप्त होने से पहले आप इसके दो-तीन परावर्तन होते देख सकते हैं। एक स्टॉपवाच (विराम घड़ी) की सहायता से आप स्पंद द्वारा एक दीवार से दूसरी दीवार की दूरी तक चलने में लगा समय ज्ञात कर सकते हैं और फिर इसके वेग की गणना कर सकते हैं। इसकी तुलना समीकरण (15.14) द्वारा प्राप्त मान से कीजिए।

ऐसा ही किसी संगीत वाद्य के पतले धात्विक तंतु के मामले में भी होता है। मुख्य अंतर बस यह है कि तंतु का प्रति इकाई द्रव्यमान कम होने के कारण इस पर स्पंद का वेग मोटी रस्सी पर इसके वेग की तुलना में काफी अधिक होता है। रस्सी पर स्पंद का वेग कम होने के कारण इसे देखा जा सकता है और इसलिए मापन सुविधाजनक और सटीक हो जाता है।

संयोजित करना है कि चाल की विमा [LT^{-1}] प्राप्त हो। हम आसानी से देख सकते हैं कि अनुपात T/μ में यही विमा है

$$\frac{[MLT^{-2}]}{[ML^{-1}]} = [L^2T^{-2}]$$

अतः, यदि T तथा μ ही प्रासंगिक भौतिक राशियाँ हैं तो

$$\upsilon = C\sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad (15.13)$$

जहाँ C विमाहीन स्थिरांक है, जिसे विमीय विश्लेषण द्वारा निर्धारित करना संभव नहीं है । वास्तव में यथार्थ सूत्र में C का मान 1 है। अतः तानित डोरी में अनुप्रस्थ तरंग की चाल

$$\upsilon = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad (15.14)$$

ध्यान दीजिए कि चाल υ माध्यम के गुण T और μ (T बाहरी बल के कारण तानित डोरी का अभिलक्षण है) पर तरंग की तरंगदैर्ध्य या आवृत्ति पर स्वतः निर्भर नहीं करती है। आगे की कक्षाओं में आप ऐसी तरंगों के बारे में पढ़ेंगे जिनकी चाल आवृत्ति से स्वतंत्र नहीं है। दो कारकों λ तथा ν उत्पन्न तरंग की आवृत्ति विक्षोभ के स्रोत पर निर्भर करता है। माध्यम में किसी निश्चित चाल तथा आवृत्ति के लिए, समीकरण (15.12) तरंगदैर्ध्य का निर्धारण करता है:

$$\lambda = \frac{\upsilon}{\nu} \quad (15.15)$$

▶ ***उदाहरण 15.3 :*** 0.72 m लंबे किसी स्टील के तार का द्रव्यमान 5.0×10^{-3} kg है । यदि तार पर तनाव 60 N है, तो तार पर अनुप्रस्थ तरंगों की चाल क्या है ?

हल : तार की प्रति एकांक लंबाई का द्रव्यमान

$$\mu = \frac{5.0\times10^{-3}\,\text{kg}}{0.72\ \text{m}}$$

$$= 6.9\times10^{-3}\ \text{kg m}^{-1}$$

तनाव, $T = 60$ N

तार पर अनुप्रस्थ तरंगों की चाल,

$$\upsilon = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{60\text{N}}{6.9\times10^{-3}\text{kg m}^{-1}}} = 93\ \text{m s}^{-1}$$ ◀

15.4.2 अनुदैर्घ्य तरंग की चाल - ध्वनि की चाल

किसी अनुदैर्घ्य तरंग में माध्यम के अवयव तरंग संचरण की दिशा में अपनी स्थिति के आगे-पीछे दोलन करते हैं । हम पहले भी देख चुके हैं कि ध्वनि तरंगें वायु के लघु आयतन-अवयवों के संपीडनों तथा विरलनों के रूप में गमन करती हैं । संपीडन विकृति में प्रतिबल का निर्धारण करने वाली प्रत्यास्थ गुणधर्म माध्यम का आयतन प्रत्यास्थता गुणांक है जिसे इस प्रकार परिभाषित करते हैं,

$$B = -\frac{\Delta P}{\Delta V/V} \quad (15.16)$$

यहाँ दाब में परिवर्तन ΔP आयतन विकृति $\Delta V/V$ उत्पन्न करता है। B की विमा वही है जो दाब की है और SI मात्रक में इसे पास्कल (Pa) में व्यक्त करते हैं। तरंग के संचरण के लिए प्रासंगिक जड़त्वीय गुण द्रव्यमान घनत्व ρ है जिसकी विमा [ML^{-3}] है । हम आसानी से देख सकते हैं कि राशि B/ρ में उपेक्षित विमा है :

$$\frac{[M\,L^{-1}\,T^{-2}]}{[M\,L^{-3}]} = [L^2\,T^{-2}] \quad (15.17)$$

अतः, यदि B तथा ρ ही प्रासंगिक भौतिक राशियाँ हैं तो

$$\upsilon = C\sqrt{\frac{B}{\rho}} \quad (15.18)$$

यहाँ C एक स्थिरांक है जिसे विमीय विश्लेषण द्वारा निर्धारित करना संभव नहीं है। यथार्थ उत्पत्ति से C=1 प्राप्त होता है । अतः किसी माध्यम में अनुदैर्घ्य तरंगों की चाल के लिए व्यापक सूत्र है:

$$\upsilon = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \quad (15.19)$$

किसी ठोस छड़ जैसे रैखीय माध्यम के लिए, छड़ में पार्श्वीय प्रसार नगण्य होता है और हमें छड़ को केवल अनुदैर्घ्य विकृति पर विचार करने की आवश्यकता होती है। इस प्रकरण में, प्रासंगिक प्रत्यास्थता गुणांक 'यंग गुणांक' है जिसकी विमा आयतन-प्रत्यास्थता गुणांक की विमा है। इस प्रकरण के लिए विमीय विश्लेषण पहले जैसा है और हमें समीकरण (15.18) जैसी समीकरण प्राप्त होती है जिसमें अनिर्धारित स्थिरांक C होता है जिसका मान यथार्थ उत्पत्ति से 1 प्राप्त होता है। इस प्रकार किसी ठोस छड़ में अनुदैर्घ्य तरंग की चाल निम्नलिखित संबंध द्वारा व्यक्त की जाती है:

$$\upsilon = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} \quad (15.20)$$

यहाँ Y छड़ के पदार्थ का यंग प्रत्यास्थता गुणांक है । सारणी 15.1 में विभिन्न माध्यमों में ध्वनि की चाल दर्शायी गई है।

सारणी 15.1 कुछ माध्यमों में ध्वनि की चाल

माध्यम	चाल (ms^{-1})
गैसें	
वायु (0°C)	331
वायु (20°C)	343
हीलियम	965
हाइड्रोजन	1284
द्रव	
जल (0°C)	1402
जल (20°C)	1482
समुद्र-जल	1522
ठोस	
ऐलुमिनियम	6420
कॉपर (ताँबा)	3560
स्टील	5941
ग्रेनाइट	6000
वल्केनाइज्ड रबर	54

द्रवों तथा ठोसों में ध्वनि की चाल गैसों की तुलना में अधिक है। [ध्यान दें कि ठोसों के प्रकरण में, प्रासंगिक चाल ठोस में अनुदैर्ध्य तरंग की चाल है]। इसका कारण यह है कि द्रवों व ठोसों को गैसों की तुलना में संपीडित करना अधिक कठिन होता है। अतः इनके आयतन प्रत्यास्थता गुणांक के मान अधिक होते हैं। यह कारण गैसों से उनके घनत्व अधिक होने को निरस्त करता है।

किसी गैस में ध्वनि के चाल का आकलन हम आदर्श गैस सन्निकटन में कर सकते हैं। किसी आदर्श गैस (देखें अध्याय 11) के लिए दाब P, आयतन V तथा ताप T के नीचे संबंध इस प्रकार व्यक्त किया जाता है:

$$PV = Nk_BT \qquad (15.21)$$

यहाँ N गैस में अणुओं की संख्या, k_B बोल्ट्ज़मान नियतांक तथा T गैस का केल्विन में ताप है । अतः किसी समतापी परिवर्तन के लिए समीकरण (15.21) से हमें निम्नलिखित संबंध प्राप्त होता है

$$V\Delta P + P\Delta V = 0$$

अथवा $$-\frac{\Delta P}{\Delta V/V} = P$$

अतः समीकरण (15.16) में यह मान प्रतिस्थापित करने पर,

$$B = P$$

अतः समीकरण (15.19) से किसी आदर्श गैस में अनुदैर्ध्य तरंगों की चाल,

$$v = \sqrt{\frac{P}{\rho}} \qquad (15.22)$$

इस संबंध को सर्वप्रथम न्यूटन ने स्थापित किया था, अतः इसे न्यूटन का सूत्र भी कहते हैं ।

▶ ***उदाहरण 15.4*** न्यूटन के सूत्र का उपयोग करके मानक ताप एवं दाब (STP) पर वायु में ध्वनि की चाल का आकलन कीजिए । वायु के 1 मोल का द्रव्यमान 29.0×10^{-3} kg है ।

हल : हम जानते हैं कि किसी भी गैस के 1 मोल का STP पर आयतन 22.4 लीटर होता है । अतः वायु का STP पर घनत्व

$$\rho_0 = \frac{1 \text{ मोल वायु का द्रव्यमान}}{\text{STP पर 1 मोल वायु का आयतन}}$$

$$= \frac{29.0 \times 10^{-3}\,\text{kg}}{22.4 \times 10^{-3}\,\text{m}^3}$$

$$= 1.29 \text{ kg m}^{-3}$$

किसी माध्यम से ध्वनि की चाल के लिए न्यूटन के सूत्र के अनुसार हमें STP पर वायु में ध्वनि के वेग का निम्नलिखित मान प्राप्त होता है,

$$v = \left[\frac{1.01 \times 10^5 \text{ N m}^{-2}}{1.29 \text{ kg m}^{-3}}\right]^{1/2} = 280 \text{ m s}^{-1} \qquad (15.23)$$ ◀

समीकरण (15.23) से प्राप्त वायु में ध्वनि की चाल का मान, सारणी 15.1 में दिए गए प्रयोगों द्वारा प्राप्त वायु में ध्वनि की चाल के मान 331 m s^{-1} की तुलना में 15% कम है। आखिर हमसे कहाँ गलती हुई? यदि हम न्यूटन की इस मूल कल्पना का परीक्षण करें जिसमें न्यूटन ने ध्वनि संचरण के समय माध्यम में दाब में होने वाले परिवर्तन को समतापी माना, तो हम यह पाते हैं कि उनकी यह कल्पना सही नहीं थी । लाप्लास ने यह बताया कि ध्वनि संचरण के समय माध्यम में दाब-परिवर्तन इतनी तीव्र गति से होते हैं कि ऊष्मा प्रवाह के लिए ताप को स्थायी बनाए रखने का आवश्यक समय उपलब्ध नहीं हो पाता। फलस्वरूप यह परिवर्तन समतापी नहीं होते वरन् रुद्धोष्म