Chapter

22

अवकलन तथा अवकलन के अनुप्रयोग

अवकलन

प्रस्तावना (Introduction)

एक राशि के परिवर्तन की दर, किसी दूसरी राशि के सापेक्ष बड़ा महत्व रखती है।

एक राशि 'y' के परिवर्तन की दर, किसी दूसरी राशि 'x' के सापेक्ष y का x के सापेक्ष अवकलज या अवकलन गुणांक कहलाती है।

मानक अवकल गुणांक (Some standard differentiation)

(1) **बीजगणितीय फलनों का अवकलन :** $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$

(i) $\frac{d}{dx}[f(x)]^n = n[f(x)]^{n-1}f'(x)$ (ii) $\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

(iii) $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^n}\right) = -\frac{n}{x^{n+1}}$

(2) **त्रिकोणमितीय फलनों का अवकलन :**

(i) $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$ (ii) $\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$

(iii) $\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$ (iv) $\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x$

(v) $\frac{d}{dx}\text{cosec } x = -\text{cosec } x \cot x$ (vi) $\frac{d}{dx}\cot x = -\text{cosec}^2 x$

(3) **लघुगणकीय व चरघातांकी फलनों का अवकलन :**

(i) $\frac{d}{dx}\log x = \frac{1}{x}$, $x > 0$ के लिए

(ii) $\frac{d}{dx}e^x = e^x$

(iii) $\frac{d}{dx}a^x = a^x \log a$, $a > 0$ के लिए

(iv) $\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{1}{x \log a}$, $x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$ के लिए

(4) **प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों का अवकलन :**

(i) $\frac{d}{dx}\sin^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $-1 < x < 1$ के लिए

(ii) $\frac{d}{dx}\cos^{-1} x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$, $-1 < x < 1$ के लिए

(iii) $\frac{d}{dx}\sec^{-1} x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$, $|x| > 1$ के लिए

(iv) $\frac{d}{dx}\text{cosec}^{-1} x = \frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$, $|x| > 1$ के लिए

(v) $\frac{d}{dx}\tan^{-1} x = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in R$ के लिए

(vi) $\frac{d}{dx}\cot^{-1} x = \frac{-1}{1+x^2}$, $x \in R$ के लिए

(5) **अतिपरवलयिक फलनों का अवकलन :**

(i) $\frac{d}{dx}\sinh x = \cosh x$ (ii) $\frac{d}{dx}\cosh x = \sinh x$

(iii) $\frac{d}{dx}\tanh x = \text{sech}^2 x$ (iv) $\frac{d}{dx}\coth x = -\text{cosech}^2 x$

(v) $\frac{d}{dx}\text{sech } x = -\text{sech } x \tanh x$

(vi) $\frac{d}{dx}\text{cosech } x = -\text{cosech } x \coth x$

(vii) $\frac{d}{dx}\sinh^{-1} x = 1/\sqrt{(1+x^2)}$

(viii) $\frac{d}{dx}\cosh^{-1} x = 1/\sqrt{(x^2-1)}$

(ix) $\frac{d}{dx}\tanh^{-1} x = 1/(x^2-1)$ (x) $\frac{d}{dx}\coth^{-1} x = 1/(1-x^2)$

(xi) $\frac{d}{dx}\text{sech}^{-1} x = -1/x\sqrt{(1-x^2)}$

(xii) $\frac{d}{dx}\text{cosech}^{-1} x = -1/x\sqrt{(1+x^2)}$

(6) **कुछ महत्वपूर्ण प्रतिस्थापन :**

सारणी : 22.1

फलन	प्रतिस्थापन	फलन	प्रतिस्थापन
$\sqrt{a^2-x^2}$	$x=a\sin\theta$ या $a\cos\theta$	$\sqrt{x^2+a^2}$	$x=a\tan\theta$ या $a\cot\theta$
$\sqrt{x^2-a^2}$	$x=a\sec\theta$ या $a\operatorname{cosec}\theta$	$\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$	$x=a\cos 2\theta$
$\sqrt{\frac{a^2-x^2}{a^2+x^2}}$	$x^2=a^2\cos 2\theta$	$\sqrt{ax-x^2}$	$x=a\sin^2\theta$
$\sqrt{\frac{x}{a+x}}$	$x=a\tan^2\theta$	$\sqrt{\frac{x}{a-x}}$	$x=a\sin^2\theta$
$\sqrt{(x-a)(x-b)}$	$x=a\sec^2\theta - b\tan^2\theta$	$\sqrt{(x-a)(b-x)}$	$x=a\cos^2\theta + b\sin^2\theta$

अवकलन पर प्रमेय (Theorems for differentiation)

माना $f(x), g(x)$ और $u(x)$ अवकलनीय फलन हैं।

(1) यदि एक निश्चित अंतराल के सभी बिन्दुओं पर $f'(x)=0$, तब फलन $f(x)$ इस अंतराल में एक नियत मान रखता है।

(2) **श्रृंखला नियम :**

(i) **स्थिति I :** यदि y, u का फलन है और u, x का फलन है, तब x के सापेक्ष y का अवकलज $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}$ या $y=f(u)$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=f'(u)\frac{du}{dx}$ होगा।

(ii) **स्थिति II :** यदि y और x दोनों को t के पदों में व्यक्त कर सकते हैं, तो y और x दोनों को t के सापेक्ष अवकलित करते हैं।

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}$$

(3) **योग व अन्तर नियम :**

$$\frac{d}{dx}(f(x)\pm g(x))=\frac{d}{dx}(f(x))\pm\frac{d}{dx}(g(x))$$

(4) **गुणन नियम :**

(i) $\frac{d}{dx}(f(x).g(x))=f(x)\frac{d}{dx}g(x)+g(x)\frac{d}{dx}f(x)$

(ii) $\frac{d}{dx}(u.v.w.)=u.v.\frac{dw}{dx}+v.w.\frac{du}{dx}+u.w.\frac{dv}{dx}$

(5) **अदिश गुणन नियम :** $\frac{d}{dx}(k\,f(x))=k\frac{d}{dx}f(x)$

(6) **विभाजन नियम :** $\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{g(x)\frac{d}{dx}(f(x))-f(x)\frac{d}{dx}(g(x))}{(g(x))^2}$,

जबकि $g(x)\neq 0$.

अवकलन की विधियाँ (Methods of differentiation)

(1) **अस्पष्ट फलनों का अवकलन** : यदि y को पूर्ण रूप से x के पदों में व्यक्त किया जा सके, तो हम y को x का स्पष्ट फलन कहते हैं। ***उदाहरणार्थ :*** $y=\sin x, y=e, y=x+x+1$ इत्यादि। यदि y, x से सम्बन्धित है तथा $y=f(x)$ के रूप में उसे सुविधापूर्वक व्यक्त नहीं कर सकते हैं परन्तु $f(x,y)=0$ के रूप में व्यक्त कर सकते हैं तो हम y को x का अस्पष्ट फलन कहते हैं।

(i) **कार्यविधि** : (a) $f(x,y)=0$ के प्रत्येक पद का x के सापेक्ष अवकलन करते हैं।

(b) $\frac{dy}{dx}$ के सभी पद एक पक्ष में तथा शेष पद दूसरे पक्ष में स्थानान्तरित करते हैं।

(c) $\frac{dy}{dx}$ को x व y दोनों के फलन के रूप में व्यक्त करते हैं।

• अस्पष्ट अवकलन की स्थिति में $\frac{dy}{dx}$, x और y दोनों के पद सम्मिलित कर सकता है।

(ii) **कार्यविधि** : यदि $f(x, y)=$ अचर, तो $\frac{dy}{dx}=-\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}$,

जहाँ $\frac{\partial f}{\partial x}$ व $\frac{\partial f}{\partial y}$ क्रमशः x व y के सापेक्ष, $f(x,y)$ के आंशिक अवकल गुणांक हैं।

(2) **लघुगणकीय अवकलन** (Logarithmic differentiation) **:** यदि किसी दिए गये फलन के दोनों पक्षों का लघुगणक लेकर प्राप्त परिणाम का अवकलन करते हैं तो अवकलन की यह विधि लघुगणकीय अवकलन कहलाती है। अवकलन की यह विधि निम्न रूप के फलनों के लिए उपयोगी रहती है।

(i) $y=[f(x)]^{g(x)}$, जहाँ $f(x)$ व $g(x)$, x के फलन हैं। इस तरह के फलनों के अवकलन के लिए निम्न प्रक्रिया अपनाते हैं:

माना $y=[f(x)]^{g(x)}$.

दोनों पक्षों का लघुगणक लेने पर, $\log y=g(x).\log f(x)$.

(ii) $y=\frac{f_1(x).f_2(x)}{g_1(x).g_2(x)}$

दोनों पक्षों का लघुगणक लेने पर,

$$\log y=\log[f_1(x)]+\log[f_2(x)]-\log[g_1(x)]-\log[g_2(x)]$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{f_1'(x)}{f_1(x)}+\frac{f_2'(x)}{f_2(x)}-\frac{g_1'(x)}{g_1(x)}-\frac{g_2'(x)}{g_2(x)}.$$

(3) **प्राचलिक फलनों का अवकलन :** यदि x और y किसी एक चर के फलन के रूप में दिए गये हैं अर्थात् $x=\phi(t)$, $y=\psi(t)$ दो फलन हैं और

t एक चर है। इस स्थिति में x और y प्राचलिक फलन या प्राचलिक समीकरण कहलाते हैं तथा t प्राचल कहलाता है। प्राचलिक फलन की स्थिति में $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात करने के लिए हम सर्वप्रथम फलन में प्रयुक्त प्राचल t का विलोपन करके x और y दोनों में सम्बन्ध प्राप्त करते हैं और फिर उनका x के सापेक्ष अवकलन करते हैं। लेकिन यदि प्राचल t का विलोपन कठिन हो तो $\frac{dy}{dx}$ का मान सूत्र $\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}$ से ज्ञात करते है।

(4) **अनन्त श्रेणियों का अवकलन :** जब y, चर x की अनन्त श्रेणी के रूप में दिया गया हो तथा हमें $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात करना हो तो हम इस तथ्य का उपयोग करते हैं, कि अनन्त श्रेणी से एक या अधिक पद हटा दें तो श्रेणी अप्रभावित रहती है।

(i) यदि $y=\sqrt{f(x)+\sqrt{f(x)+\sqrt{f(x)+....\infty}}}$, तब $y=\sqrt{f(x)+y}$

$\Rightarrow y^2=f(x)+y \Rightarrow 2y\frac{dy}{dx}=f'(x)+\frac{dy}{dx}$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{f'(x)}{2y-1}.$

(ii) यदि $y=f(x)^{f(x)f(x)^{f(x)....\infty}}$, तब $y=f(x)^y$

$\therefore \log y=y\log f(x);\ \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{y.f'(x)}{f(x)}+\log f(x).\frac{dy}{dx}$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{y^2f'(x)}{f(x)[1-y\log f(x)]}$

(iii) यदि $y=f(x)+\frac{1}{f(x)+\frac{1}{f(x)+....\infty}}$, तब $\frac{dy}{dx}=\frac{yf'(x)}{2y-f(x)}.$

(5) **संयुक्त फलनों का अवकलन :** माना कोई फलन $fog(x)$ या $f[g(x)]$ के रूप में दिया गया है।

कार्यविधि : श्रृखंला नियम (Chain rule) से अवलकन करने पर, $\frac{d}{dx}f[g(x)]=f'[g(x)].g'(x).$

एक फलन का दूसरे फलन के सापेक्ष अवकलन (Differentiation of a function w.r.t. another function)

माना $u=f(x)$ और $v=g(x)$, x के दो फलन हैं, तब फलन $f(x)$ का अवकलन, फलन $g(x)$ के सापेक्ष निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात किया जा सकता है $\frac{du}{dv}=\frac{du/dx}{dv/dx}.$

उत्तरोत्तर अवकलन या उच्चकोटि के अवकलज (Successive differentiation or higher order derivatives)

(1) **परिभाषा एवं निरूपण :** यदि y, x का फलन है व x के सापेक्ष अवकलनीय है तो इसका अवकलज $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात किया जा सकता है, जो प्रथम कोटि का अवकलज कहलाता है। यदि $\frac{dy}{dx}$ भी अवकलनीय फलन है तो इसे पुनः x के सापेक्ष अवकलित कर सकते हैं तथा इसे $\frac{d^2y}{dx^2}$ से प्रदर्शित करते हैं, जो y का x के सापेक्ष द्वितीय कोटि का अवकलज कहलाता है और यदि $\frac{d^2y}{dx^2}$ भी अवकलनीय है तो इसका अवकलज y का तृतीय कोटि का अवकलज कहलाता है जिसे $\frac{d^3y}{dx^3}$ से प्रदर्शित करते हैं। ये सभी अवकलज उत्तरोत्तर अवकलज कहलाते हैं तथा इस प्रक्रिया को उत्तरोत्तर अवकलन कहते हैं। $y=f(x)$ के उत्तरोत्तर अवकलन को सांकेतिक रूप में निम्न प्रकार प्रदर्शित करते हैं :

$y_1,\ y_2,\ y_3,.....,\ y_n,.....\qquad y',\ y'',\ y'''.....,\ y^n,.....$

$Dy,\ D^2y,\ D^3y.....,\ D^ny,.....,\quad$ (जहाँ $D=\frac{d}{dx}$)

$\frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \frac{d^3y}{dx^3},.....\ \frac{d^ny}{dx^n},.....$ ..

$f'(x),\ f''(x),\ f'''(x),..... .,\ f^n(x),.....$

यदि $y=f(x)$ तो बिन्दु $x=a$ पर फलन $f(x)$ का nवाँ अवकलज सामान्यतः निम्न प्रकार प्रदर्शित किया जाता है

$\left(\frac{d^ny}{dx^n}\right)_{x=a}$ या $(y_n)_{x=a}$ या $(y^n)_{x=a}$ या $f^n(a)$

(2) **कुछ महत्वपूर्ण फलनों के n वें अवकलज**

(i) (a) $\frac{d^n}{dx^n}\sin(ax+b)=a^n\sin\left(\frac{n\pi}{2}+ax+b\right)$

(b) $\frac{d^n}{dx^n}\cos(ax+b)=a^n\cos\left(\frac{n\pi}{2}+ax+b\right)$

(ii) $\frac{d^n}{dx^n}(ax+b)^m=\frac{m!}{(m-n)!}a^n(ax+b)^{m-n},$ जहाँ $m>n$

विशेष स्थितियाँ :

(a) जब $m=n$; $D^n\{(ax+b)^n\}=a^n.n!$

(b) • जब $a=1,b=0$, तब $y=x^m$

$\therefore D^n(x^m)=m(m-1).....(m-n+1)x^{m-n}=\frac{m!}{(m-n)!}x^{m-n}$

• जब $m<n, D^n\{(ax+b)^m\}=0$

(c) जब $a=1,b=0$ तथा $m=n$,

तब $y=x^n;\therefore D^n(x^n)=n!$

(d) जब $m=-1,\ y=\frac{1}{(ax+b)}$

$D^n(y)=a^n(-1)(-2)(-3).....(-n)(ax+b)^{-1-n}$

$=a^n(-1)^n(1.2.3.....n)(ax+b)^{-1-n}=\frac{a^n(-1)^nn!}{(ax+b)^{n+1}}$

(iii) $\frac{d^n}{dx^n}\log(ax+b)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!a^n}{(ax+b)^n}$

(iv) $\frac{d^n}{dx^n}(e^{ax})=a^ne^{ax}$

(v) $\frac{d^n(a^x)}{dx^n}=a^x(\log a)^n$

(vi) (a) $\frac{d^n}{dx^n}e^{ax}\sin(bx+c)=r^n e^{ax}\sin(bx+c+n\phi)$,

जहाँ $r=\sqrt{a^2+b^2}; \phi=\tan^{-1}\frac{b}{a}$

(b) $\frac{d^n}{dx^n}e^{ax}\cos(bx+c)=r^n e^{ax}\cos(bx+c+n\phi)$

आंशिक भिन्नों के उपयोग से *n* वॉ अवकलज ज्ञात करना
(n^{th} derivatives using partial fractions)

बीजगणितीय व्यंजकों जिनके अंश तथा हर परिमेय बीजगणितीय व्यंजक हो, का nवाँ अवकलज ज्ञात करने के लिए व्यंजक को सर्वप्रथम आंशिक भिन्नों में वियोजित करते हैं तथा उसके उपरान्त $\frac{1}{ax+b}$ के nवें अवकलज को ज्ञात करने वाले सूत्र का उपयोग करते हैं।

समाकलनीय फलन का अवकलन
(Differentiation of integral function)

यदि $g_1(x)$ व $g_2(x)$ दोनों फलन अन्तराल $[a, b]$ में परिभाषित है और बिन्दु $x\in(a,b)$ में अवकलनीय हैं तथा $f(t)$, $g_1(a)\le f(t)\le g_2(b)$ के लिए सतत् हैं, तो

$$\frac{d}{dx}\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(t)dt = f[g_2(x)]g_2'(x)-f[g_1(x)]g_1'(x)$$

$$= f[g_2(x)]\frac{d}{dx}g_2(x)-f[g_1(x)]\frac{d}{dx}g_1(x).$$

लैबनीज प्रमेय (Leibntiz's theorem)

जर्मन गणितज्ञ जी. डब्ल्यू. लैबनीज ने दो फलनों के गुणनफल के nवें अवकल गुणांक को ज्ञात करने के लिए एक विधि दी है। यह विधि लैबनीज प्रमेय के नाम से जानी जाती है।

प्रमेय का कथन : यदि u व v, x के दो फलन इस प्रकार हैं कि उनके nवें अवकलज अस्तित्व में हैं, तो

$$D^n(u.v.) = {}^nC_0(D^nu)v+{}^nC_1D^{n-1}u.Dv+{}^nC_2D^{n-2}u.D^2v+..........$$

$$+{}^nC_rD^{n-r}u.D^rv+.........+u.(D^nv)$$

इस प्रमेय के द्वारा फलन का nवाँ अवकलज ज्ञात करने के लिए प्रथम व द्वितीय फलन का उचित चयन (Proper selection) करना चाहिए। प्रथम फलन का चयन इस प्रकार होना चाहिए कि इसका nवाँ अवकलज सूत्र के द्वारा ज्ञात किया जा सके। द्वितीय फलन इस प्रकार होना चाहिए कि कुछ पदों तक उत्तरोत्तर अवकलन करने पर शून्य हो जाये, जिससे इसकी पुनः लिखने की आवश्यकता न रहे।

आंशिक अवकलन

परिभाषा (Definition)

$f(x,y)$ का x के सापेक्ष आंशिक अवकलन, $f(x,y)$ का सामान्य अवकलन गुणांक कहलाता है, जबकि y को अचर लिया जाये। इसे $\frac{\partial f}{\partial x}$ या $D_x f$ या f_x द्वारा प्रदर्शित करते हैं।

इस प्रकार, $\frac{\partial f}{\partial x}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$

पुनः $f(x,y)$ का y के सापेक्ष आंशिक अवकलन, $f(x,y)$ का सामान्य अवकलन गुणांक कहलाता है, जबकि x को अचर लिया जाये।

इस प्रकार, $\frac{\partial f}{\partial y}=\lim_{k\to 0}\frac{f(x,y+k)-f(x,y)}{k}$

उदाहरणार्थ: यदि $z=f(x,y)=x^4+y^4+3xy^2+x^2y+x+2y$

तब $\frac{\partial z}{\partial x}$ या $\frac{\partial f}{\partial x}$ या $f_x=4x^3+3y^2+2xy+1$,

(जबकि y अचर है)

$\frac{\partial z}{\partial y}$ या $\frac{\partial f}{\partial y}$ या $f_y=4y^3+6xy+x^2+2$,

(जबकि x अचर है)

उच्च कोटि के आंशिक अवकलज
(Partial derivatives of higher order)

माना दो चरों का फलन $f(x,y)$ इस प्रकार है, कि $\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}$ दोनों का अस्तित्व है।

(1) $\frac{\partial f}{\partial x}$ का x के सापेक्ष आंशिक अवकलज $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ या f_{xx} से प्रदर्शित होता है।

(2) $\frac{\partial f}{\partial y}$ का y के सापेक्ष आंशिक अवकलज $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ या f_{yy} से प्रदर्शित होता है।

(3) $\frac{\partial f}{\partial x}$ का y के सापेक्ष आंशिक अवकलज $\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$ या f_{xy} से प्रदर्शित होता है।

(4) $\frac{\partial f}{\partial y}$ का x के सापेक्ष आंशिक अवकलज $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ या f_{yx} से प्रदर्शित होता है।

उपरोक्त चारों द्वितीय कोटि के आंशिक अवकलज हैं।

- यदि $f(x,y)$ सतत् आंशिक अवकलज रखता है, तब सभी सामान्य स्थितियों में $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$ या $f_{xy}=f_{yx}$.

समघातीय फलनों के लिये यूलर प्रमेय
(Euler's theorem on homogeneous functions)

यदि $f(x,y)$, x व y में n घात का समघातीय फलन है, तब

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=nf.$$

यूलर प्रमेय से सम्बन्धित तथ्य
(Deduction of Euler's theorem)

यदि $f(x,y)$, x व y में n घात का समघातीय फलन है, तब

(1) $x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=(n-1)\frac{\partial f}{\partial x}$

(2) $x\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}+y\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=(n-1)\frac{\partial f}{\partial y}$

(3) $x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=n(n-1)f(x,y)$

अवकलन के अनुप्रयोग

यांत्रिकी में अनुप्रयोग एवं परिवर्तन की दर

रेखीय गति में वेग तथा त्वरण
(Velocity and acceleration in rectilinear motion)

किसी गतिशील कण की समय के सापेक्ष विस्थापन में परिवर्तन की दर वेग तथा समय के सापेक्ष वेग में परिवर्तन की दर त्वरण कहलाती है।

माना समय t पर कण के वेग व त्वरण क्रमशः v तथा a हों, तो

वेग $(v)=\frac{ds}{dt}$; त्वरण $(a)=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2s}{dt^2}$.

अवकलज का परिवर्तन की दर की तरह व्यवहार
(Derivative as the rate of change)

यदि एक चर राशि y का t में फलन $y=f(t)$ है, तब समय Δt के मान में थोड़ा सा भी परिवर्तन होने पर y के मान में संगत परिवर्तन Δy होता है।

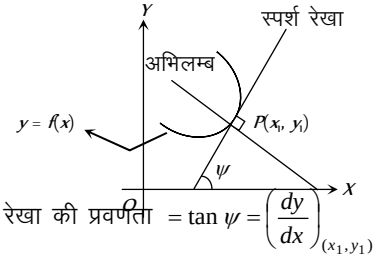
इस प्रकार, औसत परिवर्तन की दर $=\frac{\Delta y}{\Delta t}$

x के सापेक्ष y का अवकल गुणांक अर्थात् $\frac{dy}{dx}$, x के सापेक्ष y में परिवर्तन की दर है।

स्पर्श रेखा एवं अभिलम्ब

स्पर्श रेखा एवं अभिलम्ब की प्रवणता
(Slope of the tangent and normal)

(1) **स्पर्श रेखा की प्रवणता :** यदि किसी वक्र $y=f(x)$ के एक बिंदु $P(x_1,y_1)$ पर स्पर्श रेखा खींची जायें और यह स्पर्श रेखा x-अक्ष की धनात्मक दिशा से ψ कोण बनाती है, तब



स्पर्श रेखा की प्रवणता $=\tan\psi=\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1,y_1)}$

- यदि स्पर्श रेखा x-अक्ष के समान्तर हो, तब

$$\psi=0\Rightarrow\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1,y_1)}=0$$

- यदि स्पर्श रेखा x-अक्ष के लम्बवत् हो,तब

$$\psi=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1,y_1)}=\infty$$

(2) **अभिलम्ब की प्रवणता :** किसी वक्र के एक बिन्दु $P(x_1,y_1)$ पर अभिलम्ब वह रेखा है जो बिन्दु P पर खींची गई स्पर्श रेखा पर लम्ब हो तथा बिन्दु P से गुजरती हो, तब

अभिलम्ब की प्रवणता $=\frac{-1}{\text{स्पर्श रेखा की प्रवणता}}$

$$=\frac{-1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{P(x_1,y_1)}}=-\left(\frac{dx}{dy}\right)_{P(x_1,y_1)}$$

- यदि अभिलम्ब x-अक्ष के समान्तर हो, तब

$$-\left(\frac{dx}{dy}\right)_{(x_1,y_1)}=0 \text{ या } \left(\frac{dx}{dy}\right)_{(x_1,y_1)}=0$$

- यदि अभिलम्ब x-अक्ष पर लम्ब हो (या y-अक्ष के समान्तर हो), तब

$$-\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1,y_1)}=0$$

स्पर्श रेखा एवं अभिलम्ब के समीकरण
(Equation of the tangent and normal)

(1) **स्पर्श रेखा का समीकरण :** वक्र $y=f(x)$ के बिन्दु $P(x_1,y_1)$ पर स्पर्श रेखा का समीकरण है, $y-y_1=\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1,y_1)}(x-x_1)$

(2) **अभिलम्ब का समीकरण :** वक्र $y=f(x)$ के बिन्दु $P(x_1,y_1)$ पर अभिलम्ब का समीकरण है, $y-y_1=\frac{-1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1,y_1)}}(x-x_1)$

दो वक्रों का प्रतिच्छेदन कोण
(Angle of intersection of two curves)

दो वक्रों का प्रतिच्छेदन कोण दोनों वक्रों के प्रतिच्छेद बिन्दु पर खींची गई स्पर्श रेखाओं के बीच का कोण है।

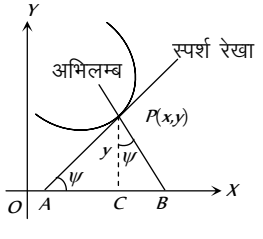
अतः दोनों वक्रों $y=f_1(x)$ एवं $y=f_2(x)$ की स्पर्श रेखाओं के बीच का कोण है, $\tan\phi=\frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{1(x_1,y_1)}-\left(\frac{dy}{dx}\right)_{2(x_1,y_1)}}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)_{1(x_1,y_1)}\left(\frac{dy}{dx}\right)_{2(x_1,y_1)}}$

समकोणीय या लाम्बिक वक्र : यदि दो वक्रों का प्रतिच्छेद कोण एक समकोण हो, तो दोनों वक्रों को समकोणीय वक्र या लाम्बिक वक्र कहते हैं।

यदि वक्र समकोणीय हों, तो $\phi=\frac{\pi}{2}$

अतः $m_1m_2=-1\Rightarrow\left(\frac{dy}{dx}\right)_1\left(\frac{dy}{dx}\right)_2=-1$

स्पर्श रेखा, अभिलम्ब, अधोस्पर्श रेखा एवं अधोलम्ब की लम्बाई
(Length of tangent, normal, subtangent and subnormal)



(1) **स्पर्श रेखा की लम्बाई** : $PA = y \text{ cosec } \psi = y\dfrac{\sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}}{\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}$

(2) **अभिलम्ब की लम्बाई** : $PB = y \sec \psi = y\sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}$

(3) **अधोस्पर्शी की लम्बाई** : $AC = y \cot \psi = \dfrac{y}{\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}$

(4) **अधोलम्ब की लम्बाई** : $BC = y \tan \psi = y\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$.

अक्षों पर स्पर्श रेखा के अन्तःखण्डों की लम्बाई
(Length of intercept made on axes by the tangent)

वक्र $y = f(x)$ के बिन्दु (x_1, y_1) पर स्पर्श रेखा का समीकरण $y - y_1 = \left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{(x_1,y_1)}(x - x_1)$ है, तब x-अक्ष पर कटा अन्तःखण्ड $= OQ = x_1 - \left[\dfrac{y_1}{\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{(x_1,y_1)}}\right]$

y–अक्ष पर कटा अन्तःखण्ड $= OR$ तथा $y_1 - \left[x_1\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{(x_1,y_1)}\right]$.

मूल बिन्दु से स्पर्श रेखा पर लम्ब की लम्बाई
(Length of perpendicular from origin to the tangent)

वक्र $y = f(x)$ के किसी बिन्दु $P(x_1, y_1)$ पर खींची गई स्पर्श रेखा पर मूल बिन्दु से डाले गए लम्ब की लम्बाई है, $p = \left|\dfrac{y_1 - x_1\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{(x_1,y_1)}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}}\right|$

.

उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ

परिभाषा (Definition)

(1) फलन $f(x), x = a$ पर स्थानीय उच्चिष्ठ कहलाता है, यदि a के लघुसामीप्य $(a-\delta, a+\delta)$ का अस्तित्व इस प्रकार है कि $f(x) < f(a)$, $\forall$ $x \in (a-\delta, a+\delta), x \neq a$.

या $f(x) - f(a) < 0$, $\forall$ $x \in (a-\delta, a+\delta), x \neq a$.

इस स्थिति में $f(a)$, $x = a$ पर $f(x)$ का स्थानीय उच्चिष्ठ मान कहलाता है।

(2) फलन $f(x), x = a$ पर स्थानीय निम्निष्ठ कहलाता है यदि a के लघुसामीप्य $(a-\delta, a+\delta)$ का अस्तित्व इस प्रकार है कि

$f(x) > f(a)$ $\forall$ $x \in (a-\delta, a+\delta), x \neq a$

या $f(x) - f(a) > 0$ $\forall$ $x \in (a-\delta, a+\delta), x \neq a$

$x = a$ पर फलन का मान अर्थात् $f(a)$, $x = a$ पर $f(x)$ का स्थानीय निम्निष्ठ मान कहलाता है।

वे बिन्दु जिस पर फलन स्थानीय उच्चिष्ठ या स्थानीय निम्निष्ठ मान रखता है चरम बिन्दु कहलाते हैं तथा स्थानीय उच्चिष्ठ व स्थानीय निम्निष्ठ मानों को फलन $f(x)$ का चरम मान कहते हैं। इस प्रकार एक फलन $x = a$ पर चरम मान रखता है यदि $f(a)$, या तो स्थानीय उच्चिष्ठ मान हो या स्थानीय निम्निष्ठ मान हो।

परिणामतः चरम बिन्दु 'a' के लिए $f(x) - f(a)$, x के सभी मानों के लिए a के सामीप्य में एक जैसा चिन्ह रखता है।

चरम मानों के लिए आवश्यक प्रतिबन्ध
(Necessary condition for extreme values)

फलन $f(x)$ का चरम बिन्दु $f(a)$ होने के लिये आवश्यक प्रतिबन्ध इस प्रकार है कि $f'(a) = 0$, यदि $f'(a)$ का अस्तित्व है।

(1) इस परिणाम का आशय है कि यदि अवकलज का अस्तित्व है तो इसे चरम बिन्दुओं पर शून्य होना चाहिए। यद्यपि कोई फलन किसी बिन्दु पर चरम मान तब भी रख सकता है जबकि उस बिन्दु पर अवकलनीय न हो।

उदाहरणार्थ : फलन $f(x) = |x|$ का $x = 0$ पर न्यूनतम मान है जबकि यह $x = 0$ पर अवकलनीय नहीं है।

(2) यह प्रतिबन्ध बिन्दु $x = a$ के चरम मान होने के लिए आवश्यक प्रतिबन्ध है। यह पर्याप्त नहीं है अर्थात्, $f'(a) = 0$ यह प्रदर्शित नहीं करता है कि $x = a$ एक चरम बिन्दु है क्योंकि ऐसे कई फलन हैं जिनका प्रथम अवकलज $x = a$ पर शून्य हो जाता है, परन्तु यह बिन्दु चरम बिन्दु नहीं होता है।

उदाहरणार्थ : $f(x) = x^3$, $x = a$ पर चरम मान नहीं रखता परन्तु $f'(0) = 0$.

(3) ज्यामितीय रूप से उपरोक्त प्रतिबन्ध का अर्थ है कि वक्र $y = f(x)$ के उस बिन्दु पर स्पर्शी जहाँ कोटि उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ है, x-अक्ष के समान्तर होती है।

(4) x के वे मान जिन पर $f'(x) = 0$ है, स्थिर बिन्दु या क्रान्तिक बिन्दु कहलाते हैं एवं इनके संगत फलन $f(x)$ का मान स्थिर (Stationary) या क्रान्तिक (Turning) मान कहलाता है।

(5) वे बिन्दु जहाँ पर फलन उच्चिष्ठ (या निम्निष्ठ) मान ग्रहण करता है उन्हें स्थानीय उच्चिष्ठ (या स्थानीय निम्निष्ठ) बिन्दु कहते हैं एवं इन बिन्दुओं के संगत मान को स्थानीय उच्चिष्ठ (या स्थानीय निम्निष्ठ) मान कहते हैं।

चरम मान निकालने के लिए प्रथम अवकलज परीक्षण (First derivatives test for extreme values)

माना $f(x)$ एक ऐसा फलन है जो $x = a$ पर अवकलनीय है, तो

(1) $f(x)$ का एक स्थानीय उच्चिष्ठ बिन्दु $x = a$ होगा, यदि

(i) $f'(a) = 0$ एवं

(ii) $f'(a)$ का मान धनात्मक से ऋणात्मक होना चाहिए जब x, a से गुजरता हो अर्थात् a के बायें सामीप्य $(a-\delta, a)$ में $f'(x)>0$ होना चाहिए तथा a के दायें सामीप्य $(a, a+\delta)$ में $f'(x)<0$ होना चाहिए।

(2) $f(x)$ का स्थानीय निम्निष्ठ बिन्दु $x=a$ होगा यदि

(i) $f'(a)=0$ एवं

(ii) $f'(a)$ का चिन्ह ऋणात्मक से धनात्मक में परिवर्तित होता है, जबकि x, a से गुजरता है अर्थात् a के बायें सामीप्य $(a-\delta, a)$ में $f'(x)<0$ तथा a के दायें सामीप्य $(a, a+\delta)$ में $f'(x)>0$ होना चाहिए।

(3) यदि $f'(a)=0$ परन्तु $f'(a)$ का चिन्ह परिवर्तित नहीं होता है अर्थात् $f'(a)$ का a के पूर्ण सामीप्य में चिन्ह नहीं बदलता है, तब a न तो स्थानीय उच्चिष्ठ और न ही स्थानीय निम्निष्ठ बिन्दु होगा।

फलन $f(x)$ के चरम मान ज्ञात करने की कार्यकारी विधि :

पद I : $y=f(x)$ रखें।

पद II : $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात करें।

पद III : $\frac{dy}{dx}=0$ रखें एवं इस समीकरण को x के लिए हल करें। माना $x=c_1, c_2, ..., c_n$; $\frac{dy}{dx}=0$ के हल हैं तो इन्हें x के स्थिर मान (Stationary values) कहते हैं।

पद IV : माना $x=c_1$. अब यदि $\frac{dy}{dx}$ का चिन्ह धनात्मक से ऋणात्मक होता हो, जब x, c से गुजरता है तो $x=c_1$ पर फलन एक स्थानीय उच्चिष्ठ रखता है। यदि यह ऋणात्मक से धनात्मक में परिवर्तित होता है तो $x=c_1$ पर फलन एक स्थानीय निम्निष्ठ रखता है। जब चिन्ह परिवर्तित न हो तो इस बिन्दु पर न तो स्थानीय उच्चिष्ठ होगा और न ही स्थानीय निम्निष्ठ होगा।

उच्च कोटि अवकलज परीक्षण (Higher partial derivatives)

(1) $f'(x)$ ज्ञात करके इसकी '0' (शून्य) से तुलना करते हैं। अब $f'(x)=0$ को हल करते हैं। माना मूल $x=a_1, a_2 .....$ हैं।

(2) $f''(x)$ ज्ञात करते हैं। अब यदि $x=a_1$ पर ;

(i) यदि $f''(a_1)$ धनात्मक है तो $f(x)$, $x=a_1$ पर निम्निष्ठ है।

(ii) यदि $f''(a_1)$ ऋणात्मक है तो $f(x)$, $x=a_1$ पर उच्चिष्ठ है।

(iii) यदि $f''(a_1)=0$ तो आगे बिन्दु (3) के अनुसार हल करेंगें।

(3) यदि $f''(a_1)=0$ तो $f'''(x)$ ज्ञात करते हैं। यदि $f'''(a_1)\neq 0$, तो $f(x)$, $x=a_1$ पर न तो उच्चिष्ठ है और न ही निम्निष्ठ है।

(i) यदि $f'''(a_1)=0$ तो $f^{iv}(x)$ ज्ञात करते हैं।

(ii) यदि $f^{iv}(x)$ = धनात्मक (निम्निष्ठ मान)

$f^{iv}(x)$ = ऋणात्मक (उच्चिष्ठ मान)

(4) यदि $x=a_1$ पर $f^{iv}(a_1)=0$, तो $f^{v}(x)$ ज्ञात करते हैं एवं आवश्यकतानुसार इसी प्रकार प्रक्रिया को दोहराते हैं।

उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ के गुण (Properties of maxima and minima)

(i) यदि $f(x)$ इसके प्रान्त (डोमेन) में सतत् हैं तो x के दो मानों के मध्य कम से कम एक उच्चिष्ठ और एक निम्निष्ठ मान अवश्य होगा।

(ii) उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ एकान्तर क्रम में होते हैं अर्थात् दो उच्चिष्ठ के बीच एक निम्निष्ठ होता है तथा इसका विलोम भी सत्य है।

(iii) यदि a तथा b के मध्य x के केवल एक मान (माना c) के लिए $f(x)\to\infty$ जबकि $x\to a$ या b और $f'(x)=0$, तब $f(c)$ आवश्यक रूप से निम्निष्ठ व न्यूनतम मान है।

यदि $f(x)\to -\infty$ जबकि $x\to a$ या b, तब $f(c)$ आवश्यक रूप से उच्चिष्ठ और महत्तम मान है।

अन्तराल [a, b] में फलन का महत्तम व लघुत्तम मान (Greatest and least values of a function defined on an interval [a, b])

किसी फलन $f(x)$ का $c\in[a,b]$ के लिए स्थानीय उच्चिष्ठ (या स्थानीय निम्निष्ठ) मान का अर्थ है कि यह फलन का c के सामीप्य में महत्तम या लघुत्तम मान है। इसका अर्थ यह बिल्कुल नहीं है कि यह फलन का $[a,b]$ में महत्तम या लघुत्तम मान है।

किसी फलन के अन्तराल $[a, b]$ में कई स्थानीय उच्चिष्ठ व निम्निष्ठ मान हो सकते हैं तथा सापेक्ष स्थानीय निम्निष्ठ का मान स्थानीय उच्चिष्ठ मान से बड़ा भी हो सकता है।

अतः किसी भी अन्तराल में स्थानीय उच्चिष्ठ मान को महत्तम एवं स्थानीय निम्निष्ठ को लघुत्तम मान नहीं माना जा सकता है।

यदि कोई फलन $f(x)$ अन्तराल $[a, b]$ में सतत् है, तो इसका महत्तम या लघुत्तम मान या तो क्रान्तिक बिन्दुओं या फिर अन्तराल $[a, b]$ के सिरे वाले बिन्दुओं पर होते हैं। अतः यदि हमें फलन $f(x)$ का अन्तराल $[a, b]$ में निरपेक्ष महत्तम (लघुत्तम) मान निकालना हो तो हमें $f(a), f(c_1), f(c_2), ..., f(c_n), f(b)$ में से महत्तम व लघुत्तम चुनना चाहिए जहाँ $x=c_1, c_2, ..., c_n$ क्रान्तिक बिन्दु हैं।

वर्धमान एवं ह्रासमान फलन

परिभाषा (Definition)

(1) **पूर्णतः वर्धमान फलन :** फलन $f(x)$, अंतराल (a, b) में पूर्णतः वर्धमान होगा, यदि $x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)\ \ \forall\ x, x\in(a, b)$.

(2) **पूर्णतः ह्रासमान फलन :** फलन $f(x)$, अन्तराल (a,b) में पूर्णतः ह्रासमान होगा, यदि $x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)\forall\ x_1, x_2\in(a, b)$.

फलन $f(x)$ एक ह्रासमान फलन नहीं होगा, यदि $f'(x)\geq 0$ तथा वर्धमान फलन नहीं होगा, यदि $f'(x)\leq 0$.

(3) **एकदिष्ट फलन** (Monotonic function)**:** किसी अन्तराल में फलन f एकदिष्ट होगा यदि यह उस अंतराल में या तो वर्धमान है या ह्रासमान है।

सारणी : 22.2

$f'(a_1)$	$f''(a_1)$	$f'''(a_1)$	a_1 पर f का व्यवहार
+			वर्धमान
−			ह्रासमान
0	+		न्यूनतम
0	−−		अधिकतम
0	0		
0	0	±	?
	0	0	नति परिवर्तन
			?

• रिक्त स्थान प्रदर्शित करता है कि a पर फलन कोई भी मान ग्रहण कर सकता है।

• प्रश्न चिन्ह् यह दर्शाता है कि दिये गये आंकड़ों के आधार पर f का व्यवहार ज्ञात नहीं किया जा सकता है।

एकदिष्ट फलन के गुण-धर्म
(Properties of monotonic functions)

(1) यदि अन्तराल $[a, b]$ में $f(x)$ पूर्णतः वर्धमान है तो f^{-1} अस्तित्व में होगा एवं यह भी पूर्णतः वर्धमान फलन होगा।

(2) यदि अन्तराल $[a, b]$ में $f(x)$ पूर्णतः वर्धमान है तथा इस प्रकार है कि यह सतत् है, तो f^{-1} अन्तराल $[f(a), f(b)]$ में सतत् होगा।

(3) यदि अन्तराल $[a, b]$ में $f(x)$ इस प्रकार से सतत् है कि $f'(c) \geq 0 (f'(c) > 0) \ \forall \ c \in (a, b)$, तो $f(x)$; अन्तराल $[a, b]$ में एकदिष्ट (या पूर्णतः) वर्धमान फलन होगा।

(4) यदि अन्तराल $[a, b]$ में $f(x)$ इस प्रकार से सतत् है कि $f'(c) \leq 0 (f'(c) < 0) \ \forall \ c \in (a, b)$, तो $f(x)$; अन्तराल $[a, b]$ में एकदिष्ट (या पूर्णतः) ह्रासमान फलन होगा।

(5) यदि $f(x)$ एवं $g(x)$, अन्तराल $[a, b]$ में एकदिष्ट (या पूर्णतः) वर्धमान (या ह्रासमान) फलन हों, तो $gof(x)$ अन्तराल $[a, b]$ में एकदिष्ट (या पूर्णतः) वर्धमान फलन होगा।

(6) यदि $f(x)$ एवं $g(x)$ में से कोई एक पूर्णतः (या एकदिष्ट) वर्धमान तथा दूसरा पूर्णतः (या एक दिष्ट) ह्रासमान हो, तो $gof(x)$ अन्तराल $[a, b]$ में पूर्णतः (या एकदिष्ट) ह्रासमान होगा।

रोले का प्रमेय एवं लैंगराज का मध्यमान प्रमेय

रोले का प्रमेय (Rolle's theorem)

माना f कोई वास्तविक फलन है, जो कि बन्द अन्तराल $[a, b]$ में इस प्रकार परिभाषित है, कि

(1) $f(x)$ संवृत (बन्द) अंतराल $[a, b]$ में सतत् है।

(2) $f(x)$ विवृत (खुला) अंतराल $]a, b[$ या (a, b) में अवकलनीय है।

(3) $f(a) = f(b)$ तब विवृत अंतराल (a, b) में कम से कम कोई एक बिन्दु 'c' इस प्रकार होगा, कि $f'(c) = 0$.

लैंगराज का मध्यमान प्रमेय
(Larange's mean value theorem)

यदि फलन $f(x)$,

(1) संवृत अंतराल $[a, b]$ में सतत् है, तथा

(2) विवृत अंतराल (a, b) में अवकलनीय है

तब विवृत अंतराल (a, b) में कम से कम एक बिन्दु 'c' ऐसा होता है, कि $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Tips & Tricks

✍ $\frac{dy}{dx}$ को $\frac{d}{dx}(y)$ लिख सकते हैं जिसमें $\frac{d}{dx}$ साधारणतः संक्रिया को प्रदर्शित करता है न कि d, dx से विभाजित है।

✍ यदि $f'(x_0) = \infty$, तो फलन बिन्दु x पर अनन्त अवकलज रखता है। इस स्थिति में वक्र $y = f(x)$ पर स्थित बिन्दु x पर खींची गयी स्पर्श रेखा x-अक्ष के लम्बवत् होती है।

✍ दिए गए परिमाप वाले आयत का क्षेत्रफल अधिकतम होगा यदि वह एक वर्ग हो।

✍ दिए गए क्षेत्रफल के आयत की परिमाप निम्नतम होगी यदि वह एक वर्ग हो।

✍ r त्रिज्या के गोले से घिरे हुए अधिकतम आयतन वाले शंकु की ऊँचाई $\frac{4r}{3}$ होगी।

✍ r त्रिज्या के गोले से घिरे हुए अधिकतम आयतन वाले लम्ब वृत्तीय बेलन की ऊँचाई $\frac{2r}{\sqrt{3}}$ होगी।

✍ यदि वक्र $y = f(x)$ पर स्थित किसी बिन्दु $P(x_1, y_1)$ पर खींची गई स्पर्श रेखा अक्षों से बराबर कोण बनाती है, तब बिन्दु P पर $\psi = \frac{\pi}{4}$ या $\frac{3\pi}{4}$. अतः P पर, $\tan\psi = \frac{dy}{dx} = \pm 1$.

Ordinary Thinking

Objective Questions

एक बिन्दु पर अवकलज, मानक अवकलन

1. $\frac{d}{dx}(\log \tan x) =$ **[MNR 1986]**

(a) $2\sec 2x$ (b) $2\operatorname{cosec} 2x$

(c) $\sec 2x$ (d) $\operatorname{cosec} 2x$

2. $\frac{d}{dx}\log(\log x) =$ **[IIT 1985]**

(a) $\frac{x}{\log x}$ (b) $\frac{\log x}{x}$

(c) $(x \log x)^{-1}$ (d) इनमें से कोई नहीं

3. $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 =$ **[AI CBSE 1980]**

(a) $1 - \frac{1}{x^2}$ (b) $1 + \frac{1}{x^2}$

(c) $1 - \frac{1}{2x}$ (d) इनमें से कोई नहीं

4. यदि $y = x + \frac{1}{x}$, तो

(a) $x^2\frac{dy}{dx} + xy = 0$ (b) $x^2\frac{dy}{dx} + xy + 2 = 0$

(c) $x^2\frac{dy}{dx} - xy + 2 = 0$ (d) इनमें से कोई नहीं

5. $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^4 \sec x}\right) =$

(a) $\frac{x\sin x + 4\cos x}{x^5}$ (b) $\frac{-(x\sin x + 4\cos x)}{x^5}$

(c) $\frac{4\cos x - x\sin x}{x^5}$ (d) इनमें से कोई नहीं

6. यदि $y = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!}$, तो $\frac{dy}{dx} =$

(a) y (b) $y + \frac{x^n}{n!}$

(c) $y - \frac{x^n}{n!}$ (d) $y - 1 - \frac{x^n}{n!}$

7. यदि $y = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...\infty$, तब $\frac{dy}{dx} =$ **[Karnataka CET 1999]**

(a) y (b) $y - 1$

(c) $y + 1$ (d) इनमें से कोई नहीं

8. यदि $y = \frac{1}{a - z}$, तो $\frac{dz}{dy} =$

(a) $(z - a)^2$ (b) $-(z - a)^2$

(c) $(z + a)^2$ (d) $-(z + a)^2$

9. यदि $y = x\sin x$, तो

(a) $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} + \cot x$ (b) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} + \cot x$

(c) $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} - \cot x$ (d) इनमें से कोई नहीं

10. $\frac{d}{dx}(x^2 e^x \sin x) =$

(a) $x e^x(2\sin x + x\sin x + x\cos x)$

(b) $x e^x(2\sin x + x\sin x - \cos x)$

(c) $x e^x(2\sin x + x\sin x + \cos x)$

(d) इनमें से कोई नहीं

11. $\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1}\frac{\cos x}{1 + \sin x}\right) =$ **[AISSE 1984, 85; MNR 1983; RPET 1997]**

(a) $-\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{2}$

(c) -1 (d) 1

12. $\frac{d}{dx}[\cos(1 - x^2)^2] =$ **[AISSE 1981; AI CBSE 1979]**

(a) $-2x(1 - x^2)\sin(1 - x^2)^2$ (b) $-4x(1 - x^2)\sin(1 - x^2)^2$

(c) $4x(1 - x^2)\sin(1 - x^2)^2$ (d) $-2(1 - x^2)\sin(1 - x^2)^2$

13. $\frac{d}{dx}\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right) =$

(a) $\cos\left(\frac{1}{x}\right) + 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ (b) $2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

(c) $\cos\left(\frac{1}{x}\right) - 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ (d) इनमें से कोई नहीं

14. यदि $y = \cos(\sin x^2)$, तो $x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ पर, $\frac{dy}{dx} =$

(a) -2 (b) 2

(c) $-2\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ (d) 0

15. यदि $y = \sin^{-1}(x\sqrt{1-x} + \sqrt{x}\sqrt{1-x^2})$, तब $\frac{dy}{dx} =$ **[Roorkee 1981; MP PET 2004]**

(a) $\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$ (b) $\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$

(c) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$ (d) इनमें से कोई नहीं

16. $\frac{d}{dx}\log|x| = ..., (x \neq 0)$

(a) $\frac{1}{x}$ (b) $-\frac{1}{x}$

(c) x (d) $-x$

17. यदि $y = a\sin x + b\cos x$, तो $y^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ है

(a) x का फलन (b) y का फलन

(c) x व y का फलन (d) अचर

18. यदि $f(x) = x^2 - 3x$ तो वे बिन्दु, जिन पर $f(x) = f'(x)$ होगा, हैं

(a) 1, 3 (b) 1, – 3

(c) – 1, 3 (d) इनमें से कोई नहीं

19. यदि $f(x) = mx + c, f(0) = f'(0) = 1$ तो $f(2) =$

(a) 1 (b) 2

(c) 3 (d) – 3

20. यदि $y = 3x^5 + 4x^4 + 2x + 3$, तो

(a) $y_4 = 0$ (b) $y_5 = 0$

(c) $y_6 = 0$ (d) इनमें से कोई नहीं

21. यदि $y = x\left[\left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right)\left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right) + \sin x\right] + \frac{1}{2\sqrt{x}}$, तो $\frac{dy}{dx} =$

(a) $(1+x)\cos x + (1-x)\sin x - \frac{1}{4x\sqrt{x}}$

(b) $(1-x)\cos x + (1+x)\sin x + \frac{1}{4x\sqrt{x}}$

(c) $(1+x)\cos x + (1+x)\sin x - \frac{1}{4x\sqrt{x}}$

(d) इनमें से कोई नहीं

22. $a^x + \log x.\sin x$ का अवकलन गुणांक है

(a) $a^x \log_e a + \frac{\sin x}{x} + \log x.\cos x$

(b) $a^x + \frac{\sin x}{x} + \cos x.\log x$

(c) $a^x \log a + \frac{\cos x}{x} + \sin x.\log x.$

(d) इनमें से कोई नहीं

23. $\frac{d}{dx}\tan^{-1}\left(\frac{ax-b}{bx+a}\right) =$

(a) $\frac{1}{1+x^2} - \frac{a^2}{a^2+b^2}$ (b) $\frac{-1}{1+x^2} - \frac{a^2}{a^2+b^2}$

(c) $\frac{1}{1+x^2} + \frac{a^2}{a^2+b^2}$ (d) इनमें से कोई नहीं

24. यदि $\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1}\sqrt{\frac{1+\cos\frac{x}{2}}{1-\cos\frac{x}{2}}}\right)$, तो **[MP PET 2004]**

(a) $-\frac{1}{4}$ (b) $\frac{1}{2}$

(c) $-\frac{1}{2}$ (d) $\frac{1}{4}$

25. $\frac{d}{dx}\sqrt{\frac{1-\sin 2x}{1+\sin 2x}} =$ **[AISSE 1985; DSSE 1986]**

(a) $\sec^2 x$ (b) $-\sec^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$

(c) $\sec^2\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$ (d) $\sec^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$

26. यदि $y = \sqrt{(1-x)(1+x)}$, तो

(a) $(1-x^2)\frac{dy}{dx} - xy = 0$ (b) $(1-x^2)\frac{dy}{dx} + xy = 0$

(c) $(1-x^2)\frac{dy}{dx} - 2xy = 0$ (d) $(1-x^2)\frac{dy}{dx} + 2xy = 0$

27. $\frac{d}{dx}\left(\frac{\cot^2 x - 1}{\cot^2 x + 1}\right) =$

(a) $-\sin 2x$ (b) $2\sin 2x$

(c) $2\cos 2x$ (d) $-2\sin 2x$

28. यदि $f(x) = x\tan^{-1} x$, तो $f'(1) =$ **[IIT 1979]**

(a) $1 + \frac{\pi}{4}$ (b) $\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$

(c) $\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}$ (d) 2

29. यदि $y = \log_{10} x + \log_x 10 + \log_x x + \log_{10} 10$, तो $\frac{dy}{dx} =$

(a) $\frac{1}{x\log_e 10} - \frac{\log_e 10}{x(\log_e x)^2}$ (b) $\frac{1}{x\log_e 10} - \frac{1}{x\log_{10} e}$

(c) $\frac{1}{x\log_e 10} + \frac{\log_e 10}{x(\log_e x)^2}$ (d) इनमें से कोई नहीं

30. यदि $y = b\cos\log\left(\frac{x}{n}\right)^n$, तो $\frac{dy}{dx} =$

(a) $-n\,b\sin\log\left(\frac{x}{n}\right)^n$ (b) $n\,b\sin\log\left(\frac{x}{n}\right)^n$

(c) $\frac{-nb}{x}\sin\log\left(\frac{x}{n}\right)^n$ (d) इनमें से कोई नहीं

31. $\frac{d}{dx}[\sin^n x\cos nx] =$

(a) $n\sin^{n-1} x\cos(n+1)x$ (b) $n\sin^{n-1} x\cos nx$

(c) $n\sin^{n-1} x\cos(n-1)x$ (d) $n\sin^{n-1} x\sin(n+1)x$

32. यदि $f(x) = \log_x(\log x)$, तो $x = e$ पर $f'(x)$ है **[IIT 1985; RPET 2000; MP PET 2000; Karnataka CET 2002; Pb. CET 2002]**

(a) e (b) $\frac{1}{e}$

(c) 1 (d) इनमें से कोई नहीं

33. यदि $y = \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{1/4} - \frac{1}{2}\tan^{-1} x$, तो $\frac{dy}{dx} =$

(a) $\frac{x^2}{1-x^4}$ (b) $\frac{2x^2}{1-x^4}$

(c) $\frac{x^2}{2(1-x^4)}$ (d) इनमें से कोई नहीं

34. यदि $y = \tan^{-1}\frac{4x}{1+5x^2} + \tan^{-1}\frac{2+3x}{3-2x}$, तो $\frac{dy}{dx} =$

(a) $\frac{1}{1+25x^2} + \frac{2}{1+x^2}$ (b) $\frac{5}{1+25x^2} + \frac{2}{1+x^2}$

(c) $\frac{5}{1+25x^2}$ (d) $\frac{1}{1+25x^2}$

35. $\frac{d}{dx}\log_7(\log_7 x) =$

(a) $\frac{1}{x\log_e x}$ (b) $\frac{\log_e 7}{x\log_e x}$

(c) $\frac{\log_7 e}{x\log_e x}$ (d) $\frac{\log_7 e}{x\log_7 x}$

36. यदि $f(x)=\sqrt{1+\cos^2(x^2)}$, तो $f'\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)=$ **[Orissa JEE 2004]**

(a) $\sqrt{\pi}/6$ (b) $-\sqrt{(\pi/6)}$

(c) $1/\sqrt{6}$ (d) $\pi/\sqrt{6}$

37. यदि $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$, तो $\frac{dy}{dx}=$

(a) $\left(\frac{y}{x}\right)^{1/3}$ (b) $-\left(\frac{y}{x}\right)^{1/3}$

(c) $\left(\frac{x}{y}\right)^{1/3}$ (d) $-\left(\frac{x}{y}\right)^{1/3}$

38. $\frac{d}{dx}[(1+x^2)\tan^{-1}x] =$

(a) $x\tan^{-1}x$ (b) $2\tan^{-1}x$

(c) $2x\tan^{-1}x+1$ (d) $x\tan^{-1}x+1$

39. यदि $y=\log\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$, तो $\frac{dy}{dx}=$

(a) $\frac{\sqrt{x}}{1-x}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{x}(1-x)}$

(c) $\frac{\sqrt{x}}{1+x}$ (d) $\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}$

40. $\frac{d}{dx}e^{x+3\log x} =$

(a) $e^x.x^2(x+3)$ (b) $e^x.x(x+3)$

(c) $e^x+\frac{3}{x}$ (d) इनमें से कोई नहीं

41. $\frac{d}{dx}\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}} =$

(a) $\sec^2 x$ (b) $-\text{cosec}^2 x$

(c) $2\sec^2\frac{x}{2}$ (d) $-2\text{cosec}^2\frac{x}{2}$

42. $\frac{d}{dx}\log\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)=$

(a) $\text{cosec}\, x$ (b) $-\text{cosec}\, x$

(c) $\sec x$ (d) $-\sec x$

43. $\frac{d}{dx}\log(\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b})=$

(a) $\frac{1}{2[\sqrt{(x-a)}+\sqrt{(x-b)}]}$ (b) $\frac{1}{2\sqrt{(x-a)(x-b)}}$

(c) $\frac{1}{\sqrt{(x-a)(x-b)}}$ (d) इनमें से कोई नहीं

44. $\frac{d}{dx}\tan^{-1}(\sec x+\tan x)=$ **[AISSE 1985, 87; DSSE 1982, 84]**

(a) 1 (b) 1/2

(c) $\cos x$ (d) $\sec x$

45. $\frac{d}{dx}\cos^{-1}\sqrt{\cos x} =$

(a) $\frac{1}{2}\sqrt{1+\sec x}$ (b) $\sqrt{1+\sec x}$

(c) $-\frac{1}{2}\sqrt{1+\sec x}$ (d) $-\sqrt{1+\sec x}$

46. $\frac{d}{dx}(e^x\log\sin 2x)=$ **[AI CBSE 1985]**

(a) $e^x(\log\sin 2x+2\cot 2x)$ (b) $e^x(\log\cos 2x+2\cot 2x)$

(c) $e^x(\log\cos 2x+\cot 2x)$ (d) इनमें से कोई नहीं

47. $\frac{d}{dx}\tan^{-1}\frac{4\sqrt{x}}{1-4x}=$

(a) $\frac{1}{\sqrt{x}(1+4x)}$ (b) $\frac{2}{\sqrt{x}(1+4x)}$

(c) $\frac{4}{\sqrt{x}(1+4x)}$ (d) इनमें से कोई नहीं

48. यदि $y=\sin[\cos(\sin x)]$, तो $dy/dx =$

(a) $-\cos[\cos(\sin x)]\sin(\cos x).\cos x$

(b) $-\cos[\cos(\sin x)]\sin(\sin x).\cos x$

(c) $\cos[\cos(\sin x)]\sin(\cos x).\cos x$

(d) $\cos[\cos(\sin x)]\sin(\sin x).\cos x$

49. यदि $y=\sec^{-1}\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)+\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right)$, तो $\frac{dy}{dx}=$

[UPSEAT 1999; AMU 2002; Kerala (Engg.) 2005]

(a) 0 (b) $\frac{1}{\sqrt{x}+1}$

(c) 1 (d) इनमें से कोई नहीं

50. $\frac{d}{dx}\sin^{-1}(3x-4x^3)=$ **[RPET 2003]**

(a) $\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}$ (b) $\frac{-3}{\sqrt{1-x^2}}$

(c) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (d) $\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

51. यदि $y=t^{4/3}-3t^{-2/3}$, तो $dy/dt =$

(a) $\frac{2t^2+3}{3t^{5/3}}$ (b) $\frac{2t^2+3}{t^{5/3}}$

(c) $\frac{2(2t^2+3)}{t^{5/3}}$ (d) $\frac{2(2t^2+3)}{3t^{5/3}}$

52. यदि $y=x^2\log x+\frac{2}{\sqrt{x}}$, तो $\frac{dy}{dx}=$

(a) $x+2x\log x-\frac{1}{\sqrt{x}}$ (b) $x+2x\log x-\frac{1}{x^{3/2}}$

(c) $x+2x\log x-\frac{2}{x^{3/2}}$ (d) इनमें से कोई नहीं

53. $\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x}{1+x^2}\right)=$

(a) $\frac{e^x(1+x)}{(1+x^2)^2}$ (b) $\frac{e^x(1-x)^2}{(1+x^2)^2}$

(c) $\frac{e^x(1+x)^2}{(1+x^2)}$ (d) $\frac{e^x(1-x)^2}{(1+x^2)}$

54. यदि $y=\frac{\tan x+\cot x}{\tan x-\cot x}$, तो $\frac{dy}{dx}=$

(a) $2\tan 2x\sec 2x$ (b) $\tan 2x\sec 2x$

(c) $-\tan 2x\sec 2x$ (d) $-2\tan 2x\sec 2x$

55. यदि $A=\frac{2^x\cot x}{\sqrt{x}}$, तो $\frac{dA}{dx}=$

(a) $\frac{2^{x-1}\left\{-2x\,\text{cosec}^2x+\cot x.\log\left(\frac{4^x}{e}\right)\right\}}{x^{3/2}}$

(b) $\frac{2^{x-1}\left\{-2x\,\text{cosec}^2x+\cot x.\log\left(\frac{4^x}{e}\right)\right\}}{x}$

(c) $\frac{2x\left\{-2x\text{cosec}^2x+\cot x.\log\left(\frac{4^x}{e}\right)\right\}}{x^{3/2}}$

(d) इनमें से कोई नहीं

56. $\frac{d}{dx}\left(\frac{\log x}{\sin x}\right)=$

(a) $\frac{\frac{\sin x}{x}-\log x.\cos x}{\sin x}$ (b) $\frac{\frac{\sin x}{x}-\log x.\cos x}{\sin^2 x}$

(c) $\frac{\sin x-\log x.\cos x}{\sin^2 x}$ (d) $\frac{\frac{\sin x}{x}-\log x}{\sin^2 x}$

57. यदि $y=\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}$, तो $\frac{dy}{dx}=$

(a) $2x+\frac{2x^3}{\sqrt{x^4-1}}$ (b) $2x+\frac{x^3}{\sqrt{x^4-1}}$

(c) $x+\frac{2x^3}{\sqrt{x^4-1}}$ (d) इनमें से कोई नहीं

58. यदि $y=\frac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}$, तो $\frac{dy}{dx}=$ **[AISSE 1986]**

(a) $\frac{ay}{x\sqrt{a^2-x^2}}$ (b) $\frac{ay}{\sqrt{a^2-x^2}}$

(c) $\frac{ay}{x\sqrt{x^2-a^2}}$ (d) इनमें से कोई नहीं

59. यदि $y=(x\cot^3 x)^{3/2}$, तो $dy/dx=$

(a) $\frac{3}{2}(x\cot^3 x)^{1/2}[\cot^3 x-3x\cot^2 x\,\text{cosec}^2x]$

(b) $\frac{3}{2}(x\cot^3 x)^{1/2}[\cot^2 x-3x\cot^2 x\,\text{cosec}^2x]$

(c) $\frac{3}{2}(x\cot^3 x)^{1/3}[\cot^3 x-3x\,\text{cosec}^2x]$

(d) $\frac{3}{2}(x\cot^3 x)^{3/2}[\cot^3 x-3x\,\text{cosec}^2x]$

60. $\frac{d}{dx}\{\cos(\sin x^2)\}=$ **[DSSE 1979]**

(a) $\sin(\sin x^2).\cos x^2.2x$ (b) $-\sin(\sin x^2).\cos x^2.2x$

(c) $-\sin(\sin x^2).\cos^2 x.2x$ (d) इनमें से कोई नहीं

61. यदि $y=\sin(\sqrt{\sin x+\cos x})$, तो $\frac{dy}{dx}=$ **[DSSE 1987]**

(a) $\frac{1}{2}\frac{\cos\sqrt{\sin x+\cos x}}{\sqrt{\sin x+\cos x}}$

(b) $\frac{\cos\sqrt{\sin x+\cos x}}{\sqrt{\sin x+\cos x}}$

(c) $\frac{1}{2}\frac{\cos\sqrt{\sin x+\cos x}}{\sqrt{\sin x+\cos x}}.(\cos x-\sin x)$

(d) इनमें से कोई नहीं

62. यदि $y=\sin\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)$, तो $\frac{dy}{dx}=$ **[AISSE 1987]**

(a) $\frac{4x}{1-x^2}.\cos\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)$ (b) $\frac{x}{(1-x^2)^2}.\cos\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)$

(c) $\frac{x}{(1-x^2)}.\cos\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)$ (d) $\frac{4x}{(1-x^2)^2}.\cos\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)$

63. यदि $y=\sqrt{\frac{1+\tan x}{1-\tan x}}$, तो $\frac{dy}{dx}=$

[AISSE 1981, 83, 84, 85; DSSE 1985; AI CBSE 1981, 83]

(a) $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-\tan x}{1+\tan x}}.\sec^2\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$ (b) $\sqrt{\frac{1-\tan x}{1+\tan x}}.\sec^2\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$

(c) $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-\tan x}{1+\tan x}}.\sec\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$ (d) इनमें से कोई नहीं

64. $\frac{d}{dx}(x^2+\cos x)^4=$ **[DSSE 1979]**

(a) $4(x^2+\cos x)(2x-\sin x)$

(b) $4(x^2-\cos x)^3(2x-\sin x)$

(c) $4(x^2+\cos x)^3(2x-\sin x)$

(d) $4(x^2+\cos x)^3(2x+\sin x)$

65. $\frac{d}{dx}\sqrt{x\sin x}=$ **[AISSE 1985]**

(a) $\frac{\sin x+x\cos x}{2\sqrt{x\sin x}}$ (b) $\frac{\sin x+x\cos x}{\sqrt{x\sin x}}$

(c) $\frac{x\sin x+\cos x}{\sqrt{2\sin x}}$ (d) $\frac{x\sin x+\cos x}{\sqrt{2x\sin x}}$

66. $\frac{d}{dx}\sqrt{\sec^2 x+\text{cosec}^2x}=$ **[DSSE 1981]**

(a) $4\,\text{cosec}\,2x.\cot 2x$ (b) $-4\,\text{cosec}\,2x.\cot 2x$

(c) $-4\,\text{cosec}\,x.\cot 2x$ (d) इनमें से कोई नहीं

67. $\frac{d}{dx}\left(\frac{\sec x+\tan x}{\sec x-\tan x}\right)=$ **[DSSE 1979, 81; CBSE 1981]**

(a) $\frac{2\cos x}{(1-\sin x)^2}$ (b) $\frac{\cos x}{(1-\sin x)^2}$

(c) $\frac{2\cos x}{1-\sin x}$ (d) इनमें से कोई नहीं

68. $\frac{d}{dx}\left(x^3 \tan^2\frac{x}{2}\right) =$ [AISSE 1979]

(a) $x^3 \tan\frac{x}{2}.\sec^2\frac{x}{2} + 3x\tan^2\frac{x}{2}$

(b) $x^3 \tan\frac{x}{2}.\sec^2\frac{x}{2} + 3x^2\tan^2\frac{x}{2}$

(c) $x^3 \tan^2\frac{x}{2}.\sec^2\frac{x}{2} + 3x^2\tan^2\frac{x}{2}$

(d) इनमें से कोई नहीं

69. यदि $y = \tan^{-1}\left(\frac{x^{1/3}+a^{1/3}}{1-x^{1/3}a^{1/3}}\right)$, तो $\frac{dy}{dx} =$ [DSSE 1986]

(a) $\frac{1}{3x^{2/3}(1+x^{2/3})}$ (b) $\frac{a}{3x^{2/3}(1+x^{2/3})}$

(c) $-\frac{1}{3x^{2/3}(1+x^{2/3})}$ (d) $-\frac{a}{3x^{2/3}(1+x^{2/3})}$

70. यदि $y = \cot^{-1}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, तो $\frac{dy}{dx} =$ [DSSE 1984]

(a) $\frac{1}{1+x^2}$ (b) $-\frac{1}{1+x^2}$

(c) $\frac{2}{1+x^2}$ (d) $-\frac{2}{1+x^2}$

71. फलन $\log_e\left(\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}\right)$ का x के सापेक्ष अवकल गुणांक है [MP PET 1993]

(a) cosec x (b) tan x

(c) cos x (d) sec x

72. $\frac{d}{dx}\left[\log\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\right] =$ [BIT Ranchi 1990]

(a) sec x (b) cosec x

(c) $\text{cosec}\frac{x}{2}$ (d) $\sec\frac{x}{2}$

73. $\frac{d}{dx}\left[\tan^{-1}\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\right] =$ [BIT Ranchi 1989; Roorkee 1989; RPET 1996]

(a) $-\frac{1}{2}$ (b) 0

(c) $\frac{1}{2}$ (d) 1

74. यदि $f(x) = \tan^{-1}\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)$, तो $f'\left(\frac{\pi}{3}\right) =$ [BIT Ranchi 1990]

(a) $\frac{1}{2(1+\cos x)}$ (b) $\frac{1}{2}$

(c) $\frac{1}{4}$ (d) इनमें से कोई नहीं

75. $\frac{d}{dx}e^{x\sin x} =$ [DSSE 1979]

(a) $e^{x\sin x}(x\cos x + \sin x)$ (b) $e^{x\sin x}(\cos x + x\sin x)$

(c) $e^{x\sin x}(\cos x + \sin x)$ (d) इनमें से कोई नहीं

76. $\frac{d}{dx}\{\log(\sec x + \tan x)\} =$ [AISSE 1982]

(a) cos x (b) sec x

(c) tan x (d) cot x

77. $\frac{d}{dx}(xe^{x^2}) =$ [DSSE 1981]

(a) $2x^2e^{x^2} + e^{x^2}$ (b) $x^2e^{x^2} + e^{x^2}$

(c) $e^x.2x^2 + e^{x^2}$ (d) इनमें से कोई नहीं

78. $\frac{d}{dx}\left[\frac{e^{ax}}{\sin(bx+c)}\right] =$ [AI CBSE 1983]

(a) $\frac{e^{ax}[a\sin(bx+c)+b\cos(bx+c)]}{\sin^2(bx+c)}$

(b) $\frac{e^{ax}[a\sin(bx+c)-b\cos(bx+c)]}{\sin(bx+c)}$

(c) $\frac{e^{ax}[a\sin(bx+c)-b\cos(bx+c)]}{\sin^2(bx+c)}$

(d) इनमें से कोई नहीं

79. यदि $y = \frac{e^x\log x}{x^2}$, तो $\frac{dy}{dx} =$ [AI CBSE 1982]

(a) $\frac{e^x[1+(x+2)\log x]}{x^3}$ (b) $\frac{e^x[1-(x-2)\log x]}{x^4}$

(c) $\frac{e^x[1-(x-2)\log x]}{x^3}$ (d) $\frac{e^x[1+(x-2)\log x]}{x^3}$

80. यदि $y = \frac{e^{2x}\cos x}{x\sin x}$, तो $\frac{dy}{dx} =$ [AI CBSE 1982]

(a) $\frac{e^{2x}[(2x-1)\cot x - x\,\text{cosec}^2 x]}{x^2}$

(b) $\frac{e^{2x}[(2x+1)\cot x - x\,\text{cosec}^2 x]}{x^2}$

(c) $\frac{e^{2x}[(2x-1)\cot x + x\,\text{cosec}^2 x]}{x^2}$

(d) इनमें से कोई नहीं

81. $\frac{d}{dx}\{e^{-ax^2}\log(\sin x)\} =$ [AI CBSE 1984]

(a) $e^{-ax^2}(\cot x + 2ax\log\sin x)$

(b) $e^{-ax^2}(\cot x + ax\log\sin x)$

(c) $e^{-ax^2}(\cot x - 2ax\log\sin x)$

(d) इनमें से कोई नहीं

82. यदि $y = \log x.e^{(\tan x + x^2)}$, तो $\frac{dy}{dx} =$ [AI CBSE 1985]

(a) $e^{(\tan x+x^2)}\left[\frac{1}{x} + (\sec^2 x + x)\log x\right]$

(b) $e^{(\tan x+x^2)}\left[\frac{1}{x} + (\sec^2 x - x)\log x\right]$

(c) $e^{(\tan x+x^2)}\left[\frac{1}{x} + (\sec^2 x + 2x)\log x\right]$

(d) $e^{(\tan x+x^2)}\left[\frac{1}{x} + (\sec^2 x - 2x)\log x\right]$

83. यदि $y=\sqrt{\frac{1+e^x}{1-e^x}}$, तो $\frac{dy}{dx}=$ [AI CBSE 1986]

(a) $\frac{e^x}{(1-e^x)\sqrt{1-e^{2x}}}$ (b) $\frac{e^x}{(1-e^x)\sqrt{1-e^x}}$

(c) $\frac{e^x}{(1-e^x)\sqrt{1+e^{2x}}}$ (d) $\frac{e^x}{(1-e^x)\sqrt{1+e^x}}$

84. $\frac{d}{dx}\left\{e^x\log(1+x^2)\right\}=$ [AI CBSE 1987]

(a) $e^x\left[\log(1+x^2)+\frac{2x}{1+x^2}\right]$

(b) $e^x\left[\log(1+x^2)-\frac{2x}{1+x^2}\right]$

(c) $e^x\left[\log(1+x^2)+\frac{x}{1+x^2}\right]$

(d) $e^x\left[\log(1+x^2)-\frac{x}{1+x^2}\right]$

85. यदि $y=\frac{e^{2x}+e^{-2x}}{e^{2x}-e^{-2x}}$, तो $\frac{dy}{dx}=$ [AI CBSE 1988]

(a) $\frac{-8}{(e^{2x}-e^{-2x})^2}$ (b) $\frac{8}{(e^{2x}-e^{-2x})^2}$

(c) $\frac{-4}{(e^{2x}-e^{-2x})^2}$ (d) $\frac{4}{(e^{2x}-e^{-2x})^2}$

86. यदि $y=\frac{2(x-\sin x)^{3/2}}{\sqrt{x}}$, तो $\frac{dy}{dx}=$ [Roorkee 1971]

(a) $\frac{2(x-\sin x)^{3/2}}{\sqrt{x}}\left[\frac{3}{2}.\frac{1-\cos x}{1-\sin x}-\frac{1}{2x}\right]$

(b) $\frac{2(x-\sin x)^{3/2}}{\sqrt{x}}\left[\frac{3}{2}.\frac{1-\cos x}{x-\sin x}-\frac{1}{2x}\right]$

(c) $\frac{2(x-\sin x)^{1/2}}{\sqrt{x}}\left[\frac{3}{2}.\frac{1-\cos x}{x-\sin x}-\frac{1}{2x}\right]$

(d) इनमें से कोई नहीं

87. $\frac{d}{dx}\left(\cos^{-1}\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}\right)=$ [AI CBSE 1982]

(a) 1 (b) $\frac{1}{2}$

(c) $\frac{1}{3}$ (d) इनमें से कोई नहीं

88. यदि $y=\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{x}}{1+\sqrt{ax}}\right)$, तो $\frac{dy}{dx}=$ [AI CBSE 1988]

(a) $\frac{1}{2(1+x)\sqrt{x}}$ (b) $\frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}$

(c) $-\frac{1}{2(1+x)\sqrt{x}}$ (d) इनमें से कोई नहीं

89. यदि $y=\sec^{-1}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)+\sin^{-1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$, तो $\frac{dy}{dx}=$ [MNR 1984]

(a) 0 (b) 1

(c) 2 (d) 3

90. $\frac{d}{dx}(\log_e x)(\log_a x)]=$

(a) $\frac{\log_a x}{x}$ (b) $\frac{\log_x x}{x}$

(c) $\frac{2\log x}{x}$ (d) $\frac{2\log_a x}{x}$

91. $\frac{d}{dx}\left\{\log\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right)\right\}=$

(a) $\frac{1}{1-e^x}$ (b) $-\frac{1}{1+e^x}$

(c) $-\frac{1}{1-e^x}$ (d) इनमें से कोई नहीं

92. $\frac{d}{dx}\left[\frac{2}{\pi}\sin x^0\right]=$

(a) $\frac{\pi}{180}\cos x^0$ (b) $\frac{1}{90}\cos x^0$

(c) $\frac{\pi}{90}\cos x^0$ (d) $\frac{2}{90}\cos x^0$

93. $\frac{d}{dx}\left[\log\sqrt{\sin\sqrt{e^x}}\right]=$

(a) $\frac{1}{4}e^{x/2}\cot(e^{x/2})$ (b) $e^{x/2}\cot(e^{x/2})$

(c) $\frac{1}{4}e^x\cot(e^x)$ (d) $\frac{1}{2}e^{x/2}\cot(e^{x/2})$

94. यदि $f(x)=|x|$ हो, तो $f'(0)=$ [MNR 1982]

(a) 0 (b) 1

(c) x (d) इनमें से कोई नहीं

95. $x=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ पर, $\frac{d}{dx}\cos(\sin x^2)=$

(a) –1 (b) 1

(c) 0 (d) इनमें से कोई नहीं

96. $\frac{d}{dx}[\tan^{-1}(\cot x)+\cot^{-1}(\tan x)]=$

(a) 0 (b) 1

(c) – 1 (d) – 2

97. $\frac{d}{dx}[e^{ax}\cos(bx+c)]=$ [AISSE 1989]

(a) $e^{ax}[a\cos(bx+c)-b\sin(bx+c)]$

(b) $e^{ax}[a\sin(bx+c)-b\cos(bx+c)]$

(c) $e^{ax}[\cos(bx+c)-\sin(bx+c)]$

(d) इनमें से कोई नहीं

98. यदि $y=\log\log x$, तो $e^y\frac{dy}{dx}=$ [MP PET 1994, 95]

(a) $\frac{1}{x\log x}$ (b) $\frac{1}{x}$

(c) $\frac{1}{\log x}$ (d) e^y

99. यदि $y=\sin^{-1}\left(\frac{19}{20}x\right)+\cos^{-1}\left(\frac{19}{20}x\right)$, तो $\frac{dy}{dx}=$

(a) 0 (b) 1

(c) – 1 (d) इनमें से कोई नहीं

100. यदि $y=(1+x^{1/4})(1+x^{1/2})(1-x^{1/4})$, तो $\frac{dy}{dx}=$ **[MP PET 1994]**

(a) 1 (b) -1

(c) x (d) $\sqrt{x}$

101. यदि $y=\frac{a^{\cos^{-1}x}}{1+a^{\cos^{-1}x}}$, $z=a^{\cos^{-1}x}$, तो $\frac{dy}{dz}=$ **[MP PET 1994]**

(a) $\frac{1}{1+a^{\cos^{-1}x}}$ (b) $-\frac{1}{1+a^{\cos^{-1}x}}$

(c) $\frac{1}{(1+a^{\cos^{-1}x})^2}$ (d) इनमें से कोई नहीं

102. यदि $f(x)=(x-x_0)g(x)$ जहाँ $g(x)$, x_0 पर सतत् है, तो $f'(x_0)$ का मान है

(a) 0 (b) x_0

(c) $g(x_0)$ (d) इनमें से कोई नहीं

103. यदि $y=\log_{\sin x}(\tan x)$, तब $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\pi/4}=$

(a) $\frac{4}{\log 2}$ (b) $-4\log 2$

(c) $\frac{-4}{\log 2}$ (d) इनमें से कोई नहीं

104. यदि $y=\log_2[\log_2(x)]$, तब $\frac{dy}{dx}=$

(a) $\frac{\log_2 e}{x\log_e x}$ (b) $\frac{1}{\log_e x\log_e 2}$

(c) $\frac{1}{\log_e(2x)^x}$ (d) इनमें से कोई नहीं

105. $\frac{d}{dx}(e^{x^3})$ का मान है **[RPET 1995]**

(a) $3xe^{x^3}$ (b) $3x^2e^{x^3}$

(c) $3x\left(e^{x^3}\right)^2$ (d) $2x^2e^{x^3}$

106. $\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x)$ का मान है **[RPET 1995]**

(a) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (b) $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(c) $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ (d) $\frac{-1}{\sqrt{1+x^2}}$

107. यदि $y=\tan^{-1}\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$, तब $\frac{dy}{dx}=$ **[Roorkee 1995]**

(a) 0 (b) $-\frac{1}{2}$

(c) 1/2 (d) 1

108. यदि $y=\frac{\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}$, तब $(1-x^2)\frac{dy}{dx}$ का मान है **[RPET 1995]**

(a) $x+y$ (b) $1+xy$

(c) $1-xy$ (d) $xy-2$

109. $\sec^{-1}x$ का अवकलन गुणांक है **[RPET 1995]**

(a) $\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$ (b) $-\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$

(c) $\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ (d) $\frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$

110. यदि $f(2)=4$, $f'(2)=1$ तब $\lim_{x\to 2}\frac{xf(2)-2f(x)}{x-2}$ का मान है **[RPET 1995, 2000]**

(a) 1 (b) 2

(c) 3 (d) -2

111. $\frac{d}{dx}\left[\log\left(x+\frac{1}{x}\right)\right]=$ **[MP PET 1995]**

(a) $\left(x+\frac{1}{x}\right)$ (b) $\frac{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\left(1+\frac{1}{x}\right)}$

(c) $\frac{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)}$ (d) $\left(1+\frac{1}{x}\right)$

112. यदि $y=\sin^{-1}\sqrt{x}$, तो $\frac{dy}{dx}=$ **[MP PET 1995]**

(a) $\frac{2}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$ (b) $\frac{-2}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$

(c) $\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$ (d) $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$

113. यदि $y=\sin^{-1}\sqrt{(1-x)}+\cos^{-1}\sqrt{x}$, तो $\frac{dy}{dx}=$

(a) $\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$ (b) $\frac{-1}{\sqrt{x(1-x)}}$

(c) $\frac{1}{\sqrt{x(1+x)}}$ (d) इनमें से कोई नहीं

114. यदि $y=x^n\log x+x(\log x)^n$, तो $\frac{dy}{dx}=$

(a) $x^{n-1}(1+n\log x)+(\log x)^{n-1}[n+\log x]$

(b) $x^{n-2}(1+n\log x)+(\log x)^{n-1}[n+\log x]$

(c) $x^{n-1}(1+n\log x)+(\log x)^{n-1}[n-\log x]$

(d) इनमें से कोई नहीं

115. यदि $y\sqrt{x^2+1}=\log\left\{\sqrt{x^2+1}-x\right\}$, तो

$(x^2+1)\frac{dy}{dx}+xy+1=$ **[Roorkee 1978; Kurukshetra CEE 1998]**

(a) 0 (b) 1

(c) 2 (d) इनमें से कोई नहीं

116. $\tan x-x$ का x के सापेक्ष अवकलन गुणांक होगा **[SCRA 1996]**

(a) $1-\tan^2 x$ (b) $\tan x$

(c) $-\tan^2 x$ (d) $\tan^2 x$

117. यदि $f(x)=(\log_{\cot x}\tan x)(\log_{\tan x}\cot x)^{-1}$, तो $f'(2)=$

(a) 2 (b) 0

(c) $\frac{1}{2}$ (d) -2

118. यदि $f(x)=3e^{x^2}$,तो $f'(x)-2xf(x)+\frac{1}{3}f(0)-f'(0)=$

(a) 0 (b) 1

(c) $\frac{7}{3}e^{x^2}$ (d) इनमें से कोई नहीं

119. यदि $y=\log_{\cos x}\sin x$, तो $\frac{dy}{dx}=$

(a) $\frac{\cot x\log\cos x+\tan x\log\sin x}{(\log\cos x)^2}$

(b) $\frac{\tan x\log\cos x+\cot x\log\sin x}{(\log\cos x)^2}$

(c) $\frac{\cot x\log\cos x+\tan x\log\sin x}{(\log\sin x)^2}$

(d) इनमें से कोई नहीं

120. $\frac{d}{dx}\left[\log\left\{e^x\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^{3/4}\right\}\right]=$

(a) $\frac{x^2-7}{x^2-4}$ (b) 1

(c) $\frac{x^2+1}{x^2-4}$ (d) $e^x\frac{x^2-1}{x^2-4}$

121. वक्र $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ के लिए $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$ पर $\frac{dy}{dx}=$ **[Karnataka CET 1993]**

(a) 1/2 (b) 1

(c) –1 (d) 2

122. $\sqrt{\sec\sqrt{x}}$ का अवकलन गुणांक है **[MP PET 1996]**

(a) $\frac{1}{4\sqrt{x}}(\sec\sqrt{x})^{3/2}\sin\sqrt{x}$ (b) $\frac{1}{4\sqrt{x}}\sec\sqrt{x}\sin\sqrt{x}$

(c) $\frac{1}{2}\sqrt{x}(\sec\sqrt{x})^{3/2}\sin\sqrt{x}$ (d) $\frac{1}{2}\sqrt{x}\sec\sqrt{x}\sin\sqrt{x}$

123. यदि $y=e^{(1+\log_e x)}$, तो $\frac{dy}{dx}$ का मान है **[MP PET 1996; Pb. CET 2001]**

(a) e (b) 1

(c) 0 (d) $\log_e x\ e^{\log_e ex}$

124. फलन $f(x)=x^2-6x+8, 2\le x\le 4$ के लिए x का मान जिसके लिये $f'(x)$ लुप्त (vanishes) होता है, है **[MP PET 1996]**

(a) $\frac{9}{4}$ (b) $\frac{5}{2}$

(c) 3 (d) $\frac{7}{2}$

125. यदि $f(x)=e^x g(x), g(0)=2, g'(0)=1$, तो $f'(0)$ है

(a) 1 (b) 3

(c) 2 (d) 0

126. यदि $y=e^x\log x$, तब $\frac{dy}{dx}$ है **[SCRA 1996]**

(a) $\frac{e^x}{x}$ (b) $e^x\left(\frac{1}{x}+x\log x\right)$

(c) $e^x\left(\frac{1}{x}+\log x\right)$ (d) $\frac{e^x}{\log x}$

127. यदि $y=\cot^{-1}\left[\frac{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}\right]$, तब $\frac{dy}{dx}=$

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{2}{3}$

(c) 3 (d) 1

128. यदि $y=\sec x^0$, तो $\frac{dy}{dx}=$ **[MP PET 1997]**

(a) $\sec x\tan x$ (b) $\sec x^o\tan x^o$

(c) $\frac{\pi}{180}\sec x^o\tan x^o$ (d) $\frac{180}{\pi}\sec x^o\tan x^o$

129. यदि $y=\sqrt{\sin\sqrt{x}}$, तो $\frac{dy}{dx}=$ **[MP PET 1997]**

(a) $\frac{1}{2\sqrt{\cos\sqrt{x}}}$ (b) $\frac{\sqrt{\cos\sqrt{x}}}{2x}$

(c) $\frac{\cos\sqrt{x}}{4\sqrt{x}\sqrt{\sin\sqrt{x}}}$ (d) $\frac{1}{2\sqrt{\sin x}}$

130. यदि $y=\log_{10}x^2$, तब $\frac{dy}{dx}=$

(a) $\frac{2}{x}$ (b) $\frac{2}{x\log_e 10}$

(c) $\frac{1}{x\log_e 10}$ (d) $\frac{1}{10x}$

131. यदि $y=3^{x^2}$, तब $\frac{dy}{dx}=$

(a) $(x^2)3^{x^2-1}$ (b) $3x^2.2x$

(c) $3^{x^2}.2x.\log 3$ (d) $(x^2-1).3$

132. फलन $(\sin 2x\cos 2x\cos 3x+\log_2 2^{x+3})$ का $x=\pi$ पर x के सापेक्ष प्रथम अवकलज है **[MP PET 1998]**

(a) 2 (b) –1

(c) $-2+2^\pi\log_e 2$ (d) $-2+\log_e 2$

133. x के वे मान जिन पर फलन $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$ का x के सापेक्ष प्रथम अवकलज $\frac{3}{4}$ है, हैं **[MP PET 1998]**

(a) ± 2 (b) $\pm\frac{1}{2}$

(c) $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ (d) $\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$

134. यदि $y=\frac{(1-x)^2}{x^2}$, तब $\frac{dy}{dx}$ का मान होगा **[MP PET 1999]**

(a) $\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^3}$ (b) $-\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^3}$

(c) $-\frac{2}{x^2}-\frac{2}{x^3}$ (d) $-\frac{2}{x^3}+\frac{2}{x^2}$

135. यदि $pv=81$, तब $v=9$ पर $\frac{dp}{dv}$ होगा **[MP PET 1999]**

(a) 1 (b) –1

(c) 2 (d) इनमें से कोई नहीं

136. $\frac{d}{dx}(\sin 2x^2)$ का मान होगा **[RPET 1996]**

(a) $4x\cos(2x^2)$ (b) $2\sin x^2\cos x^2$

(c) $4x\sin(x^2)$ (d) $4x\sin(x^2)\cos(x^2)$

137. $\frac{d}{dx}\cos h^{-1}(\sec x)$ का मान होगा **[RPET 1997]**

(a) sec x (b) sin x

(c) tan x (d) cosec x

138. यदि $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}+\sqrt{x^2+b^2}}$, तब $f'(x)$ का मान होगा **[Kurukshetra CEE 1998]**

(a) $\frac{x}{(a^2-b^2)}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+b^2}}\right]$

(b) $\frac{x}{(a^2+b^2)}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}-\frac{2}{\sqrt{x^2+b^2}}\right]$

(c) $\frac{x}{(a^2-b^2)}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}+\frac{1}{\sqrt{x^2+b^2}}\right]$

(d) $(a^2+b^2)\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}-\frac{2}{\sqrt{x^2+b^2}}\right]$

139. $f(x)=x|x|$ का अवकलज होगा **[SCRA 1996]**

(a) $2x$ (b) $-2x$

(c) $2x^2$ (d) $2|x|$

140. $y=1-|x|$ का $x=0$ पर अवकलज होगा **[SCRA 1996]**

(a) 0 (b) 1

(c) –1 (d) विद्यमान नहीं है

141. $\sqrt{\sqrt{x}+1}$ का अवकलज होगा **[SCRA 1996]**

(a) $\frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{x+1}}$

(c) $\frac{4}{\sqrt{x(\sqrt{x}+1)}}$ (d) $\frac{1}{4\sqrt{x(\sqrt{x}+1)}}$

142. यदि $y=e^{\sqrt{x}}$, तब $\frac{dy}{dx}$ का मान होगा **[SCRA 1996]**

(a) $\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$ (b) $\frac{\sqrt{x}}{e^{\sqrt{x}}}$

(c) $\frac{x}{e^{\sqrt{x}}}$ (d) $\frac{2\sqrt{x}}{e^{\sqrt{x}}}$

143. यदि $f(x)=\cos^{-1}\left[\frac{1-(\log x)^2}{1+(\log x)^2}\right]$, तब $f'(e)=$ **[Karnataka CET 1999; Pb. CET 2000]**

(a) 1 (b) $\frac{1}{e}$

(c) $\frac{2}{e}$ (d) $\frac{2}{e^2}$

144. $f(x)=|x^2-x|$ का $x=2$ पर अवकलज है **[AMU 1999]**

(a) – 3 (b) 0

(c) 3 (d) अपरिभाषित

145. यदि $f(1)=3, f'(1)=2$, तब $\frac{d}{dx}\{\log f(e^x+2x)\}$ का $x=0$ पर मान है **[AMU 1999]**

(a) 2 / 3 (b) 3 / 2

(c) 2 (d) 0

146. $\frac{d}{dx}\log_{\sqrt{x}}(1/x)=$ **[AMU 1999]**

(a) $-\frac{1}{2\sqrt{x}}$ (b) – 2

(c) $-\frac{1}{x^2\sqrt{x}}$ (d) 0

147. $x=3$ पर $\frac{d}{dx}[|x-1|+|x-5|]$ का मान है **[MP PET 2000]**

(a) – 2 (b) 0

(c) 2 (d) 4

148. $\frac{d}{dx}\left[\left(\frac{\tan^2 2x-\tan^2 x}{1-\tan^2 2x\tan^2 x}\right)\cot 3x\right]=$ **[AMU 2000]**

(a) $\tan 2x\tan x$ (b) $\tan 3x\tan x$

(c) $\sec^2 x$ (d) $\sec x\tan x$

149. यदि $y=\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{x}-x}{1+x^{3/2}}\right)$, तब $y'(1)=$ **[AMU 2000]**

(a) 0 (b) $\frac{1}{2}$

(c) – 1 (d) $-\frac{1}{4}$

150. $10^{-x\tan x}\left[\frac{d}{dx}(10^{x\tan x})\right]=$ **[AMU 2000]**

(a) $\tan x+x\sec^2 x$

(b) $\ln 10\,(\tan x+x\sec^2 x)$

(c) $\ln 10\left(\tan x+\frac{x}{\cos^2 x}+\tan x\sec x\right)$

(d) $x\tan x\ln 10$

151. यदि $x=a$ पर $f(x)$ का अवकलज विद्यमान है, तो $\lim_{x\to a}\frac{xf(a)-af(x)}{x-a}=$ **[AMU 2000]**

(a) $f(a)-af'(a)$ (b) $af(a)-f'(a)$

(c) $f(a)+f'(a)$ (d) $af(a)+f'(a)$

152. दिया है $\frac{d}{dx}f(x)=f'(x)$, तब सम्बन्ध $f'(a+b)=f'(a)+f'(b)$ विद्यमान है, यदि $f(x)=$ **[AMU 2000]**

(a) x (b) x^2

(c) x^3 (d) x^4

153. $f(x)=|x|^3$ का $x=0$ पर अवकलज है **[RPET 2001; Kurukshetra CEE 2002]**

(a) 0 (b) 1

(c) –1 (d) परिभाषित नहीं है

154. यदि $y=\sqrt{\sin x+y}$, तब $\frac{dy}{dx}$ = **[RPET 2001]**

(a) $\frac{\sin x}{2y-1}$ (b) $\frac{\cos x}{2y-1}$

(c) $\frac{\sin x}{2y+1}$ (d) $\frac{\cos x}{2y+1}$

155. यदि $y=(1+x^2)\tan^{-1}x-x$, तब $\frac{dy}{dx}=$ **[Karnataka CET 2001]**

(a) $\tan^{-1}x$ (b) $2x\tan^{-1}x$

(c) $2x\tan^{-1}x-1$ (d) $\frac{2x}{\tan^{-1}x}$

156. यदि $x=y\sqrt{1-y^2}$, तब $\frac{dy}{dx}=$ **[MP PET 2001]**

(a) 0 (b) x

(c) $\frac{\sqrt{1-y^2}}{1-2y^2}$ (d) $\frac{\sqrt{1-y^2}}{1+2y^2}$

157. यदि $y=\tan^{-1}\left[\frac{\sin x+\cos x}{\cos x-\sin x}\right]$, तब $\frac{dy}{dx}$ का मान होगा **[UPSEAT 2001]**

(a) $1/2$ (b) $\pi/4$

(c) 0 (d) 1

158. यदि $y=\frac{a+bx^{3/2}}{x^{5/4}}$ तथा $x=5$ पर $y'=0$, तब $a:b=$ **[AMU 2001]**

(a) $\sqrt{5}:1$ (b) 5 : 2

(c) 3 : 5 (d) 1 : 2

159. $\frac{d}{dx}\left[\tan^{-1}\left(\frac{a-x}{1+ax}\right)\right]=$ **[Karnataka CET 2001; Pb. CET 2001]**

(a) $-\frac{1}{1+x^2}$ (b) $\frac{1}{1+a^2}-\frac{1}{1+x^2}$

(c) $\frac{1}{1+\left(\frac{a-x}{1+ax}\right)^2}$ (d) $\frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{a-x}{1+ax}\right)^2}}$

160. $\frac{d}{dx}\left[\log\left\{e^x\left(\frac{x-2}{x+2}\right)^{3/4}\right\}\right]=$ **[RPET 2001]**

(a) 1 (b) $\frac{x^2+1}{x^2-4}$

(c) $\frac{x^2-1}{x^2-4}$ (d) $e^x\frac{x^2-1}{x^2-4}$

161. यदि $y=\sec(\tan^{-1}x)$, तब $\frac{dy}{dx}$ = **[DCE 2002; Kurukshetra CEE 2001]**

(a) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ (b) $\frac{-x}{\sqrt{1+x^2}}$

(c) $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ (d) इनमें से कोई नहीं

162. फलन $|x-1|+|x-3|$ का अवकल गुणांक, बिन्दु $x=2$ पर है **[RPET 2002; Pb. CET 2000, 04]**

(a) – 2 (b) 0

(c) 2 (d) परिभाषित नहीं है

163. यदि $f(x)$ अवकलनीय फलन है, तब $\lim_{x\to a}\frac{af(x)-xf(a)}{x-a}$ का मान होगा **[UPSEAT 2002]**

(a) $af'(a)-f(a)$ (b) $af(a)-f'(a)$

(c) $af'(a)+f(a)$ (d) $af(a)+f'(a)$

164. यदि $x=\exp\left\{\tan^{-1}\left(\frac{y-x^2}{x^2}\right)\right\}$, तब $\frac{dy}{dx}=$ **[MP PET 2002]**

(a) $2x[1+\tan(\log x)]+x\sec^2(\log x)$

(b) $x[1+\tan(\log x)]+\sec^2(\log x)$

(c) $2x[1+\tan(\log x)]+x^2\sec^2(\log x)$

(d) $2x[1+\tan(\log x)]+\sec^2(\log x)$

165. यदि $f(x)=\sqrt{ax}+\frac{a^2}{\sqrt{ax}}$, तब $f'(a)=$ **[EAMCET 2002]**

(a) – 1 (b) 1

(c) 0 (d) a

166. x^6+6^x का x के सापेक्ष अवकलज है **[Kerala (Engg.) 2002]**

(a) $12x$ (b) $x+4$

(c) $6x^5+6^x\log 6$ (d) $6x^5+x6^{x-1}$

167. यदि $\sin y+e^{-x\cos y}=e$, तब $(1,\pi)$ पर $\frac{dy}{dx}$ है **[Kerala (Engg.) 2002]**

(a) $\sin y$ (b) $-x\cos y$

(c) e (d) $\sin y-x\cos y$

168. बिन्दु $x_0=-3$ पर, फलन $f(x)=3|2+x|$ का अवकलन गुणांक है **[Orissa JEE 2002]**

(a) 3 (b) – 3

(c) 0 (d) अस्तित्व नहीं है

169. फलन $f(x)=\log_5(\log_7 x)$, $x>7$ का अवकलन गुणांक है **[Orissa JEE 2002]**

(a) $\frac{1}{x(\text{In }5)(\text{In }7)(\log_7 x)}$ (b) $\frac{1}{x(\ln 5)(\ln 7)}$

(c) $\frac{1}{x(\text{In }x)}$ (d) इनमें से कोई नहीं

170. यदि $y=\cot^{-1}(x^2)$, तब $\frac{dy}{dx}=$ **[Pb. CET 2002]**

(a) $\frac{2x}{1+x^4}$ (b) $\frac{2x}{\sqrt{1+4x}}$

(c) $\frac{-2x}{1+x^4}$ (d) $\frac{-2x}{\sqrt{1+x^2}}$

171. यदि $y=\log\tan\sqrt{x}$ तब $\frac{dy}{dx}$ का मान है **[Pb. CET 2000]**

(a) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ (b) $\frac{\sec^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}\tan x}$

(c) $2\sec^2\sqrt{x}$ (d) $\frac{\sec^2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\tan\sqrt{x}}$

172. यदि $y=(\cos x^2)^2$, तब $\frac{dy}{dx}=$ [Pb. CET 2004]

(a) $-4x\sin 2x^2$ (b) $-x\sin x^2$
(c) $-2x\sin 2x^2$ (d) $-x\cos 2x^2$

173. यदि $y=\tan^{-1}(\sec x-\tan x)$, तब $\frac{dy}{dx}=$ [Karnataka CET 2004]

(a) 2 (b) –2
(c) $\frac{1}{2}$ (d) $-\frac{1}{2}$

174. यदि $y=\cos^{-1}\cos(|x|-f(x))$, जहाँ

$f(x)\begin{cases}=1, \text{यदि } x>0\\ =-1, \text{यदि } x<0\\ =0, \text{यदि } x=0\end{cases}$, तो $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\frac{5\pi}{4}}=$ [J & K 2005]

(a) – 1 (b) 1
(c) 0 (d) अपरिभाषित

175. यदि $x^m y^n=(x+y)^{m+n}$, तो $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1,y=2}=$ [J & K 2005]

(a) 1/2 (b) 2
(c) $2m/n$ (d) $m/2n$

176. यदि $y=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$, तो $\frac{dy}{dx}=$ [Karnataka CET 2005]

(a) $\sec h^2 x$ (b) $\text{cosech}^2 x$
(c) $-\sec h^2 x$ (d) $-\text{cosech}^2 x$

177. किसी फलन $f(x)$ का अवकलज $\tan^4 x$ है। यदि $f(0)=0$, तब $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=$ [J & K 2005]

(a) 1 (b) 0
(c) –1 (d) इनमें से कोई नहीं

178. माना $f(x)$, दो घात का बहुपदीय फलन है। यदि $f(1)=f(-1)$ एवं a_1, a_2, a_3 स.श्रे. में हैं, तो $f'(a_1)$, $f'(a_2)$, $f'(a_3)$ होंगे [AMU 2005]

(a) समान्तर श्रेणी में (b) गुणोत्तर श्रेणी में
(c) हरात्मक श्रेणी में (d) इनमें से कोई नहीं

179. $\frac{d}{dx}\left[\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{x}(3-x)}{1-3x}\right)\right]=$ [Kerala (Engg.) 2005]

(a) $\frac{1}{2(1+x)\sqrt{x}}$ (b) $\frac{3}{(1+x)\sqrt{x}}$
(c) $\frac{2}{(1+x)\sqrt{x}}$ (d) $\frac{3}{2(1-x)\sqrt{x}}$
(e) $\frac{3}{2(1+x)\sqrt{x}}$

180. यदि $r=\left[2\phi+\cos^2\left(2\phi+\frac{\pi}{4}\right)\right]^{1/2}$, तो $\phi=\pi/4$ पर, $dr/d\phi$ का मान होगा [Orissa JEE 2005]

(a) $2\left(\frac{1}{\pi+1}\right)^{1/2}$ (b) $2\left(\frac{2}{\pi+1}\right)^{-1/2}$
(c) $2\left(\frac{1}{\pi+1}\right)^{-1/2}$ (d) $2\left(\frac{2}{\pi+1}\right)^{1/2}$

181. यदि $f(x)=\cos x\cos 2x\cos 4x\cos 8x\cos 16x$, तो $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=$ [AMU 2005]

(a) $\sqrt{2}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$
(c) 1 (d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

182. $y=(1-x)(2-x)....(n-x)$ का $x=1$ पर अवकलज है [Kerala (Engg.) 2005]

(a) 0 (b) $(-1)(n-1)!$
(c) $n!-1$ (d) $(-1)^{n-1}(n-1)!$
(e) $(-1)^n(n-1)!$

183. यदि $y=\tan^{-1}\left(\frac{a\cos x-b\sin x}{b\cos x+a\sin x}\right)$, तो $\frac{dy}{dx}=$ [Kerala (Engg.) 2005]

(a) 2 (b) – 1
(c) $\frac{a}{b}$ (d) 0
(e) $\frac{b}{a}$

अस्पष्ट फलनों का अवकलन, प्राचलिक व संयुक्त फलनों का अवकलन, लघुगणकीय अवकलन, अनन्त श्रेणियों के अवकलन

1. यदि $x=a(t-\sin t)$ तथा $y=a(1-\cos t)$, तो $\frac{dy}{dx}=$ [AISSE 1984; Roorkee 1974; SCRA 1996; Karnataka CET 2003]

(a) $\tan\left(\frac{t}{2}\right)$ (b) $-\tan\left(\frac{t}{2}\right)$
(c) $\cot\left(\frac{t}{2}\right)$ (d) $-\cot\left(\frac{t}{2}\right)$

2. यदि $x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ तथा $y=\frac{2at}{1+t^2}$, तब $\frac{dy}{dx}=$

(a) $\frac{a(1-t^2)}{2t}$ (b) $\frac{a(t^2-1)}{2t}$
(c) $\frac{a(t^2+1)}{2t}$ (d) $\frac{a(t^2-1)}{t}$

3. यदि $x=a\left(\cos t+\log\tan\frac{t}{2}\right)$ तथा $y=a\sin t$, तो $\frac{dy}{dx}=$ [RPET 1997; MP PET 2001]

(a) $\tan t$ (b) $-\tan t$
(c) $\cot t$ (d) $-\cot t$

4. यदि $\tan y=\frac{2t}{1-t^2}$ तथा $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$, तो $\frac{dy}{dx}=$

(a) $\frac{2}{1+t^2}$ (b) $\frac{1}{1+t^2}$
(c) 1 (d) 2

5. यदि $x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ और $y=\frac{2t}{1+t^2}$, तब $\frac{dy}{dx}=$

[Karnataka CET 2000; Pb. CET 2002]

(a) $\frac{-y}{x}$ (b) $\frac{y}{x}$

(c) $\frac{-x}{y}$ (d) $\frac{x}{y}$

6. यदि $x = at^2, y = 2at$, तब $\frac{d^2y}{dx^2} =$ [Karnataka CET 1993]

(a) $-\frac{1}{t^2}$ (b) $\frac{1}{2at^3}$

(c) $-\frac{1}{t^3}$ (d) $-\frac{1}{2at^3}$

7. यदि $\cos(x+y) = y\sin x$, तो $\frac{dy}{dx} =$ [AI CBSE 1979]

(a) $-\frac{\sin(x+y)+y\cos x}{\sin x+\sin(x+y)}$ (b) $\frac{\sin(x+y)+y\cos x}{\sin x+\sin(x+y)}$

(c) $\frac{y\cos x-\sin(x+y)}{\sin x-\sin(x+y)}$ (d) इनमें से कोई नहीं

8. यदि $y = \frac{1}{4}u^4, u = \frac{2}{3}x^3+5$, तो $\frac{dy}{dx} =$ [DSSE 1979]

(a) $\frac{1}{27}x^2(2x^3+15)^3$ (b) $\frac{2}{27}x(2x^3+5)^3$

(c) $\frac{2}{27}x^2(2x^3+15)^3$ (d) इनमें से कोई नहीं

9. $x\sqrt{1+y}+y\sqrt{1+x}=0$, तो $\frac{dy}{dx} =$ [RPET 1989, 96]

(a) $1+x$ (b) $(1+x)^{-2}$

(c) $-(1+x)^{-1}$ (d) $-(1+x)^{-2}$

10. यदि $x = 2\cos t-\cos 2t, y = 2\sin t-\sin 2t$, तो $t=\frac{\pi}{4}$ पर $\frac{dy}{dx} =$

(a) $\sqrt{2}+1$ (b) $\sqrt{2+1}$

(c) $\frac{\sqrt{2+1}}{2}$ (d) इनमें से कोई नहीं

11. यदि $\sin y = x\sin(a+y)$, तो $\frac{dy}{dx} =$

[Karnataka CET 2000; UPSEAT 2001; Pb. CET 2001; Kerala (Engg.) 2005]

(a) $\frac{\sin^2(a+y)}{\sin(a+2y)}$ (b) $\frac{\sin^2(a+y)}{\cos(a+2y)}$

(c) $\frac{\sin^2(a+y)}{\sin a}$ (d) $\frac{\sin^2(a+y)}{\cos a}$

12. यदि $\tan(x+y)+\tan(x-y)=1$, तो $\frac{dy}{dx} =$ [DSSE 1979]

(a) $\frac{\sec^2(x+y)+\sec^2(x-y)}{\sec^2(x+y)-\sec^2(x-y)}$ (b) $\frac{\sec^2(x+y)+\sec^2(x-y)}{\sec^2(x-y)-\sec^2(x+y)}$

(c) $\frac{\sec^2(x+y)-\sec^2(x-y)}{\sec^2(x+y)+\sec^2(x-y)}$ (d) इनमें से कोई नहीं

13. यदि $y\sec x+\tan x+x^2y=0$, तो $\frac{dy}{dx} =$

[DSSE 1981; CBSE 1981]

(a) $\frac{2xy+\sec^2 x+y\sec x\tan x}{x^2+\sec x}$

(b) $-\frac{2xy+\sec^2 x+\sec x\tan x}{x^2+\sec x}$

(c) $-\frac{2xy+\sec^2 x+y\sec x\tan x}{x^2+\sec x}$

(d) इनमें से कोई नहीं

14. यदि $\sin(xy)+\frac{x}{y}=x^2-y$, तो $\frac{dy}{dx} =$

[DSSE 1980; CBSE 1980]

(a) $\frac{y[2xy-y^2\cos(xy)-1]}{xy^2\cos(xy)+y^2-x}$ (b) $\frac{[2xy-y^2\cos(xy)-1]}{xy^2\cos(xy)+y^2-x}$

(c) $-\frac{y[2xy-y^2\cos(xy)-1]}{xy^2\cos(xy)+y^2-x}$ (d) इनमें से कोई नहीं

15. यदि $\sin^2 x+2\cos y+xy=0$, तो $\frac{dy}{dx} =$ [AI CBSE 1980]

(a) $\frac{y+2\sin x}{2\sin y+x}$ (b) $\frac{y+\sin 2x}{2\sin y-x}$

(c) $\frac{y+2\sin x}{\sin y+x}$ (d) इनमें से कोई नहीं

16. यदि $x^3+8xy+y^3=64$, तो $\frac{dy}{dx} =$ [AI CBSE 1979]

(a) $-\frac{3x^2+8y}{8x+3y^2}$ (b) $\frac{3x^2+8y}{8x+3y^2}$

(c) $\frac{3x+8y^2}{8x^2+3y}$ (d) इनमें से कोई नहीं

17. यदि $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$, तो $\frac{dy}{dx} =$

(a) $-\frac{ax+hy+g}{hx+by+f}$ (b) $\frac{ax+hy+g}{hx-by+f}$

(c) $\frac{ax-hy-g}{hx-by-f}$ (d) इनमें से कोई नहीं

18. यदि $y = f\left(\frac{5x+1}{10x^2-3}\right)$ तथा $f'(x)=\cos x$, तो $\frac{dy}{dx} =$

[MP PET 1987]

(a) $\cos\left(\frac{5x+1}{10x^2-3}\right)\frac{d}{dx}\left(\frac{5x+1}{10x^2-3}\right)$

(b) $\frac{5x+1}{10x^2-3}\cos\left(\frac{5x+1}{10x^2-3}\right)$

(c) $\cos\left(\frac{5x+1}{10x^2-3}\right)$

(d) इनमें से कोई नहीं

19. यदि $f(x)=\frac{1}{1-x}$, तब संयुक्त फलन $f[f\{f(x)\}]$ का अवकलज है

[Orissa JEE 2003]

(a) 0 (b) $\frac{1}{2}$

(c) 1 (d) 2

20. माना $g(x)$ एक व्युत्क्रमणीय फलन $f(x)$ का व्युत्क्रम फलन है, जो $x = c$ पर अवकलनीय है, तो $g'(f(c)) =$

(a) $f'(c)$ (b) $\frac{1}{f'(c)}$

(c) $f(c)$ (d) इनमें से कोई नहीं

21. माना $g(x)$, $f(x)$ का व्युत्क्रम फलन है एवं $f'(x)=\frac{1}{1+x^3}$, तो $g'(x)$ = **[Kurukshetra CEE 1996]**

(a) $\frac{1}{1+(g(x))^3}$ (b) $\frac{1}{1+(f(x))^3}$

(c) $1+(g(x))^3$ (d) $1+(f(x))^3$

22. माना f व g अवकलनीय फलन हैं एवं $g'(a)=2$, $g(a)=b$ व $fog=I$ (तत्समक फलन), तो $f'(b)$

(a) $\frac{1}{2}$ (b) 2

(c) $\frac{2}{3}$ (d) इनमें से कोई नहीं

23. $f[\log(x)]$ का अवकलन गुणांक, जबकि $f(x)=\log x$ है, होगा **[Kurukshetra CEE 1998; DCE 2000]**

(a) $x\log x$ (b) $\frac{x}{\log x}$

(c) $\frac{1}{x\log x}$ (d) $\frac{\log x}{x}$

24. $F[f\{\phi(x)\}]$ का अवकलज है **[AMU 2001]**

(a) $F'[f\{\phi(x)\}]$ (b) $F[f\{\phi(x)\}]f'\{\phi(x)\}$

(c) $F'[f\{\phi(x)\}]f'\{\phi(x)\}$ (d) $F'[f\{\phi(x)\}]f'\{\phi(x)\}\phi'(x)$

25. यदि $f(x)=e^x$, $g(x)=\sin^{-1}x$ और $h(x)=f(g(x))$, तब $h'(x)/h(x)=$ **[EAMCET 2002]**

(a) $e^{\sin^{-1}x}$ (b) $1/\sqrt{1-x^2}$

(c) $\sin^{-1}x$ (d) $1/(1-x^2)$

26. यदि $x^2+y^2=t-\frac{1}{t}$, $x^4+y^4=t^2+\frac{1}{t^2}$, तो $x^3y\frac{dy}{dx}=$

(a) 1 (b) 2

(c) 3 (d) 4

27. यदि $x=a\sin 2\theta(1+\cos 2\theta), y=b\cos 2\theta(1-\cos 2\theta)$, तो $\frac{dy}{dx}=$ **[Kurukshetra CEE 1998]**

(a) $\frac{b\tan\theta}{a}$ (b) $\frac{a\tan\theta}{b}$

(c) $\frac{a}{b\tan\theta}$ (d) $\frac{b}{a\tan\theta}$

28. यदि $\sin y=x\cos(a+y)$, तो $\frac{dy}{dx}=$

(a) $\frac{\cos^2(a+y)}{\cos a}$ (b) $\frac{\cos(a+y)}{\cos^2 a}$

(c) $\frac{\sin^2(a+y)}{\sin a}$ (d) इनमें से कोई नहीं

29. यदि $x=\frac{3at}{1+t^3}, y=\frac{3at^2}{1+t^3}$, तो $\frac{dy}{dx}=$

(a) $\frac{t(2+t^3)}{1-2t^3}$ (b) $\frac{t(2-t^3)}{1-2t^3}$

(c) $\frac{t(2+t^3)}{1+2t^3}$ (d) $\frac{t(2-t^3)}{1+2t^3}$

30. यदि $x=t+\frac{1}{t}, y=t-\frac{1}{t}$, तो $\frac{d^2y}{dx^2}=$

(a) $-4t(t^2-1)^{-2}$ (b) $-4t^3(t^2-1)^{-3}$

(c) $(t^2+1)(t^2-1)^{-1}$ (d) $-4t^2(t^2-1)^{-2}$

31. यदि $x=t^2$, $y=t^3$, तो $\frac{d^2y}{dx^2}=$ **[EAMCET 1994]**

(a) $\frac{3}{2}$ (b) $\frac{3}{(4t)}$

(c) $\frac{3}{2(t)}$ (d) $\frac{3t}{2}$

32. यदि $x=a\sin\theta$ तथा $y=b\cos\theta$, तब $\frac{d^2y}{dx^2}$ का मान होगा **[UPSEAT 2002]**

(a) $\frac{a}{b^2}\sec^2\theta$ (b) $\frac{-b}{a}\sec^2\theta$

(c) $\frac{-b}{a^2}\sec^3\theta$ (d) $\frac{-b}{a^2}\sec^3\theta$

33. माना $y=t^{10}+1$ और $x=t^8+1$, तब $\frac{d^2y}{dx^2}$ है **[UPSEAT 2004]**

(a) $\frac{5}{2}t$ (b) $20t^8$

(c) $\frac{5}{16t^6}$ (d) इनमें से कोई नहीं

34. यदि $3\sin(xy)+4\cos(xy)=5$, तो $\frac{dy}{dx}=$ **[EAMCET 1994]**

(a) $-\frac{y}{x}$ (b) $\frac{3\sin(xy)+4\cos(xy)}{3\cos(xy)-4\sin(xy)}$

(c) $\frac{3\cos(xy)+4\sin(xy)}{4\cos(xy)-3\sin(xy)}$ (d) इनमें से कोई नहीं

35. यदि $x^2e^y+2xye^x+13=0$, तो $\frac{dy}{dx}=$ **[RPET 1987]**

(a) $\frac{2xe^{y-x}+2y(x+1)}{x(xe^{y-x}+2)}$ (b) $\frac{2xe^{x-y}+2y(x+1)}{x(xe^{y-x}+2)}$

(c) $-\frac{2xe^{y-x}+2y(x+1)}{x(xe^{y-x}+2)}$ (d) इनमें से कोई नहीं

36. यदि $x=a\cos^3\theta, y=a\sin^3\theta$, तो $\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=$ **[EAMCET 1992]**

(a) $\tan^2\theta$ (b) $\sec^2\theta$

(c) $\sec\theta$ (d) $|\sec\theta|$

37. यदि $x^3+y^3-3axy=0$, तब $\frac{dy}{dx}=$ **[RPET 1996]**

(a) $\frac{ay-x^2}{y^2-ax}$ (b) $\frac{ay-x^2}{ay-y^2}$

(c) $\frac{x^2+ay}{y^2+ax}$ (d) $\frac{x^2+ay}{ax-y^2}$

38. यदि $x = a(t+\sin t)$ तथा $y = a(1-\cos t)$, तब $\frac{dy}{dx} =$ **[RPET 1996; MP PET 2002]**

(a) $\tan(t/2)$ (b) $\cot(t/2)$

(c) $\tan 2t$ (d) $\tan t$

39. यदि $x = \frac{2t}{1+t^2}, y = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, तब $\frac{dy}{dx} =$ **[RPET 1999]**

(a) $\frac{2t}{t^2+1}$ (b) $\frac{2t}{t^2-1}$

(c) $\frac{2t}{1-t^2}$ (d) इनमें से कोई नहीं

40. यदि $\sin(x+y)=\log(x+y)$, तो $\frac{dy}{dx} =$ **[Karnataka CET 1993; RPET 1989, 92; Roorkee 2000]**

(a) 2 (b) – 2

(c) 1 (d) –1

41. यदि $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ और $\sin y = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, तो $\frac{dy}{dx} =$ **[MP PET 1994]**

(a) –1 (b) $\frac{1-t}{1+t^2}$

(c) $\frac{1}{1+t^2}$ (d) 1

42. यदि $x = a(\cos\theta + \theta\sin\theta)$, $y = a(\sin\theta - \theta\cos\theta)$, तब $\frac{dy}{dx} =$ **[DCE 1999]**

(a) $\cos\theta$ (b) $\tan\theta$

(c) $\sec\theta$ (d) $\operatorname{cosec}\theta$

43. यदि $x = a\cos^4\theta, y = a\sin^4\theta$, तब $\theta = \frac{3\pi}{4}$ पर $\frac{dy}{dx} =$ **[Kerala (Engg.) 2002]**

(a) –1 (b) 1

(c) $-a^2$ (d) a^2

44. यदि $x = \sin^{-1}(3t-4t^3)$ तथा $y = \cos^{-1}\sqrt{(1-t^2)}$, तब $\frac{dy}{dx} =$ **[Kerala (Engg.) 2002]**

(a) 1/2 (b) 2/5

(c) 3/2 (d) 1/3

45. यदि $x = a\left(t-\frac{1}{t}\right), y = a\left(t+\frac{1}{t}\right)$, तब $\frac{dy}{dx} =$ **[Karnataka CET 2004]**

(a) $\frac{y}{x}$ (b) $\frac{-y}{x}$

(c) $\frac{x}{y}$ (d) $\frac{-x}{y}$

46. यदि $x = \sin t\cos 2t$ और $y = \cos t\sin 2t$, तब $t = \frac{\pi}{4}$ पर $\frac{dy}{dx} =$ **[Pb. CET 2000]**

(a) –2 (b) 2

(c) 1/2 (d) –1/2

47. यदि $\ln(x+y) = 2xy$, तब $y'(0) =$ **[IIT Screening 2004]**

(a) 1 (b) –1

(c) 2 (d) 0

48. यदि $y = x^x$, तो $\frac{dy}{dx} =$ **[AISSE 1984; DSSE 1982; MNR 1979; SCRA 1996; RPET 1996; Kerala (Engg.) 2002]**

(a) $x^x \log ex$ (b) $x^x\left(1+\frac{1}{x}\right)$

(c) $(1+\log x)$ (d) $x^x \log x$

49. फलन $\left[\cos^{-1}\left(\sin\sqrt{\frac{1+x}{2}}\right)+x^x\right]$ का $x=1$ पर x के सापेक्ष प्रथम अवकलज है **[MP PET 1998]**

(a) 3/4 (b) 0

(c) 1/2 (d) –1/2

50. यदि $y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$, तो $\frac{dy}{dx} =$ **[AISSE 1981; RPET 1995]**

(a) $\frac{2}{(1+x)^{1/2}(1-x)^{3/2}}$ (b) $\frac{1}{(1+x)^{1/2}(1-x)^{3/2}}$

(c) $\frac{1}{2(1+x)^{1/2}(1-x)^{3/2}}$ (d) $\frac{1}{(1+x)^{3/2}(1-x)^{1/2}}$

51. यदि $y = e^{x+e^{x+e^{x+\ldots\infty}}}$, तब $\frac{dy}{dx} =$ **[AISSE 1990; UPSEAT 2002; DCE 2002]**

(a) $\frac{y}{1-y}$ (b) $\frac{1}{1-y}$

(c) $\frac{y}{1+y}$ (d) $\frac{y}{y-1}$

52. यदि $x^y = e^{x-y}$, तब $\frac{dy}{dx} =$ **[MP PET 1987, 2004; MNR 1984; Roorkee 1954; BIT Ranchi 1991; RPET 2000]**

(a) $\log x.[\log(ex)]^{-2}$ (b) $\log x.[\log(ex)]^2$

(c) $\log x.(\log x)^2$ (d) इनमें से कोई नहीं

53. यदि $(x-y)e^{x/(x-y)} = k$, तब

(a) $(y-2x)\frac{dy}{dx}+3x-2y=0$ (b) $y\frac{dy}{dx}+x-2y=0$

(c) $a\left(y\frac{dy}{dx}+x-2y\right)=0$ (d) इनमें से कोई नहीं

54. यदि $2^x+2^y=2^{x+y}$, तब $\frac{dy}{dx} =$ **[MP PET 1995; AMU 2000]**

(a) $2^{x-y}\frac{2^y-1}{2^x-1}$ (b) $2^{x-y}\frac{2^y-1}{1-2^x}$

(c) $\frac{2^x+2^y}{2^x-2^y}$ (d) इनमें से कोई नहीं

55. यदि $y = \log x^x$, तो $\frac{dy}{dx} =$ **[MNR 1978]**

(a) $x^x(1+\log x)$ (b) $\log(ex)$

(c) $\log\left(\frac{e}{x}\right)$ (d) इनमें से कोई नहीं

56. यदि $y^x + x^y = a^b$,तो $\frac{dy}{dx} =$

(a) $-\frac{yx^{y-1} + y^x \log y}{xy^{x-1} + x^y \log x}$ (b) $\frac{yx^{y-1} + y^x \log y}{xy^{x-1} + x^y \log x}$

(c) $-\frac{yx^{y-1} + y^x}{xy^{x-1} + x^y}$ (d) $\frac{yx^{y-1} + y^x}{xy^{x-1} + x^y}$

57. यदि $y = \sqrt{\frac{(x-a)(x-b)}{(x-c)(x-d)}}$, तो $\frac{dy}{dx} =$

(a) $\frac{y}{2}\left[\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} - \frac{1}{x-c} - \frac{1}{x-d}\right]$

(b) $y\left[\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} - \frac{1}{x-c} - \frac{1}{x-d}\right]$

(c) $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} - \frac{1}{x-c} - \frac{1}{x-d}\right]$

(d) इनमें से कोई नहीं

58. यदि $y = (1+x)^x$, तो $\frac{dy}{dx} =$

(a) $(1+x)^x\left[\frac{x}{1+x} + \log ex\right]$ (b) $\frac{x}{1+x} + \log(1+x)$

(c) $(1+x)^x\left[\frac{x}{1+x} + \log(1+x)\right]$ (d) इनमें से कोई नहीं

59. यदि $y = \sqrt{\log x + \sqrt{\log x + \sqrt{\log x + ...\infty}}}$, तो $\frac{dy}{dx} =$

(a) $\frac{x}{2y-1}$ (b) $\frac{x}{2y+1}$

(c) $\frac{1}{x(2y-1)}$ (d) $\frac{1}{x(1-2y)}$

60. यदि $y = x^{\sqrt{x}}$, तो $\frac{dy}{dx} =$

(a) $x^{\sqrt{x}}\frac{2+\log x}{2\sqrt{x}}$ (b) $x^{\sqrt{x}}\frac{2+\log x}{\sqrt{x}}$

(c) $\frac{2+\log x}{2\sqrt{x}}$ (d) इनमें से कोई नहीं

61. यदि $x^p y^q = (x+y)^{p+q}$, तो $\frac{dy}{dx} =$

[RPET 1999; UPSEAT 2001]

(a) $\frac{y}{x}$ (b) $-\frac{y}{x}$

(c) $\frac{x}{y}$ (d) $-\frac{x}{y}$

62. यदि $y = (\sin x)^{(\sin x)^{(\sin x)\ldots\ldots\infty}}$, तो $\frac{dy}{dx} =$

(a) $\frac{y^2 \cot x}{1 - y\log\sin x}$ (b) $\frac{y^2 \cot x}{1 + y\log\sin x}$

(c) $\frac{y\cot x}{1 - y\log\sin x}$ (d) $\frac{y\cot x}{1 + y\log\sin x}$

63. यदि $y = (x^x)^x$, तो $\frac{dy}{dx} =$

(a) $(x^x)^x(1 + 2\log x)$ (b) $(x^x)^x(1 + \log x)$

(c) $x(x^x)^x(1 + 2\log x)$ (d) $x\,(x^x)^x(1 + \log x)$

64. यदि $y = \sqrt{\sin x + \sqrt{\sin x + \sqrt{\sin x + ...\infty}}}$, तब

[MP PET 1998; Pb. CET 2001]

(a) $(2y-1)\frac{dy}{dx} - \sin x = 0$ (b) $(2y-1)\cos x + \frac{dy}{dx} = 0$

(c) $(2y-1)\cos x - \frac{dy}{dx} = 0$ (d) $(2y-1)\frac{dy}{dx} - \cos x = 0$

65. यदि $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$, तो $\frac{dy}{dx} =$ **[BIT Ranchi 1992]**

(a) $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\left[\log\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}\right]$

(b) $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\left[\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$

(c) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^x\left[\log(x-1) - \frac{x}{x+1}\right]$

(d) $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\left[\log\left(1+\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{1+x}\right]$

66. $\frac{d}{dx}(x^{\log_e x}) =$ **[MP PET 1993]**

(a) $2x^{(\log_e x - 1)}.\log_e x$ (b) $x^{(\log_e x - 1)}$

(c) $\frac{2}{x}\log_e x$ (d) $x^{(\log_e x - 1)}.\log_e x$

67. यदि $x^y = y^x$, तो $\frac{dy}{dx} =$ **[DSSE 1996; MP PET 1997]**

(a) $\frac{y(x\log_e y + y)}{x(y\log_e x + x)}$ (b) $\frac{y(x\log_e y - y)}{x(y\log_e x - x)}$

(c) $\frac{x(x\log_e y - y)}{y(y\log_e x - x)}$ (d) $\frac{x(x\log_e y + y)}{y(y\log_e x + x)}$

68. यदि $y = x^{(x^x)}$, तो $\frac{dy}{dx} =$ **[AISSE 1989]**

(a) $y[x^x(\log ex).\log x + x^x]$

(b) $y[x^x(\log ex).\log x + x]$

(c) $y[x^x(\log ex).\log x + x^{x-1}]$

(d) $y[x^x(\log_e x).\log x + x^{x-1}]$

69. यदि $y = x^{\sin x}$, तो $\frac{dy}{dx} =$ **[DSSE 1983, 84]**

(a) $\frac{x\cos x.\log x + \sin x}{x}.x^{\sin x}$

(b) $\frac{y[x\cos x.\log x + \cos x]}{x}$

(c) $y[x\sin x.\log x + \cos x]$

(d) इनमें से कोई नहीं

70. $\frac{d}{dx}\{(\sin x)^x\} =$ **[DSSE 1985, 87; AISSE 1983]**

(a) $\left[\frac{x\cos x + \sin x \log \sin x}{\sin x}\right]$

(b) $(\sin x)^x\left[\frac{x\cos x + \sin x \log \sin x}{\sin x}\right]$

(c) $(\sin x)^x\left[\frac{x\sin x + \sin x \log \sin x}{\sin x}\right]$

(d) इनमें से कोई नहीं

71. यदि $y = \frac{\sqrt{x}(2x+3)^2}{\sqrt{x+1}}$, तो $\frac{dy}{dx} =$ **[AISSE 1986]**

(a) $y\left[\frac{1}{2x}+\frac{4}{2x+3}-\frac{1}{2(x+1)}\right]$

(b) $y\left[\frac{1}{3x}+\frac{4}{2x+3}+\frac{1}{2(x+1)}\right]$

(c) $y\left[\frac{1}{3x}+\frac{4}{2x+3}+\frac{1}{x+1}\right]$

(d) इनमें से कोई नहीं

72. $\frac{d}{dx}\{(\sin x)^{\log x}\} =$ **[DSSE 1984]**

(a) $(\sin x)^{\log x}\left[\frac{1}{x}\log \sin x + \cot x\right]$

(b) $(\sin x)^{\log x}\left[\frac{1}{x}\log \sin x + \cot x \log x\right]$

(c) $(\sin x)^{\log x}\left[\frac{1}{x}\log \sin x + \log x\right]$

(d) इनमें से कोई नहीं

73. यदि $y = (\tan x)^{\cot x}$, तो $\frac{dy}{dx} =$ **[AISSE 1985]**

(a) $y\,\text{cosec}^2 x(1 - \log \tan x)$ (b) $y\,\text{cosec}^2 x(1 + \log \tan x)$

(c) $y\,\text{cosec}^2 x(\log \tan x)$ (d) इनमें से कोई नहीं

74. यदि $y = x^2 + x^{\log x}$, तो $\frac{dy}{dx} =$ **[DSSE 1986]**

(a) $\frac{x^2 + \log x.x^{\log x}}{x}$ (b) $x^2 + \log x.x^{\log x}$

(c) $\frac{2(x^2 + \log x.x^{\log x})}{x}$ (d) इनमें से कोई नहीं

75. यदि $y = x^2 + \frac{1}{x^2 + \frac{1}{x^2 + \frac{1}{x^2 + \ldots\ldots\infty}}}$, तो $\frac{dy}{dx} =$

(a) $\frac{2xy}{2y - x^2}$ (b) $\frac{xy}{y + x^2}$

(c) $\frac{xy}{y - x^2}$ (d) $\frac{2xy}{2 + \frac{x^2}{y}}$

76. यदि $y = \sqrt{x}^{\sqrt{x}^{\sqrt{x}^{\ldots\infty}}}$, तो $\frac{dy}{dx} =$

(a) $\frac{y^2}{2x - 2y\log x}$ (b) $\frac{y^2}{2x + \log x}$

(c) $\frac{y^2}{2x + 2y\log x}$ (d) इनमें से कोई नहीं

77. यदि $x^y.y^x = 1$, तो $\frac{dy}{dx} =$

(a) $\frac{y(y + x\log y)}{x(y\log x + x)}$ (b) $\frac{y(x + y\log x)}{x(y + x\log y)}$

(c) $-\frac{y(y + x\log y)}{x(x + y\log x)}$ (d) इनमें से कोई नहीं

78. यदि $y = (\tan x)^{(\tan x)^{\tan x}}$, तो $x = \frac{\pi}{4}$ पर $\frac{dy}{dx} =$ **[WB JEE 1990]**

(a) 0 (b) 1
(c) 2 (d) इनमें से कोई नहीं

79. यदि $y = (\sin x)^{\tan x}$, तब $\frac{dy}{dx}$ का मान होगा **[IIT 1994; RPET 1996]**

(a) $(\sin x)^{\tan x}.(1 + \sec^2 x.\log \sin x)$

(b) $\tan x.(\sin x)^{\tan x - 1}.\cos x$

(c) $(\sin x)^{\tan x}.\sec^2 x.\log \sin x$

(d) $\tan x.(\sin x)^{\tan x - 1}$

80. यदि $y = 2^{1/\log_x 4}$, तब x का मान होगा **[Roorkee 1998]**

(a) $\sqrt{y}$ (b) y
(c) y^2 (d) y^4

81. यदि $2^x + 2^y = 2^{x+y}$, तब $x = y = 1$ पर $\frac{dy}{dx}$ का मान होगा **[Karnataka CET 2000]**

(a) 0 (b) – 1
(c) 1 (d) 2

82. $y = x^{\ln x}$ का अवकलज है **[AMU 2000]**

(a) $x^{\ln x}\ln x$ (b) $x^{\ln x - 1}\ln x$

(c) $2x^{\ln x - 1}\ln x$ (d) $x^{\ln x - 2}$

83. यदि $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \ldots\ldots\infty}}}$, तब $\frac{dy}{dx} =$ **[RPET 2002]**

(a) $\frac{x}{2y - 1}$ (b) $\frac{2}{2y - 1}$

(c) $\frac{-1}{2y - 1}$ (d) $\frac{1}{2y - 1}$

84. यदि $x^m y^n = 2(x + y)^{m+n}$ हो, तो $\frac{dy}{dx}$ का मान है **[MP PET 2003]**

(a) $x + y$ (b) x / y
(c) y / x (d) $x - y$

85. यदि $x = e^{y + e^{y + \ldots\infty}}$, $x > 0$, तब $\frac{dy}{dx}$ है **[AIEEE 2004]**

(a) $\frac{1 + x}{x}$ (b) $\frac{1}{x}$

(c) $\frac{1 - x}{x}$ (d) $\frac{x}{1 + x}$

प्रतिस्थापन द्वारा अवकलन, उच्च कोटि के अवकलज

1. यदि $y = \sin(2\sin^{-1} x)$, तो $\frac{dy}{dx} =$ **[AI CBSE 1983]**

(a) $\frac{2-4x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ (b) $\frac{2+4x^2}{\sqrt{1-x^2}}$

(c) $\frac{2-4x^2}{\sqrt{1+x^2}}$ (d) $\frac{2+4x^2}{\sqrt{1+x^2}}$

2. यदि $y = \cos^{-1}\left(\frac{3\cos x - 4\sin x}{5}\right)$, तो $\frac{dy}{dx} =$

(a) 0 (b) 1

(c) -1 (d) $\frac{1}{2}$

3. $\frac{d}{dx}\cos^{-1}\frac{x-x^{-1}}{x+x^{-1}} =$ **[DSSE 1985; Rookee 1963]**

(a) $\frac{1}{1+x^2}$ (b) $\frac{-1}{1+x^2}$

(c) $\frac{2}{1+x^2}$ (d) $\frac{-2}{1+x^2}$

4. यदि $y = \sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2} + \sec^{-1}\frac{1+x^2}{1-x^2}$, तो $\frac{dy}{dx} =$ **[RPET 1996]**

(a) $\frac{4}{1-x^2}$ (b) $\frac{1}{1+x^2}$

(c) $\frac{4}{1+x^2}$ (d) $\frac{-4}{1+x^2}$

5. यदि $y = \tan^{-1}\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}} + \sin\left\{2\tan^{-1}\sqrt{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)}\right\}$, तो $\frac{dy}{dx} =$

(a) $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ (b) $\frac{1-2x}{\sqrt{1-x^2}}$

(c) $\frac{1-2x}{2\sqrt{1-x^2}}$ (d) $\frac{1}{1+x^2}$

6. यदि $y = \sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}$, जब $0 < x < 1$ तथा $0 < y < \frac{\pi}{2}$, तो $\frac{dy}{dx} =$

(a) $\frac{2}{1+x^2}$ (b) $\frac{2x}{1+x^2}$

(c) $\frac{-2}{1+x^2}$ (d) $\frac{-x}{1+x^2}$

7. $\frac{d}{dx}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} =$

(a) $\frac{a}{a^2+x^2}$ (b) $\frac{-a}{a^2+x^2}$

(c) $\frac{1}{a\sqrt{a^2-x^2}}$ (d) $\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$

8. $\frac{d}{dx}\cos^{-1}\sqrt{\frac{1+x^2}{2}} =$ **[AI CBSE 1988]**

(a) $\frac{-1}{2\sqrt{1-x^4}}$ (b) $\frac{1}{2\sqrt{1-x^4}}$

(c) $\frac{-x}{\sqrt{1-x^4}}$ (d) $\frac{x}{\sqrt{1-x^4}}$

9. $x = 0$ पर, $\frac{d}{dx}\tan^{-1}\left[\frac{3a^2x - x^3}{a(a^2-3x^2)}\right] =$

(a) $\frac{1}{a}$ (b) $\frac{3}{a}$

(c) $3a$ (d) 3

10. यदि $\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = a(x-y)$, तो $\frac{dy}{dx} =$ **[MNR 1983; ISM Dhanbad 1987; RPET 1991]**

(a) $\sqrt{\frac{1-x^2}{1-y^2}}$ (b) $\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}$

(c) $\sqrt{\frac{x^2-1}{1-y^2}}$ (d) $\sqrt{\frac{y^2-1}{1-x^2}}$

11. $\frac{d}{dx}\sin^{-1}(2ax\sqrt{1-a^2x^2}) =$

(a) $\frac{2a}{\sqrt{a^2-x^2}}$ (b) $\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}$

(c) $\frac{2a}{\sqrt{1-a^2x^2}}$ (d) $\frac{a}{\sqrt{1-a^2x^2}}$

12. $\frac{d}{dx}\left\{\cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)\right\} =$ **[AISSE 1984]**

(a) $\frac{1}{1+x^2}$ (b) $-\frac{1}{1+x^2}$

(c) $-\frac{2}{1+x^2}$ (d) $\frac{2}{1+x^2}$

13. यदि $y = \sin^{-1}\sqrt{1-x^2}$, तो $dy/dx =$ **[AISSE 1987]**

(a) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

(c) $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (d) $-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

14. $\cos^{-1}\left\{\sqrt{\frac{1+x}{2}}\right\}$ का x के सापेक्ष अवकल गुणांक है **[MP PET 1993]**

(a) $-\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$ (b) $\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$

(c) $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ (d) $\sin^{-1}\left\{\sqrt{\frac{1+x}{2}}\right\}$

15. यदि $y = \tan^{-1}\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$, तो $\frac{dy}{dx} =$

(a) $\cos^{-1}\frac{x}{a}$ (b) $-\cos^{-1}\frac{x}{a}$

(c) $\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{x}{a}$ (d) इनमें से कोई नहीं

16. यदि $y = \sin^{-1}\frac{\sqrt{(1+x)}+\sqrt{(1-x)}}{2}$, तो $\frac{dy}{dx} =$

(a) $\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$ (b) $-\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$

(c) $-\frac{1}{2\sqrt{(1-x^2)}}$ (d) इनमें से कोई नहीं

17. यदि $f(x)=x+2$, तब $x=4$ पर $f'(f(x))=$ **[DCE 2001]**

(a) 8 (b) 1

(c) 4 (d) 5

18. यदि $f(x)=\cot^{-1}\left(\frac{x^x-x^{-x}}{2}\right)$, तब $f'(1)=$ **[RPET 2000]**

(a) -1 (b) 1

(c) $\log 2$ (d) $-\log 2$

19. यदि $3f(x)-2f(1/x)=x$, तो $f'(2)=$ **[MP PET 2000]**

(a) 2/7 (b) 1/2

(c) 2 (d) 7/2

20. $\frac{d}{dx}\left[\sin^2\cot^{-1}\left\{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right\}\right]=$ **[MP PET 2002]**

(a) -1 (b) $\frac{1}{2}$

(c) $-\frac{1}{2}$ (d) 1

21. यदि $y=\tan^{-1}\left(\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\right)$, तो $\frac{dy}{dx}=$

(a) $\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$ (b) $1-\sqrt{1-x^2}$

(c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

22. $\cos^{-1}(\sqrt{x})$ का $\sqrt{(1-x)}$ के सापेक्ष अवकल गुणांक है **[MP PET 1997]**

(a) $\sqrt{x}$ (b) $-\sqrt{x}$

(c) $\frac{1}{\sqrt{x}}$ (d) $-\frac{1}{\sqrt{x}}$

23. यदि $y=\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$, तब $\frac{dy}{dx}=$ **[MP PET 1999]**

(a) $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (b) $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

(c) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (d) $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

24. यदि $y=\sin^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$, तब $\frac{dy}{dx}$ का मान होगा **[EAMCET 1991; RPET 1996]**

(a) $\frac{2}{1-x^2}$ (b) $\frac{1}{1+x^2}$

(c) $\pm\frac{2}{1+x^2}$ (d) $-\frac{2}{1+x^2}$

25. $\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right)$ का अवकल गुणांक है **[MP PET 2003]**

(a) $\sqrt{1-x^2}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(c) $\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$ (d) x

26. $\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)=$ **[MP PET 2004]**

(a) $\frac{1}{1+x^2}$ (b) $\frac{1}{2(1+x^2)}$

(c) $\frac{x^2}{2\sqrt{1+x^2}(\sqrt{1+x^2}-1)}$ (d) $\frac{2}{1+x^2}$

27. $\sqrt{x}$ के सापेक्ष $\sin^{-1}\frac{1-x}{1+x}$ का अवकलन गुणांक है **[Roorkee 1984]**

(a) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ (b) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}$

(c) 1 (d) इनमें से कोई नहीं

28. $\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}$ के सापेक्ष $\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$ का अवकलन गुणांक है **[Roorkee 1966; BIT Ranchi 1996; Karnataka CET 1994; MP PET 1999; UPSEAT 1999, 2001]**

(a) 1 (b) -1

(c) 0 (d) इनमें से कोई नहीं

29. $\cos^{-1}\sqrt{1-x^2}$ के सापेक्ष $\sin^{-1}x$ का अवकलन गुणांक है **[MNR 1983; AMU 2002]**

(a) 1 (b) $\frac{1}{1+x^2}$

(c) 2 (d) इनमें से कोई नहीं

30. $\tan^{-1}x$ के सापेक्ष $\frac{\tan^{-1}x}{1+\tan^{-1}x}$ का अवकलन गुणांक है

(a) $\frac{1}{1+\tan^{-1}x}$ (b) $\frac{-1}{1+\tan^{-1}x}$

(c) $\frac{1}{(1+\tan^{-1}x)^2}$ (d) $\frac{-1}{2(1+\tan^{-1}x)^2}$

31. $\tan^{-1}x$ के सापेक्ष $\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)$ का अवकलन गुणांक है **[Kurukshetra CEE 1998; RPET 1999]**

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $-\frac{1}{2}$

(c) 1 (d) इनमें से कोई नहीं

32. $\tan^{-1}\sqrt{x}$ का $\sqrt{x}$ के सापेक्ष अवकलन गुणांक है **[MP PET 1987]**

(a) $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ (b) $\frac{1}{2x\sqrt{1+x}}$

(c) $\frac{1}{2\sqrt{x(1+x)}}$ (d) $\frac{1}{1+x}$

33. x^2 के सापेक्ष x^3 का अवकलन गुणांक है **[RPET 1995]**

(a) $\frac{3x^2}{2}$ (b) $\frac{3x}{2}$

(c) $\frac{3x^3}{2}$ (d) $\frac{3}{2x}$

34. x^3 के सापेक्ष x^6 का अवकलन गुणांक है **[EAMCET 1988; UPSEAT 2000]**

(a) $5x^2$ (b) $3x^3$

(c) $5x^5$ (d) $2x^3$

35. $x=-\frac{1}{3}$ पर $\sec^{-1}\left\{\frac{1}{2x^2-1}\right\}$ का $\sqrt{1+3x}$ के सापेक्ष अवकलज है **[EAMCET 1991]**

(a) 0 (b) 1/2

(c) 1/3 (d) इनमें से कोई नहीं

36. $\cos^{-1}(x^2)$ के सापेक्ष $\tan^{-1}\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$ का अवकलन गुणांक है **[RPET 1996]**

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $-\frac{1}{2}$

(c) 1 (d) 0

37. यदि $u=\tan^{-1}\left\{\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right\}$ और $v=2\tan^{-1}x$, तब $\frac{du}{dv}$ का मान होगा **[RPET 1997]**

(a) 4 (b) 1

(c) 1/4 (d) –1/4

38. $\sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$ का $\cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$ के सापेक्ष अवकलन गुणांक है **[Karnataka CET 2000; Pb. CET 2004]**

(a) –1 (b) 1

(c) 2 (d) 4

39. $\sin^2 x$ का $\cos^2 x$ के सापेक्ष अवकलज है **[DCE 2002]**

(a) $\tan^2 x$ (b) $\tan x$

(c) $-\tan x$ (d) इनमें से कोई नहीं

40. फलन $\tan^{-1}\left(\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\right)$ का फलन $\sin^{-1}x$ के सापेक्ष अवकल गुणांक है **[Kurukshetra CEE 2002]**

(a) $\frac{1}{2}$ (b) 1

(c) 2 (d) $\frac{3}{2}$

41. $\cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$ का $\cot^{-1}\left(\frac{1-3x^2}{3x-x^2}\right)$ के सापेक्ष अवकलज है **[Karnataka CET 2003]**

(a) 1 (b) $\frac{3}{2}$

(c) $\frac{2}{3}$ (d) $\frac{1}{2}$

42. e^{x^3} का $\log x$ के सापेक्ष अवकलन गुणांक है **[Karnataka CET 2002]**

(a) e^{x^3} (b) $3x^2e^{x^3}$

(c) $3x^3e^{x^3}$ (d) $3x^2e^{x^3}+3x^2$

43. $t=\frac{\pi}{4}$ पर $a\sin^3 t$ का $a\cos^3 t$ के सापेक्ष द्वितीय अवकलज है **[Kerala (Engg.) 2002]**

(a) $\frac{4\sqrt{2}}{3a}$ (b) 2

(c) $\frac{1}{12a}$ (d) इनमें से कोई नहीं

44. $f(\sin x)$ का x के सापेक्ष अवकल गुणांक, जहाँ $f(x)=\log x$ है, है **[Karnataka CET 2004]**

(a) $\tan x$ (b) $\cot x$

(c) $f(\cos x)$ (d) $1/x$

45. यदि $y=\sin x\sin 3x$, तो $y_n=$

(a) $\frac{1}{2}\left[\cos\left(2x+n\frac{\pi}{2}\right)-\cos\left(4x+n\frac{\pi}{2}\right)\right]$

(b) $\frac{1}{2}\left[2^n\cos\left(2x+n\frac{\pi}{2}\right)-4^n\cos\left(4x+n\frac{\pi}{2}\right)\right]$

(c) $\frac{1}{2}\left[4^n\cos\left(4x+n\frac{\pi}{2}\right)-2^n\cos\left(2x+n\frac{\pi}{2}\right)\right]$

(d) इनमें से कोई नहीं

46. x^{n+1} का n वाँ अवकलन गुणांक है

(a) $(n+1)!x$ (b) $(n+1)!$

(c) $n!x$ (d) $n!$

47. यदि $y=a_0+a_1x+a_2x^2+.....+a_nx^n$, तब $y_n=$

(a) $n!$ (b) $n!a_nx$

(c) $n!a_n$ (d) इनमें से कोई नहीं

48. यदि $y=A\cos nx+B\sin nx$, तो $\frac{d^2y}{dx^2}=$ **[Karnataka CET 1996]**

(a) n^2y (b) $-y$

(c) $-n^2y$ (d) इनमें से कोई नहीं

49. $\frac{d^n}{dx^n}(e^{2x}+e^{-2x})=$

(a) $e^{2x}+(-1)^ne^{-2x}$ (b) $2^n(e^{2x}-e^{-2x})$

(c) $2^n[e^{2x}+(-1)^ne^{-2x}]$ (d) इनमें से कोई नहीं

50. यदि $x=\log p$ तथा $y=\frac{1}{p}$, तो

(a) $\frac{d^2y}{dx^2}-2p=0$ (b) $\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$

(c) $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}=0$ (d) $\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}=0$

51. यदि $f(x)=a\sin(\log x)$, तो $x^2f''(x)+xf'(x)=$

(a) $f(x)$ (b) $-f(x)$

(c) 0 (d) 1

52. यदि $y=e^{\tan^{-1}x}$, तो $(1+x^2)\frac{d^2y}{dx^2}=$

(a) $(1-2x)\frac{dy}{dx}$ (b) $-2x\frac{dy}{dx}$

(c) $-x\frac{dy}{dx}$ (d) 0

53. यदि $y = x^2 e^{mx}$, जहाँ m अचर है, तो $\frac{d^3y}{dx^3} =$ **[MP PET 1987]**

(a) $me^{mx}(m^2x^2 + 6mx + 6)$ (b) $2m^3 xe^{mx}$

(c) $me^{mx}(m^2x^2 + 2mx + 2)$ (d) इनमें से कोई नहीं

54. यदि $y = ae^{mx} + be^{-mx}$, तो $\frac{d^2y}{dx^2} - m^2y =$ **[MP PET 1987]**

(a) $m^2(ae^{mx} - be^{-mx})$ (b) 1

(c) 0 (d) इनमें से कोई नहीं

55. यदि $y = (x^2 - 1)^m$, तो y का x के सापेक्ष $(2m)$ वाँ अवकल गुणांक है **[MP PET 1987]**

(a) m (b) $(2m)!$

(c) $2m$ (d) $m!$

56. यदि $y = ax^{n+1} + bx^{-n}$, तब $x^2\frac{d^2y}{dx^2} =$ **[Karnataka CET 1993]**

(a) $n(n-1)y$ (b) $n(n+1)y$

(c) ny (d) n^2y

57. यदि $y = a + bx^2; a$ व b स्वेच्छ अचर हैं, तब **[EAMCET 1994]**

(a) $\frac{d^2y}{dx^2} = 2xy$ (b) $x\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx}$

(c) $x\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + y = 0$ (d) $x\frac{d^2y}{dx^2} = 2xy$

58. $\frac{d^{20}}{dx^{20}}(2\cos x \cos 3x) =$ **[EAMCET 1994]**

(a) $2^{20}(\cos 2x - 2^{20}\cos 4x)$ (b) $2^{20}(\cos 2x + 2^{20}\cos 4x)$

(c) $2^{20}(\sin 2x + 2^{20}\sin 4x)$ (d) $2^{20}(\sin 2x - 2^{20}\sin 4x)$

59. यदि $y = \sin^2\alpha + \cos^2(\alpha+\beta) + 2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha+\beta)$, तो $\frac{d^3y}{d\alpha^3}$ का मान है (β को नियत मानकर)

(a) $\frac{\sin^3(\alpha+\beta)}{\cos\alpha}$ (b) $\cos(\alpha+3\beta)$

(c) 0 (d) इनमें से कोई नहीं

60. यदि $y = x\log\left(\frac{x}{a+bx}\right)$, तो $x^3\frac{d^2y}{dx^2} =$

[WB JEE 1991; Roorkee 1976]

(a) $x\frac{dy}{dx} - y$ (b) $\left(x\frac{dy}{dx} - y\right)^2$

(c) $y\frac{dy}{dx} - x$ (d) $\left(y\frac{dy}{dx} - x\right)^2$

61. यदि $e^y + xy = e$, तो $x = 0$ पर $\frac{d^2y}{dx^2}$ का मान है **[Kurukshetra CEE 2002]**

(a) $\frac{1}{e}$ (b) $\frac{1}{e^2}$

(c) $\frac{1}{e^3}$ (d) इनमें से कोई नहीं

62. यदि f एक बहुपद है, तब $f(e^x)$ का द्वितीय अवकलन गुणांक है **[Karnataka CET 1999]**

(a) $f'(e^x)$ (b) $f''(e^x)e^x + f'(e^x)$

(c) $f''(e^x)e^{2x} + f''(e^x)$ (d) $f''(e^x)e^{2x} + f'(e^x)e^x$

63. यदि $y = \sin x + e^x$, तब $\frac{d^2x}{dy^2} =$ **[Karnataka CET 1999; UPSEAT 2001; Kurukshetra CEE 2002]**

(a) $(-\sin x + e^x)^{-1}$ (b) $\frac{\sin x - e^x}{(\cos x + e^x)^2}$

(c) $\frac{\sin x - e^x}{(\cos x + e^x)^3}$ (d) $\frac{\sin x + e^x}{(\cos x + e^x)^3}$

64. यदि $y = x^3\log\log_e(1+x)$, तब $y''(0) =$ **[AMU 1999]**

(a) 0 (b) -1

(c) $6\log_e 2$ (d) 6

65. $\frac{d^2x}{dy^2} =$ **[AMU 2001]**

(a) $\frac{1}{(dy/dx)^2}$ (b) $\frac{\left(d^2y/dx^2\right)}{(dy/dx)^2}$

(c) $\frac{d^2y}{dx^2}$ (d) $\frac{\left(-d^2y/dx^2\right)}{(dy/dx)^2}$

66. एक वक्र समीकरणों $x = a\cos\theta + \frac{1}{2}b\cos 2\theta$ व $y = a\sin\theta + \frac{1}{2}b\sin 2\theta$ द्वारा दिया जाता है, तो बिन्दु जिसके लिए $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ है, निम्न में से किसके द्वारा प्राप्त होता है **[Kurukshetra CEE 2002]**

(a) $\sin\theta = \frac{2a^2 + b^2}{5ab}$ (b) $\tan\theta = \frac{3a^2 + 2b^2}{4ab}$

(c) $\cos\theta = \frac{-\left(a^2 + 2b^2\right)}{3ab}$ (d) $\cos\theta = \frac{\left(a^2 - 2b^2\right)}{3ab}$

67. यदि $y = \left(x + \sqrt{1+x^2}\right)^n$, तब $(1+x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} =$ **[AIEEE 2002]**

(a) n^2y (b) $-n^2y$

(c) $-y$ (d) $2x^2y$

68. दो फलन $f(x)$ और $g(x)$, अंतराल $[0,2]$ में इस प्रकार अवकलनीय हैं, कि $f''(x) - g''(x) = 0, f'(1) = 2, g'(1) = 4$, $f(2) = 3$, $g(2) = 9$, तब $x = 3/2$ पर $f(x) - g(x)$ का मान है **[AIEEE 2002]**

(a) 0 (b) 2

(c) 10 (d) -5

69. यदि $y = ae^x + be^{-x} + c$, जहाँ a, b, c अचर हैं, तब $y''' =$ **[EAMCET 2002]**

(a) y (b) y'

(c) 0 (d) y''

70. यदि $y = a\cos(\log x) + b\sin(\log x)$, जहाँ a, b अचर है, तब $x^2y'' + xy' =$ **[EAMCET 2002]**

(a) y (b) $-y$

(c) $2y$ (d) $-2y$

71. यदि $u = x^2 + y^2$ तथा $x = s + 3t$, $y = 2s - t$, तब $\frac{d^2u}{ds^2} =$ **[Orissa JEE 2002]**

(a) 12 (b) 32

(c) 36 (d) 10

72. $\frac{d^n}{dx^n}(\log x) =$ **[RPET 2002]**

(a) $\frac{(n-1)!}{x^n}$ (b) $\frac{n!}{x^n}$

(c) $\frac{(n-2)!}{x^n}$ (d) $(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}$

73. xe^x का nवाँ अवकलज शून्य होगा, जबकि **[AMU 1999]**

(a) $x = 0$ (b) $x = -1$

(c) $x = -n$ (d) $x = n$

74. $\frac{d^2}{dx^2}(2\cos x\cos 3x) =$ **[RPET 2003]**

(a) $2^2(\cos 2x + 2^2\cos 4x)$ (b) $2^2(\cos 2x - 2^2\cos 4x)$

(c) $2^2(-\cos 2x + 2^2\cos 4x)$ (d) $-2^2(\cos 2x + 2^2\cos 4x)$

75. यदि $y = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - .....$, तब $\frac{d^2y}{dx^2} =$ **[Karnataka CET 2003]**

(a) x (b) $-x$

(c) $-y$ (d) y

76. यदि $f(x)$ एक अवकलनीय फलन है और $f''(0) = a$, तब $\lim_{x\to 0}\frac{2f(x) - 3f(2x) + f(4x)}{x^2} =$ **[Orissa JEE 2004]**

(a) $3a$ (b) $2a$

(c) $5a$ (d) $4a$

77. यदि $x = A\cos 4t + B\sin 4t$,तब $\frac{d^2x}{dt^2} =$ **[Karnataka CET 2004]**

(a) $-16x$ (b) $16x$

(c) x (d) $-x$

78. यदि $f(x) = \tan^{-1}\left\{\frac{\log\left(\frac{e}{x^2}\right)}{\log(ex^2)}\right\} + \tan^{-1}\left(\frac{3 + 2\log x}{1 - 6\log x}\right)$, तो $\frac{d^ny}{dx^n}$ का मान है $(n \geq 1)$

(a) $\tan^{-1}\{(\log x)^n\}$ (b) 0

(c) $\frac{1}{2}$ (d) इनमें से कोई नहीं

79. माना $f_n(x)$, $g_n(x)$, $h_n(x), n = 1, 2, 3$ के बहुपद फलन इस प्रकार हैं कि $f_n(a) = g_n(a) = h_n(a), n = 1, 2, 3$ तथा

$$F(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) \\ g_1(x) & g_2(x) & g_3(x) \\ h_1(x) & h_2(x) & h_3(x) \end{vmatrix}, \text{ तो } F'(a) =$$

(a) 0 (b) $f_1(a)g_2(a)h_3(a)$

(c) 1 (d) इनमें से कोई नहीं

80. माना $f(x) = \begin{vmatrix} x^3 & \sin x & \cos x \\ 6 & -1 & 0 \\ p & p^2 & p^3 \end{vmatrix}$, जहाँ p एक अचर है, तब $x = 0$ पर $\frac{d^3}{dx^3}\{f(x)\}$ का मान होगा **[IIT 1997 Cancelled]**

(a) p (b) $p + p^2$

(c) $p + p^3$ (d) p से स्वतंत्र

81. यदि $f(x) = \begin{vmatrix} x^3 & x^2 & 3x^2 \\ 1 & -6 & 4 \\ p & p^2 & p^3 \end{vmatrix}$, जहाँ p एक अचर है, तब $\frac{d^3f(x)}{dx^3}$ है **[DCE 2000]**

(a) x^2 के समानुपाती (b) x के समानुपाती

(c) x^3 के समानुपाती (d) एक अचर

82. यदि $y = \sin px$ तथा y_n, y का nवाँ अवकलज हो, तो $\begin{vmatrix} y & y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 & y_5 \\ y_6 & y_7 & y_8 \end{vmatrix} =$ **[AMU 2002]**

(a) 1 (b) 0

(c) -1 (d) इनमें से कोई नहीं

83. यदि $y^2 = ax^2 + bx + c$, तो $y^3\frac{d^2y}{dx^2} =$ **[DCE 1999]**

(a) एक नियतांक (b) केवल x का फलन

(c) केवल y का फलन (d) x तथा y का फलन

84. यदि $y = a^x.b^{2x-1}$, तो $\frac{d^2y}{dx^2}$ है **[Kerala (Engg.) 2005]**

(a) $y^2.\log ab^2$ (b) $y.\log ab^2$

(c) y^2 (d) $y.(\log a^2b)^2$

(e) $y.(\log ab^2)^2$

आंशिक अवकलन

1. यदि $z = \frac{(x^4 + y^4)^{1/3}}{(x^3 + y^3)^{1/4}}$, तो $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} =$

(a) $\frac{1}{12}z$ (b) $\frac{1}{4}z$

(c) $\frac{1}{3}z$ (d) $\frac{7}{12}z$

2. यदि $z = \tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)$, तो $z_x : z_y =$

(a) $y : x$ (b) $x : y$

(c) $-y : x$ (d) $-x : y$

3. यदि $u = \frac{x + y}{x - y}$, तो $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} =$ **[EAMCET 1991]**

(a) $\frac{1}{x - y}$ (b) $\frac{2}{x - y}$

(c) $\frac{1}{(x-y)^2}$ (d) $\frac{2}{(x-y)^2}$

4. यदि $u = \log(x^2+y^2)$, तो $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} =$ **[EAMCET 1994]**

(a) $\frac{1}{x^2+y^2}$ (b) 0

(c) $\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ (d) $\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$

5. यदि $u = \sin^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$, तो $\frac{\partial u}{\partial x} =$

[Tamilnadu (Engg.) 1992]

(a) $-\frac{y}{x^2+y^2}$ (b) $\frac{x}{\sqrt{1-y^2}}$

(c) $\frac{-y}{\sqrt{x^2-y^2}}$ (d) $\frac{-y}{x\sqrt{x^2-y^2}}$

6. यदि $u = \tan^{-1}\frac{y}{x}$, तो ऑयलर प्रमेय द्वारा $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y} =$

[Tamilnadu (Engg.) 1993]

(a) $\tan u$ (b) $\sin u$

(c) 0 (d) $\cos 2u$

7. यदि $u = \tan^{-1}\left(\frac{x^3+y^3}{x-y}\right)$, तो $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y} =$

[EAMCET 1999]

(a) $\sin 2u$ (b) $\cos 2u$

(c) $\tan 2u$ (d) $\sec 2u$

8. यदि $F(u) = f(x,y,z)$; x,y,z में n घात का समघातीय फलन हो, तब $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z} =$

(a) nu (b) $nF(u)$

(c) $\frac{nF(u)}{F'(u)}$ (d) इनमें से कोई नहीं

9. यदि $u = \log(x^3+y^3+z^3-3xyz)$,तो

$\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)(x+y+z) =$ **[EAMCET 1996]**

(a) 0 (b) 1

(c) 2 (d) 3

10. यदि $z = \sin^{-1}\left(\frac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)$, तो $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}$ का मान होगा

[EAMCET 1998; Orissa JEE 2000]

(a) $\frac{1}{2}\sin z$ (b) $\frac{1}{2}\tan z$

(c) 0 (d) इनमें से कोई नहीं

11. यदि $u = \log_e(x^2+y^2)+\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$, तो $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} =$

[EAMCET 2000]

(a) 0 (b) $2u$

(c) $1/u$ (d) u

12. यदि $x^x y^y z^z = c$, तो $\frac{\partial z}{\partial x} =$ **[EAMCET 1999]**

(a) $\frac{1+\log x}{1+\log z}$ (b) $-\frac{1+\log x}{1+\log z}$

(c) $-\frac{1+\log y}{1+\log z}$ (d) इनमें से कोई नहीं

13. यदि $u = xy^2\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$, तो $xu_x+yu_y =$ **[EAMCET 2001]**

(a) $2u$ (b) u

(c) $3u$ (d) $u/3$

14. यदि $z^2 = \frac{x^{1/2}+y^{1/2}}{x^{1/3}+y^{1/3}}$, तो $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y} =$ **[EAMCET 1999]**

(a) $\frac{z}{6}$ (b) $\frac{z}{3}$

(c) $\frac{z}{2}$ (d) $\frac{z}{12}$

15. यदि $u = \tan^{-1}(x+y)$, तो $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y} =$ **[EAMCET 1996]**

(a) $\sin 2u$ (b) $\frac{1}{2}\sin 2u$

(c) $2\tan u$ (d) $\sec^2 u$

16. यदि $u = (x^2+y^2+z^2)^{3/2}$, तो $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 =$

[EAMCET 1996]

(a) $9u$ (b) $9u^{4/3}$

(c) $9u^2$ (d) $u^{4/3}$

17. यदि $u = x^2\tan^{-1}\frac{y}{x}-y^2\tan^{-1}\frac{x}{y}$, तो $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} =$

[Tamilnadu (Engg.) 2002]

(a) $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$ (b) $\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

(c) $-\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$ (d) $-\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$

18. यदि $u^2 = (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2$, तो $\sum\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} =$

[Tamilnadu (Engg.) 2002]

(a) $\frac{2}{u}$ (b) $\frac{3}{u}$

(c) 0 (d) $\frac{1}{u}$

19. यदि $z = \sec(y-ax)+\tan(y+ax)$, तो $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-a^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} =$

[EAMCET 2002]

(a) z (b) $2z$

(c) 0 (d) $-z$

20. यदि $z = \frac{y}{x}\left[\sin\frac{x}{y}+\cos\left(1+\frac{y}{x}\right)\right]$, तो $x\frac{\partial z}{\partial x} =$

[EAMCET 2002]

(a) $y\frac{\partial z}{\partial y}$ (b) $-y\frac{\partial z}{\partial y}$

(c) $2y\frac{\partial z}{\partial y}$ (d) $2y\frac{\partial z}{\partial x}$

21. यदि $u = e^{-x^2-y^2}$, तो [EAMCET 2001]

(a) $xu_x = yy_y$ (b) $yu_x = xu_y$

(c) $yu_x + xu_y = 0$ (d) $x^2u_y + y^2u_x = 0$

यांत्रिकी में अनुप्रयोग व परिवर्तन की दर

1. रेखा में गतिमान एक कण की गति का समीकरण $v^2 = 2 - 3x$ है। यदि रेखा के एक निश्चित बिन्दु से x मापा गया हो, तो कण का त्वरण होगा [MP PET 1992]

(a) एकसमान (b) शून्य

(c) असमान (d) अनिर्धारित

2. स्वतन्त्रतापूर्वक गिरता हुआ एक पत्थर t सेकण्ड में s दूरी तय करता है, जहाँ $s = \frac{1}{2} g t^2$ । पत्थर का त्वरण है

(a) एक समान (b) शून्य

(c) असमान (d) अनिर्धारित

3. एक गोले की त्रिज्या 20 सेमी मापी गयी है तथा सम्भव त्रुटि 0.02 सेमी है। गोले के पृष्ठ में परिणामी त्रुटि होगी

(a) 10.5 वर्ग सेमी (b) 5.025 वर्ग सेमी

(c) 10.05 वर्ग सेमी (d) इनमें से कोई नहीं

4. किसी कण का विस्थापन t समय में $s = 2t^2 - 3t + 1$ से निरूपित होता है। कण का त्वरण है

(a) 1 (b) 3

(c) 4 (d) 5

5. एक कण की गति का समीकरण $s = 2t^3 - 9t^2 + 12t + 1$ है, जहाँ s तथा t की इकाईयाँ क्रमशः सेमी तथा सेकण्ड में हैं। कितने समय बाद कण एक क्षण के लिए रूक जायेगा

(a) 1 सेकण्ड (b) 2 सेकण्ड

(c) 1, 2 सेकण्ड (d) इनमें से कोई नहीं

6. यदि एक गोलाकार गुब्बारे का चर व्यास $3x + \frac{9}{2}$ हो, तो x के सापेक्ष उसके आयतन में परिवर्तन की दर होगी

(a) $27\pi(2x+3)^2$ (b) $\frac{27\pi}{16}(2x+3)^2$

(c) $\frac{27\pi}{8}(2x+3)^2$ (d) इनमें से कोई नहीं

7. यदि एक कण का वेग v, समय t में $v = 6t - \frac{t^2}{6}$ से निरूपित होता है, तो 3 सेकण्ड में तय की हुई दूरी है, (यदि $t = 0$ पर $s = 0$)

(a) $\frac{39}{2}$ (b) $\frac{57}{2}$

(c) $\frac{51}{2}$ (d) $\frac{33}{2}$

8. एक कार की गति का समीकरण $s = t^2 - 2t$ है, जहाँ t की इकाई घन्टा तथा s किलोमीटर में है। 15 किमी चलने पर कार का वेग होगा

(a) 2 किमी/घण्टा (b) 4 किमी/घण्टा

(c) 2 किमी/घण्टा (d) 8 किमी/घण्टा

9. ऊर्ध्वाधरतः ऊपर की ओर गतिमान एक पत्थर की गति का समीकरण $s = 490t - 4.9t^2$ है। पत्थर द्वारा प्राप्त महत्तम ऊँचाई होगी

(a) 12250 (b) 1225

(c) 36750 (d) इनमें से कोई नहीं

10. एक घन की कोर 5 सेमी प्रति सेकण्ड की दर से बढ़ रही है। जब घन की कोर 12 सेमी लंबी है, तब किस दर से घन का आयतन बढ़ रहा है

(a) 432 सेमी^{3}/सेकण्ड (b) 2160 सेमी^{3}/सेकण्ड

(c) 80 सेमी^{3}/सेकण्ड (d) इनमें से कोई नहीं

11. यदि एक रेखा में गति का नियम $s = \frac{1}{2} v t$ से निरूपित होता है, तब त्वरण है [MP PET 1991]

(a) अचर (b) t के समानुपाती

(c) v के समानुपाती (d) s के समानुपाती

12. यदि एक कण सरल रेखा में समय $t = 0$ से $t = 3$ तक $s = 15t - 2t^2$ के नियमानुसार गति करता है, तो उसकी औसत गति क्या होगी [MP PET 1992]

(a) 3 (b) 9

(c) 15 (d) 27

13. एक कण के द्वारा t सेकण्ड में तय की गयी दूरी s (मीटर में), सम्बन्ध $s = ae^t + \frac{b}{e^t}$ द्वारा दी गयी है। समय t पर कण का त्वरण है

(a) t के समानुपाती (b) s के समानुपाती

(c) s (d) अचर

14. ऊर्ध्वाधरतः ऊपर की ओर फेंके गये एक पत्थर की गति का समीकरण $s = ut - 6.3t^2$ है, जहाँ s तथा t की इकाईयाँ क्रमशः सेमी तथा सेकण्ड हैं। यदि पत्थर 3 सेकण्ड में महत्तम ऊँचाई पर पहुँच जाता है, तो u =

(a) 18.9 सेमी/सेकण्ड (b) 12.6 सेमी/सेकण्ड

(c) 37.8 सेमी/सेकण्ड (d) इनमें से कोई नहीं

15. एक कण सरल रेखा में गतिशील है तथा इसकी गति निम्न प्रकार प्रदर्शित है, $v^2 = a + bx$, जबकि $a, b \neq 0$ निश्चित संख्याएँ हैं। कण का त्वरण निम्न है [MP PET 1989]

(a) शून्य (b) एक समान

(c) एकसमान नहीं (d) अनिश्चित

16. एक टंकी में पानी का आयतन V तथा गहराई x सम्बन्ध $V = 5x - \frac{x^2}{6}$ द्वारा सम्बन्धित है तथा पानी का आयतन 5 सेमी^{3}/सेकण्ड की दर से बढ़ रहा है, जबकि $x = 2$ सेमी है। इस समय पानी की गहराई किस दर से बढ़ रही है

(a) $\frac{5}{18}$ सेमी/सेकण्ड (b) $\frac{1}{4}$ सेमी/सेकण्ड

(c) $\frac{5}{16}$ सेमी/सेकण्ड (d) इनमें से कोई नहीं

17. एक ग्रह की सतह से ऊर्ध्वाधरतः ऊपर की ओर फेंके गये एक पत्थर की गति का समीकरण $s = 10\ t - 3t^2$ है जहाँ s तथा t की इकाईयाँ क्रमशः सेमी तथा सेकण्ड हैं। तब कितने समय बाद पत्थर ग्रह की सतह पर वापस आ जायेगा

(a) $\frac{10}{3}$ सेकण्ड (b) $\frac{5}{3}$ सेकण्ड

(c) $\frac{20}{3}$ सेकण्ड (d) $\frac{5}{6}$ सेकण्ड

18. एक पिण्ड सूत्र $v = 1 + t^2$ के अनुसार गति करता है, जहाँ समय t पर वेग v है। 3 सेकण्ड बाद त्वरण होगा (v सेमी /सेकण्ड में) **[MP PET 1988]**

(a) 24 सेमी/सेकण्ड (b) 12 सेमी/सेकण्ड

(c) 6 सेमी/सेकण्ड (d) इनमें से कोई नहीं

19. धातु की एक वर्गाकार चादर की भुजा की लम्बाई 4 सेमी/सेकण्ड की दर से बढ़ रही है। जब भुजा की लम्बाई 2 सेमी है, तब उसका क्षेत्रफल किस दर से बढ़ रहा है

(a) 16 सेमी/सेकण्ड (b) 8 सेमी/सेकण्ड

(c) 32 सेमी/सेकण्ड (d) इनमें से कोई नहीं

20. ऊर्ध्वाधरतः ऊपर की ओर फेंके गये दो पत्थरों के गति के समीकरण क्रमशः $s = 19.6\,t - 4.9\,t^2$ तथा $s = 9.8\,t - 4.9\,t^2$ हैं और पहले पत्थर के द्वारा प्राप्त महत्तम ऊँचाई h है। जब पहला पत्थर अपनी महत्तम ऊँचाई पर है उस समय दूसरे पत्थर की ऊँचाई होगी

(a) $h/3$ (b) $2h$

(c) h (d) 0

21. ऊर्ध्वाधरतः ऊपर की ओर फेंके गये एक पत्थर का गति का समीकरण $10s = 10ut - 49\,t^2$ हैं, जहाँ s मीटर में तथा t सेकण्ड में हैं तथा पत्थर 5 सेकण्डों में अपनी महत्तम ऊँचाई पर पहुँच जाता है। u का मान है

(a) 4.9 मी/सेकण्ड (b) 49 मी/सेकण्ड

(c) 98 मी/सेकण्ड (d) इनमें से कोई नहीं

22. यदि $2t = v^2$, तो $\frac{dv}{dt}$ का मान क्या होगा **[MP PET 1992]**

(a) 0 (b) 1/4

(c) 1/2 (d) $1/v$

23. यदि $t = \frac{v^2}{2}$,तब $\left(-\frac{df}{dt}\right)$ का मान है, (जहाँ f त्वरण है) **[MP PET 1991]**

(a) f^2 (b) f^3

(c) $-f^3$ (d) $-f^2$

24. सरल रेखा में गतिमान एक कण की गति का समीकरण $s = 2\,t^3 - 9t^2 + 12t$ है, जहाँ s तथा t की इकाईयाँ क्रमशः सेमी तथा सेकण्ड हैं। कितने समय बाद कण का त्वरण शून्य होगा

(a) $\frac{3}{2}$ सेकण्ड (b) $\frac{2}{3}$ सेकण्ड

(c) $\frac{1}{2}$ सेकण्ड (d) कभी नहीं

25. एक कण सरल रेखा में सूत्र $s = t^2 + 8t + 12$ के अनुसार गतिमान है। यदि s मीटर में तथा t सेकण्ड में मापा जाये, तो कण का तीसरे सेकण्ड में औसत वेग है

(a) 14 मी/सेकण्ड (b) 13मी/सेकण्ड

(c) 15 मी/सेकण्ड (d) इनमें से कोई नहीं

26. 10 सेमी लम्बी एक छड़ इस प्रकार गति करती है कि इसके किनारे हमेशा दो परस्पर लम्बवत् रेखाओं OX तथा OY पर रहते हैं। यदि A सिरा 2 सेमी/सेकण्ड की दर से गति कर रहा हो, तो जब A की O से दूरी 8सेमी है, तब सिरा B किस दर से गति कर रहा है

(a) $\frac{8}{3}$ सेमी/सेकण्ड (b) $\frac{4}{3}$ सेमी/सेकण्ड

(c) $\frac{2}{9}$ सेमी/सेकण्ड (d) इनमें से कोई नहीं

27. यदि एक वृत्त की त्रिज्या 3 सेमी से 3.2 सेमी हो जाये, तो वृत्त के क्षेत्रफल में वृद्धि होगी

(a) 1.2π सेमी (b) 12π सेमी

(c) 6π सेमी (d) इनमें से कोई नहीं

28. यदि $y = x^3 + 5$ तथा x , 3 से 2.99 हो जाये तो y में लगभग परिवर्तन होगा

(a) 2.7 (b) – 0. 27

(c) 27 (d) इनमें से कोई नहीं

29. एक कण एक सरल रेखा पर गतिमान है जबकि इसकी स्थिति s (मीटर में) समय t (सेकण्ड में) का निम्न प्रकार प्रदर्शित फलन है $s = at^2 + bt + 6, t \geq 0$. यदि यह ज्ञात हो कि 4 सेकण्ड में कण अपनी प्रारम्भिक स्थिति $(t = 0)$ से 16 मीटर दूर जाकर विरामावस्था में आता है तो इसकी गति में मंदन है **[MP PET 1993]**

(a) –1मीटर/सेकण्ड (b) $\frac{5}{4}$ मीटर/सेकण्ड

(c) $-\frac{1}{2}$ मीटर/सेकण्ड (d) $-\frac{5}{4}$ मीटर/सेकण्ड

30. एक कण सरल रेखा में $s = 45\,t + 11t^2 - t^3$ के अनुसार गति कर रहा है। तब वह समय, जब कण विरामावस्था में आ जायेगा, है

(a) – 9 सेकण्ड (b) $\frac{5}{3}$ सेकण्ड

(c) 9 सेकण्ड (d) $-\frac{5}{3}$ सेकण्ड

31. एक गेंद ऊर्ध्वाधरतः ऊपर फेंकी गई है। समीकरण $s = ut - 4.9t^2$ के अनुसार गति करते हुए 6 सेकण्ड पश्चात् पुनः धरातल पर आ जाती है, जहाँ s मीटर में और t सेकण्ड में है, तो $t = 0$ पर गेंद का वेग होगा

(a) 0 मी/सेकण्ड (b) 1 मी/सेकण्ड

(c) 29.4 मी/सेकण्ड (d) इनमें से कोई नहीं

32. एक वृत्त की त्रिज्या में 3 सेमी/सेकण्ड की दर से एक समान वृद्धि हो रही है। जब त्रिज्या 10 सेमी है, तो क्षेत्रफल में वृद्धि की दर होगी

(a) π सेमी/सेकण्ड (b) 2π सेमी/सेकण्ड

(c) 10π सेमी/सेकण्ड (d) इनमें से कोई नहीं

33. ऊर्ध्वाधर दिशा में फेंके गये एक गोले की गति का समीकरण $s = 13.8t - 4.9t^2$ है, जहाँ s मीटर में तथा t सेकण्ड में हो, तो $t = 1$ पर इसका वेग है

(a) 3 मी/सेकण्ड (b) 5 मी/सेकण्ड

(c) 4 मी/सेकण्ड (d) इनमें से कोई नहीं

34. एक कण सरल रेखा में गतिमान है। इस कण का समय t पर विस्थापन $s = -4t^2 + 2t$ द्वारा प्रदर्शित होता है, तो $t = \frac{1}{2}$ सेकण्ड पर कण का वेग तथा त्वरण है **[AISSE 1981]**

(a) – 2, – 8 (b) 2, 6

(c) – 2, 8 (d) 2, 8

35. यदि एक कण द्वारा t समय में चलित दूरी $s = 180\,t - 16\,t^2$ है, तो वेग में परिवर्तन की दर है **[MP PET 1995]**

(a) – 16 t इकाई (b) 48 इकाई

(c) – 32 इकाई (d) इनमें से कोई नहीं

36. एक बिजली का खम्भा 6 मीटर ऊँचा है। एक व्यक्ति जिसकी ऊँचाई 2 मीटर है, 5 मी/घण्टा की एक समान रफ्तार से खम्भे से दूर जा रहा है तब उसकी छाया की लम्बाई किस दर से बढ़ रही है **[SCRA 1996]**

(a) 5 मी/घण्टा (b) $\frac{5}{2}$ मी/घण्टा

(c) $\frac{5}{3}$ मी/घण्टा (d) $\frac{5}{4}$ मी/घण्टा

37. 5 मीटर लम्बी एक सीढ़ी ऊर्ध्वाधर दीवार के सहारे खड़ी हुई है। इस सीढ़ी के निचले सिरों को क्षैतिज सतह के अनुदिश 1.5 मीटर/सेकण्ड के वेग से दीवार से दूर खींचा जाता है, तो सीढी के निचले सिरे को दीवार से 4मीटर दूर स्थित होने पर सीढ़ी के उच्चतम बिन्दु की लम्बाई के घटने की दर होगी **[Kurukshetra CEE 1996]**

(a) 2 मीटर/सेकण्ड (b) 3 मीटर/सेकण्ड

(c) 2.5 मीटर/सेकण्ड (d) 1.5 मीटर/सेकण्ड

38. यदि एक शान्त झील में एक पत्थर गिराने से कोई तरंग वृत्त में 3.5 सेमी /सेकण्ड की गति से चलती है, तब घिरे हुए वृत्ताकार क्षेत्र की वृद्धि दर, जबकि वृत्ताकार तरंग की त्रिज्या 10 सेमी है, है $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$ **[MP PET 1998]**

(a) 220 वर्ग सेमी/सेकण्ड (b) 110 वर्ग सेमी/सेकण्ड

(c) 35 वर्ग सेमी/सेकण्ड (d) 350 वर्ग सेमी/सेकण्ड

39. एक सीढ़ी एक दीवार के साथ 30^o के कोण से रखी है एक आदमी सीढ़ी पर 3 फीट/सेकण्ड की गति से चढ़ रहा है, तो उसके दीवार के पास पहुँचने की गति है

(a) 3 फीट /सेकण्ड (b) $\frac{3}{2}$ फीट /सेकण्ड

(c) $\frac{3}{4}$ फीट /सेकण्ड (d) $\frac{3}{\sqrt{2}}$ फीट /सेकण्ड

40. यदि घन की कोर 60 सेमी प्रति सेकण्ड की दर से बढ़ती है, तो आयतन किस दर से बढ़ रहा है जब कोर 90 सेमी है

(a) 486000 घन सेमी प्रति सेकण्ड

(b) 1458000 घन सेमी प्रति सेकण्ड

(c) 43740000 घन सेमी प्रति सेकण्ड

(d) इनमें से कोई नहीं

41. यदि एक कण द्वारा t समय में चलित दूरी $s = a\sin t + b\cos 2t$ है, तो $t = 0$ पर त्वरण है

(a) a (b) $-a$

(c) $4b$ (d) $-4b$

42. एक कण इस प्रकार गति करता है कि $S = 6 + 48t - t^3$,तब कितनी दूरी तय करने के बाद गति की दिशा विपरीत हो जायेगी **[Kurukshetra CEE 1998]**

(a) 63 (b) 104

(c) 134 (d) 288

43. यदि एक गुब्बारे का आयतन 900 सेमी/सेकण्ड की दर से बढ़ रहा है तो उसकी त्रिज्या में परिवर्तन की दर, (सेमी/सेकण्ड में) उस क्षण जब गुब्बारे की त्रिज्या 15 सेमी हो, होगी **[RPET 1996]**

(a) $\frac{22}{7}$ (b) 22

(c) $\frac{7}{22}$ (d) इनमें से कोई नहीं

44. एक गति कर रहे बिन्दु का पथ, वक्र $x = at$, $y = b\sin at$ है, तो किसी भी क्षण उसका त्वरण होगा **[SCRA 1996]**

(a) नियत

(b) x अक्ष से दूरी के अनुसार परिवर्तन

(c) y अक्ष से दूरी के अनुसार परिवर्तन

(d) मूल बिन्दु से दूरी के अनुसार परिवर्तन

45. यदि किसी वृत्त के क्षेत्रफल में वृद्धि की दर नियत नहीं है किन्तु परिमाप (perimeter) वृद्धि की दर नियत हो, तो क्षेत्रफल वृद्धि की दर निम्न के अनुसार परिवर्तित होगी **[SCRA 1996]**

(a) परिमाप के वर्ग के (b) परिमाप के व्युत्क्रम के

(c) त्रिज्या के (d) त्रिज्या के व्युत्क्रम के

46. एक पत्थर को ऊर्ध्वाधर ऊपर की ओर फेंकने पर वह t सेकण्ड में 's' मीटर दूरी तय करता है जहाँ $s = 80t - 16t^2$, तब 2 सेकण्ड बाद पत्थर का वेग होगा **[SCRA 1996]**

(a) 8 मीटर प्रति सेकण्ड (b) 16 मीटर प्रति सेकण्ड

(c) 32 मीटर प्रति सेकण्ड (d) 64 मीटर प्रति सेकण्ड

47. एक कण सरल रेखा के अनुदिश इस प्रकार गति करता है कि t सेकण्ड में इसकी दूरी $s = t + 6t^2 - t^3$ है। कितने समय पश्चात् त्वरण शून्य होगा **[AMU 1999]**

(a) 2 सेकण्ड (b) 3 सेकण्ड

(c) 4 सेकण्ड (d) 6 सेकण्ड

48. किसी वस्तु द्वारा t सेकण्ड में तय की गयी दूरी, समीकरण $s = 3t^2 - 8t + 5$ द्वारा दी जाती है, तब वस्तु कितने समय पश्चात् रूकेगी **[RPET 2000]**

(a) 1 सेकण्ड (b) 3/4 सेकण्ड

(c) 4/3 सेकण्ड (d) 4 सेकण्ड

49. $\sqrt{(x^2+16)}$ की $\frac{x}{x-1}$ के सापेक्ष $x = 3$ पर परिवर्तन की दर है **[AMU 2001; MP PET 1987]**

(a) 2 (b) $\frac{11}{5}$

(c) $-\frac{12}{5}$ (d) -3

50. यदि एक कण v वेग से एक सरल रेखा में इस प्रकार गति करता है कि $a + bv^2 = x^2$ (जहाँ x इसकी मूलबिन्दु से दूरी है), तब कण का त्वरण है **[MP PET 2002]**

(a) bx (b) x/a

(c) x/b (d) x/ab

51. एक कण वक्र $x = at^2 + bt + c$ के अनुदिश गतिमान है। यदि $ac = b^2$ तो कण गतिमान होगा, एकसमान **[Orissa JEE 2003]**

(a) घूर्णन से (b) वेग से

(c) त्वरण से (d) मन्दन से

52. एक समबाहु त्रिभुज की भुजाएँ 2सेमी /सेकण्ड की दर से बढ़ रही हैं। क्षेत्रफल के बढ़ने की दर, जबकि भुजा 10 सेमी हो, है **[Kerala (Engg.) 2002]**

(a) $\sqrt{3}$ वर्ग इकाई /सेकण्ड (b) 10 वर्ग इकाई /सेकण्ड

(c) $10\sqrt{3}$ वर्ग इकाई /सेकण्ड (d) $\frac{10}{\sqrt{3}}$ वर्ग इकाई /सेकण्ड

53. r त्रिज्या के गोले के वक्र पृष्ठ के परिवर्तन की दर, जब त्रिज्या 2 सेमी /सेकण्ड की दर से बढ़ रही है, समानुपाती है **[Karnataka CET 2003]**

(a) $\frac{1}{r}$ (b) $\frac{1}{r^2}$

(c) r (d) r^2

54. x-अक्ष के अनुदिश दो बिन्दु $x = 10 + 6t; x = 3 + t^2$ गतिमान हैं। टकराने के समय, उनकी चाल है (x सेमी में तथा t सेकण्ड में है) **[MP PET 2003]**

(a) 16 सेमी/सेकण्ड (b) 20 सेमी/सेकण्ड

(c) 8 सेमी/सेकण्ड (d) 12 सेमी/सेकण्ड

55. किसी बिन्दु की 't' समय पर स्थिति निम्न समीकरणों द्वारा दी जाती है $x = a + bt - ct^2$, $y = at + bt^2$. 't' ,समय पर बिन्दु का त्वरण है **[MP PET 2003]**

(a) $b - c$ (b) $b + c$

(c) $2b - 2c$ (d) $2\sqrt{b^2 + c^2}$

56. एक गोलाकार गुब्बारे में 30 फीट/मिनट की दर से गैस भरी जाती है। जब त्रिज्या 15 फीट हो, तो त्रिज्या के बढ़ने की दर है **[EAMCET 2003]**

(a) $\frac{1}{30\pi}$ फीट/मिनट (b) $\frac{1}{15\pi}$ फीट/मिनट

(c) $\frac{1}{20}$ फीट/मिनट (d) $\frac{1}{25}$ फीट/मिनट

57. किसी कण द्वारा t सेकण्ड में चली गयी दूरी $s = t^3 - 3t^2$ द्वारा प्रदर्शित की गयी है। यदि वस्तु का त्वरण शून्य हो, तो उस क्षण वस्तु का वेग (मी./सेकण्ड में) है **[Karnataka CET 2004]**

(a) 3 (b) – 2

(c) – 3 (d) 2

58. एक कण सरल रेखा में $s = \sqrt{t}$ के अनुसार गतिशील हो, तो कण का त्वरण समानुपाती होगा **[MP PET 2004]**

(a) वेग (b) (वेग)$^{3/2}$

(c) (वेग)^{2} (d) (वेग)$^{-2}$

59. परवलय $y^2 = 18x$ पर स्थित वह बिन्दु , जहाँ कोटि के बढ़ने की दर भुज से दुगनी है, है **[AIEEE 2004]**

(a) $\left(\frac{9}{8}, \frac{9}{2}\right)$ (b) (2, – 4)

(c) $\left(\frac{-9}{8}, \frac{9}{2}\right)$ (d) (2, 4)

60. 10 सेमी त्रिज्या की एक गोलाकार लोहे की गेंद पर एक समान मोटाई की बर्फ की परत जमा है जो कि 50 सेमी/मी की दर से पिघल रही है। यदि बर्फ की परत की मोटाई 5 सेमी हो, तो वह दर, जिससे बर्फ की परत की मोटाई कम हो रही है, है **[AIEEE 2005]**

(a) $\frac{1}{54\pi}$ सेमी/मिनट (b) $\frac{5}{6\pi}$ सेमी/मिनट

(c) $\frac{1}{36\pi}$ सेमी/मिनट (d) $\frac{1}{18\pi}$ सेमी/मिनट

61. एक गोलाकार गुब्बारे का आयतन 35 घन सेमी प्रति मिनट की दर से बढ़ रहा है। जिस क्षण गुब्बारे का व्यास 14 सेमी हो, उस क्षण गुब्बारे के पृष्ठ क्षेत्रफल में परिवर्तन की दर होगी **[Karnataka CET 2005]**

(a) 7 वर्ग सेमी / मिनट (b) 10 वर्ग सेमी / मिनट

(c) 17.5 वर्ग सेमी / मिनट (d) 28 वर्ग सेमी / मिनट

62. 1000 जीवाणुओं की जनसंख्या $p(t)$ को पोषक माध्यम में प्रवेश कराने पर यह संबंध $p(t) = 1000 + \frac{1000\,t}{100 + t^2}$ के अनुसार वृद्धि करती है तो इन जीवाणुओं की जनसंख्या का अधिकतम आकार है **[Karnataka CET 2005]**

(a) 1100 (b) 1250

(c) 1050 (d) 5250

63. यदि एक कण इस प्रकार गतिशील है कि इसका विस्थापन वेग के वर्ग के समानुपाती है, तो इसका त्वरण है **[Kerala (Engg.) 2005]**

(a) s^2 के समानुपाती (b) $1/s^2$ के समानुपाती

(c) s के समानुपाती (d) $1/s$ के समानुपाती

(e) नियत

64. एक बेलन की त्रिज्या 3 मीटर/सेकण्ड की दर से बढ़ रही है, जबकि इसकी ऊँचाई 4 मीटर/सेकण्ड की दर से घट रही है। जब त्रिज्या 4 मीटर व ऊँचाई 6 मीटर हो, तो बेलन के आयतन में परिवर्तन की दर होगी **[Kerala (Engg.) 2005]**

(a) 80π घन मी/सेकण्ड (b) 144π घन मी/सेकण्ड

(c) 80 घन मी/सेकण्ड (d) 64 घन मी/सेकण्ड

(e) -80π घन सेमी /सेकण्ड

65. 10 मीटर लम्बी सीढ़ी एक ऊर्ध्वाधर दीवार के सहारे खड़ी है जबकि उसका निचला सिरा धरातल पर है। सीढ़ी के निचले सिरे को दीवार से दूर धरातल के अनुदिश 3 सेमी/सेकण्ड की दर से खींचा गया है। ऊपरी सिरे की ऊँचाई क्या होगी, जबकि यह 4 सेमी/सेकण्ड की दर से गिर रही है **[Kerala(Engg.) 2005]**

(a) $4\sqrt{3}$ मीटर (b) $5\sqrt{3}$ मीटर

(c) $5\sqrt{2}$ मीटर (d) 8 मीटर

(e) 6 मीटर

स्पर्श रेखा तथा अभिलम्ब

1. वक्र $y = 12x - x^3$ के निम्न बिन्दुओं पर प्रवणता शून्य होगी **[MP PET 1999]**

(a) (0, 2), (2,16) (b) (0, – 2), (2, – 16)

(c) (2, –16), (– 2, 16) (d) (2, 16), (– 2, – 16)

2. वक्र $xy = a^2$ के बिन्दु (x_1, y_1) पर खींची गई स्पर्श रेखा तथा निर्देशाक्षों से घिरे त्रिभुज का क्षेत्रफल होगा **[DCE 2001]**

(a) $\frac{a^2 x_1}{y_1}$ (b) $\frac{a^2 y_1}{x_1}$

(c) $2a^2$ (d) $4a^2$

3. वक्र $x = t^2 + 3t - 8$, $y = 2t^2 - 2t - 5$ के बिन्दु (2, –1) पर स्पर्श रेखा की प्रवणता (Slope) है **[MNR 1994]**

(a) $\frac{22}{7}$ (b) $\frac{6}{7}$

(c) – 6 (d) इनमें से कोई नहीं

4. वक्र $y^2 = 2(x - 3)$ का वह बिन्दु जिस पर अभिलम्ब रेखा $y - 2x + 1 = 0$ के समान्तर है, है **[MP PET 1998]**

(a) (5,2) (b) $\left(-\frac{1}{2}, -2\right)$

(c) (5, –2) (d) $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$

5. रेखा $x + y = 2$, वक्र $x^2 = 3 - 2y$ के निम्न बिन्दु पर स्पर्श रेखा है **[MP PET 1998]**

(a) (1, 1) (b) (–1, 1)

(c) $(\sqrt{3}, 0)$ (d) (3, –3)

6. यदि $x = t^2$ और $y = 2t$, तब $t = 1$ पर अभिलम्ब का समीकरण होगा **[RPET 1996]**

(a) $x + y - 3 = 0$ (b) $x + y - 1 = 0$

(c) $x + y + 1 = 0$ (d) $x + y + 3 = 0$

7. वक्र $y = \sin\frac{\pi x}{2}$ के बिन्दु (1, 1) पर अभिलम्ब का समीकरण है **[AMU 1999]**

(a) $y = 1$ (b) $x = 1$

(c) $y = x$ (d) $y - 1 = \frac{-2}{\pi}(x - 1)$

8. वक्र $y = 2\cos x$ के बिंदु $x = \frac{\pi}{4}$ पर स्पर्श रेखा का समीकरण होगा **[RPET 1997]**

(a) $y - \sqrt{2} = 2\sqrt{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ (b) $y + \sqrt{2} = \sqrt{2}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

(c) $y - \sqrt{2} = -\sqrt{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ (d) $y - \sqrt{2} = \sqrt{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

9. सरल रेखा $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, वक्र $y = be^{-x/a}$ को किस बिन्दु पर स्पर्श करती है **[RPET 1999]**

(a) (0, 0) (b) $(0, a)$

(c) $(0, b)$ (d) $(b, 0)$

10. बिन्दु (1, 2) पर वक्रों $y^2 = 4x$ और $x^2 + y^2 = 5$ के बीच का कोण है **[Karnataka CET 1999]**

(a) $\tan^{-1}(3)$ (b) $\tan^{-1}(2)$

(c) $\frac{\pi}{2}$ (d) $\frac{\pi}{4}$

11. वक्र $by^2 = (x + a)^3$ के लिए, अधोस्पर्शी का वर्ग समानुपाती है **[RPET 1999]**

(a) (अधोलम्ब)$^{1/2}$ (b) अधोलम्ब

(c) (अधोलम्ब)$^{3/2}$ (d) इनमें से कोई नहीं

12. वक्र $y = ax^2 + bx$ के बिन्दु $(2, -8)$ पर स्पर्श रेखा x-अक्ष के समान्तर है, तब **[AMU 1999]**

(a) $a = 2, b = -2$ (b) $a = 2, b = -4$

(c) $a = 2\ b = -8$ (d) $a = 4, b = -4$

13. वक्र $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ की एक स्पर्श रेखा द्वारा अक्षों पर काटे गये अन्तःखण्डों का योग है **[RPET 1999]**

(a) a (b) $2a$

(c) $2\sqrt{a}$ (d) इनमें से कोई नहीं

14. वक्र $y = x\log x$ पर उस बिन्दु का निर्देशांक, जिस पर अभिलम्ब सरल रेखा $2x - 2y = 3$ के समान्तर है, है **[RPET 2000]**

(a) (0,0) (b) (e, e)

(c) $(e^2, 2e^2)$ (d) $(e^{-2}, -2e^{-2})$

15. यदि वक्र $y = f(x)$ का अभिलम्ब, x-अक्ष के समान्तर हो तो निम्न कथन सत्य है **[RPET 2000]**

(a) $\frac{dy}{dx} = 0$ (b) $\frac{dy}{dx} = 1$

(c) $\frac{dx}{dy} = 0$ (d) इनमें से कोई नहीं

16. बिन्दु $\theta = \pi/2$ पर, वक्र $x = a(\theta + \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$ के अभिलम्ब की लम्बाई है **[RPET 1999]**

(a) $2a$ (b) $a/2$

(c) $\sqrt{2}\,a$ (d) $a/\sqrt{2}$

17. वक्र $x = a(\cos\theta + \theta\sin\theta)$, $y = a(\sin\theta - \theta\cos\theta)$ का अभिलम्ब किसी बिन्दु θ पर इस प्रकार है कि **[DCE 2000; AIEEE 2005]**

(a) यह x-अक्ष के साथ अचर कोण बनाता है

(b) यह मूल बिन्दु से गुजरता है

(c) यह मूल बिन्दु से अचर दूरी पर है

(d) इनमें से कोई नहीं

18. वक्र $x = 3t^2 + 1, y = t^3 - 1$ के बिन्दु $x = 1$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता है **[Karnataka CET 2003]**

(a) 0 (b) $\frac{1}{2}$

(c) ∞ (d) -2

19. वक्र $y = x^4$ पर बिन्दु (2, 0), जो वक्र पर नहीं हैं, से स्पर्श रेखा का समीकरण है **[RPET 2000]**

(a) $y = 0$ (b) $x = 0$

(c) $x + y = 0$ (d) इनमें से कोई नहीं

20. बिन्दु (1, 1) पर वक्रों $y = x^2$ और $x = y^2$ के मध्य कोण है **[Roorkee 2000; Karnataka CET 2001]**

(a) $\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$ (b) $\tan^{-1}(1)$

(c) 90^o (d) $\tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$

21. उन बिन्दुओं के भुज, जहाँ वक्र $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ पर स्पर्श रेखा x-अक्ष के समान्तर है, हैं **[Karnataka CET 2001]**

(a) 0 तथा 0 (b) $x = 1$ तथा -1

(c) $x = 1$ तथा -3 (d) $x = -1$ तथा 3

22. यदि वक्र $y = a^x$ और $y = b^x$ एक दूसरे को α कोण पर काटते हैं, तब $\tan\alpha =$ **[MP PET 2001]**

(a) $\frac{a - b}{1 + ab}$ (b) $\frac{\log a - \log b}{1 + \log a \log b}$

(c) $\frac{a + b}{1 - ab}$ (d) $\frac{\log a + \log b}{1 - \log a \log b}$

23. वक्र $x^2 = -4y$ के बिन्दु $(-4, -4)$ पर स्पर्श रेखा का समीकरण है **[Karnataka CET 2001; Pb. CET 2000]**

(a) $2x + y + 4 = 0$ (b) $2x - y - 12 = 0$

(c) $2x + y - 4 = 0$ (d) $2x - y + 4 = 0$

24. वह बिन्दु, जिस पर वक्र $y = 2x^2 - x + 1$ की स्पर्श रेखा $y = 3x + 9$ के समान्तर है, है **[Karnataka CET 2001]**

(a) (2, 1) (b) (1, 2)

(c) (3, 9) (d) (–2, 1)

25. वक्र $x^3 - 8a^2y = 0$ के किस बिन्दु पर अभिलम्ब की प्रवणता $\frac{-2}{3}$ है **[RPET 2002]**

(a) (a, a) (b) $(2a, -a)$

(c) $(2a, a)$ (d) इनमें से कोई नहीं

26. वक्र $x = a(t + \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ के बिन्दु 't' पर अभिलम्ब की लम्बाई है **[RPET 2001]**

(a) $a\sin t$ (b) $2a\sin^3(t/2)\sec(t/2)$

(c) $2a\sin(t/2)\tan(t/2)$ (d) $2a\sin(t/2)$

27. वक्र $y = e^{2x}$ पर (0, 1) से खींची गई स्पर्श रेखा, x-अक्ष के किस बिन्दु पर मिलती है **[RPET 2002]**

(a) $(1/2, 0)$ (b) $(-1/2, 0)$

(c) (2, 0) (d) (0, 0)

28. वक्र $(1+x^2)y = 2-x$, की स्पर्श रेखा का समीकरण, जहाँ यह x-अक्ष को काटती है, है **[Kerala (Engg.) 2002]**

(a) $x+5y=2$ (b) $x-5y=2$

(c) $5x-y=2$ (d) $5x+y-2=0$

29. वक्र $y = be^{-x/a}$ की स्पर्श रेखा का समीकरण, जहाँ यह y-अक्ष को काटती है, है **[Karnataka CET 2002]**

(a) $ax+by=1$ (b) $ax-by=1$

(c) $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=1$ (d) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

30. वक्रों $y=x^2$ और $6y=7-x^3$ के मध्य बिन्दु (1, 1) पर प्रतिच्छेद कोण है **[Kurukshetra CEE 2002]**

(a) $\pi/4$ (b) $\pi/3$

(c) $\pi/2$ (d) π

31. बिन्दु P पर वक्र $y=2x^2-x+1$ की स्पर्श रेखा, रेखा $y=3x+4$ के समान्तर है। P के निर्देशांक है **[RPET 2003]**

(a) (2, 1) (b) (1, 2)

(c) (– 1, 2) (d) (2, – 1)

32. वक्र $xy=c^2$ के लिए किसी बिन्दु पर अधोलम्ब निम्नानुसार परिवर्तित होता है **[Karnataka CET 2003]**

(a) x^2 (b) x^3

(c) y^2 (d) y^3

33. वक्रों $y=\sin x$ तथा $y=\cos x$ के मध्य कोण है **[EAMCET 2003]**

(a) $\tan^{-1}(2\sqrt{2})$ (b) $\tan^{-1}(3\sqrt{2})$

(c) $\tan^{-1}(3\sqrt{3})$ (d) $\tan^{-1}(5\sqrt{2})$

34. यदि बिन्दु (1, –2) पर वक्र $y^2=5x-1$ का अभिलम्ब $ax-5y+b=0$ के रूप का हो, तो a और b क्रमशः हैं **[Pb. CET 2001]**

(a) 4, – 14 (b) 4, 14

(c) –4, 14 (d) –4, –14

35. यदि वक्र $y=6x-x^2$ की स्पर्श रेखा, रेखा $4x-2y-1=0$ के समान्तर है, तब वक्र पर स्पर्श बिन्दु के निर्देशांक हैं **[Karnataka CET 2004]**

(a) (2, 8) (b) (8, 2)

(c) (6, 1) (d) (4, 2)

36. बिन्दु 'θ' पर वक्र $x=a(1+\cos\theta), y=a\sin\theta$ का अभिलम्ब सदैव एक नियत बिन्दु से होकर गुजरता है, तब नियत बिन्दु है **[AIEEE 2004]**

(a) (a, a) (b) $(0, a)$

(c) (0, 0) (d) $(a, 0)$

37. वक्र $x=a(\theta+\sin\theta), y=a(1-\cos\theta), a\neq 1$ के लिए बिन्दु $\theta=\frac{\pi}{2}$ पर अधोस्पर्शी तथा अधोलम्ब की लम्बाईयाँ क्रमशः ST और SN हैं, तो **[Karnataka CET 2005]**

(a) $ST = SN$ (b) $ST = 2SN$

(c) $ST^2 = aSN^3$ (d) $ST^3 = aSN$

38. बिन्दु $\theta=\frac{\pi}{4}$ पर वक्र $x=2\cos^3\theta$ और $y=3\sin^3\theta$ की स्पर्श रेखा का समीकरण है **[J & K 2005]**

(a) $2x+3y=3\sqrt{2}$ (b) $2x-3y=3\sqrt{2}$

(c) $3x+2y=3\sqrt{2}$ (d) $3x-2y=3\sqrt{2}$

39. किस बिन्दु पर वक्र $x+y=e^{xy}$ की स्पर्शी y-अक्ष के समान्तर होगी **[AMU 2005]**

(a) (0, 1) (b) (1, 0)

(c) (1, 1) (d) (–1, –1)

उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ

1. फलन $(x-1)(x-2)^2$ का उच्चिष्ठ मान है

(a) 1 (b) 2

(c) 0 (d) $\frac{4}{27}$

2. फलन $|\sin 4x+3|$ के उच्चिष्ठ एवं निम्निष्ठ मान हैं

(a) 1, 2 (b) 4, 2

(c) 2, 4 (d) – 1, 1

3. फलन $(x-1)(x+2)^2$ के स्थानीय उच्चिष्ठ तथा स्थानीय निम्निष्ठ मान हैं

(a) – 4, 0 (b) 0, – 4

(c) 4, 0 (d) इनमें से कोई नहीं

4. फलन $x^5-5x^4+5x^3-10$ एक उच्चिष्ठ मान रखता है, जब $x=$ **[MP PET 1995]**

(a) 3 (b) 2

(c) 1 (d) 0

5. अन्तराल [1, 10] में फलन $x^3-12x^2+36x+17$ का महत्तम मान है

(a) 17 (b) 177

(c) 77 (d) इनमें से कोई नहीं

6. फलन x^3+x^2+x-4 का महत्तम मान है

(a) 127

(b) 4

(c) महत्तम मान का अस्तित्व नहीं है

(d) इनमें से कोई नहीं

7. फलन $x^2\log x$ अन्तराल (1, e) में रखता है

(a) एक उच्चिष्ठ मान का बिन्दु

(b) एक निम्निष्ठ मान का बिन्दु

(c) एक उच्चिष्ठ एवं एक निम्निष्ठ मान का बिन्दु

(d) न तो उच्चिष्ठ मान का बिन्दु और न ही निम्निष्ठ मान का बिन्दु

8. $|x|+|x+\frac{1}{2}|+|x-3|+|x-\frac{5}{2}|$,का न्यूनतम मान है

(a) 0 (b) 2

(c) 4 (d) 6

9. फलन $\frac{\log x}{x}$ का स्थानीय महत्तम मान है **[MNR 1984; RPET 1997, 2002; DCE 2002; Karnataka CET 2000; UPSEAT 2001; MP PET 2002]**

(a) e (b) 1

(c) $\frac{1}{e}$ (d) $2e$

10. यदि $x+y=16$ तथा x^2+y^2 न्यूनतम हो, तो x तथा y के मान क्रमशः हैं

(a) 3, 13 (b) 4, 12
(c) 6, 10 (d) 8, 8

11. फलन $x\sqrt{1-x^2},(x>0)$ रखता है

(a) एक स्थानीय उच्चिष्ठ
(b) एक स्थानीय निम्निष्ठ
(c) न तो स्थानीय उच्चिष्ठ और न ही स्थानीय निम्निष्ठ
(d) इनमें से कोई नहीं

12. यदि त्रिभुज की दो भुजायें दी हों, तो त्रिभुज का क्षेत्रफल महत्तम होगा यदि दी हुई भुजाओं के बीच का कोण हो

(a) $\frac{\pi}{3}$ (b) $\frac{\pi}{4}$
(c) $\frac{\pi}{6}$ (d) $\frac{\pi}{2}$

13. फलन $x^5-5x^4+5x^3-1$ है **[MP PET 1993]**

(a) $x=3$ पर उच्चिष्ठ व $x=1$ पर निम्निष्ठ
(b) $x=1$ पर निम्निष्ठ
(c) $x=0$ पर न तो उच्चिष्ठ और न ही निम्निष्ठ
(d) $x=0$ पर उच्चिष्ठ

14. 100 सेमी परिमाप वाले उस आयत की आसन्न भुजायें जो कि अधिकतम क्षेत्र घेरती हैं, हैं **[MP PET 1993]**

(a) 10 सेमी व 40 सेमी (b) 20 सेमी व 30 सेमी
(c) 25 सेमी व 25 सेमी (d) 15 सेमी व 35 सेमी

15. किसी फलन के उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ मान के अस्तित्व के लिए आवश्यक प्रतिबन्ध है

(a) $f'(x)=0$ और यह पर्याप्त है
(b) $f''(x)=0$ और यह पर्याप्त है
(c) $f'(x)=0$ परन्तु यह पर्याप्त नहीं है
(d) $f'(x)=0$ और $f''(x)=$ ऋणात्मक

16. दिये गये परिमाप के आयत का क्षेत्रफल महत्तम होता है, जब आयत है **[AI CBSE 1991; RPET 1999]**

(a) एक समान्तर चतुर्भुज (b) एक समलम्ब चतुर्भुज
(c) एक वर्ग (d) इनमें से कोई नहीं

17. दिये गये परिमाप वाले त्रिभुजों में निम्न में से किस त्रिभुज का क्षेत्रफल महत्तम होगा

(a) समद्विबाहु त्रिभुज (b) समकोण त्रिभुज
(c) समबाहु त्रिभुज (d) इनमें से कोई नहीं

18. फलन $f:R\to R$ को $x=a$ पर अधिकतम होने के लिए पर्याप्त प्रतिबंध होंगे

(a) $f'(a)>0$ और $f''(a)>0$
(b) $f'(a)=0$ और $f''(a)=0$
(c) $f'(a)=0$ और $f''(a)<0$
(d) $f'(a)>0$ और $f''(a)<0$

19. 36 को दो गुणनखण्डों में इस प्रकार विभाजित किया जाता है कि उनका योग न्यूनतम होता है, तब दोनों गुणनखण्ड होंगे **[MP PET 1987]**

(a) 2, 18 (b) 9, 4
(c) 3, 12 (d) इनमें से कोई नहीं

20. यदि $f(x)=2x^3-3x^2-12x+5$ तथा $x\in[-2,4]$, तो फलन का उच्चिष्ठ मान x के निम्न मान पर है **[MP PET 1987, 2000; Orissa JEE 2005]**

(a) 2 (b) –1
(c) – 2 (d) 4

21. वक्र $y=xe^x$ के लिए बिन्दु **[MNR 1990]**

(a) $x=-1$ निम्निष्ठ है (b) $x=0$ निम्निष्ठ है
(c) $x=-1$ उच्चिष्ठ है (d) $x=0$ उच्चिष्ठ है

22. $x=\frac{\pi}{3}$ पर, फलन $\sin x(1+\cos x)$ है

(a) उच्चिष्ठ (b) निम्निष्ठ
(c) न उच्चिष्ठ और न निम्निष्ठ (d) इनमें से कोई नहीं

23. फलन $\left(\frac{1}{x}\right)^x$ का उच्चिष्ठ मान है **[DCE 1999; Karnataka CET 1999; UPSEAT 2003]**

(a) $(e)^e$ (b) $(e)^{1/e}$
(c) $(e)^{-e}$ (d) $\left(\frac{1}{e}\right)^e$

24. यदि $x+y=10$, तो xy का महत्तम मान है

(a) 5 (b) 20
(c) 25 (d) इनमें से कोई नहीं

25. दो संख्याओं का योग नियत है तो उनका गुणनफल अधिकतम होगा, जब

(a) प्रत्येक संख्या योग की आधी हो
(b) प्रत्येक संख्या योग की क्रमशः $\frac{1}{3}$ व $\frac{2}{3}$ हो
(c) प्रत्येक संख्या योग की क्रमशः $\frac{1}{4}$ व $\frac{3}{4}$ हो
(d) इनमें से कोई नहीं

26. 100 के ऐसे दो भाग, जिनके लिए एक भाग के दुगने और दूसरे भाग के वर्ग का योगफल निम्निष्ठ हो, हैं

(a) 50, 50 (b) 99, 1
(c) 98, 2 (d) इनमें से कोई नहीं

27. ऐसी संख्या, जो अपने वर्ग से अधिकतम अधिक है, है **[Roorkee 1990]**

(a) – 1 (b) 0
(c) $\frac{1}{2}$ (d) 1

28. यदि किसी फलन $f(x)$ के लिए $f'(a)=0, f''(a)=0$, $f'''(a)>0$, तो $x=a$ पर $f(x)$ **[MP PET 1994; Pb. CET 2002]**

(a) निम्निष्ठ है (b) उच्चिष्ठ है
(c) चरम बिन्दु नहीं है (d) चरम बिन्दु है

29. किसी धनात्मक वास्तविक संख्या तथा उसके व्युत्क्रम के योग का न्यूनतम मान है **[MP PET 1994]**

(a) 1 (b) 2
(c) 3 (d) 4

30. x^x का स्थिर बिन्दु (Stationary point) है **[Karnataka CET 1993]**

(a) $x=e$ पर (b) $x=\frac{1}{e}$ पर
(c) $x=1$ पर (d) $x=\sqrt{e}$ पर

अथवा

जब x धनात्मक है, तब x^x का निम्निष्ठ मान है **[EAMCET 1987]**

(a) e^{-1} (b) $e^{-1/e}$
(c) $e^{1/e}$ (d) e^e

31. a का वह मान, जिसके लिए वर्ग समीकरण $x^2-(a-2)x-a+1=0$ के मूलों के वर्गों का योगफल निम्निष्ठ है, है **[RPET 2000; AIEEE 2005]**

(a) 2 (b) 1
(c) 3 (d) 0

32. अनुक्रम $a_n=\frac{n^2}{n^3+200}$ में सबसे बड़ा पद है

(a) $\frac{529}{49}$ (b) $\frac{8}{89}$
(c) $\frac{49}{543}$ (d) इनमें से कोई नहीं

33. $x+y=8$ के लिए xy का अधिकतम मान है **[MNR 1995]**

(a) 8 (b) 16
(c) 20 (d) 24

34. $\int_0^x te^{-t^2}\,dt$ का न्यूनतम मान है **[EAMCET 2003]**

(a) 1 (b) 2
(c) 3 (d) 0

35. यदि दो संख्याओं का योग 3 है, तो प्रथम संख्या का दूसरी संख्या के वर्ग से गुणनफल का उच्चिष्ठ मान है **[MP PET 1996]**

(a) 4 (b) 3
(c) 2 (d) 1

36. फलन $2\cos 2x-\cos 4x$ का अन्तराल $0\le x\le\pi$ में निम्निष्ठ मान है

(a) 0 (b) 1
(c) $\frac{3}{2}$ (d) -3

37. यदि $f(x)=2x^3-21x^2+36x-30$, तब इनमें से कौन सा सही है

(a) $x=1$ पर $f(x)$ निम्निष्ठ है
(b) $x=6$ पर $f(x)$ उच्चिष्ठ है
(c) $x=1$ पर $f(x)$ उच्चिष्ठ है
(d) $f(x)$ का कोई उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ मान नहीं है

38. $2x^3-24x+107$ का अन्तराल $[-3, 3]$ में उच्चिष्ठ मान है

(a) 75 (b) 89
(c) 125 (d) 139

39. यदि $x=1$ पर फलन $f(x)=x^4-62x^2+ax+9$ उच्चिष्ठ है तो a का मान है

(a) 120 (b) –120
(c) 52 (d) 128

40. व्यंजक $7-20x+11x^2$ का न्यूनतम मान है

(a) $\frac{177}{11}$ (b) $-\frac{177}{11}$
(c) $-\frac{23}{11}$ (d) $\frac{23}{11}$

41. जब $0\le x\le 2$, तो $x(1-x)^2$ का उच्चिष्ठ मान है **[MP PET 1997]**

(a) $\frac{2}{27}$ (b) $\frac{4}{27}$
(c) 5 (d) 0

42. यदि 36 मीटर लम्बे तार से अधिकतम क्षेत्रफल वाला आयत बनाया जाये, तो इसकी दो आसन्न भुजाएँ (मीटर में) हैं **[MP PET 1998]**

(a) 6, 12 (b) 9, 9
(c) 10, 8 (d) 13, 5

43. $2x^2+x-1$ का न्यूनतम मान है **[EAMCET 2003]**

(a) $-\frac{1}{4}$ (b) $\frac{3}{2}$
(c) $\frac{-9}{8}$ (d) $\frac{9}{4}$

44. फलन $y=2x^3-21x^2+36x-20$ का न्यूनतम मान है **[MP PET 1999]**

(a) –128 (b) –126
(c) –120 (d) इनमें से कोई नहीं

45. यदि दो अशून्य संख्याओं का योग 4 है, तो उनके व्युत्क्रमों के योग का न्यूनतम मान है **[Kurukshetra CEE 1998]**

(a) $\frac{3}{4}$ (b) $\frac{6}{5}$
(c) 1 (d) इनमें से कोई नहीं

46. अऋणात्मक वास्तविक संख्या x के लिये $[(5+x)(2+x)]/[1+x]$ का न्यूनतम मान होगा **[Kurukshetra CEE 1998]**

(a) 12 (b) 1
(c) 9 (d) 8

47. $\sin^p x\cos^q x$ का एक उच्चिष्ठ बिन्दु होगा **[RPET 1997; AMU 2000]**

(a) $x=\tan^{-1}\sqrt{(p/q)}$ (b) $x=\tan^{-1}\sqrt{(q/p)}$
(c) $x=\tan^{-1}(p/q)$ (d) $x=\tan^{-1}(q/p)$

48. 20 को दो भागों में इस प्रकार विभाजित किया जाता है कि एक के वर्ग तथा दूसरे के घन का गुणनफल महत्तम हो, तो संख्यायें होगी **[RPET 1997]**

(a) 10, 10 (b) 16, 4
(c) 8, 12 (d) 12, 8

49. यदि प्रत्येक वास्तविक संख्या x के लिये $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$ है, तो f का न्यूनतम मान है **[IIT 1998]**

(a) अस्तित्वहीन है चूँकि f अपरिबद्ध है
(b) f के परिबद्ध होने पर भी प्राप्त नहीं होता है
(c) 1
(d) –1

50. x के मानों की संख्या जिनके लिये फलन $f(x)=\cos x+\cos(\sqrt{2}x)$ का मान महत्तम होगा **[IIT 1998; DCE 2001, 05]**

(a) 0 (b) 1
(c) 2 (d) अनन्त

51. $e^{(2x^2-2x+1)\sin^2 x}$ का न्यूनतम मान होगा **[Roorkee Qualifying 1998]**

(a) e (b) $1/e$
(c) 1 (d) 0

52. दो चर संख्यायें x तथा y इस प्रकार हैं कि $x>0$ तथा $xy=1$, तब $x+y$ का न्यूनतम मान होगा **[Kurukshetra CEE 1998; MP PET 2002]**

(a) 2 (b) 3
(c) 4 (d) 0

53. फलन $x^5-5x^4+5x^3-10$ का उच्चिष्ठ व निम्निष्ठ मान है **[DCE 1999]**

(a) $-37, -9$
(b) 10, 0
(c) यह एक उच्चिष्ठ एवं दो निम्निष्ठ मान रखता है

(d) यह दो उच्चिष्ठ एवं एक निम्निष्ठ मान रखता है

54. संख्या 20 को दो भागों में इस प्रकार विभाजित किया जाता है कि पहले भाग का दूसरे भाग के घन से गुणनफल अधिकतम होता है, तब दोनों भागों के मान हैं **[DCE 1999]**

(a) (10, 10) (b) (5, 15)

(c) (13, 7) (d) इनमें से कोई नहीं

55. फलन $x^3 - 18x^2 + 96x$ के अन्तराल (0, 9) में उच्चिष्ठ एवं निम्निष्ठ मान हैं **[RPET 1999]**

(a) 160, 0 (b) 60, 0

(c) 160, 128 (d) 120, 28

56. x के किस मान के लिए $\sin x\,(1+\cos x)$ का मान अधिकतम होगा **[UPSEAT 1999]**

(a) $x = \frac{\pi}{2}$ (b) $x = \frac{\pi}{6}$

(c) $x = \frac{\pi}{3}$ (d) $x = \pi$

57. $\frac{x}{1 + x\tan x}$ का अधिकतम मान होगा **[UPSEAT 1999]**

(a) $x = \sin x$ पर (b) $x = \cos x$ पर

(c) $x = \frac{\pi}{3}$ पर (d) $x = \tan x$ पर

58. यदि x एक वास्तविक संख्या है, तब फलन $\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$ का अधिकतम एवं न्यूनतम मान है **[RPET 1999; AMU 1999; UPSEAT 2002]**

(a) $3, -\frac{1}{2}$ (b) $3, \frac{1}{3}$

(c) $-3, -\frac{1}{3}$ (d) इनमें से कोई नहीं

59. फलन $\frac{\log x}{x}$ का अंतराल $[2, \infty)$ में न्यूनतम मान होगा **[Roorkee 1999]**

(a) $\frac{\log 2}{2}$ (b) 0

(c) $\frac{1}{e}$ (d) अस्तित्व नहीं है

60. $x^4 e^{-x^2}$ का अधिकतम मान है **[AMU 1999]**

(a) e^2 (b) e^{-2}

(c) $12e^{-2}$ (d) $4e^{-2}$

61. यदि $A + B = \frac{\pi}{2}$, तब $\cos A \cos B$ का अधिकतम मान है **[AMU 1999]**

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{3}{4}$

(c) 1 (d) $\frac{4}{3}$

62. किसी वास्तविक संख्या x को उसके व्युत्क्रम के साथ जोड़ने पर न्यूनतम मान प्राप्त होता है, यदि x का मान है **[RPET 2000; AIEEE 2003]**

(a) – 2 (b) 2

(c) 1 (d) – 1

63. यदि किसी परिमेय संख्या का हर, अंश के वर्ग से 16 अधिक है, तब परिमेय संख्या का न्यूनतम मान क्या होगा **[RPET 2000]**

(a) $-1/4$ (b) $-1/8$

(c) $1/12$ (d) $1/16$

64. अपने घन से अधिकतम बढ़त वाली वास्तविक संख्या है **[MP PET 2000]**

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

(c) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (d) इनमें से कोई नहीं

65. फलन $f(x) = \frac{x}{4 + x + x^2}$ का, अन्तराल [–1,1] में अधिकतम मान है **[MP PET 2000]**

(a) $-1/4$ (b) $-1/3$

(c) $1/6$ (d) $1/5$

66. एक अधिकतम आयतन वाले शंकु को किसी दिये गये गोले के भीतर बनाया गया है। तब शंकु की ऊँचाई का गोले के व्यास से अनुपात होगा **[MNR 1985; UPSEAT 2000]**

(a) 2/3 (b) 3/4

(c) 1/3 (d) 1/4

67. किसी गोले के अन्दर बने हुए अधिकतम आयतन वाले शंकु की ऊँचाई का गोले की त्रिज्या से अनुपात है **[Orissa JEE 2004]**

(a) $\frac{3}{4}$ (b) $\frac{4}{3}$

(c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{2}{3}$

68. फलन $f(x) = x + \sin x$ रखता है **[AMU 2000]**

(a) एक निम्निष्ठ किन्तु उच्चिष्ठ नहीं

(b) एक उच्चिष्ठ किन्तु निम्निष्ठ नहीं

(c) न तो उच्चिष्ठ तथा न ही निम्निष्ठ

(d) उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ दोनों

69. फलन $f(x) = ax + \frac{b}{x}; a, b, x > 0$ न्यूनतम मान रखता है जब x का मान है **[AMU 2000]**

(a) b (b) $\sqrt{a}$

(c) $\sqrt{b}$ (d) $\sqrt{b/a}$

70. यदि $xy = c^2$, तब $ax + by$ का न्यूनतम मान है **[RPET 2001]**

(a) $c\sqrt{ab}$ (b) $2c\sqrt{ab}$

(c) $-c\sqrt{ab}$ (d) $-2c\sqrt{ab}$

71. यदि $a^2x^4 + b^2y^4 = c^6$, तब xy का अधिकतम मान है **[R**

(a) $\frac{c^2}{\sqrt{ab}}$ (b) $\frac{c^3}{ab}$

(c) $\frac{c^3}{\sqrt{2ab}}$ (d) $\frac{c^3}{2ab}$

72. फलन $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 4$ का मान अधिकतम है **[Karnataka CET 2001]**

(a) $x = 2$ पर (b) $x = 4$ पर

(c) $x = 0$ पर (d) $x = 3$ पर

73. वक्र $y = -x^3 + 3x^2 + 9x - 27$ की अधिकतम प्रवणता है **[MP PET 2001]**

(a) 0 (b) 12

(c) 16 (d) 32

74. फलन $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 4$ रखता है **[DCE 2002]**

(a) न तो उच्चिष्ठ तथा न ही निम्निष्ठ
(b) एक उच्चिष्ठ तथा एक निम्निष्ठ
(c) दो उच्चिष्ठ
(d) दो निम्निष्ठ

75. यदि $f(x)=\frac{1}{4x^2+2x+1}$, तब इसका अधिकतम मान है

(a) 4/3 (b) 2/3
(c) 1 (d) 3/4

76. यदि $f(x)=x+\frac{1}{x},\ x>0$, तब इसका अधिकतम मान है [RPET 2002]

(a) -2 (b) 0
(c) 3 (d) इनमें से कोई नहीं

77. किसी खण्ड का परिमाप p है। यदि खण्ड का क्षेत्रफल अधिकतम हो, तब त्रिज्या है [Karnataka CET 2002]

(a) $\sqrt{p}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{p}}$
(c) $\frac{p}{2}$ (d) $\frac{p}{4}$

78. यदि $x=1$ तथा $x=2$ पर $y=a\log x+bx^2+x$ चरम मान (extremum value) रखता है, तब $(a,b)=$ [UPSEAT 2002]

(a) $\left(1,\frac{1}{2}\right)$ (b) $\left(\frac{1}{2},2\right)$
(c) $\left(2,\frac{-1}{2}\right)$ (d) $\left(\frac{-2}{3},\frac{-1}{6}\right)$

79. अंतराल $(-4,4)$ में फलन $f(x)=\int_{-10}^{x}(t^4-4)e^{-4t}dt$ रखता है [AMU 200]

(a) कोई चरम बिन्दु नहीं (b) एक चरम बिन्दु
(c) दो चरम बिन्दु (d) चार चरम बिन्दु

80. अंतराल $[1, e]$ में $x^2\log x$ का महत्तम मान है [AMU 2002]

(a) e^2 (b) $\frac{1}{e}\log\frac{1}{\sqrt{e}}$
(c) $e^2\log\sqrt{e}$ (d) इनमें से कोई नहीं

81. फलन $f(x)=x^{-x},(x\in R)$ एक उच्चिष्ठ मान रखता है [EAMCET 2002]

(a) $x=2$ पर (b) $x=3$ पर
(c) $x=1/e$ पर (d) $x=1$ पर

82. यदि $ab=2a+3b, a>0, b>0$ तब ab का न्यूनतम मान है [Orissa JEE 2002]

(a) 12 (b) 24
(c) $\frac{1}{4}$ (d) इनमें से कोई नहीं

83. यदि PQ तथा PR किसी त्रिभुज की दो भुजाएँ हों तब उनके बीच का कोण, जिससे त्रिभुज का अधिकतम क्षेत्रफल प्राप्त हो, है [Kerala (Engg.) 2002]

(a) π (b) $\pi/3$
(c) $\pi/4$ (d) $\pi/2$

84. फलन $y=a(1-\cos x)$ उच्चिष्ठ है, जब $x=$

(a) π (b) $\pi/2$
(c) $-\pi/2$ (d) $-\pi/6$

85. फलन $\left(x^2+\frac{250}{x}\right)$ का न्यूनतम मान है [Kurukshetra CEE 2002]

(a) 75 (b) 50
(c) 25 (d) 55

[RPET 2002]

86. $x^2+\frac{1}{1+x^2}$ का न्यूनतम मान है [UPSEAT 2003]

(a) $x=0$ पर (b) $x=1$ पर
(c) $x=4$ पर (d) $x=3$ पर

87. यदि $x-2y=4$, तब xy का न्यूनतम मान है [UPSEAT 2003]

(a) -2 (b) 2
(c) 0 (d) -3

88. $2x+3y$ का न्यूनतम मान, जबकि $xy=6$ है, है [MP PET 2003]

(a) 12 (b) 9
(c) 8 (d) 6

89. फलन $f(x)\ni px-q|+r|x|,\ x\in(-\infty,\infty)$ जहाँ $p>0;q>0;r>0$, का केवल एक बिन्दु पर न्यूनतम मान होगा, यदि [Pb. CET 2003]

(a) $p\neq q$ (b) $q\neq r$
(c) $r\neq p$ (d) $p=q=r$

90. फलन $f(x)=3x^4-8x^3+12x^2-48x+25$ का अन्तराल $[0, 3]$ में न्यूनतम मान है [Pb. CET 2004]

(a) 25 (b) -39
(c) -25 (d) 39

91. $x^{1/x}$ का उच्चिष्ठ मान है [MP PET 2004]

(a) $\frac{1}{e}$ (b) $e^{1/e}$
(c) e (d) $\frac{1}{e^e}$

92. $4e^{2x}+9e^{-2x}$ का न्यूनतम मान है [J & K 2005]

(a) 11 (b) 12
(c) 10 (d) 14

93. वक्र $x^2=2y$ पर वह बिन्दु, जिसके लिए बिन्दु $(0,5)$ सबसे अधिक निकट है, है [MNR 1983]

(a) $(2\sqrt{2},0)$ (b) (0, 0)
(c) $(2,2)$ (d) इनमें से कोई नहीं

94. जब $x+2y=8$, तब xy का अधिकतम मान होगा [Kerala (Engg.) 2005]

(a) 20 (b) 16
(c) 24 (d) 8
(e) 4

95. $f(a)=(2a^2-3)+3(3-a)+4$ का न्यूनतम मान है [DCE 2005]

(a) $\frac{15}{2}$ (b) $\frac{11}{2}$
(c) $\frac{-13}{2}$ (d) $\frac{71}{8}$

96. यदि $P=(1,1)$, $Q=(3,2)$ व बिन्दु R, x-अक्ष पर स्थित हैं, तो $PR+RQ$ का मान न्यूनतम होगा [AMU 2005]

(a) $\left(\frac{5}{3}, 0\right)$ पर (b) $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$ पर

(c) (3, 0) पर (d) (1, 0) पर

97. माना $f(x) = 1 + 2x^2 + 2^2x^4 + ... + 2^{10}x^{20}$, तो $f(x)$ **[AMU 2005]**

(a) एक से अधिक निम्निष्ठ रखता हैं

(b) केवल एक निम्निष्ठ रखता है

(c) कम से कम एक उच्चिष्ठ रखता है

(d) इनमें से कोई नहीं

98. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ के अन्दर बनने वाले अधिकतम आयत का क्षेत्रफल है **[AIEEE 2005]**

(a) $\sqrt{ab}$ (b) $\frac{a}{b}$

(c) $2ab$ (d) ab

वर्धमान तथा ह्रासमान फलन

1. फलन $x + \frac{1}{x}, (x \neq 0)$ किस अन्तराल में एक वर्धमान फलन नहीं है

(a) [– 1, 1] (b) [0, 1]

(c) [–1, 0] (d) [–1,2]

2. फलन $\frac{1}{1+x^2}$ किस अन्तराल में ह्रासमान है

(a) $(-\infty, -1]$ (b) $(-\infty, 0]$

(c) $[1, \infty)$ (d) $(0, \infty)$

3. निम्न में से कौन सा फलन अन्तराल $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ में ह्रासमान नहीं है

(a) $\cos x$ (b) $\cos 2x$

(c) $\cos 3x$ (d) $\cot x$

4. फलन $\frac{x-2}{x+1}, (x \neq -1)$ किस अन्तराल में वर्धमान है

(a) $(-\infty, 0]$ (b) $[0, \infty)$

(c) R (d) इनमें से कोई नहीं

5. अन्तराल [0, 1] में फलन $x^2 - x + 1$ है

(a) वर्धमान

(b) ह्रासमान

(c) न तो वर्धमान तथा न ही ह्रासमान

(d) इनमें से कोई नहीं

6. फलन x^2e^{-x} किस अन्तराल में ह्रासमान नहीं है

(a) $(-\infty, 2]$ (b) [0, 2]

(c) $[2, \infty)$ (d) इनमें से कोई नहीं

7. अन्तराल $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ में फलन log sin x है

(a) वर्धमान

(b) ह्रासमान

(c) न तो वर्धमान तथा न ही ह्रासमान

(d) इनमें से कोई नहीं

8. फलन $\sin x - \cos x$ किस अन्तराल में वर्धमान है

(a) $\left[\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right]$ (b) $\left[0, \frac{3\pi}{4}\right)$

(c) $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ (d) इनमें से कोई नहीं

9. अन्तराल $(-\infty, \infty)$ में फलन $\sin x - bx + c$ वर्धमान होगा, यदि

(a) $b \leq 1$ (b) $b \leq 0$

(c) $b < -1$ (d) $b \geq 0$

10. फलन $x^4 - 4x$ किस अन्तराल में ह्रासमान है

(a) [–1, 1] (b) $(-\infty, 1)$

(c) $[1, +\infty)$ (d) इनमें से कोई नहीं

11. किस अंतराल के लिए फलन $f(x) = -2x^3 - 9x^2 - 12x + 1$ ह्रासमान है **[MP PET 1993]**

(a) $(-2, \infty)$ (b) $(-2, -1)$

(c) $(-\infty, -1)$ (d) $(-\infty, -2)$ तथा $(-1, \infty)$

12. $f(x) = x^3 - 27x + 5$ एक वर्धमान फलन है, जब **[MP PET 1995]**

(a) $x < -3$ (b) $|x| > 3$

(c) $x \leq -3$ (d) $|x| < 3$

13. फलन $f(x) = x^2$ किस अन्तराल में वर्धमान फलन है

(a) $(-1, 1)$ (b) $(-\infty, \infty)$

(c) $(0, \infty)$ (d) $(-\infty, 0)$

14. फलन $f(x) = x^4 - \frac{x^3}{3}$ है

(a) $x > \frac{1}{4}$ के लिए वर्धमान फलन और $x < \frac{1}{4}$ के लिए ह्रासमान फलन

(b) x के प्रत्येक मान के लिए वर्धमान फलन

(c) x के प्रत्येक मान के लिए ह्रासमान फलन

(d) इनमें से कोई नहीं

15. x के प्रत्येक मान के लिए फलन $f(x) = e^x$ है

(a) ह्रासमान

(b) वर्धमान

(c) न तो ह्रासमान और न ही वर्धमान

(d) इनमें से कोई नहीं

16. यदि $f'(x)$ का मान अन्तराल (a, b) में शून्य है तो वह इस अन्तराल में है

(a) वर्धमान फलन

(b) ह्रासमान फलन

(c) केवल $a > 0$ और $b > 0$ पर ही वर्धमान फलन

(d) इनमें से कोई नहीं

17. x के प्रत्येक मान के लिए फलन $f(x) = \frac{1}{5^x}$ है

(a) ह्रासमान

(b) वर्धमान

(c) न तो वर्धमान और न ही ह्रासमान

(d) $x > 0$ के लिए वर्धमान तथा $x < 0$ के लिए ह्रासमान

18. वह अन्तराल, जिसमें फलन $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 7$ ह्रासमान है, है

(a) (– 2, 3) (b) (2, 3)

(c) (2,– 3) (d) इनमें से कोई नहीं

19. यदि $f(x) = \sin x - \frac{x}{2}$ वर्धमान फलन है, तो **[MP PET 1987]**

(a) $0 < x < \frac{\pi}{3}$ (b) $-\frac{\pi}{3} < x < 0$

(c) $-\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3}$ (d) $x = \frac{\pi}{2}$

20. यदि x, 0 से $\pi/2$ की ओर अग्रसर है, तो फलन $f(x) = x\sin x + \cos x + \cos^2 x$ है

(a) वर्धमान
(b) ह्रासमान
(c) न तो वर्धमान और न ही ह्रासमान
(d) इनमें से कोई नहीं

21. यदि $y = x^2 e^{-x}$ तो कौन से अन्तराल में y, x के सापेक्ष वर्धमान है **[MNR 1994; Kurukshetra CEE 1998]**

(a) $(-\infty, \infty)$ (b) $(-2, 0)$

(c) $(2, \infty)$ (d) $(0, 2)$

22. फलन $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 6$ एकदिष्ट ह्रासमान है, जबकि **[MP PET 1994]**

(a) $1 < x < 2$ (b) $x > 2$

(c) $x < 1$ (d) इनमें से कोई नहीं

23. x के किस मान के लिए फलन $f(x) = x^2 - 2x$ ह्रासमान है **[BIT Ranchi 1990]**

(a) $x > 1$ के लिए (b) $x > 2$ के लिए

(c) $x < 1$ के लिए (d) $x < 2$ के लिए

24. फलन $f(x) = \cos x - 2px$ एकदिष्ट ह्रासमान है **[RPET 1987; MP PET 2002]**

(a) $p < \frac{1}{2}$ के लिए (b) $p > \frac{1}{2}$ के लिए

(c) $p < 2$ के लिए (d) $p > 2$ के लिए

25. यदि $f(x) = kx^3 - 9x^2 + 9x + 3$ प्रत्येक अन्तराल में एकदिष्ट वर्धमान है, तो **[RPET 1992; Kurukshetra CEE 2002]**

(a) $k < 3$ (b) $k \le 3$

(c) $k > 3$ (d) इनमें से कोई नहीं

26. किस अंतराल में फलन $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 1$ एकदिष्ट ह्रासमान है **[RPET 1995]**

(a) $[2, 3]$ (b) $(2, 3)$

(c) $(-\infty, 2)$ (d) $(3, \infty)$

27. फलन $f(x) = \tan x - x$ **[MNR 1995; Pb. CET 2000; Karnataka CET 2002]**

(a) हमेशा वर्धमान है
(b) हमेशा ह्रासमान है
(c) कभी भी ह्रासमान नहीं है
(d) कभी वर्धमान व कभी ह्रासमान है

28. फलन $f(x) = \log(1+x) - \frac{2x}{2+x}$ वर्धमान होगा **[EAMCET 2002]**

(a) $(0, \infty)$ में (b) $(-\infty, 0)$ में

(c) $(-\infty, \infty)$ में (d) इनमें से कोई नहीं

29. यदि x के सभी मानों के लिए फलन $f(x) = \frac{K\sin x + 2\cos x}{\sin x + \cos x}$ वर्धमान है, तो

(a) $K < 1$ (b) $K > 1$

(c) $K < 2$ (d) $K > 2$

30. a का वह मान, जिसके लिए फलन $f(x) = \sqrt{3}\sin x - \cos x - 2ax + b$, x के सभी मानों के लिए ह्रासमान है, होगा

(a) $a < 1$ (b) $a \ge 1$

(c) $a \ge \sqrt{2}$ (d) $a < \sqrt{2}$

31. वह अन्तराल, जिसमें फलन x^3, फलन $6x^2 + 15x + 5$ की तुलना में कम तेजी से वर्धमान है, है

(a) $(-\infty, -1)$ (b) $(-5, 1)$

(c) $(-1, 5)$ (d) $(5, \infty)$

32. 'a' का वह मान, जिसके लिए फलन $(a+2)x^3 - 3ax^2 + 9ax - 1$; x के सभी वास्तविक मानों के लिए एकदिष्ट ह्रासमान हैं, होगा **[Kurukshetra CEE 2002]**

(a) $a < -2$ (b) $a > -2$

(c) $-3 < a < 0$ (d) $-\infty < a \le -3$

33. यदि $f(x) = 2x + \cot^{-1} x + \log(\sqrt{1+x^2} - x)$, तो $f(x)$

(a) $[0, \infty)$ में वर्धमान है
(b) $[0, \infty)$ में ह्रासमान है
(c) $(0, \infty)$ में न तो वर्धमान तथा न ही ह्रासमान है
(d) $(-\infty, \infty)$ में वर्धमान है

34. x के सभी वास्तविक मानों के लिए वर्धमान फलन $f(x)$ है **[MP PET 1996]**

(a) x^{-1} (b) x^2

(c) x^3 (d) x^4

35. k का न्यूनतम मान क्या होगा जिसके लिये फलन $x^2 + kx + 1$, अन्तराल $1 < x < 2$ में एक वर्द्धमान फलन है

(a) -4 (b) -3

(c) -1 (d) -2

36. ह्रासमान फलन $f(x) = x^3 - x^2 - x - 4$ का अंतराल है

(a) $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$ (b) $\left(-\frac{1}{3}, 1\right)$

(c) $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ (d) $\left(-1, -\frac{1}{3}\right)$

37. निम्न में से किस अन्तराल में फलन $f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 5$ वर्धमान फलन है **[MP PET 1998]**

(a) $(-\infty, -2) \cup (4, \infty)$ (b) $(-2, \infty)$

(c) $(-2, 4)$ (d) $(-\infty, 4)$

38. फलन $f(x) = \sin 2x$ के लिए कौन सा कथन सही है

(a) $f(x)$, $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ में वर्धमान है और $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ में ह्रासमान है

(b) $f(x)$, $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ में ह्रासमान है और $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ में वर्धमान है

(c) $f(x)$, $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ में वर्धमान है और $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ में ह्रासमान है

(d) कथन (a), (b) एवं (c) सभी सही हैं

39. $f(x) = (x+2)e^{-x}$ द्वारा परिभाषित फलन f है **[IIT Screening 1994]**

(a) x के सभी मानों के लिये ह्रासमान
(b) $(-\infty, -1)$ के लिये ह्रासमान तथा $(-1, \infty)$ के लिए वर्धमान
(c) x के सभी मानों के लिये वर्धमान
(d) $(-1, \infty)$ के लिये ह्रासमान तथा $(-\infty, -1)$ के लिये वर्धमान

40. यदि $f(x) = x^3 - 10x^2 + 200x - 10$, तब **[Kurukshetra CEE 1998]**

(a) $f(x)$, $]-\infty,10]$ में ह्रासमान तथा $[10,\infty[$ में वर्धमान है

(b) $f(x)$, $]-\infty,10]$ में वर्धमान तथा $[10,\infty[$ में ह्रासमान है

(c) $f(x)$, सम्पूर्ण वास्तविक रेखा पर वर्धमान है

(d) $f(x)$, सम्पूर्ण वास्तविक रेखा पर ह्रासमान है

41. यदि $f(x) = \frac{x}{\sin x}$ और $g(x) = \frac{x}{\tan x}$, जहाँ $0 < x \le 1$, तब इस अन्तराल में **[IIT 1997 Re-Exam]**

(a) $f(x)$ तथा $g(x)$ दोनों वर्धमान फलन हैं

(b) $f(x)$ तथा $g(x)$ दोनों ह्रासमान फलन हैं

(c) $f(x)$ एक वर्धमान फलन है

(d) $g(x)$ एक वर्धमान फलन है

42. फलन $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 29$ एकदिष्ट ह्रासमान फलन होगा, जब **[RPET 1996]**

(a) $x < 2$ (b) $x > 2$

(c) $x > 1$ (d) $1 < x < 2$

43. $2x^3 + 18x^2 - 96x + 45 = 0$ एक वर्धमान फलन होगा, जब **[RPET 1997]**

(a) $x \le -8, x \ge 2$ (b) $x < -2, x \ge 8$

(c) $x \le -2, x \ge 8$ (d) $0 \le x \le -2$

44. फलन $\frac{a\sin x + b\cos x}{c\sin x + d\cos x}$ ह्रासमान है, यदि **[RPET 1999]**

(a) $ad - bc > 0$ (b) $ad - bc < 0$

(c) $ab - cd > 0$ (d) $ab - cd < 0$

45. फलन $f(x) = 1 - e^{-x^2/2}$ है **[AMU 1999]**

(a) x के सभी मानों के लिए ह्रासमान

(b) x के सभी मानों लिए वर्धमान

(c) $x < 0$ के लिए ह्रासमान तथा $x > 0$ के लिए वर्धमान

(d) $x < 0$ के लिए वर्धमान तथा $x > 0$ के लिए ह्रासमान

46. दो कथन S और R निम्नानुसार है

S : $\sin x$ एवं $\cos x$ दोनों, अंतराल $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ में ह्रासमान है

R : यदि एक अवकलनीय फलन अंतराल (a, b) में ह्रासमान है, तब इस फलन का अवकलन गुणांक भी अंतराल (a, b)में ह्रासमान है।

कौन सा कथन सत्य है **[IIT Screening 2000]**

(a) S और R दोनों कथन गलत है

(b) S और R दोनों कथन सही है, लेकिन R , S के लिए सही व्याख्या नहीं करता है

(c) S सही कथन है और R, S के लिए सही व्याख्या करता है

(d) कथन S सही है और R गलत कथन है

47. वह फलन, जो अन्तराल $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ में न तो ह्रासमान है न ही वर्धमान है **[MP PET 2000]**

(a) cosec x (b) $\tan x$

(c) x^2 (d) $|x - 1|$

48. फलन $f(x) = \frac{\lambda\sin x + 6\cos x}{2\sin x + 3\cos x}$ एकदिष्ट वर्धमान है, यदि **[MP PET 2001]**

(a) $\lambda > 1$ (b) $\lambda < 1$

(c) $\lambda < 4$ (d) $\lambda > 4$

49. अंतराल (1,3) में फलन $f(x) = 3x + \frac{2}{x}$ है **[AMU 1999]**

(a) निरंतर ह्रासमान

(b) निरंतर वर्धमान

(c) केवल (2, 3) में ह्रासमान

(d) न तो वर्धमान तथा न ही ह्रासमान

50. यदि $f(x) = \sin x - \cos x$, तथा $0 \le x \le 2\pi$, तब फलन का मान किस अन्तराल में ह्रासमान है **[UPSEAT 2001]**

(a) $[5\pi/6, 3\pi/4]$ (b) $[\pi/4, \pi/2]$

(c) $[3\pi/2, 5\pi/2]$ (d) इनमें से कोई नहीं

51. फलन $f(x) = \frac{\log x}{x}$ किस अन्तराल में वर्धमान है **[UPSEAT 2001]**

(a) $(1, 2e)$ (b) $(0, e)$

(c) $(2, 2e)$ (d) $(1/e, 2e)$

52. यदि $f(x) = xe^{x(1-x)}$, तब $f(x)$ है **[IIT Screening 2001]**

(a) $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$ में वर्धमान (b) R में ह्रासमान

(c) R में वर्धमान (d) $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$ में ह्रासमान

53. यदि $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 3$ एक ह्रासमान फलन है, तब x स्थित है **[RPET 2002]**

(a) $(-\infty,-1) \cap (3,\infty)$ में (b) $(1, 3)$ में

(c) $(3, \infty)$ में (d) इनमें से कोई नहीं

54. यदि $f(x) = \frac{1}{x+1} - \log(1 + x), x > 0$, तब f है **[RPET 2002]**

(a) एक वर्धमान फलन

(b) एक ह्रासमान फलन

(c) वर्धमान तथा ह्रासमान फलन दोनों

(d) इनमें से कोई नहीं

55. फलन $f(x) = x + \cos x$ है **[DCE 2002]**

(a) सदैव वर्धमान

(b) सदैव ह्रासमान

(c) x के निश्चित परिसर के लिए वर्धमान

(d) इनमें से कोई नहीं

56. फलन $f(x) = x^{1/x}$ है **[AMU 2002]**

(a) $(1, \infty)$ में वर्धमान

(b) $(1, \infty)$ में ह्रासमान

(c) $(1, e)$ में वर्धमान, (e, ∞) में ह्रासमान

(d) $(1, e)$ में ह्रासमान, (e, ∞) में वर्धमान

57. फलन $f(x) = 1 - x^3 - x^5$ ह्रासमान है **[Kerala (Engg.) 2002]**

(a) $1 \le x \le 5$ के लिए (b) $x \le 1$ के लिए

(c) $x \ge 1$ के लिए (d) x के सभी मानों के लिए

58. फलन x^x वर्धमान है, जब **[MP PET 2003]**

(a) $x > \frac{1}{e}$

(b) $x < \frac{1}{e}$

(c) $x < 0$

(d) x के सभी वास्तविक मानों के लिए

59. $2x^3 - 6x + 5$ एक वर्धमान फलन है, यदि **[UPSEAT 2003]**

(a) $0 < x < 1$ (b) $-1 < x < 1$

(c) $x < -1$ या $x > 1$ (d) $-1 < x < -1/2$

60. उस अंतराल की अधिकतम लम्बाई, जिसमें फलन $3\sin x - 4\sin^3 x$ एक वर्धमान फलन है, है **[IIT Screening 2002]**

(a) $\frac{\pi}{3}$ (b) $\frac{\pi}{2}$

(c) $\frac{3\pi}{2}$ (d) π

61. माना $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d, 0 < b^2 < c$. तब f **[IIT Screening 2004]**

(a) परिबद्ध है
(b) एक स्थानीय उच्चिष्ठ रखता है
(c) एक स्थानीय निम्निष्ठ रखता है
(d) निरंतर वर्धमान है

62. यदि $f(x) = x, -1 \le x \le 1$ है, तब फलन $f(x)$ है **[SCRA 1996]**

(a) वर्धमान (b) ह्रासमान
(c) स्थिर (d) असंतत

63. $x \in (0,1)$ के सभी मानों के लिए **[IIT Screening 2000]**

(a) $e^x < 1 + x$ (b) $\log_e(1+x) < x$
(c) $\sin x > x$ (d) $\log_e x > x$

64. फलन $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 90x + 174$ निम्न में से किस अंतराल में वर्धमान है **[J & K 2005]**

(a) $\frac{1}{2} < x < 1$ (b) $\frac{1}{2} < x < 2$

(c) $3 < x < \frac{59}{4}$ (d) $-\infty < x < \infty$

65. फलन $f(x) = \tan^{-1}(\sin x + \cos x)$, $x > 0$ निम्न में से किस अंतराल में सदैव वर्धमान फलन होगा **[Kerala (Engg.) 2005]**

(a) $(0, \pi)$ में (b) $(0, \pi/2)$ में
(c) $(0, \pi/4)$ में (d) $(0, 3\pi/4)$ में
(e) $(0, 5\pi/4)$ में

66. दिया गया फलन $f(x) = \left(\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\right)$ है **[Orissa JEE 2005]**

(a) वर्धमान (b) ह्रासमान
(c) सम (d) इनमें से कोई नहीं

67. फलन $f(x) = \frac{4x^2+1}{x}$ किस अंतराल के लिए ह्रासमान है

(a) $\left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ (b) $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$
(c) $(-1, 1)$ (d) $[-1, 1]$

68. एक फलन का संबंध उस अंतराल से सम्बन्धित है जिस अंतराल में यह वर्धमान है। निम्न में से कौनसा जोड़ा गलत सम्बन्ध दर्शाता है **[AIEEE 2005]**

	अंतराल	फलन
(a)	$\left(-\infty, \frac{1}{3}\right]$	$3x^2 - 2x + 1$
(b)	$(-\infty, -4]$	$x^3 + 6x^2 + 6$
(c)	$(-\infty, \infty)$	$x^3 - 3x^2 + 3x + 3$
(d)	$[2, \infty)$	$2x^3 - 3x^2 - 12x + 6$

रोले की प्रमेय, लेग्रांज की मध्यमान प्रमेय

1. किस अन्तराल के लिए फलन $\frac{x^2-3x}{x-1}$ रोले प्रमेय की सभी शर्तों को सन्तुष्ट करता है **[MP PET 1993]**

(a) $[0, 3]$ (b) $[-3, 0]$
(c) $[1.5, 3]$ (d) किसी अंतराल के लिए नहीं

2. फलन $f(x) = e^x, a = 0, b = 1$ के लिए मध्यमान प्रमेय में c का मान होगा **[DCE 2002]**

(a) $\log x$ (b) $\log(e-1)$
(c) 0 (d) 1

3. $[-1, 1]$ पर परिभाषित फलन $f(x) = |x|$ के लिए रोले का प्रमेय लागू नहीं है, क्योंकि **[AISSE 1986; MP PET 1994, 95]**

(a) $[-1, 1]$ पर f सतत् नहीं है
(b) $(-1,1)$ पर f अवकलनीय नहीं है
(c) $f(-1) \ne f(1)$
(d) $f(-1) = f(1) \ne 0$

4. यदि $f(x) = \cos x, 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$, तो मध्यमान प्रमेय की वास्तविक संख्या 'c' है **[MP PET 1994]**

(a) $\frac{\pi}{6}$ (b) $\frac{\pi}{4}$

(c) $\sin^{-1}\left(\frac{2}{\pi}\right)$ (d) $\cos^{-1}\left(\frac{2}{\pi}\right)$

5. मध्यमान प्रमेय $f(b) - f(a) = (b-a)f'(x_1)$; $a < x_1 < b$ से यदि $f(x) = \frac{1}{x}$, तो $x_1 =$ **[MP PET 1996]**

(a) $\sqrt{ab}$ (b) $\frac{a+b}{2}$

(c) $\frac{2ab}{a+b}$ (d) $\frac{b-a}{b+a}$

6. फलन $f(x) = x(x+3)e^{-(1/2)x}$ रोले प्रमेय की सभी शर्तों को $[-3, 0]$ में सन्तुष्ट करता है। c का मान है

(a) 0 (b) -1
(c) -2 (d) -3

7. फलन $f(x) = x^2 - 4$ के लिये रोले प्रमेय किस अन्तराल में सत्य है

(a) $[-2, 0]$ (b) $[-2, 2]$
(c) $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ (d) $[0, 2]$

8. फलन $x + \frac{1}{x}, x \in [1, 3]$ के लिए मध्यमान प्रमेय में c का मान है **[MP PET 1997]**

(a) 1 (b) $\sqrt{3}$
(c) 2 (d) इनमें से कोई नहीं

9. यदि मध्यमान प्रमेय से, $f'(x_1) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$, तो **[MP PET 1999]**

(a) $a < x_1 \le b$ (b) $a \le x_1 < b$
(c) $a < x_1 < b$ (d) $a \le x_1 \le b$

10. फलन $f(x)$ मध्यमान प्रमेय की सभी शर्तो को अंतराल $[0, 2]$ में सन्तुष्ट करता है। यदि $f(0) = 0$ और अंतराल $[0, 2]$ में x के सभी मानों के लिये $|f'(x)| \le \frac{1}{2}$, तब

(a) $f(x) \le 2$
(b) $|f(x)| \le 1$
(c) $f(x) = 2x$

(d) $[0, 2]$ में x के कम से कम एक मान के लिये $f(x) = 3$

11. फलन $f(x) = x^3 - 6x^2 + ax + b$ रोले प्रमेय की सभी शर्तों को अंतराल $[1, 3]$ में सन्तुष्ट करता है तब a और b के क्रमशः मान हैं

(a) 11, – 6 (b) – 6, 11
(c) –11, 6 (d) 6, –11

12. अन्तराल $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ में फलन $f(x) = e^{-2x} \sin 2x$ है। रोले प्रमेय के अनुसार एक वास्तविक संख्या $c \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ इस प्रकार है कि $f'(c) = 0$, तब c = **[AMU 1999]**

(a) $\pi/8$ (b) $\pi/6$
(c) $\pi/4$ (d) $\pi/3$

13. वास्तविक मान वाले फलन $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{x + 24 - 10\sqrt{x-1}}$; $1 < x < 26$ के लिए $f'(x)$ का अन्तराल $(1, 26)$ में मान होगा **[MP PET 2000]**

(a) 0 (b) $\frac{1}{\sqrt{x-1}}$
(c) $2\sqrt{x-1} - 5$ (d) इनमें से कोई नहीं

14. यदि $f(x)$, अन्तराल $[1, 2]$ में रौले प्रमेय को संतुष्ट करता है तथा $f(x)$, $[1, 2]$ में सतत् है, तो $\int_1^2 f'(x)dx$ का मान है **[DCE 2002]**

(a) 3 (b) 0
(c) 1 (d) 2

15. यदि फलन $f(x) = x^3 - 6x^2 + ax + b$ रौले प्रमेय को अंतराल $[1, 3]$ में संतुष्ट करता है और $f'\left(\frac{2\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}\right) = 0$, तब **[MP PET 2002]**

(a) $a = -11$ (b) $a = -6$
(c) $a = 6$ (d) $a = 11$

16. मध्यमान प्रमेय $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$ में, यदि $a = 0, b = \frac{1}{2}$ तथा $f(x) = x(x-1)(x-2)$ हो, तो c का मान है **[MP PET 2003]**

(a) $1 - \frac{\sqrt{15}}{6}$ (b) $1 + \sqrt{15}$
(c) $1 - \frac{\sqrt{21}}{6}$ (d) $1 + \sqrt{21}$

17. वक्र $y = x^3$ पर अन्तराल $[-2, 2]$ के बीच स्थित उन बिन्दुओं के भुज, जिन पर खींची गई स्पर्शियों की प्रवणतायें अन्तराल $[-2, 2]$ के लिए मध्यमान प्रमेय (Mean value theorem) द्वारा ज्ञात की जा सकती हैं, हैं **[MP PET 1993]**

(a) $\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$ (b) $\pm\sqrt{3}$
(c) $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ (d) 0

18. फलन $f(x) = (x-3)^2$ मध्यमान प्रमेय की सभी शर्तो को $[3, 4]$ में सन्तुष्ट करता है। यदि $y = (x-3)^2$ पर एक बिन्दु से खींची गई स्पर्श रेखा $(3, 0)$ और $(4, 1)$ को मिलाने वाली जीवा के समान्तर हो, तो वह बिन्दु है

(a) $\left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right)$ (b) $\left(\frac{7}{2}, \frac{1}{4}\right)$
(c) $(1, 4)$ (d) $(4, 1)$

19. मध्यमान प्रमेय $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$ में यदि $a = 4$, $b = 9$ तथा $f(x) = \sqrt{x}$ हो, तो c का मान है **[J & K 2005]**

(a) 8.00 (b) 5.25
(c) 4.00 (d) 6.25

Critical Thinking
Objective Questions

1. $\frac{d}{dx}\tan^{-1}\left[\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\right] =$

[AISSE 1985, 87; DSSE 1982,84; MNR 1985; Karnataka CET 2002; RPET 2002, 03]

(a) $\frac{1}{2(1+x^2)}$ (b) $\frac{1}{1+x^2}$
(c) 1 (d) – 1

2. यदि $y = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2}\log(x + \sqrt{x^2 + a^2})$, तो $\frac{dy}{dx} =$ **[AISSE 1983]**

(a) $\sqrt{x^2 + a^2}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$
(c) $2\sqrt{x^2 + a^2}$ (d) $\frac{2}{\sqrt{x^2 + a^2}}$

3. यदि $y = \cot^{-1}(\cos 2x)^{1/2}$, तो $x = \frac{\pi}{6}$ पर $\frac{dy}{dx}$ का मान होगा **[IIT 1992]**

(a) $\left(\frac{2}{3}\right)^{1/2}$ (b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{1/2}$
(c) $(3)^{1/2}$ (d) $(6)^{1/2}$

4. यदि x एवं y के सभी मानों के लिए $f(x+y) = f(x).f(y)$ तथा $f'(0) = 3$ व $f(5) = 2$, तो $f'(5) =$ **[IIT 1981; Karnataka CET 2000; UPSEAT 2002; MP PET 2002; AIEEE 2002]**

(a) 2 (b) 4
(c) 6 (d) 8

5. यदि $xe^{xy} = y + \sin^2 x$ हो, तो $x = 0$ पर $\frac{dy}{dx} =$ **[IIT 1996]**

(a) –1 (b) – 2
(c) 1 (d) 2

6. यदि $u(x, y) = y\log x + x\log y$, तब $u_x u_y - u_x \log x - u_y \log y + \log x \log y =$ **[EAMCET 2003]**

(a) 0 (b) –1
(c) 1 (d) 2

7. यदि $y = f\left(\frac{2x-1}{x^2+1}\right)$ तथा $f'(x) = \sin x^2$, तो $\frac{dy}{dx} =$ **[IIT 1982]**

(a) $\frac{6x^2 - 2x + 2}{(x^2+1)^2}\sin\left(\frac{2x-1}{x^2+1}\right)^2$

(b) $\frac{6x^2 - 2x + 2}{(x^2+1)^2}\sin^2\left(\frac{2x-1}{x^2+1}\right)$

(c) $\frac{-2x^2 + 2x + 2}{(x^2+1)^2}\sin^2\left(\frac{2x-1}{x^2+1}\right)$

(d) $\frac{-2x^2+2x+2}{(x^2+1)^2}\sin\left(\frac{2x-1}{x^2+1}\right)^2$

8. यदि $x=\sec\theta-\cos\theta$ तथा $y=\sec^n\theta-\cos^n\theta$, तो **[IIT 1989]**

(a) $(x^2+4)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=n^2(y^2+4)$

(b) $(x^2+4)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=x^2(y^2+4)$

(c) $(x^2+4)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=(y^2+4)$

(d) इनमें से कोई नहीं

9. यदि $y=x^{x^{x^{\cdots\cdots\infty}}}$, तो $\frac{dy}{dx}=$ **[UPSEAT 2004; DCE 2000]**

(a) $\frac{y^2}{x(1+y\log x)}$ (b) $\frac{y^2}{x(1-y\log x)}$

(c) $\frac{y}{x(1+y\log x)}$ (d) $\frac{y}{x(1-y\log x)}$

10. यदि $y=(x\log x)^{\log\log x}$, तो $\frac{dy}{dx}=$ **[Roorkee 1981]**

(a) $(x\log x)^{\log\log x}\left\{\frac{1}{x\log x}(\log x+\log\log x)+(\log\log x)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x\log x}\right)\right\}$

(b) $(x\log x)^{x\log x}\log\log x\left[\frac{2}{\log x}+\frac{1}{x}\right]$

(c) $(x\log x)^{x\log x}\frac{\log\log x}{x}\left[\frac{1}{\log x}+1\right]$

(d) इनमें से कोई नहीं

11. $\frac{d}{dx}\left[\tan^{-1}\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}\right]=$ **[Roorkee 1980; Karnataka CET 2005]**

(a) $\frac{-x}{\sqrt{1-x^4}}$ (b) $\frac{x}{\sqrt{1-x^4}}$

(c) $\frac{-1}{2\sqrt{1-x^4}}$ (d) $\frac{1}{2\sqrt{1-x^4}}$

12. यदि $\sqrt{(1-x^6)}+\sqrt{(1-y^6)}=a^3(x^3-y^3)$ हो, तो $\frac{dy}{dx}=$ **[Roorkee 1994]**

(a) $\frac{x^2}{y^2}\sqrt{\frac{1-x^6}{1-y^6}}$ (b) $\frac{y^2}{x^2}\sqrt{\frac{1-y^6}{1-x^6}}$

(c) $\frac{x^2}{y^2}\sqrt{\frac{1-y^6}{1-x^6}}$ (d) इनमें से कोई नहीं

13. यदि $y=\sec^{-1}\frac{2x}{1+x^2}+\sin^{-1}\frac{x-1}{x+1}$, तब $\frac{dy}{dx}=$ **[Pb. CET 2000]**

(a) 1 (b) $\frac{x-1}{x+1}$

(c) अस्तित्व नहीं है (d) इनमें से कोई नहीं

14. $\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)$ का $\tan^{-1}\left(\frac{2x\sqrt{1-x^2}}{1-2x^2}\right)$ के सापेक्ष $x=0$ पर अवकलज है

(a) $\frac{1}{8}$ (b) $\frac{1}{4}$

(c) $\frac{1}{2}$ (d) 1

15. यदि $y^2=p(x)$ एक त्रिघातीय बहुपद है, तब $2\frac{d}{dx}\left\{y^3.\frac{d^2y}{dx^2}\right\}=$ **[IIT 1988; RPET 2000]**

(a) $p'''(x)+p'(x)$ (b) $p''(x).p'''(x)$

(c) $p(x).p'''(x)$ (d) अचर

16. माना $f(x)$ व $g(x)$ दो फलन इस प्रकार हैं कि x के सभी वास्तविक मानों के लिए $f'''(x)$ व $g'''(x)$ विद्यमान हैं। यदि $f(x)g(x)=1$; $\forall\ x\in R$, तो $\frac{f'''}{f'}-\frac{g'''}{g'}=$

(a) $3\left(\frac{f''}{g}-\frac{g''}{f}\right)$ (b) $3\left(\frac{f''}{f}-\frac{g''}{g}\right)$

(c) $3\left(\frac{g''}{g}-\frac{f''}{g}\right)$ (d) $3\left(\frac{f''}{f}-\frac{g''}{f}\right)$

17. यदि $I_n=\frac{d^n}{dx^n}(x^n\log x)$, तब $I_n-nI_{n-1}=$ **[EAMCET 2003]**

(a) n (b) $n-1$

(c) $n!$ (d) $(n-1)!$

18. यदि $x=\sin t$ और $y=\sin pt$, तब $\left(1-x^2\right)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+p^2y=$ **[Pb. CET 2002]**

(a) 0 (b) 1

(c) –1 (d) $\sqrt{2}$

19. माना $f:(0,+\infty)\to R$ और $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$.

यदि $F(x^2)=x^2(1+x)$, तब $f(4)=$ **[IIT Screening 2001]**

(a) $\frac{5}{4}$ (b) 7

(c) 4 (d) 2

20. एक गोलाकार गुब्बारे का आयतन प्रति मिनट 40 घन सेन्टीमीटर की दर से बढ़ रहा है। जिस क्षण गुब्बारे की त्रिज्या 8 सेमी हो, उस क्षण गुब्बारे के पृष्ठ के परिवर्तन की दर होगी **[Roorkee 1983]**

(a) $\frac{5}{2}$ वर्ग सेमी / मिनिट (b) 5 वर्ग सेमी / मिनिट

(c) 10 वर्ग सेमी / मिनिट (d) 20 वर्ग सेमी / मिनिट

21. एक आदमी जिसकी ऊँचाई 1.8 मीटर है, एक बिजली के खम्भे से 1.2 मीटर/सेकण्ड की दर से पीछे हट रहा है। यदि बिजली के खम्भे की ऊँचाई 4.5 मीटर हो, तो आदमी की छाया की लम्बाई किस दर से बढ़ रही है **[MP PET 1989]**

(a) 0.4 मी/सेकण्ड (b) 0.8 मी/सेकण्ड

(c) 1. 2 मी/सेकण्ड (d) इनमें से कोई नहीं

22. अधिकतम आयतन वाले बेलन की त्रिज्या क्या होगी जो R त्रिज्या वाले गोले के भीतर समाहित हो सकता है **[AMU 1999]**

(a) $\frac{2}{3}R$ (b) $\sqrt{\frac{2}{3}}R$

(c) $\frac{3}{4}R$ (d) $\sqrt{\frac{3}{4}}R$

23. एक कण द्वारा t सेकण्ड में चली गई दूरी s (मीटर में)समीकरण $s = t^3 + 2t^2 + t$ द्वारा दी जाती है। एक सेकण्ड के पश्चात् कण की चाल क्या होगी **[UPSEAT 2003]**

(a) 8 सेमी /सेकण्ड (b) 6 सेमी /सेकण्ड

(c) 2 सेमी /सेकण्ड (d) इनमें से कोई नहीं

24. यदि वक्र $y^2 = px^3 + q$ के बिन्दु (2, 3) पर स्पर्श रेखा $y = 4x - 5$ हो, तो **[IIT 1994; UPSEAT 2001]**

(a) $p = 2, q = -7$ (b) $p = -2, q = 7$

(c) $p = -2, q = -7$ (d) $p = 2, q = 7$

25. किन बिन्दुओं पर वक्र $y = \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2$ की स्पर्श रेखा अक्षों के साथ बराबर कोण बनायेगी **[UPSEAT 1999]**

(a) $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{24}\right)$ तथा $\left(-1, -\frac{1}{6}\right)$ (b) $\left(\frac{1}{2}, \frac{4}{9}\right)$ तथा $(-1, 0)$

(c) $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{7}\right)$ तथा $\left(-3, \frac{1}{2}\right)$ (d) $\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{47}\right)$ तथा $\left(-1, -\frac{1}{3}\right)$

26. यदि बिन्दु $(3, 4)$ पर वक्र $y = f(x)$ का अभिलम्ब, x-अक्ष की धनात्मक दिशा के साथ $\frac{3\pi}{4}$ का कोण बनाता है, तब $f'(3)$ का मान है **[IIT Screening 2000; DCE 2001]**

(a) -1 (b) $-\frac{3}{4}$

(c) $\frac{4}{3}$ (d) 1

27. वक्र $y^3 + 3x^2 = 12y$ पर वह बिन्दु, जहाँ स्पर्श रेखा, y-अक्ष के समान्तर अर्थात् ऊर्ध्वाधर है, हैं **[IIT Screening 2002]**

(a) $\left(\pm\frac{4}{\sqrt{3}}, -2\right)$ (b) $\left(\pm\frac{\sqrt{11}}{3}, 1\right)$

(c) $(0, 0)$ (d) $\left(\pm\frac{4}{\sqrt{3}}, 2\right)$

28. यदि $f(x) = \int_0^x \frac{\cos t}{t} dt,\ x > 0$ तब $f(x)$ रखता है **[Kurukshetra CEE 2002]**

(a) उच्चिष्ठ, जब $n = -2, -4, -6, ...$

(b) उच्चिष्ठ, जब $n = -1, -3, -5, ...$

(c) निम्निष्ठ, जब $n = 0, 2, 4, ...$

(d) निम्निष्ठ, जब $n = 1, 3, 5....$

29. यदि $f(x) = x^2 + 2bx + 2c^2$ तथा $g(x) = -x^2 - 2cx + b^2$ इस प्रकार हैं कि न्यूनतम $f(x) >$ अधिकतम $g(x)$, तब b व c के मध्य सम्बन्ध है **[IIT Screening 2003]**

(a) b व c के वास्तविक मान नहीं हैं

(b) $0 < c < b\sqrt{2}$

(c) $|c| < |b|\sqrt{2}$

(d) $|c| > |b|\sqrt{2}$

30. मैगनेटिक टेप पर N वर्णों (Characters) की सूचना रखी गई है जो x वर्ण के दलों (Batches) में है, एक दल का प्रसंस्करण (Processing) समय $\alpha + \beta x^2$ सेकण्ड है, α तथा β स्थिरांक हैं। शीघ्र प्रसंस्करण करने के लिए x का अभीष्ट मान (Optimal value) है **[MNR 1986]**

(a) $\frac{\alpha}{\beta}$ (b) $\frac{\beta}{\alpha}$

(c) $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$ (d) $\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$

31. अन्तराल $[0, 1]$ में फलन $x^{25}(1-x)^{75}$ का महत्तम मान निम्न बिन्दु पर होता है **[IIT 1995]**

(a) 0 (b) 1/2

(c) 1/3 (d) 1/4

32. फलन $f(x) = \int_{-1}^{x} t(e^t - 1)(t-1)(t-2)^3(t-3)^5 dt$ स्थानीय निमनिष्ठ रखता है **[IIT 1999]**

(a) $x = 0$ पर (b) $x = 1$ पर

(c) $x = 2$ पर (d) $x = 3$ पर

33. $\exp(2 + \sqrt{3}\cos x + \sin x)$ का अधिकतम मान है **[AMU 1999]**

(a) $\exp(2)$ (b) $\exp(2 - \sqrt{3})$

(c) $\exp(4)$ (d) 1

34. यदि फलन $f(x) = 2x^3 - 9ax^2 + 12a^2x + 1$, (जहाँ $a > 0$), p तथा q पर क्रमशः महत्तम तथा न्यूनतम मान इस प्रकार ग्रहण करता है कि $p^2 = q$, तब a का मान है **[AIEEE 2003]**

(a) 3 (b) 1

(c) 2 (d) $\frac{1}{2}$

35. फलन $f(x) = \frac{\ln(\pi + x)}{\ln(e + x)}$ है **[IIT 1995]**

(a) $[0, \infty)$ पर वर्धमान

(b) $[0, \infty)$ पर ह्रासमान

(c) $\left[0, \frac{\pi}{e}\right)$ पर ह्रासमान व $\left[\frac{\pi}{e}, \infty\right)$ पर वर्धमान है

(d) $\left[0, \frac{\pi}{e}\right)$ पर वर्धमान व $\left[\frac{\pi}{e}, \infty\right)$ पर ह्रासमान है

36. फलन $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$ वर्धमान है, यदि **[IIT 1999; Pb. CET 2001]**

(a) $0 < x < \frac{\pi}{8}$ (b) $\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{8}$

(c) $\frac{3\pi}{8} < x < \frac{5\pi}{8}$ (d) $\frac{5\pi}{8} < x < \frac{3\pi}{4}$

37. माना सभी वास्तविक संख्याओं x के लिये $h(x) = f(x) - (f(x))^2 + (f(x))^3$ है। तब **[IIT 1998]**

(a) जब भी f वर्धमान है, h वर्धमान है

(b) जब भी f ह्रासमान है, h वर्धमान है

(c) जब भी f ह्रासमान है, h ह्रासमान है

(d) सामान्यतः कुछ नहीं कहा जा सकता है

38. अंतराल [0, 1] में लैंगरेंज मध्यमान प्रमेय निम्न में से किसके लिए लागू नहीं है [IIT Screening 2003]

(a) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}-x, & x<\frac{1}{2}\\ \left(\frac{1}{2}-x\right)^2, & x\geq\frac{1}{2}\end{cases}$ (b) $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$

(c) $f(x)=x|x|$ (d) $f(x)=|x|$

39. यदि फलन $f(x)=x^3-6ax^2+5x$ अन्तराल [1, 2] के लिए लेगराँज मध्यमान प्रमेय की शर्तों को सन्तुष्ट करता है और वक्र $y=f(x)$ की $x=\frac{7}{4}$ पर स्पर्श रेखा, वक्र की कोटियों $x=1$ व $x=2$ से प्रतिच्छेद बिन्दुओं को मिलाने वाली जीवा के समान्तर है, तब a का मान है [MP PET 1998]

(a) $\frac{35}{16}$ (b) $\frac{35}{48}$

(c) $\frac{7}{16}$ (d) $\frac{5}{16}$

40. माना $f(x)=\begin{cases}x^\alpha \ln x, x>0\\ 0, \quad x=0\end{cases}$, तब $x\in[0,1]$ के लिए f पर रोले की प्रमेय मान्य है, यदि $\alpha=$ [IIT Screening 2004]

(a) – 2 (b) – 1

(c) 0 (d) $\frac{1}{2}$

Answers

एक बिन्दु पर अवकलज, मानक अवकलन

1	b	2	c	3	a	4	c	5	b
6	c	7	a	8	a	9	a	10	a
11	a	12	c	13	b	14	d	15	c
16	a	17	d	18	d	19	c	20	c
21	a	22	a	23	d	24	a	25	b
26	b	27	d	28	b	29	a	30	c
31	a	32	b	33	a	34	c	35	c
36	b	37	b	38	c	39	b	40	a
41	b	42	c	43	b	44	b	45	a
46	a	47	b	48	b	49	a	50	a
51	d	52	b	53	b	54	d	55	a
56	b	57	a	58	a	59	a	60	b
61	c	62	d	63	a	64	c	65	a
66	b	67	a	68	b	69	a	70	b
71	d	72	b	73	c	74	b	75	a
76	b	77	a	78	c	79	d	80	a
81	c	82	c	83	a	84	a	85	a
86	b	87	b	88	c	89	a	90	d
91	d	92	b	93	a	94	d	95	c
96	d	97	a	98	b	99	a	100	b
101	c	102	c	103	c	104	a	105	b
106	a	107	b	108	b	109	c	110	b
111	c	112	c	113	b	114	a	115	a
116	d	117	b	118	b	119	a	120	a
121	c	122	a	123	a	124	c	125	b
126	c	127	a	128	c	129	c	130	b
131	c	132	b	133	a	134	d	135	b
136	a	137	a	138	a	139	d	140	d
141	d	142	a	143	b	144	c	145	c
146	d	147	b	148	c	149	d	150	b
151	a	152	b	153	a	154	b	155	b
156	c	157	d	158	a	159	a	160	c
161	a	162	b	163	a	164	a	165	c
166	c	167	c	168	b	169	a	170	c
171	d	172	c	173	b	174	b	175	b
176	d	177	b	178	a	179	e	180	d
181	a	182	b	183	b				

अस्पष्ट फलनों का अवकलन, प्राचलिक व संयुक्त फलनों का अवकलन, लघुगणकीय अवकलन, अनन्त श्रेणियों के अवकलन

1	c	2	b	3	a	4	c	5	c
6	d	7	a	8	c	9	d	10	a
11	c	12	b	13	c	14	a	15	b
16	a	17	a	18	a	19	c	20	b
21	c	22	a	23	c	24	d	25	b
26	a	27	a	28	a	29	b	30	b
31	b	32	c	33	c	34	a	35	c
36	d	37	a	38	a	39	b	40	d
41	d	42	b	43	a	44	d	45	c
46	c	47	a	48	a	49	a	50	b
51	a	52	a	53	b	54	b	55	b
56	a	57	a	58	c	59	c	60	a
61	a	62	a	63	c	64	d	65	a
66	a	67	b	68	c	69	a	70	b
71	a	72	b	73	a	74	c	75	a
76	d	77	c	78	c	79	a	80	c
81	b	82	c	83	d	84	c	85	c

प्रतिस्थापन द्वारा अवकलन, उच्च कोटि के अवकलज

1	a	2	b	3	d	4	c	5	c
6	a	7	d	8	c	9	b	10	b
11	c	12	d	13	c	14	a	15	d
16	c	17	b	18	a	19	b	20	b
21	a	22	c	23	c	24	c	25	c
26	b	27	d	28	a	29	a	30	c
31	a	32	d	33	b	34	b	35	d
36	a	37	c	38	b	39	d	40	a
41	c	42	c	43	a	44	b	45	b
46	a	47	c	48	c	49	c	50	c
51	b	52	a	53	a	54	c	55	b
56	b	57	b	58	b	59	c	60	b
61	b	62	d	63	c	64	a	65	d

66	c	67	a	68	d	69	b	70	b
71	d	72	d	73	c	74	d	75	d
76	a	77	a	78	b	79	a	80	d
81	d	82	b	83	a	84	e		

आंशिक अवकलन

1	d	2	c	3	b	4	b	5	d
6	c	7	a	8	c	9	d	10	b
11	a	12	b	13	c	14	d	15	b
16	b	17	b	18	a	19	c	20	b
21	b								

यांत्रिकी में अनुप्रयोग व परिवर्तन की दर

1	a	2	a	3	c	4	c	5	c
6	c	7	c	8	d	9	a	10	b
11	a	12	b	13	c	14	c	15	b
16	d	17	a	18	c	19	a	20	d
21	b	22	d	23	b	24	a	25	b
26	a	27	a	28	b	29	b	30	c
31	c	32	d	33	c	34	a	35	c
36	b	37	a	38	a	39	b	40	b
41	d	42	c	43	c	44	c	45	c
46	b	47	a	48	c	49	c	50	c
51	c	52	c	53	c	54	c	55	d
56	a	57	c	58	a	59	a	60	d
61	b	62	c	63	e	64	a	65	b

स्पर्श रेखा तथा अभिलम्ब

1	d	2	c	3	b	4	c	5	a
6	a	7	b	8	c	9	c	10	a
11	b	12	c	13	a	14	d	15	c
16	c	17	c	18	a	19	a	20	d
21	d	22	b	23	d	24	b	25	c
26	c	27	b	28	a	29	d	30	c
31	b	32	d	33	a	34	a	35	a
36	d	37	a	38	c	39	b		

उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ

1	d	2	b	3	b	4	c	5	b
6	c	7	d	8	d	9	c	10	d
11	a	12	d	13	c	14	c	15	c
16	c	17	c	18	c	19	d	20	d
21	a	22	a	23	b	24	c	25	a
26	b	27	c	28	c	29	b	30	b
31	b	32	c	33	b	34	d	35	a
36	d	37	c	38	d	39	a	40	c
41	b	42	b	43	c	44	a	45	c
46	c	47	a	48	d	49	d	50	b
51	c	52	a	53	a	54	b	55	c
56	c	57	b	58	b	59	d	60	d
61	a	62	c	63	b	64	b	65	c
66	a	67	b	68	c	69	d	70	b
71	c	72	a	73	b	74	b	75	a
76	d	77	d	78	d	79	c	80	a
81	c	82	b	83	d	84	a	85	a
86	a	87	a	88	a	89	d	90	b
91	b	92	b	93	d	94	d	95	d
96	a	97	b	98	c				

वर्धमान तथा ह्रासमान फलन

1	a	2	d	3	c	4	c	5	c
6	b	7	a	8	b	9	c	10	b
11	d	12	b	13	c	14	a	15	b
16	d	17	a	18	a	19	c	20	b
21	d	22	a	23	c	24	b	25	c
26	b	27	a	28	a	29	d	30	b
31	c	32	d	33	a,b	34	c	35	d
36	b	37	a	38	c	39	d	40	c
41	c	42	d	43	a	44	a	45	c
46	d	47	a	48	d	49	b	50	d
51	b	52	a	53	b	54	b	55	a
56	c	57	d	58	a	59	c	60	a
61	d	62	a	63	b	64	d	65	c
66	a	67	b	68	a				

रोले की प्रमेय, लेग्रांज की मध्यमान प्रमेय

1	d	2	b	3	b	4	c	5	a
6	c	7	b	8	b	9	c	10	b
11	a	12	a	13	a	14	b	15	d
16	c	17	a	18	b	19	d		

Critical Thinking Questions

1	d	2	a	3	a	4	c	5	c
6	c	7	d	8	a	9	b	10	a
11	a	12	c	13	c	14	b	15	c
16	b	17	d	18	a	19	c	20	c
21	b	22	b	23	a	24	a	25	a
26	d	27	d	28	b,d	29	d	30	c
31	d	32	b,d	33	c	34	c	35	b
36	b	37	a, c	38	a	39	b	40	d

AS Answers and Solutions

एक बिन्दु पर अवकलज, मानक अवकलन

1. (b) $\frac{d}{dx}(\log\tan x)=\frac{1}{\tan x}\sec^2 x=\frac{\cos x}{\cos^2 x\sin x}$

$=\frac{2}{2}\frac{1}{\cos x\sin x}=2\operatorname{cosec}2x$.

2. (c) $\frac{d}{dx}\log(\log x)=\frac{1}{x}.\frac{1}{\log x}=(x\log x)^{-1}$.

3. (a) $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2=\frac{d}{dx}\left[x+\frac{1}{x}+1\right]=1-\frac{1}{x^2}$.

4. (c) $y=x+\frac{1}{x}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=1-\frac{1}{x^2}$

$\therefore\ x^2.\frac{dy}{dx}-xy+2=x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)-x\left(x+\frac{1}{x}\right)+2=0$.

5. (b) $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^4\sec x}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{\cos x}{x^4}\right)=\frac{x^4(-\sin x)-\cos x(4x^3)}{(x^4)^2}$

$=\frac{-x^3(x\sin x+4\cos x)}{x^8}=\frac{-(x\sin x+4\cos x)}{x^5}$.

6. (c) $y=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+....+\frac{x^n}{n!}$

$\Rightarrow\ \frac{dy}{dx}=0+1+x+\frac{x^2}{2!}+....+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$

$\Rightarrow\ \frac{dy}{dx}+\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+.....+\frac{x^n}{n!}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=y-\frac{x^n}{n!}$.

7. (a) $y=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+.....\infty\Rightarrow y=e^x$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर, $\frac{dy}{dx}=e^x=y$.

8. (a) $z=a-\frac{1}{y}\Rightarrow\frac{dz}{dy}=\frac{1}{y^2}=(a-z)^2$.

9. (a) $y=x\sin x\Rightarrow\frac{dy}{dx}=x\cos x+\sin x\ \Rightarrow\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\cot x+\frac{1}{x}$.

10. (a) $\frac{d}{dx}\left(x^2e^x\sin x\right)=x^2\frac{d}{dx}\left(e^x\sin x\right)+e^x\sin x\frac{d}{dx}(x^2)$

$=xe^x(2\sin x+x\sin x+x\cos x)$.

11. (a) $\frac{d}{dx}\left[\tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{1+\sin x}\right)\right]$

$=\frac{d}{dx}\left[\tan^{-1}\left(\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\right)\right]$

$=\frac{d}{dx}\left[\tan^{-1}\left(\frac{1-\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)}\right)\right]=\frac{d}{dx}\left[\tan^{-1}\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right]=-\frac{1}{2}$

12. (c) $\frac{d}{dx}[\cos(1-x^2)^2]=-\sin(1-x^2)^2\frac{d}{dx}(1-x^2)^2$

$=4x(1-x^2)\sin(1-x^2)^2$.

13. (b) $\frac{d}{dx}\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)=x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)+2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

$=-\frac{1}{x^2}.x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)+2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)=2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

14. (d) चूँकि $\frac{dy}{dx}=-\sin(\sin x^2).\cos x^2.2x$

$\therefore\ x=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ पर, $\cos x^2=\cos\frac{\pi}{2}=0\Rightarrow\frac{dy}{dx}=0$.

15. (c) $x=\sin A$ और $\sqrt{x}=\sin B$ रखने पर,

$y=\sin^{-1}(\sin A\sqrt{1-\sin^2 B}+\sin B\sqrt{1-\sin^2 A})$

$=\sin^{-1}[\sin(A+B)]=A+B=\sin^{-1}x+\sin^{-1}\sqrt{x}$

$\Rightarrow\ \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$.

16. (a) $\log|x|=\log x$, यदि $x>0$ $=\log(-x)$, यदि $x<0$

अतः $\frac{d}{dx}\{\log|x|\}=\frac{1}{x}$, यदि $x>0$

$=\left(\frac{1}{-x}\right)(-1)=\frac{1}{x}$, यदि $x<0$

इस प्रकार, $\frac{d}{dx}\{\log|x|\}=\frac{1}{x}$, यदि $x\neq0$.

17. (d) $y=a\sin x+b\cos x$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$\frac{dy}{dx}=a\cos x-b\sin x$

अब $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=(a\cos x-b\sin x)^2$

$=a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x-2ab\sin x\cos x$

तथा $y^2=(a\sin x+b\cos x)^2$

$=a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x+2ab\sin x\cos x$

$\therefore\ \left(\frac{dy}{dx}\right)^2+y^2=a^2(\sin^2 x+\cos^2 x)+b^2(\sin^2 x+\cos^2 x)$

अतः, $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+y^2=(a^2+b^2)=$ अचर.

18. (d) $f(x)=x^2-3x$ व $f'(x)=2x-3$

लेकिन $f(x)=f'(x)\Rightarrow x^2-3x=2x-3$

$\Rightarrow\ x^2-5x+3=0$

$\therefore x=\frac{5\pm\sqrt{25-12}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{13}}{2}$.

19. (c) $f'(x)=m=1\ \Rightarrow\ f'(0)=m=1$ और $f(0)=c=1$

$\therefore f(2)=2\times1+1=3$.

20. (c) चूँकि x की अधिकतम घात 5 है, $\therefore\ y_6=0$.

21. (a) $y = x\left[\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)+\sin x\right]+\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$\Rightarrow y = x(\cos x+\sin x)+\frac{1}{2\sqrt{x}}$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$\frac{dy}{dx} = x\frac{d}{dx}(\cos x+\sin x)+(\cos x+\sin x)-\frac{1}{4}x^{-3/2}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = (1+x)\cos x+(1-x)\sin x-\frac{1}{4x\sqrt{x}}$.

22. (a) माना $y = a^x+\log x.\sin x$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$\frac{dy}{dx} = a^x\log_e(a)+\frac{1}{x}\sin x+\log x.\cos x$.

23. (d) $\frac{d}{dx}\tan^{-1}\left(\frac{ax-b}{bx+a}\right) = \frac{1}{1+\left(\frac{ax-b}{bx+a}\right)^2}.\frac{d}{dx}\left(\frac{ax-b}{bx+a}\right)$

$= \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2+a^2x^2+b^2x^2} = \frac{1}{1+x^2}$.

24. (a) माना $y = \tan^{-1}\sqrt{\frac{1+\cos\frac{x}{2}}{1-\cos\frac{x}{2}}} = \tan^{-1}\sqrt{\frac{2\cos^2\frac{x}{4}}{2\sin^2\frac{x}{4}}}$

$y = \tan^{-1}\cot\frac{x}{4} = \tan^{-1}\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{4}\right) = \frac{\pi}{2}-\frac{x}{4}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{4}$.

25. (b) $y = \sqrt{\frac{1-\sin 2x}{1+\sin 2x}} = \frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}$

$= \frac{1-\tan x}{1+\tan x} = \tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\sec^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$.

26. (b) $y^2 = (1-x^2) \Rightarrow 2y\frac{dy}{dx} = -2x$ या $\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y} = \frac{-xy}{(1-x^2)}$

या $(1-x^2)\frac{dy}{dx}+xy = 0$.

27. (d) $\frac{d}{dx}\left[\frac{\cot^2 x-1}{\cot^2 x+1}\right] = \frac{d}{dx}\left[\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x+\sin^2 x}\right]$

$= \frac{d}{dx}[\cos 2x] = -2\sin 2x$.

28. (b) $f(x) = x\tan^{-1}x$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर, $f'(x) = x\frac{1}{1+x^2}+\tan^{-1}x$

$x = 1$ रखने पर, $f'(1) = \frac{1}{2}+\tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$.

29. (a) $y = \log_{10}x+\log_x 10+\log_x x+\log_{10}10$

$= \log_{10}x+\frac{\log_e 10}{\log x}+1+1$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\log_{10}e-\frac{\log_e 10}{x(\log_e x)^2}$.

30. (c) $\frac{dy}{dx} = -b\sin\log\left(\frac{x}{n}\right)^n\frac{1}{(x/n)^n}\frac{n}{n}\left(\frac{x}{n}\right)^{n-1} = -\frac{nb}{x}\sin\log\left(\frac{x}{n}\right)^n$.

31. (a) $\frac{d}{dx}[\sin^n x\cos nx] = n\sin^{n-1}x\cos x\cos nx-n\sin nx\sin^n x$

$= n\sin^{n-1}x[\cos x\cos nx-\sin nx\sin x] = n\sin^{n-1}x\cos(n+1)x$.

32. (b) $f(x) = \log_x(\log x) = \frac{\log(\log x)}{\log x}$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\log(\log x)}{(\log x)^2} \Rightarrow f'(e) = \frac{\frac{1}{e}-0}{1} = \frac{1}{e}$.

33. (a) $y = \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{1/4}-\frac{1}{2}\tan^{-1}x$

y का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{1/4}\frac{1}{4}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-3/4}\left[\frac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)^2}\right]-\frac{1}{2}.\frac{1}{1+x^2}$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\frac{1}{(1-x)^2}-\frac{1}{2(1+x^2)}$

$= \frac{1}{2}.\frac{1}{(1-x^2)}-\frac{1}{2}\frac{1}{(1+x^2)} = \frac{x^2}{1-x^4}$.

34. (c) $y = \tan^{-1}\frac{4x}{1+5x^2}+\tan^{-1}\frac{2+3x}{3-2x}$

$= \tan^{-1}\frac{5x-x}{1+5x.x}+\tan^{-1}\frac{\frac{2}{3}+x}{1-\frac{2}{3}.x}$

$= \tan^{-1}5x-\tan^{-1}x+\tan^{-1}\frac{2}{3}+\tan^{-1}x$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{5}{1+25x^2}$

35. (c) $\frac{d}{dx}[\log_7(\log_7 x)] = \frac{d}{dx}\left(\frac{\log_e(\log_7 x)}{\log_e 7}\right)$

$= \frac{1}{x\log_e x}.\frac{1}{\log_e 7} = \frac{\log_7 e}{x\log_e x}$.

36. (b) $f(x) = \sqrt{1+\cos^2(x^2)}$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+\cos^2(x)^2}}.(2\cos x^2).(-\sin x^2).(2x)$

$f'(x) = \frac{-x\sin 2x^2}{\sqrt{1+\cos^2(x^2)}}$

$x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ पर, $f'\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) = \frac{-\frac{\sqrt{\pi}}{2}.\sin\frac{2\pi}{4}}{\sqrt{1+\cos^2\frac{\pi}{4}}} = \frac{-\frac{\sqrt{\pi}}{2}.1}{\sqrt{\frac{3}{2}}}$

$\therefore f'\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) = -\sqrt{\frac{\pi}{6}}$.

37. (b) $x^{2/3}+y^{2/3} = a^{2/3}$

$\Rightarrow \frac{2}{3}x^{-1/3}+\frac{2}{3}y^{-1/3}\frac{dy}{dx} = 0$ या $\frac{dy}{dx} = -\left(\frac{x}{y}\right)^{-1/3} = -\left(\frac{y}{x}\right)^{1/3}$.

38. (c) $\frac{d}{dx}[(1+x^2)\tan^{-1}x] = 1 + 2x\tan^{-1}x$.

39. (b) $y = \log\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\left[\frac{(1-\sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{x}} + (1+\sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(1-\sqrt{x})^2}\right]$$

$$= \frac{1}{2(1-x)\sqrt{x}}[1-\sqrt{x}+1+\sqrt{x}] = \frac{1}{\sqrt{x}(1-x)}.$$

40. (a) $e^{x+3\log x} = e^x.e^{3\log x} = e^x.e^{\log x^3} = e^x.x^3$

$\therefore\ y = e^x.x^3 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^x.3x^2 + x^3.e^x = e^x x^2(3+x)$

41. (b) $\frac{d}{dx}\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}} = \frac{d}{dx}\cot x = -\text{cosec}^2 x$.

42. (c) $\frac{d}{dx}\log\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)}\sec^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right).\frac{1}{2}$

$$= \frac{1}{2}.\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)} = \frac{1}{\cos x} = \sec x.$$

43. (b) $\frac{d}{dx}\log(\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b})$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b}}\right)\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{x-a}}+\frac{1}{\sqrt{x-b}}\right]$$

$$= \left[\frac{\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b}}{\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b}}\right]\frac{1}{2\sqrt{(x-a)(x-b)}} = \frac{1}{2\sqrt{(x-a)(x-b)}}.$$

44. (b) $\frac{d}{dx}\tan^{-1}(\sec x+\tan x) = \frac{d}{dx}\tan^{-1}\left(\frac{1+\sin x}{\cos x}\right)$

$$= \frac{d}{dx}\tan^{-1}\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)+\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)-\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

45. (a) $\frac{d}{dx}\cos^{-1}\sqrt{\cos x} = \frac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}\sqrt{1-\cos x}}$

$$= \frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{2\sqrt{\cos x}\sqrt{1-\cos x}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+\cos x}{\cos x}}.$$

46. (a) $\frac{d}{dx}(e^x\log\sin 2x) = e^x\log\sin 2x + 2e^x\frac{1}{\sin 2x}\cos 2x$

$= e^x\log\sin 2x + e^x 2\cot 2x = e^x(\log\sin 2x + 2\cot 2x)$.

47. (b) $\frac{d}{dx}\tan^{-1}\frac{4\sqrt{x}}{1-4x}$

$$= \frac{1}{1+\left(\frac{4\sqrt{x}}{1-4x}\right)^2}.\left[\frac{(1-4x)4\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)-4\sqrt{x}(-4)}{(1-4x)^2}\right]$$

$$= \frac{2(1+4x)}{\sqrt{x}(1+4x)^2} = \frac{2}{\sqrt{x}(1+4x)}.$$

48. (b) $y = \sin\{\cos(\sin x)\}$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\cos\{\cos(\sin x)\}\sin(\sin x)\cos x.$$

49. (a) $y = \sec^{-1}\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)+\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right)$

$$= \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right)+\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 0\ , \qquad \left\{\because \sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}\right\}.$$

50. (a) $x = \sin\theta$ रखने पर, $\frac{d}{dx}\sin^{-1}(3x-4x^3)$

$$= \frac{d}{dx}\sin^{-1}(\sin 3\theta) = \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}.$$

51. (d) $y = t^{4/3} - 3t^{-2/3}$

$$\therefore \frac{dy}{dt} = \frac{4}{3}t^{1/3} + 3\times\frac{2}{3}t^{-5/3} = \frac{4t^2+6}{3t^{5/3}} = \frac{2(2t^2+3)}{3t^{5/3}}.$$

52. (b) $y = x^2\log x + \frac{2}{\sqrt{x}}$

$$\frac{dy}{dx} = 2x\log x + x - x^{-3/2} = x + 2x\log x - \frac{1}{x^{3/2}}.$$

53. (b) $\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x}{1+x^2}\right) = \frac{(1+x^2)e^x - e^x(2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{e^x(1-x)^2}{(1+x^2)^2}$

54. (d) $y = \frac{\tan x+\cot x}{\tan x-\cot x} = -\frac{1+\tan^2 x}{1-\tan^2 x} = -\sec 2x$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -2\sec 2x\tan 2x.$$

55. (a) $\frac{dA}{dx} = \frac{\sqrt{x}\{2^x\log_e 2\cot x - 2^x\text{cosec}^2 x\} - 2^x\cot x\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}$

$$= \frac{2^{x-1}\left\{-2x\,\text{cosec}^2 x + \cot x.\log\left(\frac{4^x}{e}\right)\right\}}{x^{3/2}}.$$

56. (b) $\frac{d}{dx}\left(\frac{\log x}{\sin x}\right) = \frac{\frac{\sin x}{x} - \log x.\cos x}{\sin^2 x}$.

57. (a) परिमेयकरण करने पर, $y = \frac{2x^2+2\sqrt{x^4-1}}{2} = x^2 + (x^4-1)^{1/2}$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2x + \frac{2x^3}{\sqrt{x^4-1}}.$$

58. (a) $y = \frac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}} \Rightarrow y = \frac{(\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x})^2}{(a+x)-(a-x)}$

$$\Rightarrow y = \frac{(a+x)+(a-x)-2(\sqrt{a^2-x^2})}{2x}$$

$$= \frac{2a-2\sqrt{a^2-x^2}}{2x} \text{ या } y = \frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x} \quad \text{.....(i)}$$

y का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x\left[-\frac{1}{2\sqrt{a^2-x^2}}(-2x)\right]-(a-\sqrt{a^2-x^2})}{x^2}$$

$$=\frac{x^2-a\sqrt{a^2-x^2}+a^2-x^2}{x^2\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{a(a-\sqrt{a^2-x^2})}{x^2\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$=\frac{a}{x\sqrt{a^2-x^2}}\left[\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right]=\frac{ay}{x\sqrt{a^2-x^2}}, \text{ [समी. (i) से]}$$

59. (a) $y=(x\cot^3 x)^{3/2}$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{3}{2}(x\cot^3 x)^{1/2}[\cot^3 x+3x\cot^2 x(-\text{cosec}^2 x)]$$

$$=\frac{3}{2}(x\cot^3 x)^{1/2}[\cot^3 x-3x\cot^2 x\,\text{cosec}^2 x].$$

60. (b) $\frac{d}{dx}\{\cos(\sin x^2)\}=-\sin(\sin x^2)\cos x^2.2x$.

61. (c) $y=\sin(\sqrt{\sin x+\cos x})$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\frac{\cos(\sqrt{\sin x+\cos x})}{\sqrt{\sin x+\cos x}}(\cos x-\sin x).$$

62. (d) $\frac{dy}{dx}=\cos\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)\left[\frac{(1-x^2)2x+(1+x^2)2x}{(1-x^2)^2}\right]$

$$=\frac{4x}{(1-x^2)^2}\cos\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right).$$

63. (a) $y=\sqrt{\left(\frac{1+\tan x}{1-\tan x}\right)}$ या $y=\sqrt{\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}}\sec^2\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\left[\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right]}\sec^2\left(\frac{\pi}{4}+x\right).$$

64. (c) $\frac{d}{dx}[x^2+\cos x]^4=4[x^2+\cos x]^3[2x-\sin x]$.

65. (a) माना $y^2=x\sin x\Rightarrow 2y\frac{dy}{dx}=\sin x+x\cos x$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{[\sin x+x\cos x]}{2\sqrt{x\sin x}}.$$

66. (b) $\frac{d}{dx}[\sqrt{\sec^2 x+\text{cosec}^2 x}]=\frac{d}{dx}\left[\sqrt{\left(\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}\right)}\right]$

$$=\frac{d}{dx}[2\,\text{cosec}\,2x]=-4\,\text{cosec}\,2x\cot 2x.$$

67. (a) $\frac{d}{dx}\left(\frac{\sec x+\tan x}{\sec x-\tan x}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right)$.

68. (b) $\frac{d}{dx}\left(x^3\tan^2\frac{x}{2}\right)=3x^2\tan^2\frac{x}{2}+2x^3\tan\frac{x}{2}\sec^2\frac{x}{2}.\frac{1}{2}$

$$=x^3\tan\frac{x}{2}\sec^2\frac{x}{2}+3x^2\tan^2\frac{x}{2}.$$

69. (a) $y=\tan^{-1}\left(\frac{x^{1/3}+a^{1/3}}{1-x^{1/3}.a^{1/3}}\right)=\tan^{-1}(x^{1/3})+\tan^{-1}a^{1/3}$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{1}{3x^{2/3}(1+x^{2/3})}.$$

70. (b) $y=\cot^{-1}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}\left[\frac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)^2}\right]$$

$$=-\frac{2(1-x)^2}{2(1+x^2)(1-x^2)}=-\frac{1}{1+x^2}.$$

71. (d) $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\left(\frac{1+\sin x}{\cos x}\right)}\left[\frac{\cos x\cos x+(1+\sin x)\sin x}{(\cos x)^2}\right]$

$$=\left(\frac{\cos x}{1+\sin x}\right)\frac{\cos^2 x+\sin^2 x+\sin x}{(\cos x)^2}=\sec x.$$

72. (b) $\frac{d}{dx}\left[\log\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\right]=\frac{d}{dx}\left[\log\left(\tan\frac{x}{2}\right)\right]=\text{cosec}\,x$.

73. (c) $\frac{d}{dx}\left[\tan^{-1}\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\right]=\frac{d}{dx}\left[\tan^{-1}\tan\frac{x}{2}\right]=\frac{1}{2}$.

74. (b) $f(x)=\tan^{-1}\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)=\tan^{-1}\left[\tan\frac{x}{2}\right]=\frac{x}{2}$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2}. \text{ अतः } f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}.$$

75. (a) माना $y=e^{x\sin x}\Rightarrow \log y=x\sin x$

$$\therefore \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\sin x+x\cos x \text{ या } \frac{dy}{dx}=e^{x\sin x}(\sin x+x\cos x).$$

76. (b) $\frac{d}{dx}\{\log(\sec x+\tan x)\}=\frac{\sec x\tan x+\sec^2 x}{\sec x+\tan x}=\sec x$.

77. (a) $\frac{d}{dx}\left(xe^{x^2}\right)=e^{x^2}+xe^{x^2}2x=e^{x^2}(1+2x^2)$.

78. (c) $\frac{d}{dx}\left(\frac{e^{ax}}{\sin(bx+c)}\right)=\frac{ae^{ax}\sin(bx+c)-be^{ax}\cos(bx+c)}{\{\sin(bx+c)\}^2}$

$$=\frac{e^{ax}[a\sin(bx+c)-b\cos(bx+c)]}{\sin^2(bx+c)}.$$

79. (d) $\frac{dy}{dx}=-2x^{-3}e^x\log x+x^{-2}\left(e^x\log x+\frac{e^x}{x}\right)$

$$=e^x\left[\frac{1+(x-2)\log x}{x^3}\right].$$

वैकल्पिक : log लेने पर, $\log y=x+\log\log x-2\log x$

$$\Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=1+\frac{1}{x\log x}-\frac{2}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{e^x\log x}{x^2}\left[\frac{x\log x+1-2\log x}{x\log x}\right]$$

$$=\frac{e^x[(x-2)\log x+1]}{x^3}.$$

80. (a) $y = \frac{e^{2x}\cos x}{x\sin x} \Rightarrow \log y = 2x + \log\cos x - \log x - \log\sin x$

$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 2 + \left(\frac{-\sin x}{\cos x}\right) - \frac{1}{x} - \frac{\cos x}{\sin x}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^{2x}\left[\frac{2}{x}\cot x - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\cot x - \frac{\cot^2 x}{x}\right]$

$= \frac{e^{2x}}{x^2}[(2x-1)\cot x - x\,\text{cosec}^2 x]$.

81. (c) $\frac{d}{dx}\{e^{-ax^2}\log(\sin x)\}$

$= e^{-ax^2}(-2ax).\log(\sin x) + e^{-ax^2}\cot x$

$= e^{-ax^2}[\cot x - 2ax\log(\sin x)]$.

82. (c) $y = \log x.e^{(\tan x + x^2)}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = e^{(\tan x+x^2)}.\frac{1}{x} + \log x.e^{(\tan x+x^2)}(\sec^2 x + 2x)$

$= e^{(\tan x+x^2)}\left[\frac{1}{x} + (\sec^2 x + 2x)\log x\right]$.

83. (a) $y = \sqrt{\frac{1+e^x}{1-e^x}}$ या $y^2 = \frac{1+e^x}{1-e^x}$

$2y\frac{dy}{dx} = \frac{(1-e^x)e^x + (1+e^x)e^x}{(1-e^x)^2} = \frac{2e^x}{(1-e^x)^2}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{(1-e^x)^2}\sqrt{\left[\frac{1-e^x}{1+e^x}\right]\left[\frac{1-e^x}{1-e^x}\right]} = \frac{e^x}{(1-e^x)\sqrt{1-e^{2x}}}$.

84. (a) $\frac{d}{dx}\{e^x\log(1+x^2)\} = e^x\log(1+x^2) + e^x\frac{1}{(1+x^2)}2x$

$= e^x\left[\log(1+x^2) + \frac{2x}{1+x^2}\right]$.

85. (a) $y = \frac{e^{2x}+e^{-2x}}{e^{2x}-e^{-2x}}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{(e^{2x}-e^{-2x})2(e^{2x}-e^{-2x}) - (e^{2x}+e^{-2x})2(e^{2x}+e^{-2x})}{(e^{2x}-e^{-2x})^2}$

$= \frac{-8}{(e^{2x}-e^{-2x})^2}$.

86. (b) $\log y = \log 2 + \frac{3}{2}\log(x-\sin x) - \frac{1}{2}\log x$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = y\left[\frac{3}{2}.\frac{1-\cos x}{x-\sin x} - \frac{1}{2x}\right]$.

87. (b) $\frac{d}{dx}\left(\cos^{-1}\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}\right) = \frac{d}{dx}\left[\cos^{-1}\left(\cos\frac{x}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}$.

88. (c) $y = \tan^{-1}\sqrt{a} - \tan^{-1}\sqrt{x}$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर, $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{(1+x)}.\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

89. (a) $y = \sec^{-1}\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + \sin^{-1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

या $y = \cos^{-1}\frac{x-1}{x+1} + \sin^{-1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

$\therefore y = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 0$, $\left(\because \sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}\right)$.

90. (d) $\frac{d}{dx}(\log_e x.\log_a x) = \frac{d}{dx}\left[\log x.\frac{\log x}{\log a}\right]$

$= \frac{2\log x}{x.\log a} = \frac{2\log_a x}{x}$.

91. (d) $\frac{d}{dx}\log\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right) = \frac{1+e^x}{e^x}\times\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right)$

$= \frac{1+e^x}{e^x}\times\frac{e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{1}{1+e^x}$.

92. (b) $\frac{d}{dx}\left[\frac{2}{\pi}\sin x^\circ\right] = \frac{d}{dx}\left[\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi x}{180}\right]$

$= \frac{2}{\pi}\frac{\pi}{180}\cos\frac{x\pi}{180} = \frac{\cos x^\circ}{90}$.

93. (a) $\frac{d}{dx}[\log\sqrt{\sin\sqrt{e^x}}] = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2}\log(\sin\sqrt{e^x})\right]$

$= \frac{1}{2}\cot\sqrt{e^x}\frac{1}{2\sqrt{e^x}}e^x = \frac{1}{4}e^{x/2}\cot(e^{x/2})$

94. (d) $f(x) = |x|$, $f(0) = |0| = 0$

$f(0+0) = \lim_{h\to 0}|0+h| = 0$ और $f(0-0) = \lim_{h\to 0}|0-h| = 0$

$Rf'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{|h|-0}{h}$

$= \lim_{h\to 0}\frac{h}{h}$ (h धनात्मक है)$=1$

$Lf'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0-h)-f(0)}{-h} = \lim_{h\to 0}\frac{|h|-0}{-h}$

$= \lim_{h\to 0}\frac{h}{-h}$($h$ धनात्मक है) $= -1$.

$\therefore Rf'(0) \neq Lf'(0)$. फलन f अवकलनीय नहीं है।

95. (c) $\frac{d}{dx}[\cos(\sin x^2)] = -\sin(\sin x^2)\cos x^2.2x$

$x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ रखने पर,

$-2\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sin\left(\sin\frac{\pi}{2}\right)\cos\frac{\pi}{2} = 0$, $\left[\because \cos\frac{\pi}{2} = 0\right]$.

96. (d) $\frac{d}{dx}[\tan^{-1}(\cot x) + \cot^{-1}(\tan x)]$

$= \frac{1(-\text{cosec}^2 x)}{1+\cot^2 x} - \frac{1(\sec^2 x)}{1+\tan^2 x} = -1-1 = -2$.

97. (a) $\frac{d}{dx}[e^{ax}\cos(bx+c)] = ae^{ax}\cos(bx+c) - be^{ax}\sin(bx+c)$

$= e^{ax}[a\cos(bx+c) - b\sin(bx+c)]$.

98. (b) $y = \log_e\log_e x \Rightarrow e^y = \log_e x \Rightarrow e^y\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$.

99. (a) $y = \sin^{-1}\left(\frac{19}{20}x\right) + \cos^{-1}\left(\frac{19}{20}x\right) = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 0$, $\left(\because \sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}\right)$.

100. (b) $y=(1+x^{1/4})(1+x^{1/2})(1-x^{1/4})$

$\Rightarrow y=(1+x^{1/4})(1-x^{1/4})(1+x^{1/2})$

$\Rightarrow y=(1-x^{1/2})(1+x^{1/2})=1-x \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-1$.

101. (c) $y=\frac{a^{\cos^{-1}x}}{1+a^{\cos^{-1}x}},\ z=a^{\cos^{-1}x} \Rightarrow y=\frac{z}{1+z}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dz}=\frac{(1+z)1-z(1)}{(1+z)^2}=\frac{1}{(1+z)^2}=\frac{1}{(1+a^{\cos^{-1}x})^2}$.

102. (c) $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{(x-x_0)g(x)-0}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}g(x)=g(x_0)$

चूँकि g सतत् है।

103. (c) $y=\frac{\log\tan x}{\log\sin x}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{(\log\sin x)\left(\frac{\sec^2 x}{\tan x}\right)-(\log\tan x)(\cot x)}{(\log\sin x)^2}$

$\Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\pi/4}=\frac{-4}{\log 2}$, (हल करने पर).

104. (a) $y=\log_2[\log_2(x)]=\log_e(\log_e x.\log_2 e).\log_2 e$

$=[\log_e\log_e x+\log_e(\log_2 e)]\log_2 e$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\log_2 e.\frac{1}{x\log_e x}$.

105. (b) $\frac{d}{dx}(e^{x^3})=e^{x^3}.\frac{d}{dx}(x^3)=3x^2.e^{x^3}$.

106. (a) यह एक सूत्र है।

107. (b) $y=\tan^{-1}\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}=\tan^{-1}\sqrt{\frac{2\cos^2\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}}}$

$=\tan^{-1}\cot\frac{x}{2}=\tan^{-1}\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)=\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{1}{2}$.

108. (b) $y=\frac{\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}$

$\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{1-x^2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-(\sin^{-1}x)\frac{1}{2}\frac{(-2x)}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}$

$\Rightarrow (1-x^2)\frac{dy}{dx}=1+x\left(\frac{\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}\right)=1+xy$.

109. (c) यह एक सूत्र है।

110. (b) दिया है $f(2)=4,\ f'(2)=1$

$\therefore \lim_{x\to 2}\frac{xf(2)-2f(x)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{xf(2)-2f(2)+2f(2)-2f(x)}{x-2}$

$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)f(2)}{x-2}-\lim_{x\to 2}\frac{2f(x)-2f(2)}{x-2}$

$=f(2)-2\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f(2)-2f'(2)=4-2(1)=4-2=2$

वैकल्पिक : L-हॉस्पीटल नियम से,

$\lim_{x\to 2}\frac{f(2)-2f'(2)}{1}=2$

111. (c) $\frac{d}{dx}\left\{\log\left(x+\frac{1}{x}\right)\right\}=\frac{1}{x+\frac{1}{x}}\times\frac{d}{dx}\left(x+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{\left(x+\frac{1}{x}\right)}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$

112. (c) $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x}}.\frac{d}{dx}(\sqrt{x})=\frac{1}{2\sqrt{x}.\sqrt{1-x}}$.

113. (b) $\sin^{-1}\sqrt{1-x}=\sin^{-1}\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}=\cos^{-1}\sqrt{x}$

$\therefore y=2\cos^{-1}\sqrt{x}$ या $\frac{dy}{dx}=2.\frac{-1}{\sqrt{1-x}}.\frac{1}{2\sqrt{x}}$ इत्यादि।

वैकल्पिक : $y=\sin^{-1}\sqrt{1-x}+\cos^{-1}\sqrt{x}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-1+x}}.\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}-\frac{1}{\sqrt{1-x}}.\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$=\frac{-2}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}=\frac{-1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$.

114. (a) $y=x^n\log x+x(\log x)^n$

$\frac{dy}{dx}=nx^{n-1}\log x+x^n.\left(\frac{1}{x}\right)+xn(\log x)^{n-1}.\left(\frac{1}{x}\right)+1.(\log x)^n$

$=x^{n-1}(1+n\log x)+(\log x)^{n-1}[n+\log x]$.

115. (a) $y\sqrt{x^2+1}=\log\left\{\sqrt{x^2+1}-x\right\}$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$\frac{dy}{dx}\sqrt{x^2+1}+y.\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}.2x=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}\times\left\{\frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}-1\right\}$

$\Rightarrow (x^2+1)\frac{dy}{dx}+xy=\sqrt{x^2+1}.\frac{-1}{\sqrt{x^2+1}}$

$\Rightarrow (x^2+1)\frac{dy}{dx}+xy+1=0$.

116. (d) $f'(x)=\sec^2 x-1=\tan^2 x$.

117. (b) स्पष्टतः, $f(x)=(\log_{\cot x}\tan x)^2$

$=(\log_{\cot x}(\cot x)^{-1})^2 \Rightarrow f'(x)=0$.

118. (b) $f(x)=3e^{x^2}$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर, $f'(x)=6xe^{x^2}$

$\therefore f(0)=3$ व $f'(0)=0$

$\Rightarrow f'(x)-2xf(x)+\frac{1}{3}f(0)-f'(0)$

$=6xe^{x^2}-6xe^{x^2}+\frac{1}{3}(3)-0=1$.

119. (a) $y=\log_{\cos x}\sin x=\frac{\log\sin x}{\log\cos x}$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\cot x.\log\cos x+(\log\sin x)\tan x}{(\log\cos x)^2}$.

120. (a) $y=\log e^x+\frac{3}{4}\log\frac{x+2}{x-2}=x+\frac{3}{4}\log\frac{x+2}{x-2}$

$\Rightarrow y=x+\frac{3}{4}[\log(x+2)-\log(x-2)]$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=1+\frac{3}{4}\left[\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x-2}\right]=1-\frac{3}{x^2-4}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{x^2-7}{x^2-4}$.

121. (c) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} \Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)}=-1$.

122. (a) $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{\sec\sqrt{x}}\right)=\frac{1}{2\sqrt{\sec\sqrt{x}}}.\frac{d}{dx}(\sec\sqrt{x})$

$=\frac{1}{2(\sec\sqrt{x})^{1/2}}.\sec\sqrt{x}.\tan\sqrt{x}.\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$=\frac{1}{4\sqrt{x}}.(\sec\sqrt{x})^{1/2}.\frac{\sin\sqrt{x}}{\cos\sqrt{x}}=\frac{1}{4\sqrt{x}}(\sec\sqrt{x})^{3/2}.\sin\sqrt{x}$.

123. (a) $y=e^{1+\log_e x}=e^1.e^{\log_e x}=e.x \Rightarrow \frac{dy}{dx}=e$.

124. (c) $f'(x)=2x-6=0 \Rightarrow x=3$.

125. (b) $f(x)=e^x g(x) \Rightarrow f'(x)=e^x g(x)+e^x g'(x)$

$\Rightarrow f'(0)=g(0)+g'(0)=2+1=3$.

126. (c) $y=e^x \log x$ को x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$\frac{dy}{dx}=e^x\times\frac{1}{x}+\log x\times e^x=e^x\left(\frac{1}{x}+\log x\right)$.

127. (a) $y=\cot^{-1}\left[\frac{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}\right]$

$=\cot^{-1}\left[\frac{2+2\cos x}{2\sin x}\right]=\cot^{-1}\left[\frac{1+\cos x}{\sin x}\right]$

$=\cot^{-1}\left[\cot\frac{x}{2}\right]=\frac{x}{2}$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}$.

128. (c) चूँकि $x^0=\frac{\pi x}{180}$ रेडियन.

129. (c) $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{\sin\sqrt{x}}}\times\cos\sqrt{x}\times\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

130. (b) दिया है $y=\log_{10}x^2$

$y=\frac{\log_e x^2}{\log_e 10}$, $\left(\because \log_a b=\frac{\log_e b}{\log_e a}\right)$

$y=\frac{2\log_e x}{\log_e 10}$, $\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{2}{x\log_e 10}$.

131. (c) दिया है, $y=3^{x^2}$

$\because \frac{d}{dx}(a^x)=a^x\log_e a$

$\therefore \frac{dy}{dx}=3^{x^2}\log_e 3\frac{d}{dx}(x^2) \Rightarrow \frac{dy}{dx}=3^{x^2}.2x.\log_e 3$.

132. (b) $f(x)=\sin 2x.\cos 2x.\cos 3x+\log_2 2^{x+3}$

$f(x)=\frac{1}{2}\sin 4x\cos 3x+(x+3)\log_2 2$

$f(x)=\frac{1}{4}[\sin 7x+\sin x]+x+3$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$f'(x)=\frac{1}{4}[7\cos 7x+\cos x]+1$

$f'(x)=\frac{7}{4}\cos 7x+\frac{1}{4}\cos x+1$.

अतः $f'(\pi)=-2+1=-1$.

133. (a) दिया है, $f(x)=\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$

$f(x)=x+\frac{1}{x}+2$ और $f'(x)=3/4$

अतः, $1-\frac{1}{x^2}=\frac{3}{4} \Rightarrow \frac{1}{x^2}=\frac{1}{4} \Rightarrow x=+2,-2$.

134. (d) $y=\frac{1+x^2-2x}{x^2}=\frac{1}{x^2}+1-\frac{2}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{2}{x^3}+\frac{2}{x^2}$.

135. (b) $pv=81 \Rightarrow \frac{dp}{dv}=\frac{-81}{v^2}=\frac{-81}{81}=-1$.

136. (a) $\frac{d}{dx}(\sin 2x^2)=\cos 2x^2.\frac{d}{dx}2x^2=\cos 2x^2.4x=4x.\cos 2x^2$.

137. (a) $\frac{d}{dx}\cosh^{-1}(\sec x)=\frac{1}{\sqrt{\sec^2 x-1}}\frac{d}{dx}\sec x$

$=\frac{1}{\tan x}.\sec x.\tan x=\sec x$.

138. (a) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}+\sqrt{x^2+b^2}}$

$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}+\sqrt{x^2+b^2}}.\frac{\sqrt{x^2+a^2}-\sqrt{x^2+b^2}}{\sqrt{x^2+a^2}-\sqrt{x^2+b^2}}$

$f(x)=\frac{1}{a^2-b^2}\left[\sqrt{x^2+a^2}-\sqrt{x^2+b^2}\right]$

$f'(x)=\frac{1}{a^2-b^2}\left[\frac{2x}{2\sqrt{x^2+a^2}}-\frac{2x}{2\sqrt{x^2+b^2}}\right]$

$f'(x)=\frac{x}{a^2-b^2}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+b^2}}\right]$.

139. (d) $f(x)=\begin{cases}-x^2, x<0\\ x^2, x>0\end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases}-2x, x<0\\ 2x, x>0\end{cases}$

$\therefore f'(x)=2|x|$.

140. (d) $y=f(x)=\begin{cases}1-x, x>0\\ 1+x, x<0\end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases}-1, x>0\\ 1, x<0\end{cases}$

$\because L[f'(0)]\neq R[f'(0)]$; $\therefore$ अस्तित्व नहीं है।

141. (d) $y=\sqrt{\sqrt{x}+1}$

$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{\sqrt{x}+1}}\frac{d}{dx}(\sqrt{x}+1)$

$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{4\sqrt{x}.\sqrt{\sqrt{x}+1}}=\frac{1}{4\sqrt{x(\sqrt{x}+1)}}$.

142. (a) $y=e^{\sqrt{x}} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=e^{\sqrt{x}}.\frac{d}{dx}\sqrt{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$.

143. (b) $f(x)=\cos^{-1}\left[\frac{1-(\log x)^2}{1+(\log x)^2}\right]=2\tan^{-1}(\log x)$

$\Rightarrow f'(x)=2.\frac{1}{1+(\log x)^2}.\frac{1}{x}$, अतः $f'(e)=\frac{1}{e}$

144. (c) $f(x)=|x^2-x| \Rightarrow f'(x)=2x-1 \Rightarrow f'(2)=3$.

145. (c) माना $y = \frac{d}{dx}\{\log f(e^x + 2x)\} = \frac{f'(e^x + 2x)(e^x + 2)}{f(e^x + 2x)}$

$\therefore (y)_{x=0} = \frac{1}{f(1)}.f'(1).3 = \frac{2}{3}.3 = 2$.

146. (d) $f(x) = \log_{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\log\left(\frac{1}{x}\right)}{\log\sqrt{x}} = \frac{(-1)\log x}{(1/2)\log x} = -2$

$\Rightarrow f'(x) = 0$.

147. (b) $f(x) = |x-1| + |x-5|$

$$f(x) = \begin{cases} -(x-1)-(x-5), & x<1 \\ (x-1)-(x-5), & 1<x<5 \\ x-1+x-5, & x>5 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 6-2x, & x<1 \\ 4, & 1<x<5 \\ 2x-6, & x>5 \end{cases}$$

$\because$ $x = 3 \in (1,5)$, $\therefore$ $x = 3$ के लिए, $f(x) = 4$, $f'(x) = 0$.

148. (c) माना $y = \frac{\tan^2 2x - \tan^2 x}{1 - \tan^2 2x \tan^2 x}$

$$= \frac{(\tan 2x - \tan x)}{(1 + \tan 2x \tan x)}\frac{(\tan 2x + \tan x)}{(1 - \tan 2x \tan x)}$$

$$= \tan(2x - x)\tan(2x + x) = \tan x \tan 3x$$

$\therefore$ $\frac{d}{dx}[y.\cot 3x] = \frac{d}{dx}[\tan x] = \sec^2 x$.

149. (d) $y = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{x} - x}{1 + x^{3/2}}\right) = \tan^{-1}(\sqrt{x}) - \tan^{-1}(x)$

$\Rightarrow y' = \frac{1}{1+x}.\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow y'(1) = \frac{1}{2}.\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{-1}{4}$.

150. (b) $10^{-x\tan x}\frac{d}{dx}(10^{x\tan x})$

$= 10^{-x\tan x}.10^{x\tan x}.\log 10(\tan x + x\sec^2 x)$

$= \log 10(\tan x + x\sec^2 x)$.

151. (a) $\lim_{x\to a}\frac{xf(a) - af(x)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{xf(a) - af(a) - af(x) + af(a)}{x-a}$

$= \lim_{x\to a}\frac{f(a)(x-a) - a[f(x) - f(a)]}{x-a} = f(a) - af'(a)$.

152. (b) **ट्रिक :** विकल्प (b) द्वारा, $2(a+b) = 2a + 2b$.

153. (a) $f(x) = |x|^3 \Rightarrow f'(x) = 3|x|^2\frac{d}{dx}|x|$

$x = 0$ पर, $f'(x) = 0.\frac{d}{dx}|x| \Rightarrow f'(x) = 0$.

154. (b) $y = \sqrt{\sin x + y} \Rightarrow y^2 = \sin x + y$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर, $2y.\frac{dy}{dx} = \cos x + \frac{dy}{dx}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx}(2y-1) = \cos x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{2y-1}$.

155. (b) $y = (1+x^2)\tan^{-1}x - x$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = (1+x^2).\frac{1}{(1+x^2)} + \tan^{-1}x(2x) - 1 = 2x\tan^{-1}x$.

156. (c) $x = y\sqrt{1-y^2}$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$1 = \frac{dy}{dx}\sqrt{1-y^2} + y.\frac{1}{2\sqrt{1-y^2}}.(-2y).\frac{dy}{dx}$

$\Rightarrow 1 = \frac{dy}{dx}\sqrt{1-y^2} - \frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}}.\frac{dy}{dx}$

$\Rightarrow 1 = \frac{dy}{dx}\left[\frac{1-y^2-y^2}{\sqrt{1-y^2}}\right] \Rightarrow 1 = \frac{dy}{dx}\left[\frac{1-2y^2}{\sqrt{1-y^2}}\right]$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1-y^2}}{1-2y^2}$.

157. (d) $y = \tan^{-1}\left[\frac{\sin x + \cos x}{\cos x - \sin x}\right] = \tan^{-1}\left[\frac{1+\tan x}{1-\tan x}\right]$

$= \tan^{-1}\left[\frac{\tan(\pi/4) + \tan x}{1 - \tan(\pi/4)\tan x}\right] = \tan^{-1}\tan(\pi/4 + x)$

$\Rightarrow y = (\pi/4) + x \Rightarrow dy/dx = 1$.

158. (a) $y = \frac{a + bx^{3/2}}{x^{5/4}} \Rightarrow y' = \frac{\frac{3}{2}bx^{7/4} - \frac{5}{4}(a + bx^{3/2})x^{1/4}}{x^{5/2}}$

$\because$ $x = 5$ पर, $y' = 0$

$\therefore$ $x = 5$ पर, $\frac{3}{2}bx^{7/4} - \frac{5}{4}(a + bx^{3/2})x^{1/4} = 0$

$\Rightarrow$ $x = 5$ पर, $6bx^{3/2} - 5(a + bx^{3/2}) = 0$

$\Rightarrow$ $x = 5$ पर, $bx^{3/2} = 5a \Rightarrow b(5)^{3/2} = 5a$

$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{5^{3/2}}{5} \Rightarrow a : b = \sqrt{5} : 1$.

159. (a) $\frac{d}{dx}\left[\tan^{-1}\left(\frac{a-x}{1+ax}\right)\right]$.

$= \frac{d}{dx}[\tan^{-1}a - \tan^{-1}x] = 0 - \frac{1}{1+x^2} = -\frac{1}{1+x^2}$.

160. (c) माना $y = \left[\log\left\{e^x\left(\frac{x-2}{x+2}\right)^{3/4}\right\}\right] = \log e^x + \log\left(\frac{x-2}{x+2}\right)^{3/4}$

$\Rightarrow y = x + \frac{3}{4}[\log(x-2) - \log(x+2)]$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1 + \frac{3}{4}\left[\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}\right] = 1 + \frac{3}{(x^2-4)}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x^2-1}{x^2-4}$.

161. (a) $y = \sec(\tan^{-1}x)$ $\frac{dy}{dx} = \sec(\tan^{-1}x)\tan(\tan^{-1}x).\frac{1}{1+x^2}$

$= \frac{x}{1+x^2}.\sqrt{1+x^2} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $(\tan^{-1}x = \sec^{-1}\sqrt{1+x^2})$.

162. (b) $f(x) = |x-1| + |x-3|$

$$f(x) = \begin{cases} -(x-1)-(x-3), & x<1 \\ (x-1)-(x-3), & x>1 \\ (x-1)-(x-3), & x<3 \\ (x-1)+(x-3), & x>3 \end{cases} = \begin{cases} 4-2x, & x<1 \\ 2, & 1<x<3 \\ 2x-4, & x>3 \end{cases}$$

$x = 2$ पर, $f(x) = 2$. अतः $f'(x) = 0$

163. (a) $\lim_{x\to a}\frac{af(x)-xf(a)}{x-a} \Rightarrow \lim_{x\to a}\frac{af(x)-xf(a)+af(a)-af(a)}{x-a}$

$\Rightarrow \lim_{x\to a}\frac{a[f(x)-f(a)]-f(a)[x-a]}{x-a}$

$\Rightarrow \lim_{x\to a}\frac{a[f(x)-f(a)]}{x-a}-\lim_{x\to a}f(a) \Rightarrow af'(a)-f(a)$.

164. (a) $x=\exp\left\{\tan^{-1}\left(\frac{y-x^2}{x^2}\right)\right\}$

$\Rightarrow \log x=\tan^{-1}\left(\frac{y-x^2}{x^2}\right)$

$\Rightarrow \frac{y-x^2}{x^2}=\tan(\log x) \Rightarrow y=x^2\tan(\log x)+x^2$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=2x.\tan(\log x)+x^2.\frac{\sec^2(\log x)}{x}+2x$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=2x\tan(\log x)+x\sec^2(\log x)+2x$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=2x[1+\tan(\log x)]+x\sec^2(\log x)$.

165. (c) $f(x)=\sqrt{ax}+\frac{a^2}{\sqrt{ax}}$

तब $f'(x)=\frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{x}}+\frac{a^2}{\sqrt{a}}\left(\frac{-1}{2}x^{-3/2}\right)$

$\Rightarrow f'(x)=\frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{x}}-\frac{a^2}{2\sqrt{a}}x^{-3/2}$

$\Rightarrow f'(a)=\frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{a}}-\frac{a^2}{2\sqrt{a}.a^{3/2}} \Rightarrow f'(a)=\frac{1}{2}-\frac{a^2}{2a^2}=0$.

166. (c) माना $f(x)=x^6+6^x$, तब $f'(x)=6x^5+6^x\log 6$.

167. (c) $\sin y+e^{-x\cos y}=e$,

$\Rightarrow \cos y\frac{dy}{dx}+e^{-x\cos y}\left\{(-x)\left(-\sin y\frac{dy}{dx}\right)+\cos y(-1)\right\}=0$

$\Rightarrow \cos y\frac{dy}{dx}+x\sin y\ e^{-x\cos y}\frac{dy}{dx}-\cos y e^{-x\cos y}=0$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{\cos y\ e^{-x\cos y}}{\cos y+x\sin y\ e^{-x\cos y}}$

$\Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(1,\pi)}=\frac{\cos\pi\ e^{-\cos\pi}}{\cos\pi+\sin\pi\ e^{-\cos\pi}}=\frac{(-1)e}{-1+0}=e$.

168. (b) $f(x)=3|2+x|$; $f'(x)=-3$, $\left[\because |x|=\begin{cases}-x, x<0\\ x, x>0\end{cases}\right]$.

169. (a) $f(x)=\log_5(\log_7 x) \Rightarrow f(x)=\log_5\left(\frac{\log_e x}{\log_e 7}\right)$

$\Rightarrow f(x)=\log_5\log_e x-\log_5\log_e 7$

$\Rightarrow f(x)=\frac{\log_e\log_e x}{\log_e 5}-\log_5\log_e 7$

अब, $f'(x)=\frac{1}{x\log_e x\log 5}-0$

$\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x\log_e x\frac{\log_e 5}{\log_e 7}\log_e 7}=\frac{1}{x(\ln 5)(\ln 7)(\log_7 x)}$.

170. (c) $y=\cot^{-1}(x^2)$

$\frac{dy}{dx}=\frac{-1}{1+(x^2)^2}\frac{d}{dx}(x^2)=\frac{-1}{1+x^4}(2x)=\frac{-2x}{1+x^4}$.

171. (d) $y=\log\tan\sqrt{x}$

$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\tan\sqrt{x}}.\sec^2\sqrt{x}.\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{\sec^2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\tan\sqrt{x}}$.

172. (c) $y=(\cos x^2)^2$; $\frac{dy}{dx}=2\cos x^2.(-\sin x^2).2x$

$\frac{dy}{dx}=-4x\sin x^2\cos x^2=-2x\sin 2x^2$.

173. (b) $y=\tan^{-1}(\sec x-\tan x)$

$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+(\sec x-\tan x)^2}(\sec x\tan x-\sec^2 x)$

$\frac{dy}{dx}=\frac{\cos^2 x.\sec^2 x(\sin x-1)}{(1-\sin x)^2+\cos^2 x}$

$\frac{dy}{dx}=\frac{\sin x-1}{1-2\sin x+\sin^2 x+\cos^2 x}=\frac{\sin x-1}{2(1-\sin x)}=-\frac{1}{2}$.

174. (b) $y=\cos^{-1}\cos(x-1), \quad x>0$

$\Rightarrow y=x-1, \quad x>0$ व $0\le x-1\le\pi$

$\therefore \quad y=x-1,\ 1\le x\le\pi+1$

$\because 1<\frac{5\pi}{4}<\pi+1$

$\therefore \quad y=x-1, \quad 1\le x\le\pi+1$ और $\frac{5\pi}{4}\in[1,\pi+1]$

अतः $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\frac{5\pi}{4}}=1\Big|_{x=\frac{5\pi}{4}}=1$.

175. (b) $x^m y^n=(x+y)^{m+n}$

$x^m.(ny^{n-1}).\frac{dy}{dx}+y^n(mx^{m-1})=(m+n)(x+y)^{m+n-1}\left(1+\frac{dy}{dx}\right)$

हल करने पर, $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$ और $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1,y=2}=\frac{2}{1}=2$.

176. (d) $y=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}=\frac{\frac{e^x+e^{-x}}{2}}{\frac{e^x-e^{-x}}{2}}=\frac{\cosh x}{\sinh x}=\coth x$

$\frac{dy}{dx}=-\text{cosech}^2 x$.

177. (b) $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-0}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$

$=f'(x)\big|_{x=0}=\tan^4 x\big|_{x=0}=0$

178. (a) माना $f(x)=ax^2+bx+c$

तब, $f'(x)=2ax+b$, $f(1)=f(-1)$

$a+b+c=a-b+c \Rightarrow b=0$

$\therefore \quad f'(x)=2ax$; $\therefore \quad f'(a_1)=2aa_1$

$f'(a_2)=2aa_2$, $f'(a_3)=2aa_3$

चूँकि a_1, a_2, a_3 समान्तर श्रेणी में हैं,

अतः $f'(a_1), f'(a_2), f'(a_3)$ समान्तर श्रेणी में हैं।

179. (e) $\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1}\frac{(\sqrt{x}(3-x)}{1-3x}\right)$

$\sqrt{x} = \tan\theta \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\sqrt{x}$ रखने पर,

$\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1}\frac{(\tan\theta(3-\tan^2\theta))}{1-3\tan^2\theta}\right)$

$= \frac{d}{dx}\left(\tan^{-1}\frac{(3\tan\theta-\tan^3\theta)}{1-3\tan^2\theta}\right)$

$= \frac{d}{dx}(\tan^{-1}(\tan 3\theta) = \frac{d}{dx}(3\theta)$

$= \frac{d}{dx}(3.\tan^{-1}\sqrt{x}) = \frac{3}{2\sqrt{x}(1+x)}$.

180. (d) $r = \left[2\phi + \cos^2\left(2\phi+\frac{\pi}{4}\right)\right]^{1/2}$

$\Rightarrow \frac{dr}{d\phi} = \frac{1}{2}\left[2\phi+\cos^2\left(2\phi+\frac{\pi}{4}\right)\right]^{-1/2}$

$\left[2-2\times 2\sin\left(2\phi+\frac{\pi}{4}\right)\times\cos\left(2\phi+\frac{\pi}{4}\right)\right]$

$\left(\frac{dr}{d\phi}\right)_{r=\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}+\cos^2\frac{3\pi}{4}\right]^{-1/2}\times 2\left[\left(1-\sin\left(\pi+\frac{\pi}{2}\right)\right)\right]$

$\left(\frac{dr}{d\phi}\right)_{r=\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\right)^{-1/2}\times 2(1+1) = 2\times\left(\frac{2}{\pi+1}\right)^{1/2}$.

181. (a) $f(x) = \frac{2\sin x.\cos x.\cos 2x.\cos 4x.\cos 8x.\cos 16x}{2\sin x}$

$= \frac{\sin 32x}{2^5\sin x}$

$\therefore\ f'(x) = \frac{1}{32}.\frac{32\cos 32x.\sin x-\cos x.\sin 32x}{\sin^2 x}$

$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{32.\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\times 0}{32\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{2}$.

182. (b) $\frac{dy}{dx} = -[(2-x)(3-x).....(n-x)+(1-x)(3-x)....(n-x)$

$+....(1-x)(2-x)....(n-1-x)]$

$x=1$ पर, $\frac{dy}{dx} = -[(n-1)!+0+.....+0] = (-1)(n-1)!$.

183. (b) $y = \tan^{-1}\left(\frac{a\cos x-b\sin x}{b\cos x+a\sin x}\right)$

माना $a = r\sin\theta$ और $b = r\cos\theta$

$\therefore\ y = \tan^{-1}\left[\frac{r\sin(\theta-x)}{r\cos(\theta-x)}\right]$

$\Rightarrow y = \theta - x \ \Rightarrow y = \tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)-x$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -1$.

अस्पष्ट फलनों का अवकलन, प्राचलिक व संयुक्त फलनों का अवकलन, लघुगणकीय अवकलन, अनन्त श्रेणियों के अवकलन

1. (c) $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$.

2. (b) $x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ व $y = \frac{2at}{1+t^2}$

t के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$\frac{dx}{dt} = \frac{(1+t^2)(0-2t)-(1-t^2)(0+2t)}{(1+t^2)^2} = -\frac{4t}{(1+t^2)^2}$

तथा $\frac{dy}{dt} = \frac{(1+t^2)2a-2at(2t)}{(1+t^2)^2} = \frac{2a(1-t^2)}{(1+t^2)^2}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{a(1-t^2)}{-2t};\ \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{a(t^2-1)}{2t}$.

3. (a) दिया है, $x = a\left(\cos t+\log\tan\frac{t}{2}\right)$ और $y = a\sin t$

t के सापेक्ष अवकलन करने पर, $\frac{dy}{dt} = a\cos t$

.....(i)

तथा $\frac{dx}{dt} = a\left[-\sin t+\cot\left(\frac{t}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\sec^2\left(\frac{t}{2}\right)\right]$

$= a\left(-\sin t+\frac{1}{\sin t}\right) = a\frac{\cos^2 t}{\sin t} = a\cos t\cot t$ .....(ii)

(i) और (ii) से, $\frac{dy}{dx} = \tan t$.

4. (c) $\tan y = \frac{2t}{1-t^2}$ .....(i)

और $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ .....(ii)

समी. (i) का t के सापेक्ष अवकलन करने पर

$\sec^2 y\frac{dy}{dt} = \frac{2(1+t^2)}{(1-t^2)^2}$ और $\frac{dy}{dt} = \frac{2(1+t^2)}{(1-t^2)^2}.\frac{1}{(1+\tan^2 y)}$

या $\frac{dy}{dt} = \frac{2(1+t^2)}{(1-t^2)^2}.\frac{1}{\left[1+\left(\frac{2t}{1-t^2}\right)^2\right]} = \frac{2}{1+t^2}$ .....(iii)

समी. (ii) का t के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$\cos x\frac{dx}{dt} = \frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2}$

या $\frac{dx}{dt} = \frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{(2t)^2}{(1+t^2)^2}}} = \frac{2}{1+t^2}$ .....(iv)

अतः $\frac{dy}{dx} = 1$.

5. (c) $x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ और $y = \frac{2t}{1+t^2}$

दोनों समीकरणों में $t = \tan\theta$ रखने पर,

$x = \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} = \cos 2\theta$ और $y = \frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta} = \sin 2\theta$.

दोनों समीकरणों का θ के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$\frac{dx}{d\theta} = -2\sin 2\theta$ और $\frac{dy}{d\theta} = 2\cos 2\theta$

$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{\cos 2\theta}{\sin 2\theta} = -\frac{x}{y}$

6. (d) $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{2a}{2at} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{t} = \frac{2a}{y}$

$\Rightarrow y\frac{dy}{dx} = 2a \Rightarrow y\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$

$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-(dy/dx)^2}{y} = -\frac{1}{2at^3}$.

7. (a) $\cos(x+y) = (y\sin x)$

$\Rightarrow -\sin(x+y)\left(1+\frac{dy}{dx}\right) = y\cos x + \sin x\frac{dy}{dx}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y\cos x + \sin(x+y)}{\sin(x+y)+\sin x}$.

8. (c) $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx} = u^3.2x^2$

$= \left(\frac{2}{3}x^3+5\right)^3.2x^2 = \frac{2}{27}x^2(2x^3+15)^3$.

9. (d) $x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x} = 0 \Rightarrow x^2(1+y) = y^2(1+x)$

$\Rightarrow (x-y)(x+y+xy) = 0 \Rightarrow x+y+xy = 0, \quad \{\because x \neq y\}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{(1+x)^2}$.

10. (a) $\frac{dx}{dt} = -2\sin t + 2\sin 2t$ और $\frac{dy}{dt} = 2\cos t - 2\cos 2t$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\cos t - \cos 2t}{\sin 2t - \sin t}$

$t = \frac{\pi}{4}$ रखने पर,

$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{t=\pi/4} = \frac{\cos\pi/4 - \cos\pi/2}{\sin\pi/2 - \sin\pi/4} = \sqrt{2}+1$.

11. (c) $\sin y = x\sin(a+y) \Rightarrow x = \frac{\sin y}{\sin(a+y)}$

$\Rightarrow 1 = \frac{\cos y.\frac{dy}{dx}.\sin(a+y) - \sin y\cos(a+y)\frac{dy}{dx}}{\sin^2(a+y)}$

$= \frac{\frac{dy}{dx}.\sin(a+y-y)}{\sin^2(a+y)} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\sin^2(a+y)}{\sin a}$.

12. (b) $\tan(x+y) + \tan(x-y) = 1$

y का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$\Rightarrow \sec^2(x+y)\left(1+\frac{dy}{dx}\right) + \sec^2(x-y)\left(1-\frac{dy}{dx}\right) = 0$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\sec^2(x+y)+\sec^2(x-y)}{\sec^2(x-y)-\sec^2(x+y)}$.

13. (c) $y\sec x + \tan x + x^2y = 0$

$\Rightarrow \sec x\frac{dy}{dx} + y\sec x\tan x + \sec^2 x + 2xy + x^2\frac{dy}{dx} = 0$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{2xy + \sec^2 x + y\sec x\tan x}{x^2 + \sec x}$.

14. (a) $\sin(xy) + \frac{x}{y} = x^2 - y$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$\cos(xy)\frac{d}{dx}(xy) + x\left\{-\frac{1}{y^2}\right\}\frac{dy}{dx} + \frac{1}{y} = 2x - \frac{dy}{dx}$

$\Rightarrow \left[x\cos(xy) - \frac{x}{y^2} + 1\right]\frac{dy}{dx} = 2x - \frac{1}{y} - y\cos(xy)$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \left[\frac{2xy^2 - y - y^3\cos(xy)}{xy^2\cos(xy) - x + y^2}\right]$.

15. (b) $\sin^2 x + 2\cos y + xy = 0$

$\Rightarrow 2\sin x\cos x - 2\sin y\frac{dy}{dx} + y + x\frac{dy}{dx} = 0$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{y + \sin 2x}{2\sin y - x}$.

16. (a) $x^3 + 8xy + y^3 = 64 \Rightarrow 3x^2 + 8\left(y + x\frac{dy}{dx}\right) + 3y^2\frac{dy}{dx} = 0$

$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2 + 8y}{8x + 3y^2}$.

17. (a) $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

y का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$2ax + 2h\left(y + x\frac{dy}{dx}\right) + 2by\frac{dy}{dx} + 2g + 2f\frac{dy}{dx} = 0$

$\therefore \frac{dy}{dx}(2hx + 2by + 2f) = -(2ax + 2hy + 2g)$

या $\frac{dy}{dx} = -\frac{(ax + hy + g)}{(hx + by + f)}$.

18. (a) माना कि $t = \frac{5x+1}{10x^2-3}$, $\therefore y = f(t)$

$\therefore \frac{dy}{dx} = f'(t).\frac{dt}{dx}$, $\quad [\because f'(x) = \cos x]$

$\frac{dy}{dx} = \cos\left(\frac{5x+1}{10x^2-3}\right)\frac{d}{dx}\left(\frac{5x+1}{10x^2-3}\right)$.

19. (c) $f(x) = \frac{1}{1-x} \Rightarrow f\{f(x)\} = \frac{1-x}{-x}$

$\Rightarrow f[f\{f(x)\}] = \frac{-x}{-x-1+x} = x$

$\therefore f[f\{f(x)\}]$ का अवकलज = 1.

20. (b) चूँकि $g(x)$, $f(x)$ का व्युत्क्रम फलन है।

$\therefore gof(x) = I(x)$, x के सभी मानों के लिए

अब, $gof(x) = I(x), \ \forall x$

$\Rightarrow gof(x) = x, \ \forall x \Rightarrow (gof)'(x) = 1, \ \forall x$

$\Rightarrow g'(f(x))f'(x) = 1, \ \forall x$ (श्रंखला नियम से)

$\Rightarrow g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}, x \Rightarrow g'(f(c)) = \frac{1}{f'(c)}$ ($x=c$ रखने पर).

21. (c) चूँकि $g(x)$, $f(x)$ का व्युत्क्रम है

$\therefore f(x)=y \Leftrightarrow g(y)=x$

अब, $g'(f(x))=\frac{1}{f'(x)}, \forall x \Rightarrow g'(f(x))=1+x^3, \forall x$

$\Rightarrow g'(y)=1+(g(y))^3$, [$f(x)=y \Leftrightarrow x=g(y)$ के प्रयोग से]

$\Rightarrow g'(x)=1+(g(x))^3$, ($y$ को x से बदलने पर)

22. (a) $fog=I \Rightarrow fog(x)=x, \forall x$

$\Rightarrow f'(g(x))g'x=1, \forall x$

$\Rightarrow f'(g(a))=\frac{1}{g'(a)}=\frac{1}{2} \Rightarrow f'(b)=\frac{1}{2}, \quad (\because g(a)=b)$.

23. (c) $\because f(x)=\log x$; $\therefore f[\log x]=\log\log x$

$f'[\log x]=\frac{1}{\log x}.\frac{d}{dx}\log x=\frac{1}{x\log x}$.

24. (d) $y'=F'[f\{\phi(x)\}]f'\{\phi(x)\}\phi'(x)$.

25. (b) $f(x)=e^x$, $g(x)=\sin^{-1}x$ और $h(x)=f(g(x))$

$\Rightarrow h(x)=f(\sin^{-1}x)=e^{\sin^{-1}x}$

$\therefore h(x)=e^{\sin^{-1}x}$

$\Rightarrow h'(x)=e^{\sin^{-1}x}.\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \frac{h'(x)}{h(x)}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

26. (a) $x^4+y^4=\left(t-\frac{1}{t}\right)^2+2=(x^2+y^2)^2+2$

$\Rightarrow x^2y^2=-1 \Rightarrow y^2=-\frac{1}{x^2}$

अवकलन करने पर, $2y\frac{dy}{dx}=\frac{2}{x^3}$ या $x^3y\frac{dy}{dx}=1$.

27. (a) $x=a\left(\sin 2\theta+\frac{1}{2}\sin 4\theta\right)$,

$y=b\left(\cos 2\theta-\frac{1}{2}(1+\cos 4\theta)\right)$

$\therefore \frac{dx}{d\theta}=2a(\cos 2\theta+\cos 4\theta)=2a.2\cos 3\theta\cos\theta$

एवं $\frac{dy}{d\theta}=2b(\sin 4\theta-\sin 2\theta)=2b.2\cos 3\theta\sin\theta$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{d\theta}\div\frac{dx}{d\theta}=\frac{b}{a}\tan\theta$.

28. (a) $x=\frac{\sin y}{\cos(a+y)}$.अब $\frac{dx}{dy}$ ज्ञात करते हैं, और तब $\frac{dy}{dx}$ प्राप्त होता है।

29. (b) $x=\frac{3at}{1+t^3}$, $y=\frac{3at^2}{1+t^3}$. स्पष्टतः, $y=tx$.

x के सापेक्ष अवकलन करने पर, $\frac{dy}{dx}=t.\ 1+x.\frac{dt}{dx}$ .....(i)

अब, $\frac{dx}{dt}=3a.\frac{1+t^3-t.3t^2}{(1+t^3)^2}=\frac{3a.(1-2t^3)}{(1+t^3)^2}$ .....(ii)

$\therefore \frac{dy}{dx}=t+\frac{3at}{1+t^3}.\frac{(1+t^3)^2}{3a(1-2t^3)}=\frac{t(2-t^3)}{1-2t^3}$,{समी. (ii) से}.

30. (b) $\frac{dx}{dt}=1-\frac{1}{t^2}$, $\frac{dy}{dt}=1+\frac{1}{t^2}$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{t^2+1}{t^2-1}=\left(1+\frac{2}{t^2-1}\right)$ और $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right).\frac{dt}{dx}$

$=2.\frac{-1}{(t^2-1)^2}.2t\times\frac{t^2}{t^2-1}=-\frac{4t^3}{(t^2-1)^3}$.

31. (b) $\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{3t^2}{2t}=\frac{3}{2}t=\frac{3}{2}\sqrt{x} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{3}{4\sqrt{x}}=\frac{3}{4t}$.

32. (c) $\frac{dx}{d\theta}=a\cos\theta$ व $\frac{dy}{d\theta}=-b\sin\theta$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{-b}{a}\tan\theta$ और $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-b}{a}\sec^2\theta\frac{d\theta}{dx}$

$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-b}{a}\sec^2\theta\frac{1}{a\cos\theta}=\frac{-b}{a^2}\sec^3\theta$.

33. (c) यहाँ $y=t^{10}+1$ और $x=t^8+1$

$\therefore t^8=x-1 \Rightarrow t^2=(x-1)^{1/4}$

अतः $y=(x-1)^{5/4}+1$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर, $\frac{dy}{dx}=\frac{5}{4}(x-1)^{1/4}$

पुनः x के सापेक्ष दोनों पक्षों का अवकलन करने पर,

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{5}{16}(x-1)^{-3/4}$

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{5}{16(x-1)^{3/4}}=\frac{5}{16(t^2)^3}=\frac{5}{16\,t^6}$.

34. (a) $\frac{dy}{dx}=-\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y}=-\frac{3y\cos(xy)-4y\sin(xy)}{3x\cos(xy)-4x\sin(xy)}=-\frac{y}{x}$.

35. (c) $\frac{dy}{dx}=-\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y}=-\frac{2xe^y+2xye^x+2ye^x}{x^2e^y+2xe^x}$

$=-\frac{2xe^{y-x}+2y(x+1)}{x(xe^{y-x}+2)}$, [अंश और हर को e^x से भाग देने पर].

36. (d) $\sqrt{1+\tan^2\theta}=|\sec\theta|$.

37. (a) $x^3+y^3-3axy=0$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$3x^2+3y^2.\frac{dy}{dx}-3a\left(x\frac{dy}{dx}+y\right)=0$

$\Rightarrow 3(x^2-ay)+3\frac{dy}{dx}(y^2-ax)=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{ay-x^2}{y^2-ax}$.

38. (a) $\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{\frac{d}{dt}[a(1-\cos t)]}{\frac{d}{dt}[a(t+\sin t)]}$

$\frac{dy}{dx}=\frac{a\sin t}{a+a\cos t}=\frac{\sin t}{1+\cos t}=\frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\cos^2\frac{t}{2}}$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\tan\frac{t}{2}$.

39. (b) $x = \frac{2t}{1+t^2}$, $y = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

$t = \tan\theta$ रखने पर,

$x = \frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta} = \sin 2\theta$, $y = \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} = \cos 2\theta$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{-2\sin 2\theta}{2\cos 2\theta}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\tan 2\theta = \frac{-2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{-2t}{1-t^2} = \frac{2t}{t^2-1}$.

40. (d) यह एक अस्पष्ट फलन है, अतः

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y} = -\frac{\cos(x+y) - \frac{1}{x+y}}{\cos(x+y) - \frac{1}{x+y}} = -1.$$

41. (d) स्पष्टतः, $x = \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ और $y = \sin^{-1}\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$

$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = -\frac{1}{\sqrt{\frac{t^2}{1+t^2}}} \cdot \frac{(-1)}{2(1+t^2)^{3/2}} 2t = \frac{1}{1+t^2}$

और $\frac{dy}{dt} = \sqrt{1+t^2} \cdot \frac{1}{(\sqrt{1+t^2})^{3/2}} = \frac{1}{1+t^2}$

अतः $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = 1$.

42. (b) $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{a[\cos\theta - \theta(-\sin\theta) - \cos\theta]}{a[-\sin\theta + \theta\cos\theta + \sin\theta]}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\theta\sin\theta}{\theta\cos\theta} = \tan\theta$.

43. (a) $y = a\sin^4\theta \Rightarrow \frac{dy}{d\theta} = 4a\sin^3\theta\cos\theta$

और $x = a\cos^4\theta \Rightarrow \frac{dx}{d\theta} = -4a\cos^3\theta\sin\theta$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{-\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = -\tan^2\theta$

$\therefore \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\theta=\frac{3\pi}{4}} = -\tan^2\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -1$.

44. (d) $y = \cos^{-1}\sqrt{1-t^2} = \sin^{-1}t$

एवं $x = \sin^{-1}(3t - 4t^3) = 3\sin^{-1}t$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\right)}{3\left(\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\right)} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}$.

45. (c) $x = a\left(t - \frac{1}{t}\right)$ ....(i) व $y = a\left(t + \frac{1}{t}\right)$ .....(ii)

समी. (i) और समी. (ii) का वर्ग करके समी. (i) में से समी. (ii) को घटाने पर,

$x^2 - y^2 = a^2(-4)$ या $y^2 - x^2 = 4a^2$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$2y\frac{dy}{dx} - 2x = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$.

46. (c) माना $x = \sin t\cos 2t$ .....(i) और $y = \cos t\sin 2t$ .....(ii)

t के सापेक्ष (i) का अवकलन करने पर,

$\frac{dx}{dt} = \cos t.\cos 2t - 2\sin t\sin 2t$ .....(iii)

पुनः t के सापेक्ष समी. (ii) का अवकलन करने पर,

$\frac{dy}{dt} = 2\cos t\cos 2t - \sin t\sin 2t$ .....(iv)

$\therefore$ समी. (iv) को समी. (iii) से भाग देने पर,

$\frac{dy}{dx} = \frac{2\cos t\cos 2t - \sin t\sin 2t}{\cos t\cos 2t - 2\sin t\sin 2t}$

$t = \frac{\pi}{4}$ पर, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}$.

47. (a) $\ln(x+y) = 2xy$

x के सापेक्ष दोनों पक्षों का अवकलन करने पर,

$\left(\frac{1}{x+y}\right)\left(1+\frac{dy}{dx}\right) = 2\left(x\frac{dy}{dx} + y\right)$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1-2xy-2y^2}{2x^2+2xy-1}$

$\because x = 0$ पर, $y = 1$ ($\ln(x+y) = 2xy$ से)

अतः $y'(0) = \frac{1-2}{-1} = 1$.

48. (a) $y = x^x$

दोनों पक्षों का log लेने पर, $\log y = x\log x$

अब x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 1 + \log x$; $\therefore \frac{dy}{dx} = x^x(1+\log x) = x^x\log ex$.

49. (a) $f(x) = \cos^{-1}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - \sqrt{\frac{1+x}{2}}\right)\right] + x^x$

$f(x) = \frac{\pi}{2} - \sqrt{\frac{1+x}{2}} + x^x$

$\therefore f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+x}} + x^x(1+\log x)$

$f'(1) = -\frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{4}$.

50. (b) $y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$\frac{dy}{dx} = \frac{(1-x)^{1/2}\frac{d}{dx}(1+x)^{1/2} - (1+x)^{1/2}\frac{d}{dx}(1-x)^{1/2}}{(1-x)}$

$= \frac{(1-x)+(1+x)}{2(1-x)^{3/2}(1+x)^{1/2}}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{(1-x)^{3/2}(1+x)^{1/2}}$.

ट्रिक : $\log y = \frac{1}{2}\log(1+x) - \frac{1}{2}\log(1-x)$

$\Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2(1+x)} + \frac{1}{2(1-x)}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{(1+x)(1-x)} \times \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{(1+x)^{1/2}(1-x)^{3/2}}$.

51. (a) $y = e^{x+y} \Rightarrow \log y = (x+y)\log e$

$\Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{1-y}$.

52. (a) $x^y = e^{x-y} \Rightarrow y\log x = x - y \Rightarrow y = \frac{x}{1+\log x}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \log x(1+\log x)^{-2} = \log x[\log ex]^{-2}$.

53. (b) log लेने पर, $\log(x-y) + \frac{x}{x-y} = \log k$

$\Rightarrow (x-y) - (x-y)\frac{dy}{dx} + (x-y) - x + \frac{dy}{dx} = 0$

$\Rightarrow y\frac{dy}{dx} + x = 2y$.

54. (b) अवकलन करने पर, $2^x \log 2 + 2^y \log 2.\frac{dy}{dx}$

$= 2^x.2^y\frac{dy}{dx}.\log 2 + 2^y.2^x \log 2$

$\Rightarrow 2^x + 2^y\frac{dy}{dx} = 2^{x+y}\frac{dy}{dx} + 2^{x+y}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2^{x+y} - 2^x}{2^y - 2^{x+y}} = 2^{x-y}\frac{2^y - 1}{1 - 2^x}$.

55. (b) $y = \log x^x = x\log x$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$\frac{dy}{dx} = (1+\log x) = \log e + \log x = \log(ex)$, $(\because \log e = 1)$.

56. (a) $x^y + y^x = a^b$; माना $x^y = u$ और $y^x = v$

$\Rightarrow u + v = a^b \Rightarrow \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} = 0$

दोनों का अलग–अलग log लेकर, अवकलन करने पर,

$$\frac{du}{dx} = x^y\left(\frac{y}{x} + \frac{dy}{dx}\log x\right) \quad \text{.....(i)}$$

तथा $$\frac{dv}{dx} = y^x\left(\log y + \frac{x}{y}.\frac{dy}{dx}\right) \quad \text{.....(ii)}$$

समी. (i) व समी. (ii) से, $\frac{dy}{dx} = -\frac{yx^{y-1} + y^x\log y}{x^y\log x + xy^{x-1}}$.

57. (a) $y = \sqrt{\left[\frac{(x-a)(x-b)}{(x-c)(x-d)}\right]}$

$\Rightarrow \log y = \frac{1}{2}[\log(x-a) + \log(x-b) - \log(x-c) - \log(x-d)]$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(x-a)} + \frac{1}{(x-b)} - \frac{1}{(x-c)} - \frac{1}{(x-d)}\right]$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{y}{2}\left[\frac{1}{(x-a)} + \frac{1}{(x-b)} - \frac{1}{(x-c)} - \frac{1}{(x-d)}\right]$.

58. (c) $y = (1+x)^x$

दोनों पक्षों का log लेने पर, $\log y = x\log(1+x)$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \log(1+x) + x\frac{1}{(1+x)}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = (1+x)^x\left[\frac{x}{1+x} + \log(1+x)\right]$

59. (c) $y = \sqrt{\log x + y} \Rightarrow y^2 = \log x + y$

$\Rightarrow 2y\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} + \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x(2y-1)}$.

60. (a) $y = x^{\sqrt{x}} \Rightarrow \log_e y = \sqrt{x}\log x$

$\Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \sqrt{x}\frac{1}{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\log x$ या $\frac{dy}{dx} = x^{\sqrt{x}}\left[\frac{2+\log_e x}{2\sqrt{x}}\right]$.

61. (a) दोनों पक्षों का log लेने पर, $p\log x + q\log y = (p+q)\log(x+y)$

$\Rightarrow \frac{p}{x} + \frac{q}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{p+q}{x+y}\left(1 + \frac{dy}{dx}\right) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$.

62. (a) $y = (\sin x)^{(\sin x)^{(\sin x)\ldots\infty}}$

$\Rightarrow y = (\sin x)^y \Rightarrow \log_e y = y\log\sin x$

$\Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx}[\log\sin x + y\cot x]$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{y^2\cot x}{1 - y\log\sin x}$.

63. (c) $y = (x^x)^x \Rightarrow \log_e y = x\log_e(x)^x = x^2.\log_e x$

$\Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = x^2.\frac{1}{x} + 2x.\log_e x$

$\therefore \frac{dy}{dx} = x(x^x)^x[1 + 2\log_e x]$.

64. (d) $y = \sqrt{\sin x + \sqrt{\sin x + \sqrt{\sin x + \ldots..\infty}}}$

$\Rightarrow y = \sqrt{\sin x + y} \Rightarrow y^2 = \sin x + y$

दोनों पक्षों का अवकलन करने पर,

$2y\frac{dy}{dx} = \cos x + \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx}(2y-1) = \cos x$.

65. (a) $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \Rightarrow \log y = x\log\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

$\Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\left[\log\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}\right]$.

66. (a) माना $y = x^{\log_e x} \Rightarrow \log_e y = \log_e x\log_e x = (\log_e x)^2$

$\Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 2\log_e x.\frac{1}{x}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 2x^{(\log_e x - 1)}\log_e x$.

67. (b) $x^y = y^x \Rightarrow y\log_e x = x\log_e y$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$\log_e x\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \log_e y + x\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{y(x\log_e y - y)}{x(y\log_e x - x)}$.

68. (c) $y = x^{(x^x)} \Rightarrow \log y = x^x\log x$

$\Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}.\log x + \frac{1}{x}.z$, (जहाँ $x^x = z$)

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = x^{(x^x)}\left[x^x(\log ex).\log x + x^{x-1}\right]$, $\left\{\because \frac{dz}{dx} = x^x\log ex\right\}$.

69. (a) $y = x^{\sin x} \Rightarrow \log_e y = \sin x \log_e x$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = x^{\sin x}\left[\frac{\sin x}{x} + \cos x \log_e x\right]$$

$$= x^{\sin x}\left[\frac{\sin x + x\cos x \log_e x}{x}\right].$$

70. (b) माना $y = (\sin x)^x \Rightarrow \log_e y = x \log_e \sin x$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = (\sin x)^x [x \cot x + \log_e \sin x]$$

$$= (\sin x)^x\left[\frac{x\cos x + \sin x \log \sin x}{\sin x}\right].$$

71. (a) $y = \frac{\sqrt{x}(2x+3)^2}{\sqrt{x+1}} \Rightarrow \log y = \frac{1}{2}\log x + 2\log(2x+3) - \frac{1}{2}\log(x+1)$

$$\Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2x} + \frac{2.2}{(2x+3)} - \frac{1}{2(x+1)}$$

$$\text{या } \frac{dy}{dx} = y\left[\frac{1}{2x} + \frac{4}{2x+3} - \frac{1}{2(x+1)}\right].$$

72. (b) माना $y = (\sin x)^{\log x} \Rightarrow \log_e y = \log_e x \log_e \sin x$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = (\sin x)^{\log_e x} = \left[\frac{1}{x}\log_e \sin x + \cot x \log_e x\right].$$

73. (a) $y = (\tan x)^{\cot x} \Rightarrow \log y = \cot x \log \tan x$

$$\Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \text{cosec}^2 x - \log \tan x.\text{cosec}^2 x$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = y\text{cosec}^2 x(1 - \log \tan x).$$

74. (c) $y = x^2 + x^{\log x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2x + x^{\log x}\left(2\log_e x.\frac{1}{x}\right)$

$$= \frac{2(x^2 + x^{\log x}\log_e x)}{x}.$$

75. (a) $y = x^2 + \frac{1}{y} \Rightarrow y^2 = x^2 y + 1$

$$\Rightarrow 2y\frac{dy}{dx} = y.2x + x^2\frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{2y - x^2}.$$

76. (d) $y = \sqrt{x}^{\sqrt{x}^{\sqrt{x}.....\infty}} \Rightarrow y = (\sqrt{x})^y$

$$\Rightarrow \log y = y \log x^{1/2} = \frac{1}{2}y\log x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(\log x\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x}\right) \Rightarrow \frac{dy}{dx}\left(\frac{2}{y} - \log x\right) = \frac{y}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y.y}{x(2 - y\log x)} = \frac{y^2}{x(2 - y\log x)}.$$

77. (c) $y\log x + x\log y = 0$; $\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y}$.

78. (c) $\log y = (\tan x)^{\tan x}\log\tan x$ .....(i)

समी. (i) का पुनः log लेने पर,

$\log(\log y) = \tan x \log\tan x + \log(\log\tan x)$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{1}{\log y}.\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \sec^2 x \log\tan x + \tan x.\frac{\sec^2 x}{\tan x} + \frac{1}{\log\tan x}.\frac{1}{\tan x}.\sec^2 x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = y\log y\sec^2 x.\left[\log\tan x + 1 + \frac{1}{\tan x\log\tan x}\right]$$

$$= y(\tan x)^{\tan x}\log\tan x.\sec^2 x \left[(\log\tan x + 1) + \frac{1}{\tan x\log\tan x}\right]$$

$$= y(\tan x)^{\tan x}\sec^2 x[\log\tan x(\log\tan x + 1) + \cot x]$$

अब, $x = \frac{\pi}{4}$, $y = 1$ पर, $\log\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = \log 1 = 0$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 1.1.2[0 + 1] = 2.$$

79. (a) दिया है, $y = (\sin x)^{\tan x} \Rightarrow \log y = \tan x.\log\sin x$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{1}{y}.\frac{dy}{dx} = \tan x.\cot x + \log\sin x.\sec^2 x$$

$$\frac{dy}{dx} = (\sin x)^{\tan x}[1 + \log\sin x.\sec^2 x].$$

80. (c) दिया है, $y = 2^{1/\log_x 4} \Rightarrow \log y = \frac{1}{\log_x 4}(\log 2)$

$$\Rightarrow \log_x 4 = \frac{\log 2}{\log y} \Rightarrow \frac{\log_e 4}{\log_e x} = \frac{\log_e 2}{\log_e y} \Rightarrow \frac{2\log 2}{\log x} = \frac{\log 2}{\log y}$$

$$\Rightarrow 2\log y = \log x \Rightarrow x = y^2.$$

81. (b) $2^x + 2^y = 2^{x+y}$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$2^x(\log 2) + 2^y(\log 2)\frac{dy}{dx} = 2^{(x+y)}.(\log 2)\left(1 + \frac{dy}{dx}\right)$$

$$\Rightarrow 2^x + 2^y\frac{dy}{dx} = 2^{x+y} + 2^{x+y}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}(2^y - 2^{x+y}) = 2^{x+y} - 2^x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2^{x+y} - 2^x}{2^y - 2^{x+y}}.$$

$$\therefore \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=y=1} = \frac{2^2 - 2}{2 - 2^2} = \frac{2}{-2} = -1.$$

82. (c) $y = x^{\ln x} \Rightarrow \ln y = (\ln x)^2 \Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{2\ln x}{x}$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = y\frac{2\ln x}{x} = \frac{2(x^{\ln x})\ln x}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2x^{\ln x - 1}\ln x.$$

83. (d) $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + ...\infty}}} \Rightarrow y = \sqrt{x + y}$

$$\Rightarrow y^2 = x + y \Rightarrow 2y\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}(2y - 1) = 1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y - 1}.$$

84. (c) $x^m y^n = 2(x+y)^{m+n} \Rightarrow m\log x + n\log y = \log 2 + (m+n)\log(x+y)$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{m}{x} + \frac{n}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{m+n}{x+y}\left[1 + \frac{dy}{dx}\right] \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}.$$

85. (c) यहाँ $x = e^{y + e^{y + ... to \infty}}$, $x > 0 \Rightarrow x = e^{y+x}$

दोनों पक्षों का log लेने पर, $\log x = (y + x)$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर, $\frac{1}{x} = \frac{dy}{dx} + 1$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1 - x}{x}.$$

प्रतिस्थापन द्वारा अवकलन, उच्च कोटि के अवकलज

1. (a) माना $x = \sin\theta \Rightarrow 2\sin^{-1} x = 2\theta \Rightarrow y = \sin 2\theta$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{2\cos 2\theta}{\cos\theta} = \frac{2(1-2\sin^2\theta)}{\sqrt{1-\sin^2\theta}} = \frac{2-4x^2}{\sqrt{1-x^2}}.$$

2. (b) $y = \cos^{-1}\left[\frac{3}{5}\cos x - \frac{4}{5}\sin x\right]$

$\frac{3}{5} = r\cos\theta,\ \frac{4}{5} = r\sin\theta \Rightarrow r = 1$ रखने पर,

$$\Rightarrow y = \cos^{-1}[\cos\theta\cos x - \sin\theta\sin x] = \theta + x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1.$$

3. (d) $x = \cot\theta$ रखने पर,

$$y = \cos^{-1}\left(\frac{x - x^{-1}}{x + x^{-1}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$$

$$= \cos^{-1}(\cos 2\theta) = 2\theta$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-2}{1+x^2}$$

4. (c) $x = \tan\theta$ रखने पर,

$$y = \sin^{-1}\left(\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\right) + \sec^{-1}\left(\frac{1+\tan^2\theta}{1-\tan^2\theta}\right)$$

$$y = 2\theta + 2\theta = 4\theta = 4\tan^{-1} x.$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(4\tan^{-1} x) = \frac{4}{1+x^2}.$$

5. (c) $x = \cos\theta$ रखने पर,

$$\therefore y = \tan^{-1}\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta} + \sin\left[2\tan^{-1}\sqrt{\left(\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}\right)}\right]$$

$$= \tan^{-1}\frac{\sin\phi}{1+\cos\phi} + \sin\left[2\tan^{-1}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right],$$

{जहाँ $\phi = 90° - \theta$}

$$= \tan^{-1}\tan\left(\frac{\phi}{2}\right) + \sin\left(2.\frac{\theta}{2}\right) = \left(\frac{\phi}{2}\right) + \sin\theta$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} + \sqrt{1-\cos^2\theta} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\cos^{-1} x + \sqrt{1-x^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x) = \frac{1-2x}{2\sqrt{1-x^2}}.$$

6. (a) $y = \sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}$

$x = \tan\theta$ रखने पर,

$$\therefore y = \sin^{-1}\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta} = \sin^{-1}\sin 2\theta$$

$y = 2\theta = 2\tan^{-1} x \qquad (\because \theta = \tan^{-1} x)$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{1+x^2}, \quad \left(\because\ 0 < x < 1 \text{ और } 0 < y < \frac{\pi}{2}\right).$$

7. (d) यहाँ $\frac{d}{dx}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$

$x = a\sin\theta \Rightarrow \theta = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$ रखने पर,

$$\frac{d}{dx}\left[\tan^{-1}\frac{a\sin\theta}{a\cos\theta}\right] = \frac{d}{dx}[\tan^{-1}\tan\theta] = \frac{d}{dx}[\theta]$$

θ का मान प्रतिस्थापित करने पर,

$$\frac{d}{dx}\left[\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\right] = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

8. (c) $x^2 = \cos 2\theta$ रखने पर,

$$\frac{d}{dx}\left[\cos^{-1}\sqrt{\frac{1+x^2}{2}}\right] = \frac{d}{dx}[\cos^{-1}\cos\theta]$$

$$= \frac{d}{dx}[\theta] = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2}\cos^{-1} x^2\right] = \frac{-x}{\sqrt{1-x^4}}.$$

9. (b) यहाँ $\frac{d}{dx}\tan^{-1}\left[\frac{3a^2x - x^3}{a(a^2-3x^2)}\right]$

$x = a\tan\theta$ रखने पर, $\frac{d}{dx}\tan^{-1}\left[\frac{3a^3\tan\theta - a^3\tan^3\theta}{a^3 - 3a^3\tan^2\theta}\right]$

$$= \frac{d}{dx}\tan^{-1}(\tan 3\theta) = \frac{d}{dx}(3\theta) = \frac{3a}{x^2+a^2}$$

यदि $x = 0$, तब $\frac{d}{dx}\tan^{-1}\left[\frac{3a^2x - x^3}{a(a^2-3x^2)}\right] = \frac{3}{a}$.

10. (b) $x = \sin\theta$ और $y = \sin\phi$ रखने पर,

$\cos\theta + \cos\phi = a(\sin\theta - \sin\phi)$

$$\Rightarrow 2\cos\frac{\theta+\phi}{2}\cos\frac{\theta-\phi}{2} = a\left\{2\cos\frac{\theta+\phi}{2}\sin\frac{\theta-\phi}{2}\right\}$$

$$\Rightarrow \frac{\theta-\phi}{2} = \cot^{-1} a \Rightarrow \theta - \phi = 2\cot^{-1} a$$

$$\Rightarrow \sin^{-1} x - \sin^{-1} y = 2\cot^{-1} a$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}.$$

11. (c) $\frac{d}{dx}\sin^{-1}(2ax\sqrt{1-a^2x^2})$

$ax = \sin\theta$ रखने पर,

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1}[2\sin\theta\sqrt{1-\sin^2\theta}] = \frac{d}{dx}\sin^{-1}\sin 2\theta = \frac{2a}{\sqrt{1-a^2x^2}}.$$

12. (d) $\frac{d}{dx}\left\{\cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)\right\}$

माना $\frac{1-x^2}{1+x^2} = \cos\theta \Rightarrow 1 - x^2 = (1+x^2)\cos\theta$

$$\Rightarrow -x^2(1+\cos\theta) = \cos\theta - 1$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} = \frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}} = \tan^2\frac{\theta}{2}$$

या $x = \tan\frac{\theta}{2}$ या $\theta = 2\tan^{-1} x$

अतः $\frac{d}{dx}(\theta)=\frac{d}{dx}(2\tan^{-1}x)=\frac{2}{1+x^2}$.

13. (c) $y=\sin^{-1}(\sqrt{1-x^2})$;

माना $\sqrt{1-x^2}=\sin\theta \Rightarrow 1-x^2=\sin^2\theta$

$\Rightarrow x^2=1-\sin^2\theta=\cos^2\theta$

$\therefore x=\cos\theta$ या $\theta=\cos^{-1}x \Rightarrow y=\cos^{-1}x$

y का x के सापेक्ष अवकलन करने पर, $\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

14. (a) $y=\cos^{-1}\left\{\sqrt{\frac{1+x}{2}}\right\}$

माना $\sqrt{\frac{1+x}{2}}=\cos\theta$ या $x=2\cos^2\theta-1=\cos 2\theta$

$\therefore \theta=\frac{1}{2}\cos^{-1}x$. अतः $y=\frac{1}{2}\cos^{-1}x \Rightarrow -\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$.

15. (d) $x=a\cos\theta \Rightarrow \theta=\cos^{-1}\frac{x}{a}$ रखने पर,

$y=\tan^{-1}\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}=\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{x}{a}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}.\frac{1}{a}=-\frac{1}{2\sqrt{a^2-x^2}}$.

16. (c) $x=\cos\theta$ रखने पर,

$1+\cos\theta=2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right),\ 1-\cos\theta=2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$

$\therefore y=\sin^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)+\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right\}\right]$

$=\sin^{-1}\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow y=\frac{1}{2}\cos^{-1}x+\frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{-1}{2\sqrt{1-x^2}}$.

17. (b) $f(x)=x+2 \Rightarrow f'(x)=1$

$\therefore x=4$ पर, $f'(f(x))=f'(x+2)=1$.

18. (a) $f(x)=\cot^{-1}\left(\frac{x^x-x^{-x}}{2}\right)$; $x^x=\tan\theta$ रखने पर,

$\therefore\ y=f(x)=\cot^{-1}\left(\frac{\tan^2\theta-1}{2\tan\theta}\right)$

$=\cot^{-1}(-\cot 2\theta)=\pi-\cot^{-1}(\cot 2\theta)$

$\Rightarrow y=\pi-2\theta=\pi-2\tan^{-1}(x^x)$

$\frac{dy}{dx}=\frac{-2}{1+x^{2x}}.x^x(1+\log x) \Rightarrow f'(1)=-1$.

19. (b) $3f(x)-2f(1/x)=x$ .....(i)

माना $\frac{1}{x}=y$, तब $3f(1/y)-2f(y)=1/y$

$\Rightarrow -2f(y)+3f\left(\frac{1}{y}\right)=\frac{1}{y} \Rightarrow -2f(x)+3f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}$ .....(ii)

समी. (i) में 3 से तथा समी. (ii) में 2 से गुणा करके जोड़ने पर,

$9f(x)-6f(1/x)-4f(x)+6f(1/x)=3x+(2/x)$

$5f(x)=3x+2/x \Rightarrow f(x)=1/5\left[3x+2/x\right]$

$\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{5}\left[3-\frac{2}{x^2}\right] \Rightarrow f'(2)=\frac{1}{5}\left[3-\frac{2}{4}\right]=\frac{1}{2}$.

20. (b) माना $y=\sin^2\cot^{-1}\left\{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right\}$

$x=\cos\theta \Rightarrow \theta=\cos^{-1}x$ रखने पर,

$\Rightarrow\ y=\sin^2\cot^{-1}\left\{\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}\right\}=\sin^2\cot^{-1}\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)$

$\Rightarrow\ y=\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)$

$\Rightarrow\ \frac{dy}{d\theta}=2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right).\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)$

$\Rightarrow\ \frac{dy}{d\theta}=-\frac{\sin(\pi-\theta)}{2}=-\frac{\sin\theta}{2}=\frac{-1}{2}\sqrt{1-x^2}$

$\Rightarrow\ \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{d\theta}.\frac{d\theta}{dx}=\frac{-1}{2}\sqrt{1-x^2}.\frac{d}{dx}(\cos^{-1}x)=\frac{1}{2}$.

21. (a) $y=\tan^{-1}\left(\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\right)$

$x=\sin\theta$ रखने पर,

$y=\tan^{-1}\left(\frac{\sin\theta}{1+\sqrt{1-\sin^2\theta}}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}\right)$

$\Rightarrow y=\tan^{-1}\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}=\tan^{-1}\tan\frac{\theta}{2}=\frac{\theta}{2}$

अतः, $y=\frac{\sin^{-1}x}{2} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$.

22. (c) माना $y=\cos^{-1}\sqrt{x}$ और $z=\sqrt{1-x}$

$\therefore \frac{dy}{dz}=\frac{\frac{-1}{\sqrt{1-x}}\times\frac{1}{2\sqrt{x}}}{-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}}=\frac{1}{\sqrt{x}}$.

23. (c) $y=\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

$x=\sin\theta$ रखने पर, $dx=\cos\theta d\theta \Rightarrow \frac{d\theta}{dx}=\frac{1}{\cos\theta}$

$\therefore y=\tan^{-1}\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right) \Rightarrow y=\theta$

$\therefore\ dy=d\theta$

अतः $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{d\theta}.\frac{d\theta}{dx}=1.\frac{1}{\cos\theta}=\sec\theta=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

24. (c) $y=\sin^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$

$x=\tan\theta$ रखने पर, $\theta=\tan^{-1}x$

$\therefore y=\sin^{-1}\cos 2\theta=\frac{\pi}{2}\pm 2\theta$

$\Rightarrow y = \frac{\pi}{2} \pm 2\tan^{-1} x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\pm 2}{1+x^2}$.

25. (c) माना $y = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right)$

$x = \cos 2\theta \Rightarrow \theta = \frac{1}{2}\cos^{-1} x$ रखने पर,

$y = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+\cos 2\theta}-\sqrt{1-\cos 2\theta}}{\sqrt{1+\cos 2\theta}+\sqrt{1-\cos 2\theta}}\right)$

$y = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2\cos^2\theta}-\sqrt{2\sin^2\theta}}{\sqrt{2\cos^2\theta}+\sqrt{2\sin^2\theta}}\right)$

$y = \tan^{-1}\left(\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}\right)$

$y = \tan^{-1}\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\right) \Rightarrow y = \frac{\pi}{4}-\theta$

$y = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\cos^{-1} x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$.

26. (b) माना $y = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$

$x = \tan\theta$ रखने पर, तब $y = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+\tan^2\theta}-1}{\tan\theta}\right)$

$\Rightarrow y = \tan^{-1}\left(\frac{\sec\theta-1}{\tan\theta}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)$

$\Rightarrow y = \tan^{-1}\left(\frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}\right) = \tan^{-1}\tan\frac{\theta}{2}$

$\Rightarrow y = \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}\tan^{-1} x, (\because \theta = \tan^{-1} x)$.

अतः $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2(1+x^2)}$.

27. (d) माना $y = \sin^{-1}\frac{1-x}{1+x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{x}(1+x)}$ ....(i)

और $z = \sqrt{x} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ .....(ii)

$\therefore$ समी. (i) व समी. (ii) से, $\frac{dy}{dz} = \frac{dy/dx}{dz/dx} = \frac{-2}{1+x}$.

28. (a) माना $y_1 = \tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$ और $y_2 = \sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}$

y_1 और y_2 का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$\frac{dy_1}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}\right]$

$x = \tan\theta$ रखने पर, $y_1 = \tan^{-1}\tan 2\theta = 2\theta = 2\tan^{-1} x$

तथा $y_2 = \sin^{-1}\sin 2\theta = 2\tan^{-1} x$

पुनः $\frac{dy_1}{dx} = \frac{d}{dx}[2\tan^{-1} x] = \frac{2}{1+x^2}$ .....(i)

तथा $\frac{dy_2}{dx} = \frac{d}{dx}[2\tan^{-1} x] = \frac{2}{1+x^2}$ .....(ii)

अतः $\frac{dy_1}{dy_2} = 1$.

29. (a) माना $y_1 = \sin^{-1} x$ और $y_2 = \cos^{-1}\sqrt{1-x^2}$

y_1 व y_2 का x के सापेक्ष अवकलन करने पर, $\frac{dy_1}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\frac{dy_2}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}}\frac{1(-2x)}{2\sqrt{1-x}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \frac{dy_2}{dy_1} = 1$.

30. (c) $\frac{\tan^{-1} x}{1+\tan^{-1} x}$ का $\tan^{-1} x$ के सापेक्ष अवकलन गुणांक

$= \frac{\frac{d}{dx}\left(\frac{\tan^{-1} x}{1+\tan^{-1} x}\right)}{\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x)}$

$= \frac{(1+\tan^{-1} x)\frac{d}{dx}\tan^{-1} x - \tan^{-1} x\frac{d}{dx}(1+\tan^{-1} x)}{(1+\tan^{-1} x)^2.\frac{d}{dx}\tan^{-1} x}$

$= \frac{1}{(1+\tan^{-1} x)^2}$.

31. (a) माना $y_1 = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)$ और $y_2 = \tan^{-1} x$

$\frac{dy_1}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\tan^{-1}\tan\frac{\theta}{2}\right]$, [$x = \tan\theta$ रखने पर]

$\Rightarrow \frac{dy_1}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\tan^{-1}\tan\frac{\theta}{2}\right] = \frac{1}{2(1+x^2)}$

तथा $\frac{dy_2}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$. अतः $\frac{dy_1}{dy_2} = \frac{1}{2}$.

32. (d) माना $y_1 = \tan^{-1}\sqrt{x}$ और $y_2 = \sqrt{x}$

y_1 और y_2 का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$\frac{dy_1}{dx} = \frac{1}{(1+x)}.\frac{1}{2\sqrt{x}}$ तथा $\frac{dy_2}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

अतः $\frac{dy_1}{dy_2} = \frac{1}{1+x}$.

33. (b) $\frac{dx^3}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dx}(x^3)}{\frac{d}{dx}(x^2)} = \frac{3x^2}{2x} = \frac{3}{2}x$.

34. (d) माना $y = x^6$ और $z = x^3$; $\therefore \frac{dy}{dz} = \frac{dy/dx}{dz/dx} = \frac{6x^5}{3x^2} = 2x^3$.

35. (a) $\sec^{-1}\frac{1}{(2x^2-1)} = 2\cos^{-1} x$

$\therefore y = 2\cos^{-1} x, z = \sqrt{1+3x}$

अतः $\frac{dy}{dz} = \frac{dy}{dx} \div \frac{dz}{dx} = -\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}.\frac{2\sqrt{1+3x}}{3} = 0, \left(x = -\frac{1}{3}\text{ पर}\right)$.

36. (a) माना $y = \tan^{-1}\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$ और $z = \cos^{-1}(x^2)$

$x^2 = \cos 2\theta$ रखने पर; $y = \tan^{-1}\sqrt{\frac{2\sin^2\theta}{2\cos^2\theta}} = \theta$ व $z = 2\theta$

$\therefore \frac{dy}{dz} = \frac{dy/d\theta}{dz/d\theta} = \frac{1}{2}$.

37. (c) $u = \tan^{-1}\left\{\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right\}$ और $v = 2\tan^{-1}x$

u और v में $x = \tan\theta$ रखने पर,

$u = \tan^{-1}\left\{\frac{\sqrt{1+\tan^2\theta}-1}{\tan\theta}\right\}$ और $v = 2\theta$

$u = \tan^{-1}\left\{\frac{\sec\theta - 1}{\tan\theta}\right\}$ और $v = 2\theta$

$u = \tan^{-1}\left\{\frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}\right\}$ और $v = 2\theta$

$u = \theta/2$ और $v = 2\theta$; $\therefore \frac{du}{dv} = \frac{du/d\theta}{dv/d\theta} = \frac{1/2}{2} = \frac{1}{4}$.

38. (b) माना $p = \sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2} = 2\tan^{-1}x$

तथा $q = \cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2} = 2\tan^{-1}x$; $\therefore \frac{dp}{dq} = \frac{dp/dx}{dq/dx} = 1$.

39. (d) माना $y = \sin^2 x$ और $z = \cos^2 x$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \sin 2x$ और $\frac{dz}{dx} = -\sin 2x$, $\therefore \frac{dy}{dz} = -1$.

40. (a) $y = \tan^{-1}\left[\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\right]$

$x = \sin\theta$ रखने पर, $y = \tan^{-1}\left[\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}\right] = \tan^{-1}\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\theta}{2}$

$\Rightarrow y = \frac{1}{2}\sin^{-1}x$ तथा माना $z = \sin^{-1}x$

अतः $\frac{dy}{dz} = \frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\left(\frac{dz}{dx}\right)} = \frac{\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\sin^{-1}x}{\frac{d}{dx}\sin^{-1}x} = \frac{1}{2}$.

41. (c) माना $y_1 = \cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = 2\tan^{-1}x$,

$\cot^{-1}\left(\frac{1-3x^2}{3x-x^3}\right) = 3\tan^{-1}x \Rightarrow \frac{dy_1}{dy_2} = \frac{\left(\frac{dy_1}{dx}\right)}{\left(\frac{dy_2}{dx}\right)} = \frac{\left(\frac{2}{1+x^2}\right)}{\left(\frac{3}{1+x^2}\right)} = \frac{2}{3}$

42. (c) $y = e^{x^3}, z = \log x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^{x^3}.(3x^2) = 3x^2e^{x^3}$ .....(i),

तथा $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}$ .....(ii)

(i) व (ii) से, $\frac{dy}{dz} = \frac{3x^2e^{x^3}}{(1/x)} = 3x^3e^{x^3}$.

43. (a) माना $y = a\sin^3 t$ और $x = a\cos^3 t$,

$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dy}{dt}\right)\Big/\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{3a\sin^2 t\cos t}{3a\cos^2 t(-\sin t)} = -\tan t$.

पुनः x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$\frac{d^2y}{dx^2} = -\sec^2 t\frac{dt}{dx} = \frac{-\sec^2 t}{3a\cos^2 t(-\sin t)} = \frac{1}{3a}\left(\frac{\sec^4 t}{\sin t}\right)$

$\therefore \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{t=\pi/4} = \frac{1}{3a}.\frac{4}{1/\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{3a}$.

44. (b) $\frac{d}{dx}[f(\sin x)] = \frac{d}{dx}[\log(\sin x)] = \frac{1}{\sin x}.\cos x = \cot x$.

45. (b) $\sin x\sin 3x = \frac{1}{2}[\cos 2x - \cos 4x]$.

46. (a) माना $y = x^{n+1}$; तब $y_1 = (n+1)x^n$

$y_2 = n(n+1)x^{n-1}$

$y_3 = n(n+1)(n-1)x^{n-2}$

.....

.....

$y_n = (n+1)!x$.

47. (c) $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$

$y_1 = a_1 + 2a_2x + ... + na_nx^{n-1}$

$y_2 = 2a_2 + 6a_3x + ... + n(n-1)a_nx^{n-2}$

.....

.....

$y_n = n!a_n$.

48. (c) $y = A\cos(nx) + B\sin(nx)$

$\therefore dy/dx = -nA\sin(nx) + nB\cos(nx)$

पुनः अवकलन करने पर, $\frac{d^2y}{dx^2} = -n^2A\cos(nx) - n^2B\sin(nx)$

$= -n^2[A\cos(nx) + B\sin(nx)]$

$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = -n^2y$.

49. (c) $\frac{d}{dx}[e^{2x} + e^{-2x}] = 2e^{2x} - 2e^{-2x} = 2^1[e^{2x} - e^{-2x}]$

$\frac{d^2}{dx^2}[e^{2x} + e^{-2x}] = 2^2[e^{2x} + e^{-2x}]$

$\frac{d^2}{dx^2}[e^{2x} + e^{-2x}] = 2^2[e^{2x} - e^{-2x}]$

.....

.....

$\frac{d^n}{dx^n}[e^{2x} + e^{-2x}] = 2^n[e^{2x} + (-1)^ne^{-2x}]$.

50. (c) $x = \log p \Rightarrow p = e^x \Rightarrow y = e^{-x}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -e^{-x}$ व $\frac{d^2y}{dx^2} = e^{-x}$; $\therefore \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 0$.

51. (b) $f(x) = a\sin(\log x)$

y का x के सापेक्ष अवकलन करने पर, $f'(x) = a\cos(\log x)\frac{1}{x}$

पुनः अवकलन करने पर,

$f''(x) = -\frac{1}{x^2}a\cos(\log x) - \frac{1}{x^2}a\sin(\log x)$

$\Rightarrow x^2f''(x) = -[a\cos(\log x) + a\sin(\log x)]$

$\Rightarrow x^2f''(x) + xf'(x) = -a\sin(\log x) = -f(x)$.

52. (a) $y = e^{\tan^{-1}x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{e^{\tan^{-1}x}}{1+x^2}$

$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(1+x^2).\frac{e^{\tan^{-1}x}}{(1+x^2)} - e^{\tan^{-1}x}(2x)}{(1+x^2)^2}$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(1-2x)e^{\tan^{-1}x}}{(1+x^2)^2} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2}(1+x^2) = (1-2x)\frac{dy}{dx}.$$

53. (a) $y = x^2e^{mx}$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर, $\frac{dy}{dx} = 2xe^{mx} + mx^2e^{mx}$

पुनः अवकलन करने पर,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2(e^{mx} + mxe^{mx}) + m(2xe^{mx} + x^2me^{mx})$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = e^{mx}(m^2x^2 + 4mx + 2)$$

पुनः अवकलन करने पर,

$$\frac{d^3y}{dx^3} = e^{mx}[m^3x^2 + 4m^2x + 2m + 2m^2x + 4m]$$

$$= e^{mx}[m^3x^2 + 6m^2x + 6m]$$

$$\Rightarrow \frac{d^3y}{dx^3} = me^{mx}(m^2x^2 + 6mx + 6).$$

54. (c) $y = ae^{mx} + be^{-mx}$; $\therefore \frac{dy}{dx} = ame^{mx} - mbe^{-mx}$

पुनः अवकलन करने पर, $\frac{d^2y}{dx^2} = am^2e^{mx} + m^2be^{-mx}$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = m^2(ae^{mx} + be^{-mx}) \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = m^2y$$

या $\frac{d^2y}{dx^2} - m^2y = 0$.

55. (b) द्विपद विस्तार करने पर,

$y = (x^2-1)^m = {}^mC_0x^{2m} + {}^mC_1x^{2m-2}(-1) + ...$

अतः सभी पदों का अवकलन करने पर केवल प्रथम पद को छोड़कर शेष सभी शून्य हो जायेंगे।

अतः $\frac{d^{2m}y}{dx^{2m}} = {}^mC_0\,2m\,(2m-1)(2m-2)....1 = (2m)!$.

56. (b) $y = ax^{n+1} + bx^{-n} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = (n+1)ax^n - nbx^{-n-1}$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = n(n+1)ax^{n-1} + n(n+1)bx^{-n-2}$$

$$\Rightarrow x^2\frac{d^2y}{dx^2} = n(n+1)y.$$

57. (b) $\frac{dy}{dx} = 2bx$, $\frac{d^2y}{dx^2} = 2b \Rightarrow x\frac{d^2y}{dx^2} = 2bx = \frac{dy}{dx}$.

58. (b) $y = \cos 4x + \cos 2x \Rightarrow \frac{d^{20}y}{dx^{20}} = 4^{20}\cos 4x + 2^{20}\cos 2x$.

59. (c) $y = \sin^2\alpha + \cos^2(\alpha+\beta) + 2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha+\beta)$

$$= \sin^2\alpha + \cos(\alpha+\beta)\{\cos(\alpha+\beta) + 2\sin\alpha\sin\beta\}$$

$$= \sin^2\alpha + \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$$

$$= \sin^2\alpha + \frac{1}{2}(\cos 2\alpha + \cos 2\beta)$$

$$= \sin^2\alpha + \cos^2\alpha - \frac{1}{2} + \frac{\cos 2\beta}{2}$$

$\Rightarrow y =$ अचर $\Rightarrow d^3y/d\alpha^3 = 0$.

ट्रिक : माना $\beta = 180°$, {चूँकि β अचर है}

$$\therefore y = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \frac{d^3y}{d\alpha^3} = 0.$$

60. (b) दिये गये सम्बंध से, $\frac{y}{x} = \log x - \log(a+bx)$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{\left(x\frac{dy}{dx} - y\right)}{x^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{a+bx}b = \frac{a}{x(a+bx)}$$

$$\therefore x\frac{dy}{dx} - y = \frac{ax}{a+bx} \quad .....(i)$$

पुनः x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx} = \frac{(a+bx)a - ax.b}{(a+bx)^2} \Rightarrow x\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{a^2}{(a+bx)^2}$$

$$\Rightarrow x^3\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{a^2x^2}{(a+bx)^2} = \left(x\frac{dy}{dx} - y\right)^2, \text{ [(i) द्वारा].}$$

61. (b) $e^y + xy = e$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$e^y\frac{dy}{dx} + y + x\frac{dy}{dx} = 0 \quad .....(i)$$

पुनः x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$e^y\frac{d^2y}{dx^2} + e^y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\frac{dy}{dx} + x\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \quad .....(ii)$$

$e^y + xy = e$ में $x = 0$ रखने पर, $y = 1$

समी. (i) में $x = 0$, $y = 1$ रखने पर, $e\frac{dy}{dx} + 1 = 0$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{e}$$

समी. (ii) $x = 0, y = 1$, $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{e}$ में रखने पर,

$$e\frac{d^2y}{dx^2} + e.\frac{1}{e^2} - \frac{2}{e} + 0.\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{e^2}.$$

62. (d) माना $y = f(e^x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = f'(e^x)e^x$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(e^x).e^x.e^x + e^x.f'(e^x) = f''(e^x).e^{2x} + f'(e^x).e^x.$$

63. (c) $y = \sin x + e^x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \cos x + e^x$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dy} = (\cos x + e^x)^{-1} \quad .....(i)$$

पुनः अवकलन करने पर,

$$\frac{d^2x}{dy^2} = -(\cos x + e^x)^{-2}(-\sin x + e^x)\frac{dx}{dy}$$

समी. (i) से $\frac{dx}{dy}$ का मान प्रतिस्थापित करने पर,

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{(\sin x - e^x)}{(\cos x + e^x)^2}(\cos x + e^x)^{-1} = \frac{\sin x - e^x}{(\cos x + e^x)^3}.$$

64. (a) $y = x^3\log\log_e(1+x)$

$$\Rightarrow y' = 3x^2\log\log_e(1+x) + \frac{x^3}{1+x}.\frac{1}{\log_e(1+x)}$$

$$\Rightarrow y'' = 6x\log\log_e(1+x) + \frac{3x^2}{\log_e(1+x)}.\frac{1}{(1+x)}$$

$-\frac{x^3}{(1+x)^2\log_e(1+x)}-\frac{x^3}{(1+x)^2}\cdot\frac{1}{[\log_e(1+x)]^2}+\frac{3x^2}{(1+x)\log_e(1+x)}$

$\Rightarrow y''(0)=0$.

65. (d) $\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{d}{dy}\left(\frac{dx}{dy}\right)=\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{\frac{dy}{dx}}\right)=\frac{-1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}$.

66. (c) $x=a\cos\theta+\frac{1}{2}b\cos 2\theta$, $y=a\sin\theta+\frac{1}{2}b\sin 2\theta$

$\frac{dy}{d\theta}=a\cos\theta+b\cos 2\theta$, $\frac{dx}{d\theta}=-a\sin\theta-b\sin 2\theta$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{dy/d\theta}{dx/d\theta}=\frac{a\cos\theta+b\cos 2\theta}{-a\sin\theta-b\sin 2\theta}$

$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{d\theta}\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{d\theta}{dx}$

$=\left[\frac{(a\sin\theta+b\sin 2\theta)(a\sin\theta+2b\sin 2\theta)}{(a\sin\theta+b\sin 2\theta)^2}\right.$

$\left.+\frac{(a\cos\theta+b\cos 2\theta)(a\cos\theta+2b\cos 2\theta)}{(a\sin\theta+b\sin 2\theta)^2}\right]\cdot\frac{d\theta}{dx}$

किन्तु $\frac{d^2y}{dx^2}=0$

$\Rightarrow a^2+2b^2+3ab[\sin 2\theta\sin\theta+\cos 2\theta\,.\cos\theta]=0$

$\Rightarrow a^2+2b^2=-3ab\cos(2\theta-\theta)$

$\therefore \cos\theta=-\left(\frac{a^2+2b^2}{3ab}\right)$.

67. (a) $y=(x+\sqrt{1+x^2})^n \Rightarrow \frac{dy}{dx}=n(x+\sqrt{1+x^2})^{n-1}\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{n(x+\sqrt{1+x^2})^n}{\sqrt{1+x^2}}$

$\Rightarrow (\sqrt{1+x^2})\frac{dy}{dx}=n(x+\sqrt{1+x^2})^n$

$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2}.\sqrt{1+x^2}+\frac{dy}{dx}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$

$=n^2\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{n-1}\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$

$\Rightarrow (1+x^2).\frac{d^2y}{dx^2}+x.\frac{dy}{dx}=n^2(x+\sqrt{1+x^2})^n$

$\Rightarrow (1+x^2)\frac{d^2y}{dx^2}+x.\frac{dy}{dx}=n^2y$.

68. (d) $f''(x)-g''(x)=0$

x के सापेक्ष समाकलन करने पर, $f'(x)-g'(x)=c$

$x=1$ पर, $f'(1)-g'(1)=c \Rightarrow 2-4=c \Rightarrow c=-2$

$f'(x)-g'(x)=-2$.

पुनः x के सापेक्ष समाकलन करने पर, $f(x)-g(x)=-2x+c_1$.

$x=2$ पर, $f(2)-g(2)=-2\times 2+c_1 \Rightarrow 3-9+4=c_1$

$\Rightarrow c_1=-2$

तब, $f(x)-g(x)=-2x-2=-(2x+2)$

$\therefore f(3/2)-g(3/2)=-\left(2\times\frac{3}{2}+2\right)=-5$.

69. (b) $y=ae^x+be^{-x}+c \Rightarrow y'=ae^x-be^{-x}$

$\Rightarrow y''=ae^x+be^{-x} \Rightarrow y'''=ae^x-be^{-x}=y'$.

70. (b) $y=a\cos(\log x)+b\sin(\log x)$

$\Rightarrow y'=\frac{-a\sin(\log x)}{x}+\frac{b\cos(\log x)}{x}$

$\Rightarrow xy'=-a\sin(\log x)+b\cos(\log x)$

$\Rightarrow xy''+y'=\frac{-a\cos(\log x)}{x}-\frac{b\sin(\log x)}{x}$

$\Rightarrow x^2y''+xy'=-[a\cos(\log x)+b\sin(\log x)]$

$\Rightarrow x^2y''+xy'=-y$.

71. (d) $u=x^2+y^2$, $x=s+3t$, $y=2s-t$

अब $\frac{dx}{ds}=1$, $\frac{dy}{ds}=2$ .....(i)

$\frac{d^2x}{ds^2}=0$, $\frac{d^2y}{ds^2}=0$

.....(ii)

पुनः $u=x^2+y^2$, $\frac{du}{ds}=2x.\frac{dx}{ds}+2y.\frac{dy}{ds}$

$\frac{d^2u}{ds^2}=2\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+2x\frac{d^2x}{ds^2}+2\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+2y\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)$

(i) व (ii) से, $\frac{d^2u}{ds^2}=2\times 1+0+2\times 4+0=10$.

72. (d) माना $y=\log x$

$\Rightarrow y_1=\frac{1}{x}, y_2=\frac{-1}{x^2}, y_3=\frac{2}{x^3},...., y_n=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$.

73. (c) $f(x)=xe^x$

$f'(x)=e^x+xe^x$

$f''(x)=e^x+e^x+xe^x=2e^x+xe^x$

$f'''(x)=2e^x+e^x+xe^x=3e^x+xe^x$

....

....

$f^n(x)=ne^x+xe^x$, अब $f^n(x)=0$

$\Rightarrow ne^x+xe^x=0 \Rightarrow x=-n$.

74. (d) $y=2\cos x\cos 3x$

$\frac{dy}{dx}=2\cos x.(-3\sin 3x)+2\cos 3x(-\sin x)$

$=-3(\sin 4x+\sin 2x)+(-1)(\sin 4x+\sin(-2x))$

$\frac{d^2y}{dx^2}=-3(4\cos 4x+2\cos 2x)-1(4\cos 4x-2\cos 2x)$

$=-16\cos 4x-4\cos 2x=-4(\cos 2x+4\cos 4x)$

$=-2^2(\cos 2x+2^2\cos 4x)$.

75. (d) $y=1-x+\frac{x^2}{(2)!}-\frac{x^2}{(3)!}+..........\,..$

$\Rightarrow \quad y = e^{-x} \quad \Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^{-x}(-1)$

पुनः अवकलन करने पर, $\frac{d^2y}{dx^2} = (-1)\{e^{-x}.(-1)\} = e^{-x} = y$.

76. (a) $\lim_{x\to 0} \frac{2f(x) - 3f(2x) + f(4x)}{x^2}$

L-हॉस्पीटल नियम का दो बार उपयोग करने पर,

$\lim_{x\to 0} \frac{2f''(x) - 3.2.2f''(2x) + 4.4f''(4x)}{2} = 3a$

$\{\because$ दिया है $f''(0) = a\}$.

77. (a) $x = A\cos 4t + B\sin 4t$

t के सापेक्ष अवकलन करने पर, $\frac{dx}{dt} = -4A\sin 4t + 4B\cos 4t$

पुनः t के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$\frac{d^2x}{dt^2} = -16A\cos 4t - 16B\sin 4t$

$\frac{d^2x}{dt^2} = -16[A\cos 4t + B\sin 4t]$. अतः $\frac{d^2x}{dt^2} = -16x$.

78. (b) $y = \tan^{-1}\left(\frac{\log e - \log x^2}{\log e + \log x^2}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{3 + 2\log x}{1 - 6\log x}\right)$

$= \tan^{-1}\left(\frac{1 - 2\log x}{1 + 2\log x}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{3 + 2\log x}{1 - 6\log x}\right)$

$= \tan^{-1}1 - \tan^{-1}(2\log x) + \tan^{-1}3 + \tan^{-1}(2\log x)$

$\Rightarrow y = \tan^{-1}1 + \tan^{-1}3 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{d^n y}{dx^n} = 0.$

79. (a) $F(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) \\ g_1(x) & g_2(x) & g_3(x) \\ h_1(x) & h_2(x) & h_3(x) \end{vmatrix}$

$\therefore F'(x) = \begin{vmatrix} f_1'(x) & f_2'(x) & f_3'(x) \\ g_1(x) & g_2(x) & g_3(x) \\ h_1(x) & h_2(x) & h_3(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) \\ g_1'(x) & g_2'(x) & g_3'(x) \\ h_1(x) & h_2(x) & h_3(x) \end{vmatrix}$

$+ \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) \\ g_1(x) & g_2(x) & g_3(x) \\ h_1'(x) & h_2'(x) & h_3'(x) \end{vmatrix}$

$\Rightarrow F'(a) = 0$, (चूँकि $f_n(a) = g_n(a) = h_n(a), \quad n = 1, 2, 3$)

अतः $x = a$ रखने पर प्रत्येक सारणिक की दो पंक्तियाँ सर्वसम हो जाती हैं।

80. (d) $f'''(x) = \begin{vmatrix} \frac{d^3}{dx^3}x^3 & \frac{d^3}{dx^3}\sin x & \frac{d^3}{dx^3}\cos x \\ 6 & -1 & 0 \\ p & p^2 & p^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -\cos x & \sin x \\ 6 & -1 & 0 \\ p & p^2 & p^3 \end{vmatrix}$

$\therefore f'''(0) = \begin{vmatrix} 6 & -1 & 0 \\ 6 & -1 & 0 \\ p & p^2 & p^3 \end{vmatrix} = 0$, जो कि p से स्वतंत्र है।

81. (d) $f(x) = \begin{vmatrix} x^3 & x^2 & 3x^2 \\ 1 & -6 & 4 \\ p & p^2 & p^3 \end{vmatrix}$

$\Rightarrow f(x) = x^3(-6p^3 - 4p^2) - x^2(p^3 - 4p) + 3x^2(p^2 + 6p)$

$\Rightarrow \quad f(x) = -6p^3x^3 - 4p^2x^3 - x^2p^3 + 4px^2 + 3p^2x^2 + 18px^2$

$\therefore \frac{d}{dx}f(x) = -18p^3x^2 - 12p^2x^2 - 2xp^3 + 8px + 6p^2x + 36px$

तथा $\frac{d^2}{dx^2}f(x) = -36p^3x - 24p^2x - 2p^3 + 8p + 6p^2 + 36p$

तथा $\frac{d^3f(x)}{dx^3} = -36p^3 - 24p^2 =$ अचर

82. (b) $D = \begin{vmatrix} \sin px & p\cos px & -p^2\sin px \\ -p^3\cos px & p^4\sin px & p^5\cos px \\ -p^6\sin px & -p^7\cos px & p^8\sin px \end{vmatrix}$

$= p^9\begin{vmatrix} \sin px & p\cos px & -p^2\sin px \\ -\cos px & p\sin px & p^2\cos px \\ -\sin px & -p\cos px & p^2\sin px \end{vmatrix}$

$= -p^9\begin{vmatrix} \sin px & p\cos px & -p^2\sin px \\ \cos px & p\sin px & p^2\cos px \\ \sin px & p\cos px & -p^2\sin px \end{vmatrix} = 0.$

83. (a) $y^2 = ax^2 + bx + c \Rightarrow 2y\frac{dy}{dx} = 2ax + b$

$\Rightarrow \quad 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2y\frac{d^2y}{dx^2} = 2a \Rightarrow y\frac{d^2y}{dx^2} = a - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$

$\Rightarrow y\frac{d^2y}{dx^2} = a - \left(\frac{2ax + b}{2y}\right)^2 \Rightarrow y\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4ay^2 - (2ax + b)^2}{4y^2}$

$\Rightarrow \quad 4y^3\frac{d^2y}{dx^2} = 4a(ax^2 + bx + c) - (4a^2x^2 + 4abx + b^2)$

$\Rightarrow 4y^3\frac{d^2y}{dx^2} = 4ac - b^2 \Rightarrow y^3\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4ac - b^2}{4} =$ अचर

84. (e) $y = a^x b^{2x-1}$

$\frac{dy}{dx} = a^x b^{2x-1}\log a + 2a^x b^{2x-1}\log b$

$= a^x b^{2x-1}(\log a + 2\log b)$

$\frac{d^2y}{dx^2} = a^x b^{2x-1}(\log a + 2\log b)^2$

$= a^x b^{2x-1}(\log ab^2)^2 = y(\log ab^2)^2$.

आंशिक अवकलन

1. (d) स्पष्ट है कि z; x व y में समघाती है। x, y की कोटि $= \frac{4}{3} - \frac{3}{4} = \frac{7}{12}$

$\therefore$ यूलर प्रमेय द्वारा, $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{7}{12}z$.

2. (c) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}}.\frac{1}{y} = \frac{y}{x^2 + y^2}$

$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}}.\left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{x}{x^2 + y^2}$

$\therefore \quad \frac{\partial z}{\partial x} : \frac{\partial z}{\partial y} = y : -x$ अर्थात्, $z_x : z_y = -y : x$

3. (b) $u = \frac{x + y}{x - y}$

$$\therefore \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{(x-y).1-(x+y).1}{(x-y)^2}=\frac{-2y}{(x-y)^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{(x-y).1-(x+y)(-1)}{(x-y)^2}=\frac{2x}{(x-y)^2}$$

$$\therefore \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2(x-y)}{(x-y)^2}=\frac{2}{x-y}.$$

4. (b) $u=\log(x^2+y^2), \therefore \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{x^2+y^2}.2x$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{(x^2+y^2).2-2x.2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{x^2+y^2}.2y$$

$$\therefore \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{(x^2+y^2).2-2y.2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\therefore \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

5. (d) $u=\sin^{-1}\frac{y}{x}; \therefore \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{y^2}{x^2}}}.\left(-\frac{y}{x^2}\right)=-\frac{y}{x\sqrt{x^2-y^2}}.$

6. (c) $u=\tan^{-1}\frac{y}{x}=x^0.\tan^{-1}\frac{y}{x}$

स्पष्टतः u, x और y में शून्य घात का समघाती है।

$\therefore$ यूलर प्रमेय से, $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial z}=0.u=0$.

7. (a) $\tan u$, x और y में दो घात का समघाती है

$$\therefore x\frac{\partial}{\partial x}(\tan u)+y\frac{\partial}{\partial y}(\tan u)=2(\tan u)$$

$$\therefore x\sec^2 u\frac{\partial u}{\partial x}+y\sec^2 u\frac{\partial u}{\partial y}=2\tan u$$

$$\Rightarrow x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=2\frac{\tan u}{\sec^2 u}=2\sin u\cos u=\sin 2u.$$

8. (c) चूँकि $F(u)$; x,y,z में घात n का समघाती है

$$\therefore x\frac{\partial}{\partial x}(F(u))+y.\frac{\partial}{\partial y}(F(u))+z\frac{\partial}{\partial z}(F(u))=nF(u)$$

$$\Rightarrow x.F'(u)\frac{\partial u}{\partial x}+yF'(u)\frac{\partial u}{\partial y}+zF'(u)\frac{\partial u}{\partial z}=nF(u)$$

$$\Rightarrow x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{nF(u)}{F'(u)}.$$

9. (d) $u=\log(x^3+y^3+z^3-3xyz)$

$$\therefore \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{3x^2-3yz}{x^3+y^3+z^3-3xyz}; \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{3y^2-3zx}{x^3+y^3+z^3-3xyz}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{3z^2-3xy}{x^3+y^3+z^3-3xyz}$$

$$\therefore \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{3(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)}{(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)}$$

$$=\frac{3}{x+y+z}.$$

$$\therefore (x+y+z)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)=3.$$

10. (b) चूँकि $\sin z$, x व y में घात 1/2 का समघाती है

$$\therefore x\frac{\partial}{\partial x}(\sin z)+y\frac{\partial}{\partial y}(\sin z)=\frac{1}{2}\sin z$$

$$\Rightarrow x\cos z\frac{\partial z}{\partial x}+y\cos z\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2}\sin z$$

$$\Rightarrow x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2}\tan z.$$

11. (a) $u=\log_e(x^2+y^2)+\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+y^2}+\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}.\left(-\frac{y}{x^2}\right)=\frac{2x-y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{(x^2+y^2).2-(2x-y)2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{2y^2-2x^2+2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2y}{x^2+y^2}+\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}.\frac{1}{x}=\frac{2y+x}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{(x^2+y^2).2-(2y+x)2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{2x^2-2y^2-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\therefore \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

12. (b) $x^x y^y z^z=c \Rightarrow \log(x^x y^y z^z)=\log c$

$\Rightarrow x\log x+y\log y+z\log z=\log c$ .....(i)

यहाँ x व y स्वतंत्र चर हैं और z, x व y पर निर्भर करता है।

समी. (i) का x के सापेक्ष आंशिक अवकलन करने पर,

$$x.\frac{1}{x}+\log x.1+0+\left(z.\frac{1}{z}+\log z.1\right)\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1+\log x}{1+\log z}.$$

13. (c) $u=x^3\left(\frac{y}{x}\right)^2\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$, x व y में घात 3 का समघाती है

$$\therefore xu_x+yu_y=3u.$$

14. (d) z^2, x व y में घात $\frac{1}{6}$ का समघाती है

$$\therefore x\frac{\partial}{\partial x}(z^2)+y\frac{\partial}{\partial y}(z^2)=\frac{1}{6}(z^2)$$

$$\Rightarrow 2xz\frac{\partial z}{\partial x}+2yz\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{6}z^2 \Rightarrow x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{12}z.$$

15. (b) $\tan u=x+y=x.\left(1+\frac{y}{x}\right)$

$\therefore \tan u$, x व y में घात 1 का समघाती है

$$\therefore x\frac{\partial}{\partial x}(\tan u)+y\frac{\partial}{\partial y}(\tan u)=\tan u$$

$$\therefore x\sec^2 u\frac{\partial u}{\partial x}+y\sec^2 u\frac{\partial u}{\partial y}=\tan u$$

$$\therefore x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=\tan u.\cos^2 u=\sin u\cos u=\frac{1}{2}\sin 2u.$$

16. (b) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{1/2}.2x$

$$\therefore \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 = \frac{9}{4}(x^2+y^2+z^2)4x^2 = 9x^2(x^2+y^2+z^2)$$

$$\therefore \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2$$

$$= 9(x^2+y^2+z^2)(x^2+y^2+z^2)$$

$$= 9(x^2+y^2+z^2)^2 = 9.u^{4/3}.$$

17. (b) $u = x^2\tan^{-1}\frac{y}{x} - y^2\left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\frac{y}{x}\right) = (x^2+y^2)\tan^{-1}\frac{y}{x} - \frac{\pi}{2}y^2$

$$\therefore \frac{\partial u}{\partial y} = (x^2+y^2)\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}.\frac{1}{x} + 2y\tan^{-1}\frac{y}{x} - \pi y$$

$$= x + 2y\tan^{-1}\frac{y}{x} - \pi y$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = 1 + 2y\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}.\frac{-y}{x^2} = 1 - \frac{2y^2}{x^2+y^2} = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}.$$

18. (a) $2u\frac{\partial u}{\partial x} = 2(x-a) \Rightarrow u\frac{\partial u}{\partial x} = x-a \Rightarrow u.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 = 1$

$$\Rightarrow u.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 1 - \left(\frac{x-a}{u}\right)^2 \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{u} - \frac{(x-a)^2}{u^3}$$

इसी प्रकार, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{u} - \frac{(y-b)^2}{u^3}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{u} - \frac{(z-b)^2}{u^3}$

$$\therefore \Sigma\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{3}{u} - \frac{1}{u^3}[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]$$

$$= \frac{3}{u} - \frac{1}{u^3}.(u^2) = \frac{3}{u} - \frac{1}{u} = \frac{2}{u}.$$

19. (c) $\frac{\partial z}{\partial x} = -a\sec(y-ax)\tan(y-ax) + a\sec^2(y+ax)$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = a^2\sec^3(y-ax) + a^2\sec(y-ax)\tan^2(y-ax)$$

$$+ 2a^2\sec^2(y+ax)\tan(y+ax)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \sec(y-ax)\tan(y-ax) + \sec^2(y+ax)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \sec^3(y-ax) + \sec(y-ax)\tan^2(y-ax)$$

$$+ 2\sec^2(y+ax)\tan(y+ax)$$

$$\therefore \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - a^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

20. (b) चूँकि z, x व y में घात 0 का समघाती है

$\therefore$ यूलर प्रमेय से, $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$

$$\Rightarrow x\frac{\partial z}{\partial x} = -y\frac{\partial z}{\partial y}$$

21. (b) $u_x = e^{-x^2-y^2}(-2x) = -2ux$, $u_y = e^{-x^2-y^2}(-2y) = -2uy$

अतः $yu_x = xu_y$.

यांत्रिकी में अनुप्रयोग व परिवर्तन की दर

1. (a) वेग, $v^2 = 2 - 3x$

t के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$2v\frac{dv}{dt} = -3.\frac{dx}{dt} \Rightarrow 2v\frac{dv}{dt} = -3v \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -\frac{3}{2}$$

अतः त्वरण एकसमान है।

2. (a) दिया है, $s = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow \frac{ds}{dt} = gt \Rightarrow \frac{d^2s}{dt^2} = g$

अतः त्वरण एकसमान है।

3. (c) $S = 4\pi r^2$

$\therefore \delta S = 8\pi r\delta x = 8\pi \times 20 \times .02 = 10.05$ वर्ग सेमी.

4. (c) $s = 2t^2 - 3t + 1$; $\therefore \frac{ds}{dt} = v = 4t - 3$

$t = 0$ पर, $\left(\frac{ds}{dt}\right)_{t=0} = -3 = v_1$

अब $t = 1$ पर, $\left(\frac{ds}{dt}\right)_{t=1} = 4 - 3 = 1 = v_2$

अतः वेग की दर $= v_2 - v_1 = 1 - (-3) = 4$

वैकल्पिक : दिया है कि $s = 2t^2 - 3t + 1$

$\frac{ds}{dt} = 4t - 3$ (वेग), पुनः $\frac{d^2s}{dt^2} = 4$ (त्वरण)

5. (c) $\frac{ds}{dt} = 6t^2 - 18t + 12$ = वेग = 0 (जब कण रूक जाता है)

$\Rightarrow 6t^2 - 18t + 12 = 0 \Rightarrow (t-1)(t-2) = 0$

अतः समय 1, 2 सेकण्ड है।

6. (c) गुब्बारे की त्रिज्या $= r = \frac{3}{4}(2x+3) \Rightarrow \frac{dr}{dx} = \frac{3}{2}$

$\therefore$ आयतन में परिवर्तन की दर $= 4\pi\left(\frac{3}{4}\right)^2(2x+3)^2.\frac{3}{2}$

$$= \frac{27\pi}{8}(2x+3)^2.$$

7. (c) $\frac{ds}{dt} = 6t - \frac{t^2}{6}$

अब दोनों पक्षों का समाकलन करने पर,

$s = 3t^2 - \frac{t^2}{18}$ + नियतांक, (जहाँ s दूरी है)

अब $t = 0$ रखने पर, $s = 0$ जिससे नियतांक का मान 0 प्राप्त होता है एवं $t = 3$ रखने पर, $s = 3(3)^2 - \frac{3^3}{18} = 27 - \frac{27}{18} = \frac{51}{2}$.

वैकल्पिक : $\int_0^s ds = \int_0^3\left(6t - \frac{t^2}{6}\right)dt = \frac{51}{2}$.

8. (d) दिया गया समीकरण है , $s = t^2 - 2t$ .....(i)

एवं $\frac{ds}{dt}$ = वेग $= 2t - 2$ .....(ii)

(i) में $s = 15$ रखने पर,

$t^2 - 2t - 15 = 0$ या $(t-5)(t+3) = 0$

$\therefore t = 5$

अतः कार का वेग $= v = 2(5) - 2 = 8$ किमी/घंटा.

9. (a) यहाँ $u = 490$, $g = 9.8$ (नीचे की ओर)

अतः $S = \frac{u^2}{2g} = 12250$.

10. (b) माना वेग $v = 5$ सेमी/सेकण्ड (प्रति सेकण्ड वृद्धि दर वेग कहलाती है)

$$\frac{da}{dt} = 5 \qquad \text{.....(i)}$$

जहाँ a दूरी व t समय है।

परन्तु यदि a इस घन की एक कोर है, तो $V = a^3$

समय t के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dV}{dt} = 3a^2\frac{da}{dt} = 3a^2.5 = 15a^2 = 15\times(12)^2$$

$= 2160$ सेमी/सेकण्ड ($\because$ कोर $a = 12$ सेमी)

11. (a) $s = \frac{1}{2}vt \Rightarrow 2s = vt \Rightarrow 2\frac{ds}{dt} = v + t.\frac{dv}{dt}$

$$\Rightarrow 2\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt} + t.\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{dv}{dt}$$

परन्तु $\frac{dv}{dt}$ = त्वरण (a)

$$\Rightarrow 2a = a + t.\frac{da}{dt} + a \Rightarrow \frac{da}{dt} = 0 \text{ या } t = 0$$

परन्तु $t = 0$ असम्भव है, अतः $\frac{da}{dt} = 0$ अर्थात् त्वरण नियत है।

12. (b) कण की गति का समीकरण $s = 15t - 2t^2$

अतः वेग $\frac{ds}{dt} = 15 - 4t$

$$\Rightarrow \left(\frac{ds}{dt}\right)_{t=0} = 15 \text{ व } \left(\frac{ds}{dt}\right)_{t=3} = 3$$

अतः $= \frac{15+3}{2} = 9$.

13. (c) दिया है, $s = ae^t + \frac{b}{e^t} \Rightarrow \frac{ds}{dt} =$ वेग $= ae^t - \frac{b}{e^t}$

पुनः $\frac{d^2s}{dt^2} =$ त्वरण $= ae^t + \frac{b}{e^t} = s$.

14. (c) उच्चतम बिन्दु पर कण का वेग $\frac{ds}{dt} = 0$ है।

$\Rightarrow u - 12.6t = 0 \Rightarrow u = 12.6t = 37.8$ सेमी/सेकण्ड

15. (b) $v^2 = a + bx \Rightarrow 2v\frac{dv}{dt} = b\frac{dx}{dt} \Rightarrow 2v\frac{dv}{dt} = bv \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{b}{2}$

अतः त्वरण एकसमान या नियत है।

16. (d) $V = 5x - \frac{x^2}{6} \Rightarrow \frac{dV}{dt} = 5\frac{dx}{dt} - \frac{x}{3}.\frac{dx}{dt}$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{\frac{dV}{dt}}{\left(5 - \frac{x}{3}\right)} \Rightarrow \left(\frac{dx}{dt}\right)_{x=2} = \frac{5}{5 - \frac{2}{3}} = \frac{15}{13} \text{ सेमी/सेकण्ड.}$$

17. (a) $\frac{ds}{dt} = 10 - 6t = v$

परन्तु $v = 0$ (अधिकतम ऊँचाई पर), $\therefore t = \frac{10}{6}$

अतः पत्थर $2\times\frac{10}{6} = \frac{10}{3}$ सेकण्ड में वापस आयेगा।

18. (c) त्वरण $f = \frac{dv}{dt} = 2t$, अतः 3 सेकण्ड बाद त्वरण $= 2\times3 = 6$ सेमी/सेकण्ड.

19. (a) दिया गया है कि धातु के बढ़ने की दर

$= 4$ सेमी/सेकण्ड $= v = \frac{da}{dt}$

हम जानते हैं, कि वर्गाकार चादर का क्षेत्रफल (A)=a^2, (जहाँ a भुजा है)

$\therefore \frac{dA}{dt} = 2a\frac{da}{dt} = 2\times2\times4 = 16$ सेमी/सेकण्ड.

20. (d) प्रथम पत्थर द्वारा अधिकतम ऊँचाई प्राप्त करने में लिया गया समय $= \frac{u}{g} = \frac{19.6}{9.8} = 2$ सेकण्ड

दूसरे पत्थर द्वारा अधिकतम ऊँचाई प्राप्त करने में लिया गया समय $= \frac{9.8}{9.8} = 1$ सेकण्ड। अतः 2 सेकण्ड में दूसरा पत्थर पृथ्वी पर आ जाएगा, अतः $h = 0$.

21. (b) दिया गया समीकरण $10s = 10ut - 49t^2$ या $s = ut - 4.9t^2$

$\Rightarrow \frac{ds}{dt} = u - 9.8t = v$

जब पत्थर अधिकतम ऊँचाई प्राप्त कर लेता है तो $v = 0$

$\Rightarrow u - 9.8t = 0 \Rightarrow u = 9.8t$

परन्तु $t = 5$ सेकण्ड

अतः $u = 9.8\times5 = 49.0$ मी/सेकण्ड

अतः प्रारम्भिक वेग $= 49$ मी/सेकण्ड.

22. (d) $2t = v^2$

v का t के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$2v\frac{dv}{dt} = 2$ या $\frac{dv}{dt} = \frac{1}{v}$.

23. (b) $t = \frac{v^2}{2} \Rightarrow v^2 = 2t \Rightarrow 2v\frac{dv}{dt} = 2.$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{1}{v} = f \Rightarrow \frac{df}{dt} = -\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{v^2}\times\frac{1}{v}$$

$$\Rightarrow -\frac{df}{dt} = \frac{1}{v^3} = f^3.$$

24. (a) $\frac{ds}{dt} = 6t^2 - 18t + 12$

पुनः $\frac{d^2s}{dt^2} = 12t - 18 =$ त्वरण

यदि त्वरण शून्य हो, तो $0 = 12t - 18 \Rightarrow t = \frac{3}{2}$ सेकण्ड

अतः $\frac{3}{2}$ सेकण्ड के बाद त्वरण शून्य हो जाएगा।

25. (b) तीसरे सेकण्ड में औसत वेग=तीसरे सेकण्ड में तय की गयी दूरी

= 3 सेकण्ड में तय दूरी – 2 सेकण्ड में तय दूरी
$= (9 + 24 + 12) - (4 + 16 + 12) = 45 - 32 = 13$.

26. (a) चित्र से, $x^2 + y^2 = 100$ .....(i)

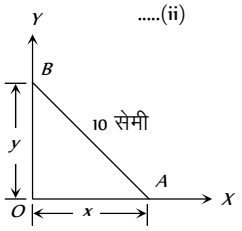
$\Rightarrow 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$ .....(ii)

$x = 8$

(i) व (ii) से,

$\frac{dy}{dt} = -\frac{16}{6} = -\frac{8}{3}$ सेमी/सेकण्ड

$= \frac{8}{3}$ सेमी/सेकण्ड



27. (a) वृत्त का क्षेत्रफल $= A = \pi R^2$

$\therefore \frac{dA}{dt} = 2\pi R\frac{dR}{dt} = 1.2\pi$ सेमी.

28. (b) $y = x^3 + 5 \Rightarrow dy = 3x^2dx = 3(3)^2 - 0.01 = -0.27$.

29. (b) दिया गया समीकरण है, $s = at^2 + bt + 6$ .....(i)

समय t के सापेक्ष अवकलन करने पर,

वेग $(v) = 2at + b$ .....(ii)

4 सेकण्ड पश्चात् $v = 0$ एवं दूरी $s = 16$ मीटर

$\therefore 0 = 2a \times 4 + b \Rightarrow 8a + b = 0$ .....(iii)

एवं $16 = 16a + 4b + 6 \Rightarrow 16 = 16a + 4(-8a) + 6$

$\therefore a = -\frac{5}{8}$

परन्तु इसकी गति में मंदन $2a = \frac{-5}{4}$ मी/सेकण्ड² है

$\therefore$ मंदन $= \frac{5}{4}$ मी/सेकण्ड² (मंदन का अर्थ ही ऋणात्मक है)।

30. (c) $\frac{ds}{dt} =$ वेग $= 45 + 22t - 3t^2$

जब कण विराम में आ जाएगा, तो $v = 0$

$\Rightarrow 3t^2 - 22t - 45 = 0 \Rightarrow t = 9, \left(\text{चूँकि } t \neq -\frac{5}{3}\right)$.

31. (c) $\frac{ds}{dt} =$ गेंद का वेग $(v) = u - 9.8t$

यहाँ अंतिम वेग $v = 0$ व $t = 3$ सेकण्ड

$u = 9.8(3) = 29.4$ मी/सेकण्ड.

32. (d) $\frac{dr}{dt} = 3$, $S = \pi r^2 \Rightarrow \frac{dS}{dt} = 2\pi r\frac{dr}{dt}$

$\Rightarrow \left(\frac{dS}{dt}\right)_{r=10} = 2.\pi \times 10 \times 3 = 60\,\pi$ सेमी²/सेकण्ड.

33. (c) $s = 13.8t - 4.9t^2$

वेग $v = \frac{ds}{dt} = 13.8 - 9.8t$

अतः $\left(\frac{ds}{dt}\right)_{t=1} = 13.8 - 9.8 \times 1 = 4.0 = 4$ मी/सेकण्ड.

34. (a) विस्थापन $s = -4t^2 + 2t$

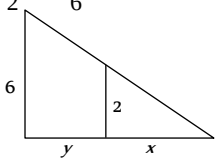
अब वेग $v = -8t + 2$ एवं त्वरण $a = -8$

अतः $\left(\frac{ds}{dt}\right)_{t=1/2} = -8 \times \frac{1}{2} + 2 = -2$ एवं $\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)_{t=1/2} = -8$.

35. (c) $\frac{d^2s}{dt^2} = -32$ इकाई

36. (b) $\frac{dy}{dt} = 5$, $\frac{dx}{dt} = ?$

चित्र से, $\frac{x}{2} = \frac{x+y}{6} \Rightarrow 4x = 2y \Rightarrow x = \frac{1}{2}y$



अतः $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}\frac{dy}{dt} = \frac{5}{2}$ मीटर/घण्टा.

37. (a) चित्रानुसार, $x^2 + y^2 = 25$ .....(i)

समी. (i) का t के सापेक्ष अवकलन करने पर,

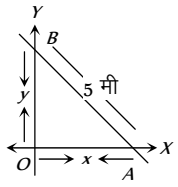
$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$ .....(ii)

यहाँ $x = 4$ एवं $\frac{dx}{dt} = 1.5$

(i) से, $4^2 + y^2 = 25 \Rightarrow y = 3$

(ii) से, $2(4)(1.5) + 2(3)\frac{dy}{dt} = 0$

$\therefore \frac{dy}{dt} = -2$ मी/सेकण्ड



अतः उच्चतम बिन्दु की लम्बाई 2 मी/सेकण्ड की दर से घटती है।

38. (a) दिया है, त्रिज्या बढ़ने की दर $= \frac{dr}{dt} = 3.5$ सेमी/सेकण्ड

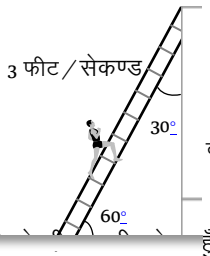
और $r = 10$ सेमी

वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi r^2$, $A = \pi r^2$

$\Rightarrow \frac{dA}{dt} = 2\pi r.\frac{dr}{dt} \Rightarrow \frac{dA}{dt} = 2\pi \times 10 \times 3.5$

$\Rightarrow \frac{dA}{dt} = 220$ सेमी²/सेकण्ड.

39. (b)



आदमी हुँचने की दर

$= 3 \times \cos 60° = \frac{3}{2}$ फीट/सेकण्ड।

40. (b) $\frac{da}{dt} = 60$ सेमी/सेकण्ड, जहाँ a कोर एवं t समय है।

अब, $V = a^3$

$\therefore \frac{dV}{dt} = 3a^2\frac{da}{dt} = 3a^2 \times 60 = 180\,a^2 = 180 \times (90)^2$

$\Rightarrow \frac{dV}{dt} = 1458000$ सेमी³/सेकण्ड.

41. (d) दिया है, $s = a\sin t + b\cos 2t$

$\therefore \frac{ds}{dt} = a\cos t - 2b\sin 2t$

$\frac{d^2s}{dt^2} = -a\sin t - 4b\cos 2t$

$t = 0$ पर, $\frac{d^2s}{dt^2} = -a\sin 0° - 4b\cos 0° = -4b$.

42. (c) $S = 6 + 48t - t^3$

$v = \frac{dS}{dt} = 0 + 48 - 3t^2$

जब गति की दिशा परिवर्तित होती है तब, $v = 0$

$48 - 3t^2 = 0 \Rightarrow t = -4, 4$

$(S)_4 = 6 + 192 - 64$ अर्थात् $S = 134$.

43. (c) $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

t के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$\frac{dV}{dt} = \frac{4}{3}\pi 3r^2.\frac{dr}{dt} \Rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{1}{4\pi r^2}.\frac{dV}{dt}$

$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{4\times\pi\times 15\times 15}\times 900 \Rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{1}{\pi} = \frac{7}{22}$.

44. (c) $\frac{dx}{dt} = v_x = a \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = 0 = a_x$

a_x, x-अक्ष के अनुदिश त्वरण है।

$\frac{d^2y}{dt^2} = -ba^2\sin at \Rightarrow a_y = -a^2y$

अतः y-अक्ष के अनुदिश त्वरण a_y, y के अनुसार परिवर्तित होता है।

45. (c) परिमाप $P = 2\pi r$

$\frac{dP}{dt} = 2\pi.\frac{dr}{dt}$ और $A = \pi r^2$

$\frac{dA}{dt} = 2\pi r.\frac{dr}{dt} \Rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{dP}{dt}\times r \Rightarrow \frac{dA}{dt} \propto r$.

46. (b) $s = 80 - 16t^2$, $\frac{ds}{dt} = v = 80 - 32t$

$(v)_{t=2} = 80 - 64 = 16$ मी/सेकण्ड.

47. (a) $s = t + 6t^2 - t^3$

$\Rightarrow \frac{ds}{dt} = 1 + 12t - 3t^2 \Rightarrow \frac{d^2s}{dt^2} = 12 - 6t$

$\Rightarrow \frac{d^2s}{dt^2} = 0 \Rightarrow 12 - 6t = 0 \Rightarrow t = 2$.

48. (c) दूरी $s = 3t^2 - 8t + 5$ तथा वेग $v = \frac{ds}{dt} = 6t - 8$

पिण्ड विराम अवस्था में होगा, जब $v = 0$

$\Rightarrow 6t - 8 = 0 \Rightarrow t = 4/3$.

49. (c) माना $y = \sqrt{x^2 + 16}$ तथा $z = \frac{x}{x-1}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(x^2 + 16)^{-1/2}(2x)$

तथा $\frac{dz}{dx} = \frac{x - 1 - x}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2}$

$\therefore \frac{dy}{dz} = \frac{-x}{\sqrt{x^2+16}}\frac{1}{1/(x-1)^2}$

$\left(\frac{dy}{dz}\right)_{x=3} = \frac{-3(2)^2}{5} = \frac{-12}{5}$.

50. (c) $a + bv^2 = x^2 \Rightarrow 0 + b\left(2v.\frac{dv}{dt}\right) = 2x.\frac{dx}{dt}$

$\Rightarrow v.b\frac{dv}{dt} = x.\frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{x}{b}$, $\left(\because \frac{dx}{dt} = v\right)$.

51. (c) $\frac{dx}{dt} = 2at + b \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = 2a$.

52. (c) यदि समबाहु त्रिभुज की प्रत्येक भुजा की लम्बाई x हो तथा क्षेत्रफल A हो, तो $A = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 \Rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{\sqrt{3}}{4}2x\frac{dx}{dt}$

यहाँ $x = 10$ सेमी तथा $\frac{dx}{dt} = 2$ सेमी/सेकण्ड

$\Rightarrow A = 10\sqrt{3}$ वर्ग इकाई प्रति सेकण्ड.

53. (c) $\because$ वक्र पृष्ठ $s = 4\pi r^2$ तथा $\frac{dr}{dt} = 2$

$\therefore \frac{ds}{dt} = 4\pi\times 2r\frac{dr}{dt} = 8\pi r\times 2 = 16\pi r \Rightarrow \frac{ds}{dt} \propto r$.

54. (c) यदि टकराने का समय t है; तो $10 + 6t = 3 + t^2$

$\Rightarrow t^2 - 6t - 7 = 0 \Rightarrow t = 7$ सेकण्ड

$t = 7$ सेकण्ड पर, $v_1 = \frac{d}{dt}(10 + 6t) = 6$ सेमी/सेकण्ड

$t = 7$ सेकण्ड पर,

$v_2 = \frac{d}{dt}(3 + t^2) = 2t = 2\times 7 = 14$ सेमी/सेकण्ड

$\therefore$ परिणामी वेग $= v_2 - v_1 = 14 - 6 = 8$ सेमी/सेकण्ड.

55. (d) x-अक्ष की दिशा में त्वरण $= \frac{d^2x}{dt^2} = -2c$

तथा y-अक्ष की दिशा में त्वरण $= \frac{d^2y}{dt^2} = 2b$

$\therefore$ परिणामी त्वरण $= \sqrt{(-2c)^2 + (2b)^2} = 2\sqrt{b^2 + c^2}$.

56. (a) दिया है, $dV/dt = 30$ फीट/मिनट तथा $r = 15$ फीट

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$; $\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2\frac{dr}{dt}$

$\frac{dr}{dt} = \frac{dV/dt}{4\pi r^2} = \frac{30}{4\times\pi\times 15\times 15} = \frac{1}{30\pi}$ फीट/मिनट.

57. (c) दिया है $s = t^3 - 3t^2$

$\therefore v = \frac{ds}{dt} = 3t^2 - 6t$, $a = \frac{d^2s}{dt^2} = 6t - 6$

त्वरण $= 0$, यदि $6t - 6 = 0 \Rightarrow t = 1$

$\therefore t = 1$ पर कण का अभीष्ट वेग $= v = 3(1)^2 - 6(1)$

$\Rightarrow v = -3$.

58. (a) दिया है, $s = \sqrt{t}$. अब $v = \frac{ds}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}}$

$a = \frac{dv}{dt} = \frac{-1}{2\times 2(t)^{3/2}} \Rightarrow a \propto \frac{1}{t\sqrt{t}}$ या $a \propto v^3$.

59. (a) $y^2 = 18x$

दोनों पक्षों का t के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$2y\left(\frac{dy}{dt}\right) = 18\left(\frac{dx}{dt}\right)$

$\Rightarrow 2y\left(2\frac{dx}{dt}\right)=18\left(\frac{dx}{dt}\right), \left(\because \frac{dy}{dt}=2\frac{dx}{dt}\right)$

$\therefore\ 4y=18$ या $y=\frac{9}{2}$ तथा $x=\frac{y^2}{18}=\frac{9}{8}$

अतः, अभीष्ट बिन्दु $\left(\frac{9}{8},\frac{9}{2}\right)$ है।

60. (d) $V=\frac{4}{3}\pi(x+10)^3$, जहाँ x बर्फ की मोटाई है

$\therefore\ \frac{dV}{dt}=4\pi(10+x)^2\frac{dx}{dt}$

$\therefore\ x=5$ पर, $\left(\frac{dx}{dt}\right)=\frac{1}{18\pi}$ सेमी/मिनट.

61. (b) आयतन $=V=\frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow \frac{dV}{dt}=4\pi r^2.\frac{dr}{dt}$,

$r=7$ सेमी पर, 35 सेमी^{3}/मि. $=4\pi(7)^2\frac{dr}{dt}\Rightarrow\frac{dr}{dt}=\frac{5}{28\pi}$

पृष्ठीय क्षेत्रफल, $S=4\pi r^2$

$\frac{dS}{dt}=8\pi r\frac{dr}{dt}=\frac{8\pi.7.5}{28\pi}=10$ सेमी^{2}/मि.

62. (c) $p(t)=1000+\frac{1000\,t}{100+t^2}$

$\frac{dp}{dt}=\frac{(100+t^2)1000-1000\,t.2t}{(100+t^2)^2}=\frac{1000\,(100-t^2)}{(100+t^2)^2}$

चरम बिन्दु के लिए, $\frac{dp}{dt}=0\Rightarrow t=10$

$\left.\frac{dp}{dt}\right|_{t<10}>0$ व $\left.\frac{dp}{dt}\right|_{t>10}<0$

$\therefore\ t=10$ पर, $\frac{dp}{dt}$ धनात्मक से ऋणात्मक होता है।

$\therefore\ t=10$ पर p अधिकतम है।

$\therefore\ p_{\max}=p(10)=1000+\frac{1000.10}{100+10^2}=1050$.

63. (e) यदि विस्थापन $\propto$ (वेग)$^2 \Rightarrow s\propto v^2 \Rightarrow v^2=2as$.

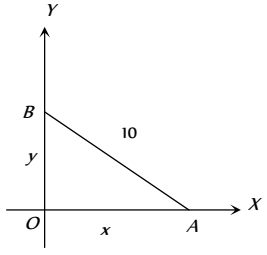
अतः a अचर है।

64. (a) $V=\pi r^2h$; $\frac{\partial V}{\partial t}=\pi\left[2r\frac{\partial r}{\partial t}h+r^2\frac{\partial h}{\partial t}\right]$

$\frac{\partial V}{\partial t}=\pi[2(4)(3)(6)+(4)^2(-4)]$

$=\pi[144-64]=80\pi$ घन मीटर/सेकण्ड.

65. (b) $x^2+y^2=10^2$



$\Rightarrow 2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}=0\ \Rightarrow\ x.3+y.(-4)=0$

$\Rightarrow x=\frac{4}{3}y$, $\therefore\ \left(\frac{4}{3}y\right)^2+y^2=10^2\Rightarrow y=6$ मीटर.

स्पर्श रेखा तथा अभिलम्ब

1. (d) $\frac{dy}{dx}=12-3x^2=0\Rightarrow x=\pm2$

अतः बिन्दु (2,16) तथा (–2, –16) हैं।

2. (c) चूँकि $y=\frac{a^2}{x}$, $\therefore\frac{dy}{dx}=-\frac{a^2}{x^2}$

$\therefore\ (x_1,y_1)$ पर, $\frac{dy}{dx}=\frac{-a^2}{x_1^2}$

अतः (x_1,y_1) पर वक्र की स्पर्श रेखा है, $y-y_1=\frac{-a^2}{x_1^2}(x-x_1)$

$\Rightarrow\ yx_1^2-y_1x_1^2=-a^2x+a^2x_1$

$\Rightarrow\ a^2x+x_1^2y=x_1(x_1y_1+a^2)=2a^2x_1$, $(\because x_1y_1=a^2)$

चूँकि यह x-अक्ष को $y=0$ पर मिलती है,

$\therefore a^2x=2a^2x_1$, $\therefore x=2x_1$

$\therefore x$-अक्ष पर बिन्दु $(2x_1,0)$ है। पुनः स्पर्श रेखा y-अक्ष को $x=0$ पर मिलती है।

$\because x_1^2y=2a^2x_1$, $\therefore y=\frac{2a^2}{x_1}$

अतः y-अक्ष पर बिन्दु $\left(0,\frac{2a^2}{x_1}\right)$ है।

अतः अभीष्ट क्षेत्रफल $=\frac{1}{2}(2x_1)\left(\frac{2a^2}{x_1}\right)=2a^2$.

3. (b) बिन्दु (2,–1) के लिए, $t=2$

$t=2$ के लिए, $\frac{dy}{dx}=\frac{4t-2}{2t+3}=\frac{6}{7}$.

4. (c) दिया है, $y^2=2(x-3)$ .....(i)

x के सापेक्ष अवकलन करने पर, $2y.\frac{dy}{dx}=2\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{1}{y}$

अभिलम्ब की प्रवणता $=\frac{-1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)}=-y$

दी गई रेखा की प्रवणता $=2$

$\therefore y=-2$ एवं समी. (i) से, $x=5$

$\therefore$ अभीष्ट बिन्दु $(5,-2)$ है।

5. (a) दिया गया वक्र है, $x^2=3-2y$ .....(i)

x के सापेक्ष अवकलन करने पर, $2x=0-2\frac{dy}{dx}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=-x$

वक्र के स्पर्शी की प्रवणता $=-x$

दी गई रेखा से, प्रवणता $=-1$

$\therefore x=1$ एवं समी. (i) से, $y=1$

$\therefore$ बिन्दु के निर्देशांक (1, 1) हैं।

6. (a) $x=t^2$ तथा $y=2t$

$t=1$ पर, $x=1$ और $y=2$

अब $\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{2}{2t}=\frac{1}{t}\Rightarrow\left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=1}=1$

$\therefore$ (1, 2) पर अभिलम्ब का समीकरण है, $y-2=-\frac{1}{\frac{dy}{dx}}(x-1)$

$\Rightarrow y-2=-1(x-1)\Rightarrow x+y-3=0$.

7. (b) $y=\sin\frac{\pi x}{2}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}x\Rightarrow\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(1,1)}=0$

$\therefore$ अभिलम्ब का समीकरण है, $y-1=\frac{1}{0}(x-1)\Rightarrow x=1$.

8. (c) $y=2\cos x$

$x=\frac{\pi}{4}$ पर, $y=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$ और $\frac{dy}{dx}=-2.\sin x$

$\therefore\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=\pi/4}=-\sqrt{2}$

$\therefore\left(\frac{\pi}{4},\sqrt{2}\right)$ पर स्पर्श रेखा का समीकरण है,

$y-\sqrt{2}=-\sqrt{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$.

9. (c) माना बिन्दु (x_1,y_1) है, $\therefore\ y_1=be^{-x_1/a}$ .....(i)

तथा वक्र $y=be^{-x/a}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{-b}{a}e^{-x/a}$

$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1,y_1)}=\frac{-b}{a}e^{-x_1/a}=\frac{-y_1}{a}$, ((i) से)

अब दिये वक्र के बिन्दु (x_1,y_1) पर स्पर्श रेखा का समीकरण है, $y-y_1=\frac{-y_1}{a}(x-x_1)\Rightarrow\frac{x}{a}+\frac{y}{y_1}=\frac{x_1}{a}+1$

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ के साथ तुलना करने पर,

$y_1=b$ तथा $1+\frac{x_1}{a}=1\Rightarrow x_1=0$.

अतः, बिन्दु (0, b) है।

10. (a) वक्र $y^2=4x$ के लिए $\frac{dy}{dx}=\frac{4}{2y}$

$\therefore\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(1,2)}=1$ तथा वक्र $x^2+y^2=5$ के लिए, $\frac{dy}{dx}=\frac{-x}{y}$

$\therefore\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(1,2)}=\frac{-1}{2}$

$\therefore$ वक्रों के मध्य कोण $\theta=\tan^{-1}\left|\frac{\frac{-1}{2}-1}{1+\left(\frac{-1}{2}\right)}\right|=\tan^{-1}(3)$.

11. (b) $by^2=(x+a)^3\Rightarrow 2by.\frac{dy}{dx}=3(x+a)^2\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{3}{2by}(x+a)^2$

$\therefore$ अधोलम्ब $=y\frac{dy}{dx}=\frac{3}{2b}(x+a)^2$

अधोस्पर्शी $=\frac{y}{\left(\frac{dy}{dx}\right)}=\frac{y}{\frac{3(x+a)^2}{2by}}=\frac{2by^2}{3(x+a)^2}$

$=\frac{2b\frac{(x+a)^3}{b}}{3(x+a)^2}=\frac{2}{3}(x+a)$

$\therefore$ (अधोस्पर्शी) $=\frac{4}{9}(x+a)^2$

तथा $\frac{(\text{अधोस्पर्शी})^2}{\text{अधोलम्ब}}=\frac{\frac{4}{9}(x+a)^2}{\frac{3}{2b}(x+a)^2}=\frac{8b}{27}$

$\Rightarrow$ (अधोस्पर्शी) $=$ अचर $\times$ (अधोलम्ब)

$\therefore$ (अधोस्पर्शी) $\propto$ (अधोलम्ब).

12. (c) $y=ax^2+bx$

$\frac{dy}{dx}=2ax+b\Rightarrow\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(2,-8)}=4a+b$

$\because$ स्पर्श रेखा, x-अक्ष के समांतर है

$\therefore\ \frac{dy}{dx}=0\Rightarrow b=-4a$ .....(i)

चूँकि बिन्दु (2, –8), वक्र $y=ax^2+bx$ पर है

$\therefore\ -8=4a+2b$ .....(ii)

समीकरण (i) तथा (ii) से, $a=2,\ b=-8$

13. (a) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=a$; $\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{dy}{dx}=0$, $\therefore\ \frac{dy}{dx}=-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$

इस प्रकार (x, y) पर स्पर्श रेखा है, $Y-y=-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}(X-x)$

या $X\sqrt{y}+Y\sqrt{x}=\sqrt{xy}\ \left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)=\sqrt{axy}$

या $\frac{X}{\sqrt{a}\sqrt{x}}+\frac{Y}{\sqrt{a}\sqrt{y}}=1$

स्पष्टतः, अक्षों पर अन्तःखण्ड $\sqrt{a}\sqrt{x}$ तथा $\sqrt{a}\sqrt{y}$ हैं

अतः, अन्तःखण्डों का योग $=\sqrt{a}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)=\sqrt{a}.\sqrt{a}=a$.

14. (d) $y=x\log x\ \Rightarrow\ \frac{dy}{dx}=1+\log x$

अभिलम्ब की प्रवणता $=-\frac{1}{(dy/dx)}=\frac{-1}{1+\log x}$

रेखा $2x-2y=3$ का झुकाव θ है।

$\therefore\ \frac{-1}{1+\log x}=1\ \Rightarrow\ \log x=-2\ \Rightarrow\ x=e^{-2}$

$\therefore\ y=-2e^{-2}$

अतः बिन्दु के निर्देशांक $(e^{-2},-2e^{-2})$ हैं।

15. (c) अभिलम्ब की प्रवणता $=-\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)}$

यह x-के समान्तर है, अतः $-\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)}=0\Rightarrow\frac{dx}{dy}=0$.

16. (c) अभिलम्ब की लम्बाई $= y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$

अब, $\frac{dy}{dx}=\frac{dy/d\theta}{dx/d\theta}=\frac{a\sin\theta}{a(1+\cos\theta)}=\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}$

$\therefore \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\left(\theta=\frac{\pi}{2}\right)}=\left[\tan\frac{\theta}{2}\right]_{\left(\theta=\frac{\pi}{2}\right)}=1[y]_{\left(\theta=\frac{\pi}{2}\right)}=a\left(1-\cos\frac{\pi}{2}\right)=a$

अतः अभिलम्ब की लम्बाई $= a\sqrt{1+(1)^2}=\sqrt{2}a$.

17. (c) $y=a(\sin\theta-\theta\cos\theta), x=a(\cos\theta+\theta\sin\theta)$

$\frac{dy}{d\theta}=a[\cos\theta-\cos\theta+\theta\sin\theta]=a\theta\sin\theta$

$\frac{dx}{d\theta}=a(-\sin\theta+\sin\theta+\theta\cos\theta)=a\theta\cos\theta$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{dy/d\theta}{dx/d\theta}=\frac{a\theta\sin\theta}{a\theta\cos\theta}=\tan\theta$

$\Rightarrow$ स्पर्श रेखा की प्रवणता $=\tan\theta$

$\therefore$ अभिलम्ब की प्रवणता $=-\cot\theta$

अतः अभिलम्ब का समीकरण है,

$[y-a\sin\theta+a\theta\cos\theta]=-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}[x-a\cos\theta-a\theta\sin\theta]$

$\Rightarrow\ y\sin\theta-a\sin^2\theta+a\theta\sin\theta\cos\theta$

$=-x\cos\theta+a\cos^2\theta+a\theta\sin\theta\cos\theta$

$\Rightarrow\ x\cos\theta+y\sin\theta=a(\sin^2\theta+\cos^2\theta)$

$\Rightarrow\ x\cos\theta+y\sin\theta=a$

$\therefore$ मूल बिन्दु से दूरी $=\frac{a}{\sqrt{\sin^2\theta+\cos^2\theta}}=$ एक अचर.

18. (a) $x=3t^2+1, y=t^3-1$

$\therefore \frac{dx}{dt}=6t,\ \frac{dy}{dt}=3t^2$

अब $\frac{dy}{dx}=\left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right)=\frac{3t^2}{6t}=\frac{t}{2}$

$x=1$ के लिए, $3t^2+1=1\Rightarrow t=0\ \Rightarrow$ प्रवणता $=\frac{0}{2}=0$.

19. (a) माना स्पर्श बिन्दु (h,k) है, जहाँ $k=h^4$

स्पर्श रेखा है, $y-k=4h^3(x-h)$, $\left[\because \frac{dy}{dx}=4x^3\right]$

यह (2, 0) से गुजरती है, $\therefore -k=4h^3(2-h)$

$\Rightarrow\ h=0$ या 8/3, $\quad\therefore\ k=0$ या $(8/3)^4$

अतः स्पर्श बिन्दु (0, 0) तथा $\left(\frac{8}{3},\left(\frac{8}{3}\right)^4\right)$ हैं।

अतः स्पर्श रेखायें $y=0$ तथा $y-\left(\frac{8}{3}\right)^4=4\left(\frac{8}{3}\right)^3\left(x-\frac{8}{3}\right)$ हैं।

20. (d) $y=x^2\ \Rightarrow \frac{dy}{dx}=m_1=2x$

$\Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(1,1)}=2=m_1$ तथा $x=y^2\ \Rightarrow 1=2y\frac{dy}{dx}$

$\Rightarrow\ \frac{dy}{dx}=m_2=\frac{1}{2y}\ \Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(1,1)}=\frac{1}{2}$

यदि प्रतिच्छेदन का कोण θ हो

तब, $\tan\theta=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}=\frac{2-\frac{1}{2}}{1+2\times\frac{1}{2}}=\frac{3}{4}$

$\Rightarrow\theta=\tan^{-1}(3/4)$.

21. (d) $y=x^3-3x^2-9x+5\ \Rightarrow \frac{dy}{dx}=3x^2-6x-9.$

हम जानते हैं, कि दिया गया समीकरण वक्र की स्पर्श रेखा की प्रवणता है। स्पर्श रेखा, x-अक्ष के समान्तर है, $\therefore \frac{dy}{dx}=0$

अतः $3x^2-6x-9=0\ \Rightarrow\ x=-1,3$.

22. (b) स्पष्टतः, वक्रों का प्रतिच्छेद बिन्दु (0, 1) है।

अब प्रथम वक्र की स्पर्श रेखा का झुकाव,

$m_1=\frac{dy}{dx}=a^x\log a\ \Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(0,1)}=m_1=\log a$

द्वितीय वक्र की स्पर्श रेखा का झुकाव,

$m_2=\frac{dy}{dx}=b^x\log b\ \Rightarrow\ m_2=\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(0,1)}=\log b$

$\therefore\ \tan\alpha=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}=\frac{\log a-\log b}{1+\log a\log b}$.

23. (d) $x^2=-4y\Rightarrow 2x=-4\frac{dy}{dx}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{-x}{2}\Rightarrow\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(-4,-4)}=2$

हम जानते हैं कि स्पर्श रेखा का समीकरण है,

$(y-y_1)=\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1,y_1)}(x-x_1)\ \Rightarrow\ y+4=2(x+4)$

$\Rightarrow\ 2x-y+4=0$.

24. (b) $y=2x^2-x+1\ \Rightarrow \frac{dy}{dx}=4x-1$

हम जानते हैं कि यह समीकरण वक्र की स्पर्श रेखा की प्रवणता है। चूँकि यह स्पर्श रेखा $y=3x+9$ के समान्तर है, अतः वक्र की स्पर्श रेखा का झुकाव 3 है, अतः $4x-1=3\ \Rightarrow\ x=1$.

$\therefore\ y=2x^2-x+1=2-1+1=2$,

अतः बिन्दु $(x,y)=(1,2)$ है।

25. (c) $x^3-8a^2y=0\ \Rightarrow\ 3x^2-8a^2.\frac{dy}{dx}=0$

$\Rightarrow\ 3x^2=8a^2.\frac{dy}{dx}\ \Rightarrow\ \frac{dy}{dx}=\frac{3x^2}{8a^2}$

$\therefore$ अभिलम्ब की प्रवणता $=-\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)}=-\frac{1}{\frac{3x^2}{8a^2}}=-\frac{8a^2}{3x^2}$

दिया है, $\frac{-8a^2}{3x^2}=\frac{-2}{3}$, $\therefore (x,y)=(2a,a)$.

26. (c) $x = a(t + \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{a(\sin t)}{a(1+\cos t)} = \tan\frac{t}{2}$

अभिलम्ब की लम्बाई $= y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$

$= a(1-\cos t)\sqrt{1+\tan^2(t/2)} = a(1-\cos t)\sec(t/2)$

$= 2a\sin^2(t/2)\sec(t/2) = 2a\sin(t/2)\tan(t/2)$.

27. (b) $y = e^{2x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2e^{2x} \Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(0,1)} = 2$

$\therefore$ स्पर्श रेखा का समीकरण है, $y - 1 = 2(x - 0) \Rightarrow y = 2x + 1$

यह स्पर्श रेखा x-अक्ष पर मिलती है, $\therefore y = 0$

$\Rightarrow 0 = 2x + 1 \Rightarrow x = -1/2$

$\therefore$ अतः बिन्दु के निर्देशांक $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ हैं।

28. (a) $(1 + x^2)y = 2 - x$ .....(i)

यह x-अक्ष को मिलता है, जहाँ $y = 0$

अर्थात् $0 = 2 - x \Rightarrow x = 2$

अतः (i), x-अक्ष को बिन्दु (2, 0) पर मिलता है।

समीकरण (i) से, $y = \frac{2-x}{1+x^2}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{(1+x^2)(-1)-(2-x)(2x)}{(1+x^2)^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x^2-4x-1}{(1+x^2)^2}$

बिन्दु (2, 0) पर स्पर्श रेखा की प्रवणता $= \frac{4-8-1}{(1+4)^2} = \frac{-5}{25} = \frac{-1}{5}$

$\therefore$ (2, 0) पर स्पर्श रेखा का समीकरण है,

$y - 0 = -\frac{1}{5}(x - 2) \Rightarrow x + 5y = 2$.

29. (d) दिया गया वक्र $y = be^{-x/a}$ है

चूँकि वक्र y-अक्ष को काटता है (अर्थात् $x = 0$) $\therefore y = b$

अब $\frac{dy}{dx} = \frac{-b}{a}e^{-x/a}$ एवं बिन्दु (0, b) पर, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(0,b)} = \frac{-b}{a}$

$\therefore$ स्पर्श रेखा का समीकरण है, $y - b = \frac{-b}{a}(x - 0)$

$\Rightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

30. (c) $y = x^2 \Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(1,1)} = m_1 = 2x = 2$

$6y = 7 - x^3 \Rightarrow 6.\frac{dy}{dx} = -3x^2 \Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(1,1)} = m_2 = -\frac{1}{2}$

स्पष्ट है कि $m_1 m_2 = -1$, अतः प्रतिच्छेद का कोण $\frac{\pi}{2}$ है।

31. (b) $y = 2x^2 - x + 1$

माना P का निर्देशांक (h, k) है, तब $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(h,\,k)} = 4h - 1$

स्पष्टतः, $4h - 1 = 3 \Rightarrow h = 1 \Rightarrow k = 2$; अतः $P(1, 2)$ है।

32. (d) $xy = c^2$ .....(i)

$\because$ अधोलम्ब $= y\frac{dy}{dx}$

$\therefore$ (i) से, $y = \frac{c^2}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-c^2}{x^2}$

$\therefore$ अधोलम्ब $= \frac{y \times (-c^2)}{x^2} = \frac{-yc^2}{\left(\frac{c^2}{y}\right)^2} = \frac{-yc^2y^2}{c^4} = \frac{-y^3}{c^2}$

अतः अधोलम्ब y^3 के समानुपाती है।

33. (a) यदि $\sin x = \cos x \Rightarrow x = \pi/4$

यदि $y = \sin x \Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

यदि $y = \cos x \Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=\pi/4} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

अतः, $\tan\theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = 2\sqrt{2} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}(2\sqrt{2})$.

34. (a) $y^2 = 5x - 1$ .....(i)

बिन्दु (1,–2) पर, $\frac{dy}{dx} = \left[\frac{5}{2y}\right]_{(1,-2)} = \frac{-5}{4}$

$\therefore$ बिन्दु (1, –2) पर अभिलम्ब का समीकरण है,

$$[y - (-2)]\left[\frac{-5}{4}\right] + x - 1 = 0$$

$\therefore 4x - 5y - 14 = 0$ .....(ii)

चूँकि अभिलम्ब $ax - 5y + b = 0$ के रूप का है, अतः समी. (ii) की इस समीकरण से तुलना करने पर $a = 4$ और $b = -14$.

35. (a) दिया है, $y = 6x - x^2$ .....(i)

$\frac{dy}{dx} = 6 - 2x$

चूँकि रेखा $4x - 2y - 1 = 0$ स्पर्श रेखा के समान्तर है।

$\therefore \frac{dy}{dx} = 6 - 2x = \frac{-4}{-2} \Rightarrow 6 - 2x = 2 \Rightarrow x = 2$

x का मान समी. (i) में रखने पर, $y = 8$

अतः अभीष्ट स्पर्श बिन्दु (2, 8) है।

36. (d) अभिलम्ब की प्रवणता

$= \frac{-dx}{dy} = \frac{\frac{-d\{a(1+\cos\theta)\}}{d\theta}}{\frac{d(a\sin\theta)}{d\theta}} = \frac{a\sin\theta}{a\cos\theta} = \tan\theta$

बिन्दु θ पर अभिलम्ब का समीकरण है,

$y - a\sin\theta = \tan\theta[x - a(1 + \cos\theta)]$

स्पष्टतः, रेखा (a, 0) से होकर जाती है।

37. (a) $\frac{dx}{d\theta} = a(1+\cos\theta), \frac{dy}{d\theta} = a(\sin\theta)$

$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{a\sin\theta}{a(1+\cos\theta)} = 1, \quad y\big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = a$

अधोस्पर्शी की लम्बाई $= ST = \frac{y}{dy/dx} = \frac{a}{1} = a.$

व अधोलम्ब की लम्बाई $= SN = y\frac{dy}{dx} = a.1 = a$

$\therefore ST = SN$.

38. (c) $x\big|_{\theta=\frac{\pi}{4}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$,

$y\big|_{\theta=\frac{\pi}{4}} = \frac{3}{2\sqrt{2}}, \frac{dy}{dx}\Big|_{\theta=\frac{\pi}{4}} \frac{9\sin^2\theta\cos\theta}{-6\cos^2\theta\sin\theta}\Big|_{\theta=\frac{\pi}{4}} = \frac{-3}{2}$.

$\therefore$ स्पर्श रेखा का समीकरण है, $\left(y - \frac{3}{2\sqrt{2}}\right) = \frac{-3}{2}\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$\Rightarrow 3\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}y = 6 \Rightarrow 3x + 2y = 3\sqrt{2}$.

39. (b) दिया गया वक्र है, $x + y = e^{xy}$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$1 + \frac{dy}{dx} = e^{xy}\left(y + x\frac{dy}{dx}\right)$ या $\frac{dy}{dx} = \frac{ye^{xy} - 1}{1 - xe^{xy}}$

$\frac{dy}{dx} = \infty \Rightarrow 1 - xe^{xy} = 0 \Rightarrow 1 - x(x+y) = 0$

यह $x = 1$, $y = 0$ के लिए सत्य है।

उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ

1. (d) दिया है, $f(x) = (x-1)(x-2)^2$

$f(x) = (x-1)(x^2 + 4 - 4x)$; $f(x) = (x^3 - 5x^2 + 8x - 4)$

अब, $f'(x) = 3x^2 - 10x + 8$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 10x + 8 = 0$

$\Rightarrow (3x-4)(x-2) = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{3}, 2$

अब $f''(x) = 6x - 10$

$f''(4/3) = 6 \times 4/3 - 10 < 0$

$f''(2) = 12 - 10 > 0$

$\therefore x = \frac{4}{3}$ पर फलन महत्तम मान ग्रहण करता है,

अतः महत्तम मान $= f(4/3) = 4/27$.

2. (b) यहाँ $f(x) = |\sin 4x + 3|$

हम जानते हैं कि $\sin x$ का न्यूनतम मान -1 एवं अधिकतम मान 1 होता है।

अतः $|\sin 4x + 3|$ का न्यूनतम मान $= |-1 + 3| = 2$ एवं $|\sin 4x + 3|$ का अधिकतम मान $= |1 + 3| = 4$ है।

3. (b) $f'(x) = 2(x-1)(x+2) + (x+2)^2 = 3x^2 + 6x$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0, -2$

$f(-2) = (-2-1)(-2+2)^2 = 0$, (अधिकतम मान)

एवं $f(0) = (0-1)(0+2)^2 = -4$, (न्यूनतम मान)

4. (c) स्पष्टतः, इसका एक उच्चिष्ठ $x = 1$ पर होगा।

5. (b) माना $f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x + 17$

$\therefore f'(x) = 3x^2 - 24x + 36 = 0 \Rightarrow x = 2, 6$

पुनः $f''(x) = 6x - 24$, जो $x = 2$ पर ऋणात्मक है।

अतः $f(6) = 17$, $f(2) = 49$

सिरे वाले बिन्दुओं पर, $f(1) = 42$, $f(10) = 177$

अतः $f(x)$ का उच्चिष्ठ मान 177 है।

6. (c) x के वास्तविक मानों के लिए $f'(x) \neq 0$, अतः $f(x)$ का कोई भी उच्चिष्ठ मान नहीं होगा।

7. (d) माना $f(x) = x^2 \log x \Rightarrow f'(x) = 2x \log x + x$

एवं $f''(x) = 2(1 + \log x) + 1$

अब $f''(1) = 3 + 2\log_e 1$ एवं $f''(e) = 3 + 2\log_e e$

$\frac{1}{\sqrt{e}}$ पर, $f(x)$ स्थानीय निम्निष्ठ रखता है। परन्तु x केवल $(1, e)$ में स्थित है। अतः $f(x)$ का कोई भी उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ मान $(1, e)$ में नहीं होगा।

8. (d) $f(x) = |x| + \left|x + \frac{1}{2}\right| + |x - 3| + \left|x - \frac{5}{2}\right|$

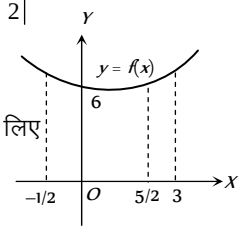
$= -4x + 5$, $x \leq -\frac{1}{2}$ के लिए

$= -2x + 6$, $-\frac{1}{2} \leq x \leq 0$ के लिए

$= 6$, $0 \leq x \leq \frac{5}{2}$ के लिए

$= 2x + 1$, $\frac{5}{2} \leq x \leq 3$ के लिए

$= 4x - 5$, $x \geq 3$ के लिए।



ग्राफ से स्पष्ट है, कि फलन का न्यूनतम मान 6 है।

9. (c) माना $f(x) = \frac{\log x}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{\log x}{x^2}$

$f(x)$ के निम्निष्ठ या उच्चिष्ठ मान के लिए, $f'(x) = 0$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{1 - \log_e x}{x^2} = 0$ या $\frac{1 - \log_e x}{x^2} = 0$

$\therefore \log_e x = 1$ या $x = e$, जो कि $(0, \infty)$ में है।

$x = e$ के लिए, $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{e^3}$ जो कि ऋणात्मक है।

अतः y, $x = e$ पर उच्चिष्ठ है एवं इसका उच्चिष्ठ मान $= \frac{\log e}{e} = \frac{1}{e}$.

10. (d) $x + y = 16 \Rightarrow y = 16 - x \Rightarrow x^2 + y^2 = x^2 + (16 - x)^2$

माना $z = x^2 + (16 - x)^2 \Rightarrow z' = 4x - 32$

अब $z'' = 4$, अर्थात् $z'' > 0$; $\therefore$ z निम्निष्ठ है।

अतः $4x - 32 = 0 \Rightarrow x = 8 \Rightarrow y = 8$.

11. (a) माना $f(x) = x\sqrt{1 - x^2}$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{1 - 2x^2}{\sqrt{1 - x^2}} = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

परन्तु चूँकि $x > 0$, अतः $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

अब, पुनः $f''(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}(-4x) - (1-2x^2)\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}}{(1-x^2)}$

$= \frac{2x^3 - 3x}{(1-x^2)^{3/2}} \Rightarrow f''\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) =$ ऋणात्मक

अतः, $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ पर $f(x)$ उच्चिष्ठ है।

12. (d) माना a व b दिये गये हैं, अतः क्षेत्रफल $= A = \frac{1}{2}ab\sin C$

$\Rightarrow \frac{dA}{dC} = \frac{1}{2}ab\cos C$

अतः A उच्चिष्ठ है, जब $\frac{dA}{dC} = 0 \Rightarrow C = 90°$.

13. (c) माना $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 1$

$\Rightarrow f'(x) = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2 = 0$

$\therefore (x-3)(x-1) = 0$ या $x = 3, 1$

अब $f''(x) = 20x^3 - 60x^2 + 30x$

$x = 3$ व 1 रखने पर, $f''(3) =$ धनात्मक व $f''(1) =$ ऋणात्मक व $f''(0) = 0$

अतः $x = 0$ पर $f(x)$ न तो उच्चिष्ठ है न निम्निष्ठ।

14. (c) $2x + 2y = 100 \Rightarrow x + y = 50$ .....(i)

माना आयत का क्षेत्रफल A है, अतः $A = xy \Rightarrow y = \frac{A}{x}$

(i) में रखने पर, $x + \frac{A}{x} = 50 \Rightarrow A = 50x - x^2$

$\Rightarrow \frac{dA}{dx} = 50 - 2x$

अधिकतम क्षेत्रफल के लिए, $\frac{dA}{dx} = 0$

$\therefore 50 - 2x = 0 \Rightarrow x = 25$ व $y = 25$

अतः आसन्न भुजाएँ 25 सेमी तथा 25 सेमी हैं।

15. (c) फलन के उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ होने के लिए $f'(x) = 0$, उच्चिष्ठ के लिए $f''(x) =$ ऋणात्मक एवं निम्निष्ठ के लिए $f''(x) =$ धनात्मक

अतः $f'(x) = 0$, किन्तु यह पर्याप्त नहीं है।

16. (c) आयत का परिमाप $= S = 2(x + y)$, जहाँ x व y आसन्न भुजाएँ हैं।

$\Rightarrow y = \frac{S - 2x}{2}$

अब, आयत का क्षेत्रफल

$= A = xy = \frac{x}{2}(S - 2x) = \frac{1}{2}(Sx - 2x^2)$

A का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$\frac{dA}{dx} = \frac{1}{2}(S - 4x) = 0, \ \therefore x = \frac{S}{4}$ एवं $y = \frac{S}{4}$

पुनः $\frac{d^2A}{dx^2} =$ ऋणात्मक

अतः आयत का क्षेत्रफल अधिकतम होगा जबकि आयत वर्ग हो।

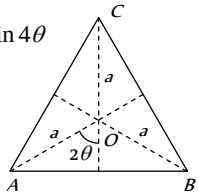
17. (c) सर्वप्रथम हम देखते हैं कि त्रिभुज ABC, जिसका आधार AB है, का क्षेत्रफल अधिकतम होगा जबकि उसकी ऊँचाई AB के सापेक्ष अधिकतम हो।

माना θ, इस प्रकार के त्रिभुज ABC का अर्द्धलम्ब कोण है।

अब, $S = \Delta ABC$ का क्षेत्रफल $= 2\Delta AOC + \Delta AOB$

$= 2\frac{a^2}{2}\sin(\pi - 2\theta) + \frac{1}{2}a^2 \sin 4\theta$

$= a^2 \sin 2\theta + \frac{a^2}{2}\sin 4\theta$



अब S उच्चिष्ठ होगा, जब $\theta = \frac{\pi}{6}$ या $2\theta = \frac{\pi}{3}$

अर्थात् त्रिभुज समबाहु है।

18. (c) फलन $f : R \to R$ उच्चिष्ठ होगा यदि $f'(a) = 0$ व $f''(a) < 0$

19. (d) माना 36 के दो गुणनखण्ड x व $\frac{36}{x}$ हैं।

अब, $x + \frac{36}{x}$ को न्यूनतम के लिए हल करने पर गुणनखण्ड 6, 6 होंगे।

20. (d) $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$

$f'(x) = 0 \Rightarrow (x-2)(x+1) = 0 \Rightarrow x = -1, 2$

यहाँ $f(4) = 128 - 48 - 48 + 5 = 37$

$f(-1) = -2 - 3 + 12 + 5 = 12$

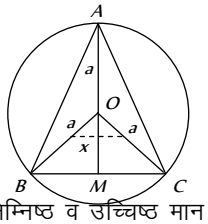
$f(2) = 16 - 12 - 24 + 5 = -15$

$f(-2) = -16 - 12 + 24 + 5 = 1$

अतः $x = 4$ पर फलन का उच्चिष्ठ मान 37 है।

21. (a) दिए गये वक्र का समीकरण है, $y = xe^x$

$\therefore \frac{dy}{dx} = xe^x + e^x = e^x(1 + x)$ व $\frac{d^2y}{dx^2} = (x+2)e^x$



$f(x)$ के निम्निष्ठ व उच्चिष्ठ मान के लिए,

$\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow x = -1$. $\therefore \{f''(x)\}_{x=-1} = +ve$

अतः $f(x)$, $x = -1$ पर निम्निष्ठ है।

22. (a) माना $f(x) = \sin x(1 + \cos x)$

$\Rightarrow f'(x) = \cos 2x + \cos x$

एवं $f''(x) = -2\sin 2x - \sin x = -(2\sin 2x + \sin x)$

$f(x)$ के उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ के लिए, $f'(x) = 0$

$\Rightarrow \cos 2x + \cos x = 0 \Rightarrow \cos x = -\cos 2x$

$\Rightarrow \cos x = \cos(\pi \pm 2x)$

$\therefore x = \pi \pm 2x$ या $x = \frac{\pi}{3}, -\pi$

अब $f''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -2\sin\frac{2\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3} = -2\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{3\sqrt{3}}{2} = -ve$

अतः $x = \frac{\pi}{3}$ पर, $f(x)$ उच्चिष्ठ है।

23. (b) $f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^x \Rightarrow f'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^x\left(\log\frac{1}{x} - 1\right)$

$f'(x) = 0 \Rightarrow \log\frac{1}{x} = 1 = \log e \Rightarrow \frac{1}{x} = e \Rightarrow x = \frac{1}{e}$

अतः फलन का उच्चिष्ठ मान $e^{1/e}$ है।

24. (c) $x + y = 10; \ \therefore y = 10 - x$ .....(i)

अब $f(x) = xy = x(10 - x) = 10x - x^2$

$\therefore f'(x) = 10 - 2x$

$f(x)$ के उच्चिष्ठ मान के लिए, $f'(x) = 0$

$\therefore x = 5$ व $y = 5$

अतः xy का उच्चिष्ठ मान $= 5 \times 5 = 25$.

25. (a) माना दो संख्यायें x व y हैं।

$x + y = s \Rightarrow y = s - x$

तो $f(x) = xy = x(s - x) = xs - x^2$

$\therefore f'(x) = s - 2x$

$f(x)$ के उच्चिष्ठ मान के लिए, $f'(x) = 0$

$\therefore x = \frac{s}{2}$ व $y = \frac{s}{2}$

अतः प्रत्येक संख्या योग की आधी है।

26. (b) माना एक संख्या $(100 - x)$ है तब दूसरी x होगी।

अतः $f(x) = 2(100 - x) + x^2 = x^2 - 2x + 200$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$

यहाँ $f''(x) = 2 > 0$

अतः $x = 1$ पर फलन निम्निष्ठ है।

अतः संख्यायें 99 व 1 हैं।

27. (c) माना संख्या x है, तो $y = x - x^2$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1 - 2x$ एवं $\frac{d^2y}{dx^2} = -2(< 0)$

$\Rightarrow 1 - 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$.

28. (c) यह आधारभूत गुण है।

29. (b) $f(x) = x + \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$

$\Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = 1, -1$

किन्तु दिया है, x धनात्मक है,

अतः $x = 1$ पर, $f(x) = 1 + \frac{1}{1} = 2$.

30. (b) माना $y = x^x \Rightarrow \log y = x.\log x, \quad (x > 0)$

अवकलन करने पर, $\frac{dy}{dx} = x^x(1 + \log x)$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \log x = -1 \Rightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e}$

$\therefore$ स्थिर बिन्दु $x = \frac{1}{e}$ है।

$\frac{d^2y}{dx^2} = x^x(1 + \log x)^2 + x^x.\frac{1}{x}$

जब $x = \frac{1}{e}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{1}{e}\right)^{(1/e)-1} > 0$

$\therefore y$, $x = \frac{1}{e}$ पर निम्निष्ठ है

तथा न्यूनतम मान $= \left(\frac{1}{e}\right)^{1/e} = e^{-1/e}$.

31. (b) माना α, β समीकरण $x^2 - (a-2)x - a + 1 = 0$ के मूल हों, तो

$\alpha + \beta = a - 2$, $\alpha\beta = -a + 1$

$\therefore z = \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$

$= (a-2)^2 + 2(a-1) = a^2 - 2a + 2$

$\frac{dz}{da} = 2a - 2 = 0 \Rightarrow a = 1$

$\frac{d^2z}{da^2} = 2 > 0$, अतः z, $a = 1$ पर निम्निष्ठ है

अतः $\alpha^2 + \beta^2$, $a = 1$ के लिए न्यूनतम मान रखता है,

क्योंकि यहाँ केवल एक स्थिर बिन्दु है जिस पर यह निम्निष्ठ है। अतः $a = 1$.

32. (c) फलन $f(x) = \frac{x^2}{(x^3 + 200)} \; x \in [1, \infty[$ .....(i)

$f'(x) = x\frac{(400 - x^3)}{(x^3 + 200)^2} = 0$

जब $x = (400)^{1/3}$, $(\because x \neq 0)$

$x = (400)^{1/3} - h \Rightarrow f'(x) > 0$

$x = (400)^{1/3} + h \Rightarrow f'(x) < 0$

$\therefore f(x)$, $x = (400)^{1/3}$ पर उच्चिष्ठ है।

चूँकि $7 < (400)^{1/3} < 8$,

अतः श्रेणी का सबसे बड़ा पद या तो a_7 या a_8 होगा

$\because a_7 = \frac{49}{543}$ व $a_8 = \frac{8}{89}$ व $\frac{49}{543} > \frac{8}{89}$

$\therefore$ सबसे बड़ा पद $a_7 = \frac{49}{543}$ है।

33. (b) $x + y = 8$; $\therefore y = 8 - x$ .....(i)

अब $f(x) = xy = x(8 - x) = 8x - x^2$, $\therefore f'(x) = 8 - 2x$

$f(x)$ के महत्तम मान के लिए, $f'(x) = 0$

$\therefore \; x = 4$ व $y = 4$

अतः, xy का महत्तम मान $= 4 \times 4 = 16$.

34. (d) $f(x) = \int_0^x te^{-t^2} dt \Rightarrow f'(x) = xe^{-x^2} = 0 \Rightarrow x = 0$

$f''(x) = e^{-x^2}(1 - 2x^2)$; $f''(0) = 1 > 0$

$\therefore$ फलन का न्यूनतम मान $= f(0) = 0$

35. (a) माना प्रथम संख्या $3 - x$ है, तो द्वितीय संख्या x होगी।

प्रश्नानुसार, हमें $(3 - x)x^2$ का उच्चिष्ठ मान ज्ञात करना है।

माना $f(x) = (3 - x)x^2 = 3x^2 - x^3 \Rightarrow f'(x) = 6x - 3x^2$

$\therefore f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0, 2$

एवं $f''(x) = 6 - 6x$. स्पष्टतः, $f''(2) = -6 < 0$

अतः अभीष्ट महत्तम मान $= (3 - 2).2^2 = 4$.

36. (d) $y = 2\cos 2x - \cos 4x$

$= 2\cos 2x(1 - \cos 2x) + 1 = 4\cos 2x \sin^2 x + 1$

स्पष्टतः, $\sin^2 x \geq 0$

अतः y के न्यूनतम मान के लिए $\cos 2x$ न्यूनतम अर्थात् -1 होना चाहिए।

अतः y का न्यूनतम मान $= -4 + 1 = -3$.

37. (c) $f(x) = 2x^3 - 21x^2 + 36x - 30 \Rightarrow f'(x) = 6x^2 - 42x + 36$

$\therefore f'(x) = 0 \Rightarrow x = 6, 1$ व $f''(x) = 12x - 42$

यहाँ $f''(1) = -30$ व $f''(6) = 30$

अतः $f(x)$, $x = 1$ पर उच्चिष्ठ एवं $x = 6$ पर निम्निष्ठ है।

38. (d) माना $f(x) = 2x^3 - 24x + 107$

$x = -3$ पर, $f(-3) = 2(-3)^3 - 24(-3) + 107 = 125$

$x = 3$ पर, $f(3) = 2(3)^3 - 24(3) + 107 = 89$

उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ के लिए,

$f'(x) = 6x^2 - 24 = 0 \Rightarrow x = 2, -2$

अतः $x = 2$ पर, $f(2) = 2(2)^3 - 24(2) + 107 = 75$

$x = -2$ पर, $f(-2) = 2(-2)^3 - 24(-2) + 107 = 139$

अतः $[-3, 3]$ में फलन का उच्चिष्ठ मान 139 है।

39. (a) $f(x) = x^4 - 62x^2 + ax + 9$

उच्चिष्ठ के लिए, $f'(x) = 4x^3 - 124x + a = 0$

$x = 1$ पर, $4(1)^3 - 124(1) + a = 0 \Rightarrow a = 120$.

40. (c) दिया है, $f(x) = 7 - 20x + 11x^2$

$f'(x) = -20 + 22x$

$f'(x) = 0$ रखने पर, $-20 + 22x = 0$

$\Rightarrow x = 10/11$ और $f''(x) = 22 > 0$

अतः $x = 10/11$ पर, फलन $f(x)$ का मान न्यूनतम होगा

$\therefore f\left(\frac{10}{11}\right) = 7 - \frac{200}{11} + \frac{100 \times 11}{121} = 7 - \frac{200}{11} + \frac{100}{11} = -\frac{23}{11}$.

41. (b) दिया है, $f(x) = x(1-x)^2 \Rightarrow f(x) = x^3 - 2x^2 + x$

अब $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$

$f'(x) = 0$ रखने पर, $3x^2 - 4x + 1 = 0$

$3x^2 - 3x - x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1, 1/3$

$f''(x) = 6x - 4$

$\therefore f''(1) = 2 =$ धनात्मक तथा $f''(1/3) = -2 =$ ऋणात्मक

$\therefore x = \frac{1}{3}$ पर महत्तम मान होगा

अतः फलन का महत्तम मान $= f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{27}$.

42. (b) दिया है, $2(a+b) = 36$, $a + b = 18$

आयत का क्षेत्रफल $= ab = a(18 - a)$

$A = 18a - a^2$, $\therefore \frac{dA}{da} = 18 - 2a$

$\frac{dA}{da} = 0$ रखने पर, $18 - 2a = 0 \Rightarrow a = 9;\ b = 9$.

43. (c) $f(x) = 2x^2 + x - 1 \Rightarrow f'(x) = 4x + 1 \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{4}$

$f''(x) = 4 =$ धनात्मक, $\therefore [f(-1/4)]_{\min} = \frac{2}{16} - \frac{1}{4} - 1 = \frac{-9}{8}$.

44. (a) दिया है, $f(x) = 2x^3 - 21x^2 + 36x - 20$

$f'(x) = 6x^2 - 42x + 36$

$f'(x) = 0$ रखने पर,

$6x^2 - 42x + 36 = 0 \Rightarrow x^2 - 7x + 6 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 6x - x + 6 = 0 \Rightarrow (x-1)(x-6) = 0 \Rightarrow x = 1, 6$

अब, $f''(x) = 12x - 42$

$f''(1) = -30 = -ve$ तथा $f''(6) = 30 = +ve$

$\therefore$ बिन्दु $x = 6$ पर फलन निम्निष्ठ होगा।

$\therefore$ फलन का न्यूनतम मान

$= f(6) = 2(6)^3 - 21(6)^2 + 36 \times 6 - 20$

अतः $f(6) = -128$.

45. (c) माना $x + y = 4$ या $y = 4 - x$

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x+y}{xy}$ या $f(x) = \frac{4}{xy} = \frac{4}{x(4-x)} \Rightarrow f(x) = \frac{4}{4x - x^2}$

अब $f'(x) = \frac{-4}{(4x - x^2)^2}.(4 - 2x)$

अब $f'(x) = 0$, तो $4 - 2x = 0$

$\therefore x = 2$ और $y = 2$

$\therefore \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$ का न्यूनतम मान $= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

46. (c) दिया है, $f(x) = \frac{[(5+x)(2+x)]}{[1+x]}$

$f(x) = 1 + \frac{4}{1+x} + (5+x) = (6+x) + \frac{4}{(1+x)}$

$\Rightarrow f'(x) = 1 - \frac{4}{(1+x)^2} = 0$; $x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = -3, 1$

अब $f''(x) = \frac{8}{(1+x)^3}$, $f''(-3) = -ve$, $f''(1) = +ve$

अतः $x = 1$ पर न्यूनतम मान,

$f(1) = \frac{(5+1)(2+1)}{(1+1)} = \frac{6 \times 3}{2} = 9$.

47. (a) माना $y = \sin^p x . \cos^q x$

$\frac{dy}{dx} = p \sin^{p-1} x . \cos x . \cos^q x + q \cos^{q-1} x . (-\sin x) \sin^p x$

$\frac{dy}{dx} = p \sin^{p-1} x . \cos^{q+1} x - q \cos^{q-1} x . \sin^{p+1} x$

$\frac{dy}{dx} = 0$ रखने पर, $\tan^2 x = \frac{p}{q} \Rightarrow \tan x = \pm\sqrt{\frac{p}{q}}$

$\therefore$ उच्चिष्ठ का बिन्दु $= x = \tan^{-1}\sqrt{\frac{p}{q}}$.

48. (d) माना $x + y = 20 \Rightarrow y = 20 - x$

और $x^3 . y^2 = z \Rightarrow z = x^3 . y^2$

$z = x^3(20 - x)^2 \Rightarrow z = 400x^3 + x^5 - 40x^4$

$\frac{dz}{dx} = 1200x^2 + 5x^4 - 160x^3$

अब $\frac{dz}{dx} = 0$, तब $x = 12, 20$

अब $\frac{d^2z}{dx^2} = 2400x + 16x^3 - 480x^2$; $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)_{x=12} =$ ऋणात्मक

$\therefore x = 12$ उच्चिष्ठ का बिन्दु है

अतः $x = 12$, $y = 8$.

49. (d) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = \frac{x^2 + 1 - 2}{x^2 + 1} = 1 - \frac{2}{x^2 + 1}$

$\therefore f(x) < 1 \forall x$ एवं ≥ -1, चूँकि $\frac{2}{x^2 + 1} \leq 2$

$\therefore -1 \leq f(x) < 1$

अतः $f(x)$ का न्यूनतम मान -1 है तथा कोई भी महत्तम मान (maximum value) नहीं है।

वैकल्पिक : $f'(x) = \frac{(x^2+1)2x - (x^2-1)2x}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

$f''(x) = \frac{(x^2+1)^2 4 - 4x.2(x^2+1)2x}{(x^2+1)^4}$

$$= \frac{(x^2+1)4 - 16x(x)}{(x^2+1)^3} = \frac{-12x^2+4}{(x^2+1)^3}$$

$\therefore f''(0) > 0$

$\therefore$ केवल एक ही क्रांतिक बिन्दु (Critical point) पर निम्निष्ठ है, अतः $f(x)$ का न्यूनतम मान $x = 0$ पर होगा।

अतः $f_{\min} = f(0) = \frac{-1}{1} = -1$.

50. (b) $f(x) = \cos x + \cos(\sqrt{2}x)$

$f'(x) = -\sin x - \sqrt{2}\sin(\sqrt{2}x) = 0$

अतः केवल $x = 0$ ही हल है

$x = 0$ पर, $f''(x) = -\cos x - 2\cos(\sqrt{2}x) < 0$

अतः $x = 0$ पर उच्चिष्ठ होगा।

51. (c) दिया है $y = e^{(2x^2-2x+1)\sin^2 x}$

उच्चिष्ठ अथवा निम्निष्ठ के लिए, $\frac{dy}{dx} = 0$

$\therefore e^{(2x^2-2x+1)\sin^2 x}[(4x-2)\sin^2 x + 2(2x^2-2x+1)\sin x\cos x] = 0$

$\Rightarrow [(4x-2)\sin^2 x + 2(2x^2-2x+1)\sin x\cos x] = 0$

$\Rightarrow 2\sin x[(2x-1)\sin x + (2x^2-2x+1)\cos x] = 0$

$\Rightarrow \sin x = 0$

$\therefore \sin x = 0$ के लिए y न्यूनतम होगा

अतः y का न्यूनतम मान $= e^{(2x^2-2x+1)(0)} = e^0 = 1$.

52. (a) $xy = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{x}$ और माना $z = x + y$

$z = x + \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = 1 - \frac{1}{x^2}$

अब $\frac{dz}{dx} = 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{x^2} = 0$

$x = -1, +1$ और $\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{2}{x^3}$

$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)_{x=1} = \frac{2}{1} = 2 =$ धनात्मक

अतः $x = 1$ निम्निष्ठ का बिन्दु है तथा $x = 1$ व $y = 1$

$\therefore$ निम्निष्ठ मान $= x + y = 2$.

53. (a) $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 10$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2 = 5x^2(x^2 - 4x + 3)$

$= 5x^2(x-3)(x-1)$

$\frac{dy}{dx} = 0$ से; $x = 0, 1, 3$

अब, $\frac{d^2y}{dx^2} = 20x^3 - 60x^2 + 30x = 10x(2x^2 - 6x + 3)$

तथा $\frac{d^3y}{dx^3} = 10(6x^2 - 12x + 3)$

$x = 0$ के लिए; $\frac{dy}{dx} = 0, \frac{d^2y}{dx^2} = 0, \frac{d^3y}{dx^3} \neq 0$

अतः न उच्चिष्ठ और न ही निम्निष्ठ है।

$x = 1$ के लिए; $\frac{d^2y}{dx^2} = -10 =$ ऋणात्मक

अतः उच्चिष्ठ मान $= y_{\max.} = -9$

$x = 3$ के लिए, $\frac{d^2y}{dx^2} = 90 =$ धनात्मक

अतः निम्निष्ठ मान $= y_{\min.} = -37$.

54. (b) $x + y = 20$ तथा $z = xy^3$

$\Rightarrow z = y^3(20 - y) = 20y^3 - y^4$

$\Rightarrow \frac{dz}{dy} = 60y^2 - 4y^3 = 0 \Rightarrow 4y^2(15 - y) = 0$

अतः या तो $y = 0$ या $y = 15$ है

अब $\frac{d^2z}{dy^2} = 120y - 12y^2$; $\therefore y = 0$ पर $\frac{d^2z}{dy^2} > 0$

$\therefore y = 0$, निम्निष्ठ का बिन्दु है

तथा $y = 15$ पर, $\frac{d^2z}{dy^2} < 0$

$\therefore y = 15$, उच्चिष्ठ का बिन्दु है

अतः अभीष्ट भाग (5, 15) हैं।

55. (c) माना $y = x^3 - 18x^2 + 96x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 36x + 96 = 0$

$\therefore x^2 - 12x + 32 = 0 \Rightarrow (x-4)(x-8) = 0 \Rightarrow x = 4, 8$

अब, $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 36$

$x = 4$ पर, $\frac{d^2y}{dx^2} = 24 - 36 = -12 < 0$

अतः $x = 4$ पर, फलन का मान अधिकतम होगा तथा $[f(4)]_{\max.} = 64 - 288 + 384 = 160$

$x = 8$ पर, $\frac{d^2y}{dx^2} = 48 - 36 = 12 > 0$

अतः $x = 8$ पर, फलन का मान न्यूनतम होगा तथा $[f(8)]_{\min.} = 128$.

56. (c) $y = \sin x(1 + \cos x) = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \cos x + \cos 2x$ तथा $\frac{d^2y}{dx^2} = -\sin x - 2\sin 2x$

$\frac{dy}{dx} = 0$ रखने पर, $\cos x + \cos 2x = 0$

$\Rightarrow \cos x = -\cos 2x = \cos(\pi - 2x) \Rightarrow x = \pi - 2x$, $\therefore x = \frac{\pi}{3}$

अतः $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=\pi/3} = -\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) - 2\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)$

$= \frac{-\sqrt{3}}{2} - 2.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{-3\sqrt{3}}{2}$, जो कि ऋणात्मक है।

$\therefore x = \frac{\pi}{3}$ पर, फलन अधिकतम है।

57. (b) यदि $\frac{x}{1 + x\tan x}$ उच्चिष्ठ है, तो इसका व्युत्क्रम $\frac{1 + x\tan x}{x}$ निम्निष्ठ होगा।

माना $y = \frac{1 + x\tan x}{x} = \frac{1}{x} + \tan x$

$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2} + \sec^2 x$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2}{x^3} + 2\sec x \sec x \tan x$

$\frac{dy}{dx} = 0$ रखने पर, $-\frac{1}{x^2} + \sec^2 x = 0$

$\Rightarrow \sec^2 x = \frac{1}{x^2} \Rightarrow x^2 = \cos^2 x \Rightarrow x = \cos x$

$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2}{\cos^3 x} + 2\sec^2 x \tan x$

$= 2\sec^2 x(\sec x + \tan x)$, जो कि धनात्मक है।

$x = \cos x$ पर, $\frac{1 + x\tan x}{x}$ न्यूनतम है

अतः $\frac{x}{1 + x\tan x}$ अधिकतम होगा।

58. (b) माना $y = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{(x^2 + x + 1)(2x - 1) - (x^2 - x + 1)(2x + 1)}{(x^2 + x + 1)^2}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2x^2 - 2}{(x^2 + x + 1)^2} = 0 \Rightarrow 2x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x = -1, +1$

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4(-x^3 + 3x + 1)}{x^2 + x + 1}$

$x = -1$ पर, $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$, अतः फलन का मान अधिकतम होगा।

$\therefore f(-1) = 3$ तथा $x = 1$ पर, $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$, अतः फलन का मान न्यूनतम होगा। $\therefore f(1) = \frac{1}{3}$.

59. (d) माना $y = \frac{\log x}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x.\frac{1}{x} - \log x}{x^2} = \frac{1 - \log x}{x^2}$

$\frac{dy}{dx} = 0$ रखने पर, $\frac{1 - \log x}{x^2} = 0$

$\Rightarrow 1 - \log x = 0 \Rightarrow x = e$ तथा $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-3x + 2x\log x}{x^4}$

$x = e$ पर, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{-e^3} < 0$

अतः अंतराल [2, ∞) में, फलन $\frac{\log x}{x}$ अधिकतम होगा तथा न्यूनतम मान का अस्तित्व नहीं होगा।

60. (d) $f(x) = x^4 e^{-x^2} \Rightarrow f'(x) = 4x^3 e^{-x^2} + x^4 e^{-x^2}(-2x)$

अधिकतम मान के लिए,

$f'(x) = 0 \Rightarrow 4x^3 e^{-x^2} - 2x^5 e^{-x^2} = 0$

$\Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$

$f''(x) = 12x^2 e^{-x^2} + 4x^3 e^{-x^2}(-2x) - 10x^4 e^{-x^2} - 2x^5 e^{-x^2}(-2x)$

$\Rightarrow f''(\sqrt{2}) = 24e^{-2} - 32e^{-2} - 40e^{-2} + 32e^{-2}$ = ऋणात्मक

अतः $f(x)$, $x = \sqrt{2}$ पर अधिकतम होगा

$\therefore$ अधिकतम मान = $4e^{-2}$.

61. (a) माना $f(A) = \cos A \cos B = \cos A \cos\left(\frac{\pi}{2} - A\right) = \cos A \sin A$

$\therefore f'(A) = \cos^2 A - \sin^2 A = \cos 2A$

अब, $f'(A) = 0 \Rightarrow \cos 2A = 0 \Rightarrow 2A = \frac{\pi}{2} \Rightarrow A = \frac{\pi}{4}$

अब $f''(A) = -2\sin 2A = -2\sin\frac{\pi}{2} = -2 \quad (-ve)$

इस प्रकार $f(A)$, $\frac{\pi}{4}$ पर अधिकतम होगा।

अतः अधिकतम मान = $\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$.

62. (c) माना वह धनात्मक संख्या x है, तब $\left(x + \frac{1}{x}\right)$ न्यूनतम होगा,

यदि $\frac{dy}{dx} = 0$ तथा $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर, $1 - \frac{1}{x^2} = 0$

$\Rightarrow x = -1, 1$ तथा $\frac{d^2y}{dx^2} = +\frac{2}{x^3} \Rightarrow \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=1} > 0$

अतः $x = 1$ पर, $\left(x + \frac{1}{x}\right)$ निम्निष्ठ है।

63. (b) फलन $f(x) = \frac{x}{x^2 + 16}$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{(x^2 + 16).1 - x.(2x)}{(x^2 + 16)^2}$

$= \frac{x^2 + 16 - 2x^2}{(x^2 + 16)^2} = \frac{16 - x^2}{(x^2 + 16)^2}$ .....(i)

$f'(x) = 0$ रखने पर, $16 - x^2 = 0 \Rightarrow x = 4, -4$

पुनः $f''(x) = \frac{(x^2 + 16)^2(-2x) - (16 - x^2)2(x^2 + 16)2x}{(x^2 + 16)^4}$

$x = 4$ पर, $f''(x) < 0$ तथा $x = -4$ पर, $f''(x) > 0$

अतः $f(x)$ का न्यूनतम मान $= \frac{-4}{16 + 16} = -\frac{1}{8}$.

64. (b) माना संख्या = x, तब घन = x^3

अब $f(x) = x - x^3$ (अधिकतम) $\Rightarrow f'(x) = 1 - 3x^2$

$f'(x) = 0$ रखने पर, $1 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

चूँकि $f''(x) = -6x =$ ऋणात्मक, जबकि $x = +\frac{1}{\sqrt{3}}$.

65. (c) $f(x) = \frac{x}{4 + x + x^2}$

अवकलन करने पर, $f'(x) = \frac{4 + x + x^2 - x(1 + 2x)}{(4 + x + x^2)^2}$

उच्चिष्ठ के लिए, $f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{4 - x^2}{(4 + x + x^2)^2} = 0$

$\Rightarrow x = 2, -2$

x के दोनों मान दिये गये अन्तराल के बाहर हैं।

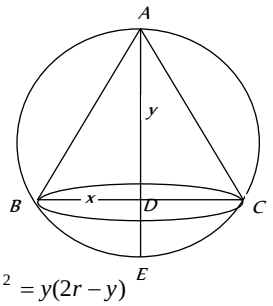
$\therefore f(-1) = \frac{-1}{4 - 1 + 1} = \frac{-1}{4}$,

$f(1) = \frac{1}{4+1+1} = \frac{1}{6}$, (अधिकतम).

66. (a) माना गोले का व्यास $AE = 2r$

माना शंकु की त्रिज्या x तथा ऊँचाई y है

$\therefore AD = y$, चूँकि $BD^2 = AD.DE$



या $x^2 = y(2r - y)$ .....(i)

शंकु का आयतन $= V = \frac{1}{3}\pi x^2 y = \frac{1}{3}\pi y(2r-y)y$

$= \frac{1}{3}\pi(2ry^2 - y^3)$

$\Rightarrow \frac{dV}{dy} = \frac{1}{3}\pi(4ry - 3y^2) \Rightarrow \frac{dV}{dy} = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{3}\pi(4ry - 3y^2) = 0 \Rightarrow y(4r-3y) = 0 \Rightarrow y = \frac{4}{3}r, 0$

अब $\frac{d^2V}{dy^2} = \frac{1}{3}\pi(4r - 6y)$

$y = \frac{4}{3}r$ रखने पर, $\frac{d^2V}{dy^2} = \frac{1}{3}\pi\left(4r - 6\times\frac{4}{3}r\right)$ =ऋणात्मक मान

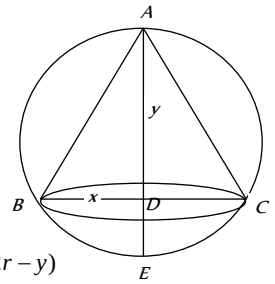
$\therefore y = \frac{4}{3}r$ पर, शंकु का आयतन अधिकतम होगा

अतः $\frac{\text{ऊँचाई}}{\text{व्यास}} = \frac{y}{2r} = \frac{2}{3}$.

67. (b) माना गोले का व्यास $AE = 2r$

माना शंकु की त्रिज्या x तथा ऊँचाई y है

$\therefore AD = y$, चूँकि $BD^2 = AD.DE$



या $x^2 = y(2r - y)$ .....(i)

शंकु का आयतन $V = \frac{1}{3}\pi x^2 y = \frac{1}{3}\pi y(2r-y)y = \frac{1}{3}\pi(2ry^2 - y^3)$

$\Rightarrow \frac{dV}{dy} = \frac{1}{3}\pi(4ry - 3y^2) \Rightarrow \frac{dV}{dy} = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{3}\pi(4ry - 3y^2) = 0 \Rightarrow y(4r-3y) = 0 \Rightarrow y = \frac{4}{3}r, 0$

अब $\frac{d^2V}{dy^2} = \frac{1}{3}\pi(4r - 6y)$

$y = \frac{4}{3}r$ रखने पर, $\frac{d^2V}{dy^2} = \frac{1}{3}\pi\left(4r - 6\times\frac{4}{3}r\right)$ =ऋणात्मक मान

$\therefore y = \frac{4}{3}r$ पर, शंकु का आयतन अधिकतम है

अतः , $\frac{\text{ऊँचाई}}{\text{व्यास}} = \frac{y}{r} = \frac{4}{3}$.

68. (c) $f(x) = x + \sin x \Rightarrow f'(x) = 1 + \cos x$

अब $f'(x) = 0 \Rightarrow 1 + \cos x = 0 \Rightarrow \cos x = -1 \Rightarrow x = \pi$

अब $f''(x) = -\sin x$, $f''(\pi) = 0$, $f'''(x) = -\cos x$,

$f'''(\pi) = 1 \neq 0$

अतः न तो उच्चिष्ठ तथा न ही निम्निष्ठ है।

69. (d) $f(x) = ax + \frac{b}{x} \Rightarrow f'(x) = a - \frac{b}{x^2}$

$\Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{b}{a}}$

अब $f''(x) = \frac{2b}{x^3} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{b}{a}}$ पर, $f''(x)$ = धनात्मक

अतः $x = \sqrt{\frac{b}{a}}$ पर $f(x)$ का मान न्यूनतम होगा।

70. (b) $xy = c^2 \Rightarrow y = \frac{c^2}{x} \Rightarrow f(x) = ax + by = ax + \frac{bc^2}{x}$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर, $f'(x) = a - \frac{bc^2}{x^2}$

$f'(x) = 0$ रखने पर, $ax^2 - bc^2 = 0$

$\Rightarrow x^2 = \frac{bc^2}{a} \Rightarrow x = \pm c\sqrt{b/a}$

$x = +c\sqrt{b/a}$ पर $ax + by$ न्यूनतम होगा।

अतः, न्यूनतम मान $= f\left(c\sqrt{\frac{a}{b}}\right) = a.c\sqrt{\frac{a}{b}} + \frac{bc^2}{c}.\sqrt{\frac{b}{a}} = 2c\sqrt{ab}$.

71. (c) $a^2x^4 + b^2y^4 = c^6 \Rightarrow y = \left(\frac{c^6 - a^2x^4}{b^2}\right)^{1/4}$

इस प्रकार $f(x) = xy = x\left(\frac{c^6 - a^2x^4}{b^2}\right)^{1/4}$

$\Rightarrow f(x) = \left(\frac{c^6x^4 - a^2x^8}{b^2}\right)^{1/4}$

$f(x)$ का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

तब $f'(x) = \frac{1}{4}\left(\frac{c^6x^4 - a^2x^8}{b^2}\right)^{-3/4}\left(\frac{4x^3c^6}{b^2} - \frac{8x^7a^2}{b^2}\right)$

$f'(x) = 0$ रखने पर, $\frac{4x^3c^6}{b^2} - \frac{8x^7a^2}{b^2} = 0$

$\Rightarrow x^4 = \frac{c^6}{2a^2} \Rightarrow x = \pm\frac{c^{3/2}}{2^{1/4}\sqrt{a}}$

$x = \frac{c^{3/2}}{2^{1/4}\sqrt{a}}$ पर $f(x)$ अधिकतम होगा।

अतः $f\left(\frac{c^{3/2}}{2^{1/4}\sqrt{a}}\right)=\left(\frac{c^{12}}{2a^2b^2}-\frac{c^{12}}{4a^2b^2}\right)^{1/4}$

$=\left(\frac{c^{12}}{4a^2b^2}\right)^{1/4}=\frac{c^3}{\sqrt{2ab}}$.

72. (a) $f(x)=2x^3-15x^2+36x+4 \Rightarrow f'(x)=6x^2-30x+36$ .....(i)

हम जानते हैं, फलन के अधिकतम मान के लिए $f'(x)=0$

$6x^2-30x+36=0 \Rightarrow (x-2)(x-3)=0 \Rightarrow x=2,3$

समी. (i) का पुनः x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$f''(x)=12x-30 \Rightarrow f''(2)=24-30=-6<0$.

अतः $x=2$ पर, फलन $f(x)$ उच्चिष्ठ है।

73. (b) $y=f(x)=-x^3+3x^2+9x-27$

इस वक्र की प्रवणता $=f'(x)=-3x^2+6x+9$

माना $g(x)=f'(x)=-3x^2+6x+9$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर, $g'(x)=-6x+6$

$g'(x)=0$ रखने पर, $x=1$

अब $g''(x)=-6<0$ तथा इस प्रकार $x=1$ पर, $g(x)$ (प्रवणता) का अधिकतम मान होगा

$\therefore [g(1)]_{\text{max.}}=-3\times1+6+9=12$.

74. (b) $f(x)=2x^3-3x^2-12x+4$, $f'(x)=6x^2-6x-12$

अब $f'(x)=0 \Rightarrow x^2-x-2=0 \Rightarrow x=2,-1$

अब $f''(x)=12x-6 \Rightarrow f''(2)=+ve$, $f''(-1)=-ve$

$\therefore$ दिये गये फलन का एक उच्चिष्ठ तथा एक निम्निष्ठ मान है।

75. (a) $f(x)=\frac{1}{4x^2+2x+1} \Rightarrow f'(x)=\frac{-(8x+2)}{(4x^2+2x+1)^2}$

$f'(x)=0$ रखने पर $\Rightarrow 8x+2=0 \Rightarrow x=-1/4$.

$f''(x)=\frac{-[(4x^2+2x+1)^2 8-(8x+2)2(4x^2+2x+1)(8x+2)]}{(4x^2+2x+1)^4}$

$f''(-1/4)=$ ऋणात्मक, (उच्चिष्ठ का बिन्दु)

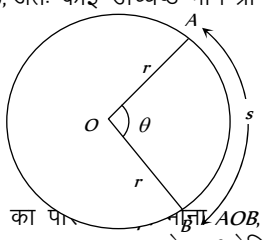
$\therefore f(-1/4)_{\text{max.}}=\frac{1}{4\times\frac{1}{16}-2\times\frac{1}{4}+1}=\frac{4}{3}$.

76. (d) $f(x)=x+\frac{1}{x} \Rightarrow f'(x)=1-\frac{1}{x^2}$

$f'(x)=0$ रखने पर, $x=-1,1$

चूँकि $x>0$, अतः कोई उच्चिष्ठ मान प्राप्त नहीं हो सकता।

77. (d)



वृत्त खण्ड का प[illegible]ना AOB, त्रिज्या r का एक खण्ड है। यदि इस खण्ड का कोण θ रेडियन है, तब खण्ड का क्षेत्रफल $=(A)=\frac{1}{2}r^2\theta$ .....(i)

तथा चाप की लम्बाई$(s)=r\theta$ या $\theta=\frac{s}{r}$.

$\therefore$ खण्ड का परिमाप $=(p)=r+s+r=2r+s$ .....(ii)

समीकरण (i) में $\theta=\frac{s}{r}$ रखने पर,

$A=\left(\frac{1}{2}r^2\right)\left(\frac{s}{r}\right)=\frac{1}{2}rs \Rightarrow s=\frac{2A}{r}$

s का मान समीकरण (ii) में रखने पर,

$p=2r+\left(\frac{2A}{r}\right)$ या $2A=pr-2r^2$

r के सापेक्ष अवकलन करने पर, $2\frac{dA}{dr}=p-4r$

हम जानते हैं, कि अधिकतम क्षेत्रफल के लिए, $\frac{dA}{dr}=0$

या $p-4r=0$ या $r=\frac{p}{4}$.

78. (d) $\frac{dy}{dx}=\frac{a}{x}+2bx+1 \Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=1}=a+2b+1=0$

$\Rightarrow a=-2b-1$

तथा $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=2}=\frac{a}{2}+4b+1=0$

$\Rightarrow \frac{-2b-1}{2}+4b+1=0 \Rightarrow -b+4b+\frac{1}{2}=0$

$\Rightarrow 3b=\frac{-1}{2} \Rightarrow b=\frac{-1}{6}$ तथा $a=\frac{1}{3}-1=\frac{-2}{3}$.

79. (c) $f(x)=\int_{-10}^{x}(t^4-4)e^{-4t}dt \Rightarrow f'(x)=(x^4-4)e^{-4x}$

अब $f'(x)=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2},\pm\sqrt{2}$

अब $f''(x)=-4(x^4-4)e^{-4x}+4x^3e^{-4x}$

अतः, $x=\sqrt{2}$ तथा $x=-\sqrt{2}$ पर दिया गया फलन चरम मान रखता है।

80. (a) $f(x)=x^2\log x \Rightarrow f'(x)=(2\log x+1)x$

अब $f'(x)=0 \Rightarrow x=e^{-1/2},0$

$\because\ 0<e^{-1/2}<1$

अतः इन चरम बिन्दुओं में से कोई भी अन्तराल $[1,e]$ में नहीं है।

अतः सिरों के बिन्दुओं 1 तथा e पर, $f(1)=0, f(e)=e^2$

अतः महत्तम मान $=e^2$.

81. (c) $f(x)=y=x^{-x} \Rightarrow \log y=-x\log x$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर, $\frac{1}{y}.\frac{dy}{dx}=-\left[x.\frac{1}{x}+\log x\right]$

$\Rightarrow \frac{1}{y}.\frac{dy}{dx}=-[1+\log x] \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-x^{-x}[1+\log x]$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=x^{-x}\left[\log\frac{1}{x}-1\right]$

$\frac{dy}{dx}=0$ रखने पर, $\log_e\frac{1}{x}=\log_e e \Rightarrow \frac{1}{x}=e \Rightarrow x=\frac{1}{e}$

82. (b) $ab=2a+3b \Rightarrow (a-3)b=2a \Rightarrow b=\frac{2a}{a-3}$

अब, $z=ab=\frac{2a^2}{a-3}$

$\Rightarrow \frac{dz}{da}=\frac{2[(a-3)2a-a^2]}{(a-3)^2}=\frac{2[a^2-6a]}{(a-3)^2}$

$\frac{dz}{da}=0$ रखने पर, $a^2-6a=0 \Rightarrow a=0,6$

अब $a=6$ पर, $\frac{d^2z}{da^2}=$ धनात्मक

जब $a=6, b=4$; तब न्यूनतम मान $(ab)_- = 6 \times 4 = 24$.

83. (d) माना $PQ=a$ तथा $PR=b$, तब $\Delta=\frac{1}{2}ab\sin\theta$

$\because -1 \le \sin\theta \le 1$

अतः क्षेत्रफल अधिकतम है, जब $\sin\theta=1 \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{2}$.

84. (a) $y=a(1-\cos x) \Rightarrow y'=a\sin x$

$\Rightarrow y'=0 \Rightarrow \sin x=0 \Rightarrow x=0,\pi$

अब $y''=a\cos x \Rightarrow y''(0)=a$ तथा $y''(\pi)=-a$

इस प्रकार y अधिकतम है, जब $x=\pi$.

85. (a) माना $y=f(x)=\left(x^2+\frac{250}{x}\right)$, $\therefore \frac{dy}{dx}=f'(x)=2x-\frac{250}{x^2}$

$f'(x)=0$ रखने पर,

$\Rightarrow 2x^3-250=0 \Rightarrow x^3=125 \Rightarrow x=5$

पुनः $\frac{d^2y}{dx^2}=f''(x)=2+\frac{500}{x^3}$. अब $f''(5)=2+\frac{500}{125}>0$

इस प्रकार $x=5$ पर फलन का मान न्यूनतम होगा।

अतः न्यूनतम मान $=f(5)=25+50=75$.

86. (a) $f(x)=x^2+\frac{1}{1+x^2}$, $f'(x)=2x-\frac{1}{(1+x^2)^2}.2x$

अब $f'(x)=0 \Rightarrow x=0$

अतः फलन $x=0$ पर न्यूनतम मान रखता है।

87. (a) $x-2y=4 \Rightarrow x=2y+4$ .....(i)

माना $P=xy$

समीकरण (i) से, $P=y(2y+4)=4y+2y^2$

तथा $\frac{dP}{dy}=4+4y=0$

$y=-1 \Rightarrow x=2$ तथा $\frac{d^2P}{dy^2}=4$ (धनात्मक)

$\therefore P_{min.}=xy=(2)(-1)=-2$.

88. (a) $f(x)=2x+3y$, जब $xy=6$

$f(x)=2x+3y=2x+\frac{18}{x}$

$f'(x)=2-\frac{18}{x^2}=0$

$\Rightarrow x=\pm 3$ तथा $f''(x)=\frac{36}{x^3} \Rightarrow f''(3)>0$

$x=+3$ रखने पर, हमें न्यूनतम मान 12 प्राप्त होता है।

89. (d) $f(x)=|px-9|+r|x|, x\in(-\infty,\infty)$

यदि $p=q=r$, तब एक बिन्दु पर न्यूनतम मान हो सकते हैं जहाँ $p>0$, $q>0$ और $r>0$.

90. (b) $f(x)=3x^4-8x^3+12x^2-48x+25$

$\therefore f'(x)=12x^3-24x^2+24x-48$

$=12[x^3-2x^2+2x-4]=12[(x-2)(x^2+2)]$

फलन के अधिकतम और न्यूनतम मान के लिए, $f'(x)=0$

$\Rightarrow x=2$. अब $f''(x)=12[3x^2-4x+2]$

$f''(2)=12[12-8+2]=72>0$

$\therefore x=2$ पर फलन का मान न्यूनतम है।

अतः [0, 3] पर $f(x)$ का न्यूनतम मान

$=\min\{f(0),f(2),f(3)\}=\min\{25,-39,16\}=-39$.

91. (b) दिया है, $y=x^{1/x}$

दोनों पक्षों का log लेने पर, $\log y=\frac{1}{x}\log x$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x^2}-\frac{\log x}{x^2}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{1}{x^2}(1-\log x)x^{1/x}$

अधिकतम मान के लिए, $\frac{dy}{dx}=0 \Rightarrow x=e$; $\therefore y_{max}=e^{1/e}$

92. (b) माना $f(x)=4e^{2x}+9e^{-2x}$; $\therefore f'(x)=8e^{2x}-18e^{-2x}$

$f'(x)=0$ रखने पर, $8e^{2x}-18e^{-2x}=0$

$e^{2x}=\frac{3}{2} \Rightarrow x=\log(3/2)^{1/2}$

पुनः $f''(x)=16e^{2x}+36e^{-2x}>0$

अब $f(\log(3/2)^{1/2})=4e^{2.(\log(3/2)^{1/2})}+9e^{-2(\log(3/2)^{1/2})}$

$=4\times\frac{3}{2}+9\times\frac{2}{3}=6+6=12$

अतः न्यूनतम मान = 12.

93. (d) माना वक्र पर बिन्दु (h,k) है

तब $h^2=2k$ .....(i)

दूरी $= D = \sqrt{h^2+(k-5)^2}$

(i) द्वारा, $D=\sqrt{2k+(k-5)^2}$

$\frac{dD}{dk}=\frac{1}{2\sqrt{2k+(k-5)^2}}\times 2(k-5)+2=0 \Rightarrow k=4$

$\because k=4$ पर, $\frac{d^2D}{dK^2}>0$

$\therefore k=4$ पर, फलन D न्यूनतम है। अतः बिन्दु $(\pm 2\sqrt{2},4)$ होगा।

94. (d) $x+2y=8$, $y=\frac{8-x}{2}$

अब $f(x)=xy=x.\frac{(8-x)}{2}=4x-\frac{x^2}{2}$

$\therefore f'(x)=4-x$

चरम बिन्दु के लिए, $f'(x)=0$

$\therefore x=4$ व $y=2$

अब $f''(x)=-1<0$

अतः xy का अधिकतम मान $=4\times 2=8$.

95. (d) $f(a) = 2a^2 - 3a + 10$

$f'(a) = 4a - 3, f''(a) = 4 > 0$

चरम बिन्दु के लिए, $f'(a) = 0 \Rightarrow a = \frac{3}{4}$

$\therefore\ a = \frac{3}{4}$ पर, $f(a)$ न्यूनतम है।

अतः $f(a)_{\min} = 2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 - 3 \times \left(\frac{3}{4}\right) + 10 = \frac{71}{8}$.

96. (a) माना R के निर्देशांक $(x, 0)$ हैं।

दिया है, $P(1,1)$ तथा $Q(3,2)$

अब, $PR + RQ = \sqrt{(x-1)^2 + (0-1)^2} + \sqrt{(x-3)^2 + (0-2)^2}$

$= \sqrt{x^2 - 2x + 2} + \sqrt{x^2 - 6x + 13}$

$PR + RQ$ के न्यूनतम मान के लिए, $\frac{d}{dx}(PR + RQ) = 0$

$\Rightarrow \frac{d}{dx}(\sqrt{x^2 - 2x + 2}) + \frac{d}{dx}(\sqrt{x^2 - 6x + 13}) = 0$

$\Rightarrow \frac{(x-1)}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}} = -\frac{(x-3)}{\sqrt{x^2 - 6x + 13}}$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर, $\frac{(x-1)^2}{(x^2 - 2x + 2)} = \frac{(x-3)^2}{x^2 - 6x + 13}$

$\Rightarrow 3x^2 - 2x - 5 = 0 \Rightarrow (3x - 5)(x + 1) = 0,\ x = \frac{5}{3}, -1$.

$\because 1 < x < 3$, अतः $R = (5/3, 0)$.

97. (b) $f(x) = 1 + 2x^2 + 2^2x^4 + 2^3x^6 + ...2^{10}x^{20}$

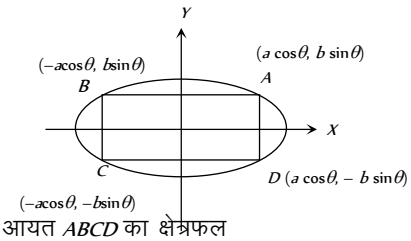
$f'(x) = x(4 + 4.2^2x^2 + ... + 20.2^{10}x^{18})$

$\therefore\ f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$, (केवल)

तथा $f''(0) > 0$.

अतः $f(x)$, कम से कम एक निम्निष्ठ रखता है।

98. (c)



आयत $ABCD$ का क्षेत्रफल

$= (2a\cos\theta).(2b\sin\theta) = 2ab\sin 2\theta$

अतः महत्तम आयत का क्षेत्रफल $= 2ab$, जब $\sin 2\theta = 1$.

वर्धमान तथा ह्रासमान फलन

1. (a) माना $f(x) = y = x + \frac{1}{x}$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$\frac{dy}{dx} = f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} \le 0 \Rightarrow 1 \le \frac{1}{x^2}$ या $x^2 \le 1$

अतः $x \in [-1, 1]$.

2. (d) $y = \frac{1}{1 + x^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{(1 + x^2)^2}$

ह्रासमान होने के लिए,

$-\frac{2x}{(1 + x^2)^2} < 0 \Rightarrow x > 0 \Rightarrow x \in (0, \infty)$.

3. (c) स्पष्टतः यहाँ $\cos 3x$, अंतराल $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ में ह्रासमान नहीं होगा

क्योंकि $\frac{d}{dx}\cos 3x = -3\sin 3x$

परन्तु $x = 75°$ पर, $-3\sin 3x > 0$

अतः अभीष्ट परिणाम प्राप्त हो जाता है।

4. (c) चूँकि $f'(x) = \frac{3}{(x+1)^2}$, अन्तराल $(-\infty, \infty)$ में 'o' से बड़ा है।

अतः $f(x) = \frac{x-2}{x+1}$, अन्तराल $(-\infty, \infty)$ में या R में वर्धमान है।

5. (c) माना $f(x) = x^2 - x + 1$

$f'(x) = 2x - 1$. स्पष्टतः $f'(0) = -1$ व $f'(1) = 1$

अतः फलन न तो वर्धमान है और न ह्रासमान है।

6. (b) माना $y = f(x) = x^2e^{-x}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = e^{-x}(2x - x^2)$

अतः $f'(x) \ge 0$, (प्रत्येक $x \in [0, 2]$ के लिए)

अतः यह अंतराल [0,2] में ह्रासमान नहीं है।

7. (a) माना $f(x) = \log\sin x \Rightarrow f'(x) = \cot x$

अतः फलन, अन्तराल $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ में वर्धमान है।

8. (b) यहाँ $f'(x) = \cos x + \sin x$

अब $f(x)$, x में वर्धमान फलन होगा यदि

$f'(x) = \cos x + \sin x > 0$ या $\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > 0$

$\Rightarrow 0 \le x < \frac{3\pi}{4}$ अर्थात् $\left[0, \frac{3\pi}{4}\right)$ में $f'(x) > 0$.

9. (c) माना $f(x) = \sin x - bx + c$

$\therefore f'(x) = \cos x - b > 0$ या $\cos x > b$ या $b < -1$.

10. (b) माना $f(x) = x^4 - 4x \Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 4$

$\therefore\ 4x^3 - 4 < 0$ या $x^3 < 1$

अतः फलन $(-\infty, 1)$ में ह्रासमान है।

11. (d) $f(x) = -2x^3 - 9x^2 - 12x + 1 \Rightarrow f'(x) = -6x^2 - 18x - 12$

ह्रासमान के लिए, $f'(x) < 0 \Rightarrow -6x^2 - 18x - 12 < 0$

$\Rightarrow x^2 + 3x + 2 > 0 \Rightarrow (x + 2)(x + 1) > 0$

अतः या तो $x < -2$ या $x > -1$

$\Rightarrow x \in (-1, \infty)$ या $(-\infty, -2)$.

12. (b) वर्धमान होने के लिए, $f'(x) = 3x^2 - 27 > 0$

$\Rightarrow x^2 > 9 \Rightarrow |x| > 3$.

13. (c) $f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x > 0$, (वर्धमान के लिए)

अर्थात् $0 < x < \infty$. अतः $f(x)$, अंतराल $(0, \infty)$ में वर्धमान है।

14. (a) $f(x) = x^4 - \frac{x^3}{3} \Rightarrow f'(x) = 4x^3 - x^2$

वर्धमान के लिए, $4x^3 - x^2 > 0 = x^2(4x - 1) > 0$

अतः फलन $x > \frac{1}{4}$ के लिए वर्धमान है।

इसी प्रकार $x < \frac{1}{4}$ के लिए ह्रासमान है।

15. (b) $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x > 0, \forall x$

अतः x के सभी मानों के लिए $f(x)$ वर्धमान है।

16. (d) यदि फलन एकदिष्ट है, तो उसका मान फलन की एकदिष्टता पर निर्भर करता है।

17. (a) $f(x) = 5^{-x}$

$\Rightarrow f'(x) = -5^{-x} \log_e 5 = -\frac{\log_e 5}{5^x}$

$\Rightarrow x$ के सभी मानों के लिए, $f'(x) < 0$

अर्थात् $f(x)$, x के सभी मानों के लिए ह्रासमान है।

18. (a) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 7$

$\Rightarrow f'(x) = 6x^2 - 6x - 36$. परन्तु ह्रासमान के लिए, $f'(x) < 0$

$\Rightarrow x^2 - x - 6 < 0 \Rightarrow (x-3)(x+2) < 0 \Rightarrow -2 < x < 3$

अतः अभीष्ट अन्तराल $(-2, 3)$ है।

19. (c) $f(x) = \sin x - \frac{x}{2} \Rightarrow f'(x) = \cos x - \frac{1}{2}$

वर्धमान के लिए, $f'(x) > 0$

स्पष्टतः, यह $-\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3}$ के लिए वर्धमान है।

20. (b) $f(x) = x \sin x + \cos x + \cos^2 x$

$\therefore f'(x) = \sin x + x \cos x - \sin x - 2 \cos x \sin x$

$= \cos x (x - 2 \sin x)$

अतः $x \to 0$ से π तक, तो $f'(x) < 0$

अर्थात् $f(x)$ ह्रासमान फलन है।

21. (d) $\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{e^x} x(x-2)$ धनात्मक होगा, जब $x(x-2)$ ऋणात्मक है। अर्थात् $x \in (0, 2)$, चूँकि चरघातांकी फलन हमेशा धनात्मक होता है।

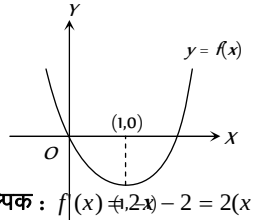
22. (a) यहाँ $f(x) = y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 6$

$\Rightarrow f'(x) = 6x^2 - 18x + 12$

चूँकि $f(x)$, अंतराल (a, b) में $f'(x) > 0$ या < 0 के अनुसार वर्धमान या ह्रासमान होगा।

अतः $f'(x) = 6(x-2)(x-1)$ जो कि स्पष्टतः $x \in (1,2)$ अर्थात् $1 < x < 2$ के लिए ह्रासमान है।

23. (c) यहाँ $f(x) = (x-1)^2 - 1$, अतः $x < 1$ में ह्रासमान है।



वैकल्पिक : $f'(x) = 1.2x - 2 = 2(x-1)$

ह्रासमान होने के लिए, $2(x-1) < 0 \Rightarrow (x-1) < 0 \Rightarrow x < 1$.

24. (b) $f(x)$ एकदिष्ट ह्रासमान होगा, यदि $f'(x) < 0$

$\Rightarrow f'(x) = -\sin x - 2p < 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \sin x + p > 0$

$\Rightarrow p > \frac{1}{2}, [\because -1 \le \sin x \le 1]$.

25. (c) $f'(x) = 3kx^2 - 18x + 9 = 3[kx^2 - 6x + 3] > 0, \forall x \in R$

$\therefore \Delta = b^2 - 4ac < 0$, $k > 0$

अर्थात् $36 - 12k < 0$ या $k > 3$.

26. (b) $y = f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 1$

$\frac{dy}{dx} = f'(x) = 6x^2 - 30x + 36 = 6(x^2 - 5x + 6)$

$f'(x) = 6(x-2)(x-3)$

एकदिष्ट ह्रासमान के लिए, $f'(x) < 0$

$\Rightarrow (x-2)(x-3) < 0 \Rightarrow x \in (2,3)$

27. (a) $y = \tan x - x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \sec^2 x - 1 = \tan^2 x \ge 0$.

28. (a) $f(x) = \log(1+x) - \frac{2x}{2+x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{(2+x).(2-2x)}{(2+x)^2}$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{x^2}{(x+1)(x+2)^2}$

स्पष्टतः $f'(x) > 0$, $\forall\ x > 0$

अतः $f(x)$, अंतराल $(0, \infty)$ में वर्धमान है।

29. (d) चूँकि $f(x) = \frac{K \sin x + 2 \cos x}{\sin x + \cos x}$, x के सभी मानों के लिए वर्धमान है। अतः $f'(x) > 0$, $\forall\ x$

$\Rightarrow \frac{K-2}{(\sin x + \cos x)^2} > 0 \ \forall\ x \Rightarrow K - 2 > 0 \Rightarrow K > 2$.

30. (b) चूँकि $f(x) = \sqrt{3} \sin x - \cos x - 2ax + b$, x के सभी वास्तविक मानों के लिए ह्रासमान है। अतः $f'(x) < 0, \forall\ x$

$\Rightarrow \sqrt{3} \cos x + \sin x - 2a < 0, \forall\ x$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x < a, \forall\ x$

$\Rightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) < a, \forall\ x$

$\Rightarrow a \ge 1, \left[\because \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \le 1\right]$.

31. (c) फलन $f(x) = x^3$, x के सभी मानों के लिए वर्धमान है तथा $g(x) = 6x^2 + 15x + 5$ वर्धमान है, यदि $g'(x) > 0$

$\Rightarrow 12x + 15 > 0 \Rightarrow x > -\frac{5}{4}$.

अतः $f(x)$ व $g(x)$ दोनों, $x > -\frac{5}{4}$ के लिए वर्धमान हैं।

यह दिया है कि $f(x)$, $g(x)$ की तुलना में कम तेजी से वर्धमान है, अतः फलन $\phi(x) = f(x) - g(x)$ एक ह्रासमान फलन होगा।

अतः $\phi'(x) < 0 \Rightarrow 3x^2 - 12x - 15 < 0 \Rightarrow -1 < x < 5$.

32. (d) यदि $f(x) = (a+2)x^3 - 3ax^2 + 9ax - 1$, x के सभी मानों के लिए एकदिष्ट ह्रासमान है, तब $f'(x) \le 0$, $\forall\ x \in R$

$\Rightarrow 3(a+2)x^2 - 6ax + 9a \le 0, \forall\ x \in R$

$\Rightarrow (a+2)x^2 - 2ax + 3a \le 0, \forall\ x \in R$

$\Rightarrow a + 2 < 0$ एवं विविक्तिकर ≤ 0

$\Rightarrow a < -2, -8a^2 - 24a \le 0 \Rightarrow a < -2$ व $a(a+3) \ge 0$

$\Rightarrow a < -2$, $a \le -3$ या $a \ge 0 \Rightarrow a \le -3 \Rightarrow -\infty < a \le -3$.

33. (a,d) यहाँ $f(x) = 2x + \cot^{-1} x + \log(\sqrt{1+x^2} - x)$

$\therefore f'(x) = 2 - \frac{1}{1-x^2} + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}-x}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - 1\right)$

$= \frac{1+2x^2}{1+x^2} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1+2x^2}{1+x^2} - \frac{\sqrt{(1+x^2)}}{1+x^2}$

$= \frac{x^2 + \sqrt{1+x^2}(\sqrt{1+x^2}-1)}{1+x^2} \geq 0, \forall x$

अतः $f(x)$, अंतराल $(-\infty, \infty)$ में वर्धमान है तथा विशेषतः $[0, \infty)$ में वर्धमान है।

34. (c) चूँकि $f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2$, जो कि x के सभी वास्तविक मानों के लिए अऋणात्मक है।

35. (d) वर्धमान के लिए, $\frac{d}{dx}(x^2 + kx + 1) > 0 \Rightarrow 2x + k > 0$

स्पष्टतः $x \in (1, 2)$ के लिए k का न्यूनतम मान -2 होगा।

36. (b) दिया है, $f(x) = x^3 - x^2 - x - 4$

यह फलन ह्रासमान होगा, जब $f'(x) < 0$

$\Rightarrow 3x^2 - 2x - 1 < 0 \Rightarrow 3x^2 - 3x + x - 1 < 0$

$\Rightarrow (3x+1)(x-1) < 0$; $\therefore 3x + 1 > 0$ व $x - 1 < 0$

$x > -\frac{1}{3}$ व $x < 1$; $\therefore x \in \left(\frac{-1}{3}, 1\right)$.

37. (a) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 5$

वर्धमान होने के लिए, $f'(x) > 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x - 24 > 0$

$\Rightarrow x^2 - 2x - 8 > 0$

$\Rightarrow x^2 - 4x + 2x - 8 > 0 \Rightarrow (x+2)(x-4) > 0$

अतः $x \in (-\infty, -2) \cup (4, \infty)$.

38. (c) चूँकि $f(x) = \sin 2x \Rightarrow f'(x) = 2\cos 2x$

स्पष्टतः, अंतराल $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ में $f'(x) > 0$ एवं अंतराल $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ में $f'(x) < 0$.

अतः अभीष्ट परिणाम प्राप्त होता है।

39. (d) $f(x) = (x+2)e^{-x}$

$f'(x) = e^{-x} - e^{-x}(x+2)$

$f'(x) = -e^{-x}(x+1)$

वर्धमान फलन के लिए $-e^{-x}(x+1) > 0$ या $e^{-x}(x+1) < 0$

$e^{-x} > 0$ या $(x+1) < 0$

$x \in (-\infty, \infty)$ व $x \in (-\infty, -1)$

$\Rightarrow x \in (-\infty, -1)$

अतः फलन $(-\infty, -1)$ में वर्धमान है

ह्रासमान फलन के लिए, $-e^{-x}(x+1) < 0$ या $e^{-x}(x+1) > 0$

$\Rightarrow x \in (-1, \infty)$

अतः फलन $(-1, \infty)$ में ह्रासमान है।

40. (c) $f(x) = x^3 - 10x^2 + 200x - 10$

$f'(x) = 3x^2 - 20x + 200$

वर्धमान फलन के लिए, $f'(x) > 0 \Rightarrow 3x^2 - 20x + 200 > 0$

$\Rightarrow 3\left[x^2 - \frac{20}{3}x + \frac{200}{3} + \frac{100}{9} - \frac{100}{9}\right] > 0$

$\Rightarrow 3\left[\left(x - \frac{10}{3}\right)^2 + \frac{500}{9}\right] > 0 \Rightarrow 3\left(x - \frac{10}{3}\right)^2 + \frac{500}{3} > 0$

अतः $f(x)$, सम्पूर्ण वास्तविक रेखा पर वर्धमान है।

41. (c) $f'(x) = \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x} = \frac{\cos x(\tan x - x)}{\sin^2 x}$

$0 < x \leq 1 \Rightarrow x \in Q_1 \Rightarrow \tan x > x, \cos x > 0$

$\therefore f'(x) > 0$, $0 < x \leq 1$ के लिए

$\therefore f(x)$, एक वर्धमान फलन है

$g'(x) = \frac{\tan x - x\sec^2 x}{\tan^2 x} = \frac{\sin x\cos x - x}{\sin^2 x} = \frac{\sin 2x - 2x}{2\sin^2 x}$

अब $\frac{d}{dx}(\sin 2x - 2x) = 2\cos 2x - 2 = 2[\cos 2x - 1] < 0$

$\Rightarrow \sin 2x - 2x$ ह्रासमान है $\Rightarrow \sin 2x - 2x < 0$

$\therefore g'(x) < 0 \Rightarrow g(x)$ ह्रासमान है।

42. (d) फलन एकदिष्ट ह्रासमान होगा जब $f'(x) < 0$

$\Rightarrow 6x^2 - 18x + 12 < 0 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 < 0$

$\Rightarrow x^2 - 2x - x + 2 < 0 \Rightarrow (x-2)(x-1) < 0$,

$\therefore x \in 1 < x < 2$.

43. (a) वर्धमान के लिए, $f'(x) = 6x^2 + 36x - 96 > 0$

$\Rightarrow f'(x) = (x+8)(x-2) \geq 0 \Rightarrow x \geq 2, x \leq -8$.

44. (b) माना $y = \frac{a\sin x + b\cos x}{c\sin x + d\cos x}$

फलन ह्रासमान होगा, जब $\frac{dy}{dx} < 0$ अर्थात्

$\frac{(c\sin x + d\cos x)(a\cos x - b\sin x) - (a\sin x + b\cos x)(c\cos x - d\sin x)}{(c\sin x + d\cos x)^2} < 0$

$\Rightarrow ac\sin x\cos x - bc\sin^2 x + ad\cos^2 x$

$- bd\sin x\cos x - ac\sin x\cos x + ad\sin^2 x$

$- bc\cos^2 x + bd\sin x\cos x < 0$

$\Rightarrow ad(\sin^2 x + \cos^2 x) - bc(\sin^2 x + \cos^2 x) < 0$

$\Rightarrow (ad - bc) < 0$.

45. (c) $f(x) = 1 - e^{-x^2/2}$

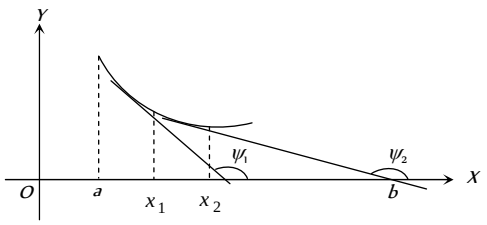
$f'(x) = -e^{-x^2/2}(-x) = xe^{-x^2/2}$

$f(x)$ के वर्धमान होने के लिए, $f'(x) > 0$

$\Rightarrow xe^{-x^2/2} > 0 \Rightarrow x > 0$

तथा $f(x)$ ह्रासमान होगा जब $x < 0$.

46. (d) हम जानते हैं कि $\sin x$ तथा $\cos x$ दोनों फलन अंतराल $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ में ह्रासमान हैं, इसलिए कथन S सही है।

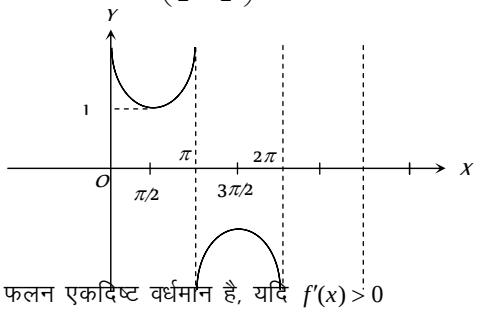


दिये हुए ग्राफ से यह स्पष्ट है कि कथन R गलत है। स्पष्टतः $f(x)$, अंतराल (a, b) में अवकलनीय है।

और $a < x_1 < x_2 < b$

लेकिन $f'(x_1) = \tan\phi_1 < \tan\phi_2 = f'(x_2)$.

47. (a) cosec x का ग्राफ $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ में विपरीत है



48. (d) फलन एकदिष्ट वर्धमान है, यदि $f'(x) > 0$

$$\Rightarrow \frac{(2\sin x + 3\cos x)(\lambda\cos x - 6\sin x)}{(2\sin x + 3\cos x)^2} - \frac{(\lambda\sin x + 6\cos x)(2\cos x - 3\sin x)}{(2\sin x + 3\cos x)^2} > 0$$

$$\Rightarrow 3\lambda(\sin^2 x + \cos^2 x) - 12(\sin^2 x + \cos^2 x) > 0$$

$$\Rightarrow 3\lambda - 12 > 0 \Rightarrow \lambda > 4$$

49. (b) $f(x) = 3x + \frac{2}{x} \Rightarrow f'(x) = 3 - \frac{2}{x^2}$

स्पष्टतः अन्तराल (1, 3) में, $f'(x) > 0$

अतः $f(x)$ निरन्तर वर्धमान है।

50. (d) $f(x) = \sin x - \cos x$

$$f'(x) = \cos x + \sin x = \sqrt{2}\left[\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right] = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$f(x)$ के ह्रासमान होने के लिए, $f'(x) < 0$

अतः $\frac{\pi}{2} < \left(x - \frac{\pi}{4}\right) < \frac{3\pi}{2}$, $(0 \le x \le 2\pi)$

$$\Rightarrow \frac{3\pi}{4} < x \le \frac{7\pi}{4}.$$

51. (b) $f(x) = \frac{\log x}{x}$

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{\log x}{x^2} = \frac{1 - \log x}{x^2}$$

$f(x)$ के वर्धमान होने के लिए, $f'(x) > 0$

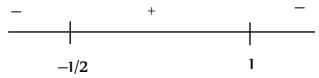
$\Rightarrow 1 - \log x > 0 \Rightarrow 1 > \log x \Rightarrow e > x$

अतः $f(x)$, अन्तराल $(0, e)$ में वर्धमान है।

52. (a) $f'(x) = e^{x(1-x)} + x.e^{x(1-x)}.(1-2x)$

$$= e^{x(1-x)}\{1 + x(1-2x)\} = e^{x(1-x)}.(-2x^2 + x + 1)$$

अब $-2x^2 + x + 1$ के लिए चिन्ह पद्धति से,



$f'(x) \ge 0$, यदि $x \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$, क्योंकि $e^x(1-x)$ हमेशा धनात्मक होता है। अतः $f(x)$, अंतराल $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$ में वर्धमान है।

53. (b) दिया है, $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 3$

ह्रासमान के लिए, $f'(x) < 0$

$\Rightarrow 3x^2 - 12x + 9 < 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 < 0$

$\Rightarrow (x-3)(x-1) < 0$, $\therefore x \in (1, 3)$.

54. (b) $f(x) = \frac{1}{x+1} - \log(1+x) \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{1+x}$

$$f'(x) = -\left[\frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}\right]$$

$f'(x) =$ ऋणात्मक, जब $x > 0$ या $f'(x) < 0$, $\forall x > 0$

$\therefore f(x)$, एक ह्रासमान फलन है।

55. (a) $f(x) = x + \cos x \Rightarrow f'(x) = 1 - \sin x$

$\Rightarrow f'(x) > 0$, $\forall x$

अतः $f(x)$, सदैव वर्धमान है।

56. (c) माना $y = x^{1/x} \Rightarrow \log y = \frac{1}{x}\log x$

$$\Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2} - \frac{\log x}{x^2} = \frac{1 - \log x}{x^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x^{1/x}\left(\frac{1 - \log x}{x^2}\right)$$

अब, $x^{1/x} > 0$, x के सभी मानों के लिए तथा $\frac{1 - \log x}{x^2} > 0$, अंतराल $(1, e)$ में तथा $\frac{1 - \log x}{x^2} < 0$, अंतराल (e, ∞) में।

अतः $f(x)$, $(1, e)$ में वर्धमान तथा (e, ∞) में ह्रासमान है।

57. (d) $f(x) = 1 - x^3 - x^5 \Rightarrow f'(x) = -3x^2 - 5x^4$

अतः $f'(x) < 0$, x के सभी मानों के लिए।

58. (a) माना $y = x^x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x^x(1 + \log x)$

$\frac{dy}{dx} > 0$ के लिए,

$$x^x(1 + \log x) > 0 \Rightarrow 1 + \log x > 0 \Rightarrow \log_e x > \log_e \frac{1}{e}$$

इसे धनात्मक होने के लिए x, $\frac{1}{e}$ से बड़ा होना चाहिए।

59. (c) माना $f(x) = 2x^3 - 6x + 5 \Rightarrow f'(x) = 6x^2 - 6 > 0$

$\Rightarrow x^2 - 1 > 0 \Rightarrow (x-1)(x+1) > 0 \Rightarrow x > 1$ या $x < -1$.

60. (a) $3\sin x - 4\sin^3 x = \sin 3x$

यह वर्धमान है, जब $-\pi/2 \le 3x \le \pi/2$

$-\pi/6 \le x \le \pi/6$.

$\therefore$ अंतराल की लम्बाई $= \left|\frac{\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right| = \frac{\pi}{3}$.

61. (d) दिया है, $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$

$\therefore f'(x) = 3x^2 + 2bx + c$

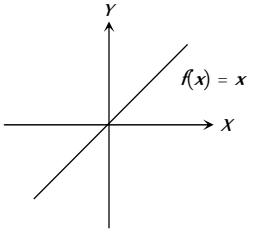
विविक्तिकर $= 4(b^2 - 3c)$

$\Rightarrow 4(b^2 - c) - 8c < 0$, $b^2 < c$ और $c > 0$

$\therefore$ सभी $x \in R$ के लिए, $f'(x) > 0$

अतः f निरंतर वर्धमान है।

62. (a) यह सदैव वर्धमान है।



63. (b) दोनों फलन e^x व $1+x$ वर्धमान हैं व $\sqrt{e} \geq 1+\frac{1}{2}$ क्योंकि $\sqrt{e}=1.65$ लगभग। अतः विकल्प (a) सही नहीं है। चूँकि $\sin\frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{6}$, क्योंकि $\frac{1}{2} < \frac{22}{42}$. अतः (c) सही नहीं है। अब $\log\frac{1}{2} < \frac{1}{2}$, क्योंकि $\log\frac{1}{2}$ ऋणात्मक नहीं है।
अतः विकल्प (d) सही नहीं है।
अतः विलोपन द्वारा (b) सही है।

64. (d) $f'(x)=6(x^2-x+15)>0$, $\forall x$.

65. (c) $f(x)=y=\tan^{-1}\left(\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$\Rightarrow \tan y=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \sec^2 y\frac{dy}{dx}=\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

$\frac{dy}{dx}>0 \Rightarrow \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)>0$. $\therefore\ x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$.

66. (a) $f(x)=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$

अब $f(-x)=\frac{e^{-2x}-1}{e^{-2x}+1}=\frac{1-e^{2x}}{1+e^{2x}} \Rightarrow f(x)=-\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=-f(x)$

$\Rightarrow f(x)$, विषम फलन है।

पुनः $f(x)=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} \Rightarrow f'(x)=\frac{4e^{2x}}{(1+e^{2x})^2}>0, \forall n\in R$

$\Rightarrow$ $f(x)$ वर्धमान फलन है।

67. (b) $f(x)=4x+\frac{1}{x}$

$\frac{d}{dx}f(x)=\frac{d}{dx}\left[4x+\frac{1}{x}\right] = 4-\frac{1}{x^2}$

चरम बिन्दु के लिए, $\frac{dy}{dx}=0$

$\Rightarrow\ 4-\frac{1}{x^2}=0\ \Rightarrow\ x=\frac{1}{2},-\frac{1}{2}$

$f\left(\frac{1}{2}\right)=4.\frac{1}{2}+\frac{1}{1/2} = 2+2=4$

$f\left(-\frac{1}{2}\right)=4.\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{-1/2}=-2-2=-4$

अतः $f(x)$, अंतराल $\left[\frac{-1}{2},\frac{1}{2}\right]$ में ह्रासमान है।

68. (a) $f(x)=3x^2-2x+1$, $f'(x)=6x-2\geq 0\ \Rightarrow\ x\geq\frac{1}{3}$

अतः विकल्प (a) गलत है। शेष विकल्पों की जाँच करने पर हम यह पाते हैं कि वे सही सुमेलित हैं।

रोले की प्रमेय, लैगरांज की मध्यमान प्रमेय

1. (d) यहाँ $f(x)=\frac{x^2-3x}{x-1} \Rightarrow f'(x)=\frac{x^2-2x+3}{(x-1)^2}$

स्पष्टतः यह $x=1$ पर अर्थात् (0,3) में अवकलनीय है।
किन्तु $f(a)=f(b)$, $[-3,0]$ व [1. 5, 3] के लिए सत्य नहीं है।
अतः उत्तर (d) है।

2. (b) यहाँ $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$

$\Rightarrow\ \frac{e^b-e^a}{b-a}=f'(c)\Rightarrow\frac{e-1}{1-0}=e^c \Rightarrow c=\log(e-1)$.

3. (b) $f(x)=\begin{cases}-x, \text{जब } -1\leq x<0\\ x, \text{ जब } 0\leq x\leq 1\end{cases}$

स्पष्टतः, $f(-1)=|-1|=1=f(1)$

परन्तु $Rf'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=1$

$Lf'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0-h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|-h|}{-h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{-h}=-1$

$\therefore Rf'(0)\neq Lf'(0)$
अतः यह (–1, 1) में अवकलनीय नहीं है।

4. (c) हम जानते हैं कि $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$\Rightarrow f'(c)=\frac{0-1}{\pi/2}=-\frac{2}{\pi}$ .....(i)

किन्तु $f'(x)=-\sin x \Rightarrow f'(c)=-\sin c$ ....(ii)

(i) व (ii) से, $-\sin c=-\frac{2}{\pi}\Rightarrow c=\sin^{-1}\left(\frac{2}{\pi}\right)$

5. (a) $f'(x_1)=\frac{-1}{x_1^2}$

$\therefore\ \frac{-1}{x_1^2}=\frac{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}{b-a}=-\frac{1}{ab}\Rightarrow x_1=\sqrt{ab}$ .s

6. (c) रोले की प्रमेय में 'c' का मान निकालने के लिए, $f'(c)=0$

यहाँ $f'(x)=(x^2+3x)e^{-(1/2)x}.\left(-\frac{1}{2}\right)+(2x+3)e^{-(1/2)x}$

$=e^{-(1/2)x}\left\{-\frac{1}{2}(x^2+3x)+2x+3\right\}$

$=-\frac{1}{2}e^{-(x/2)}\{x^2-x-6\}$

$\therefore f'(c)=0\Rightarrow c^2-c-6=0\Rightarrow c=3,-2$

परन्तु $3\notin[-3,0]$, अतः $c=2$.

7. (b) यदि रोले प्रमेय किसी भी फलन के लिए अंतराल $[a,b]$ में सत्य है तो $f(a)=f(b)$, अतः अंतराल $[-2,2]$ है।

8. (b) $f'(x)=1-\frac{1}{x^2}\Rightarrow f'(c)=1-\frac{1}{c^2}$

$\therefore 1-\frac{1}{c^2}=\frac{\frac{10}{3}-2}{2}\Rightarrow 1-\frac{1}{c^2}=\frac{2}{3}\Rightarrow c^2=3$.

9. (c) $f(x)$ के लिए अंतराल $[a, b]$ में मध्यमान प्रमेय से,

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$, जहाँ $a < c < b$

$\therefore a < x_1 < b$.

10. (b) $\frac{f(2)-f(0)}{2-0} = f'(x) \Rightarrow \frac{f(2)-0}{2} = f'(x)$

$\Rightarrow \frac{df(x)}{dx} = \frac{f(2)}{2} \Rightarrow f(x) = \frac{f(2)}{2}x + c$

$\therefore f(0) = 0 \Rightarrow c = 0$; $\therefore f(x) = \frac{f(2)}{2}x$ .....(i)

दिया है, $|f'(x)| \le \frac{1}{2} \Rightarrow \left|\frac{f(2)}{2}\right| \le \frac{1}{2}$ .....(ii)

(i) $\Rightarrow |f(x)| = \left|\frac{f(2)}{2}x\right| = \left|\frac{f(2)}{2}\right||x| \le \frac{1}{2}|x|$, [(ii) से]

अंतराल [0, 2] में, अधिकतम x के लिए $(x = 2)$,

$|f(x)| \le \frac{1}{2}.\ 2 \Rightarrow |f(x)| \le 1$.

11. (a) $f(1) = f(3) \Rightarrow a + b - 5 = 3a + b - 27 \Rightarrow a = 11$, जो कि विकल्प (a) में दिया गया है।

12. (a) $f(x) = e^{-2x}\sin 2x \ \Rightarrow\ f'(x) = 2e^{-2x}(\cos 2x - \sin 2x)$

अब, $f'(c) = 0$

$\Rightarrow \cos 2c - \sin 2c = 0 \Rightarrow \tan 2c = 1 \Rightarrow c = \frac{\pi}{8}$.

13. (a) रोले प्रमेय से, अंतराल (1, 26) के लिए, $f(1) = f(26) = 5$. अतः रोले प्रमेय से अंतराल [1, 26] में कम से कम एक बिन्दु पर $f'(x) = 0$ है।

14. (b) $\int_1^2 f'(x)dx = [f(x)]_1^2 = f(2) - f(1) = 0$

{$\because f(x)$, रोले प्रमेय की शर्तों को संतुष्ट करता है, अतः $f(2) = f(1)$}

15. (d) $f(x) = x^3 - 6x^2 + ax + b$

$\Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 12x + a$

$\Rightarrow f'(c) = 0 \ \Rightarrow\ f'\left(2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0$

$\Rightarrow 3\left(2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - 12\left(2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + a = 0$

$\Rightarrow 3\left(4 + \frac{1}{3} + \frac{4}{\sqrt{3}}\right) - 12\left(2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + a = 0$

$\Rightarrow 12 + 1 + 4\sqrt{3} - 24 - 4\sqrt{3} + a = 0 \ \Rightarrow\ a = 11$.

16. (c) मध्यमान प्रमेय से, $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$a = 0, f(a) = 0 \ \Rightarrow\ b = \frac{1}{2}, f(b) = \frac{3}{8}$

$f'(x) = (x-1)(x-2) + x(x-2) + x(x-1)$

$\Rightarrow f'(c) = (c-1)(c-2) + c(c-2) + c(c-1)$

$\Rightarrow f'(c) = c^2 - 3c + 2 + c^2 - 2c + c^2 - c$

$\Rightarrow f'(c) = 3c^2 - 6c + 2$

मध्यमान प्रमेय से, $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$\Rightarrow 3c^2 - 6c + 2 = \frac{(3/8)-0}{(1/2)-0} = \frac{3}{4} \ \Rightarrow\ 3c^2 - 6c + \frac{5}{4} = 0$

$\Rightarrow c = \frac{6 \pm \sqrt{36-15}}{2\times 3} = \frac{6 \pm \sqrt{21}}{6} = 1 \pm \frac{\sqrt{21}}{6}$.

17. (a) दिया है, वक्र का समीकरण है, $y = x^3 = f(x)$

अतः $f(2) = 8$ एवं $f(-2) = -8$

अब $f'(x) = 3x^2 \Rightarrow f'(x) = \frac{f(2)-f(-2)}{2-(-2)}$

$\Rightarrow \frac{8-(-8)}{4} = 3x^2$; $\therefore x = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$.

18. (b) माना बिन्दु (x_1, y_1) है। अतः $y_1 = (x_1 - 3)^2$ .....(i)

अब स्पर्शी की (x_1, y_1) पर प्रवणता $2(x_1 - 3)$ है, परन्तु यह 1 के बराबर है।

अतः $2(x_1 - 3) = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{7}{2}$

$\therefore y_1 = \left(\frac{7}{2} - 3\right)^2 = \frac{1}{4}$. अतः बिन्दु $\left(\frac{7}{2}, \frac{1}{4}\right)$ होगा।

19. (d) $f(x) = \sqrt{x}$

$\therefore f(a) = \sqrt{4} = 2,\ f(b) = \sqrt{9} = 3$; $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

तथा $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{3-2}{9-4} = \frac{1}{5}$

$\therefore \frac{1}{2\sqrt{c}} = \frac{1}{5} \ \Rightarrow\ c = \frac{25}{4} = 6.25$.

Critical Thinking Questions

1. (d) $\frac{d}{dx}\tan^{-1}\left[\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\right] = \frac{d}{dx}\tan^{-1}\left[\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right] = -1$.

2. (a) $y = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2}\log(x + \sqrt{x^2 + a^2})$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left[\sqrt{a^2 + x^2} + x\frac{1}{2}(a^2 + x^2)^{-1/2}2x\right]$

$+ \frac{a^2}{2}\frac{1}{(x + \sqrt{(x^2 + a^2)})}\left[1 + \frac{1}{2}(x^2 + a^2)^{-1/2}2x\right]$

$= \frac{1}{2(\sqrt{a^2 + x^2})}\left[a^2 + 2x^2 + a^2\right] = \frac{2(a^2 + x^2)}{2\sqrt{a^2 + x^2}} = \sqrt{a^2 + x^2}$.

3. (a) $\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{1 + \cos 2x} \times \frac{1}{2\sqrt{\cos 2x}} \times -2\sin 2x = \frac{\tan x}{\sqrt{\cos 2x}}$

$$\Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=\pi/6} = \frac{1/\sqrt{3}}{\sqrt{1/2}} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

4. (c) माना $x = 5,\ y = 0 \Rightarrow f(5+0) = f(5).f(0)$

$\Rightarrow f(5) = f(5)f(0) \Rightarrow f(0) = 1$

इसलिए $f'(5) = \lim_{h\to 0}\frac{f(5+h)-f(5)}{h}$

$= \lim_{h\to 0}\frac{f(5)f(h)-f(5)}{h} = \lim_{h\to 0} 2\left[\frac{f(h)-1}{h}\right],\ \{\because f(5)=2\}$

$= 2\lim_{h\to 0}.\left[\frac{f(h)-f(0)}{h}\right] = 2\times f'(0) = 2\times 3 = 6.$

5. (c) दिया है, $xe^{xy} = y + \sin^2 x$

जब $x = 0$, तो $y = 0$

x के सापेक्ष अवकलन करने से,

$$e^{xy} + xe^{xy}\left[x\frac{dy}{dx} + y\right] = \frac{dy}{dx} + 2\sin x\cos x$$

$x = 0, y = 0$ रखने पर, $\frac{dy}{dx} = 1.$

6. (c) $u(x,y) = y\log x + x\log y$

$$u_x = \frac{y}{x} + \log y;\ u_y = \log x + \frac{x}{y}$$

अब, $u_x u_y - u_x\log x - u_y\log y + \log x\log y$

$$= \left(\frac{y}{x} + \log y\right)\left(\log x + \frac{x}{y}\right) - \frac{y}{x}\log x - \log x\log y - \log x\log y$$

$$-\frac{x}{y}\log y + \log x\log y = 1.$$

7. (d) माना $t = \frac{2x-1}{x^2+1}$, तो $\frac{dy}{dx} = f'(t).\frac{dt}{dx}$

$$= \sin t^2\,\frac{d}{dx}\left(\frac{2x-1}{x^2+1}\right) = \frac{2(1+x-x^2)}{(1+x^2)^2}.\sin\left(\frac{2x-1}{x^2+1}\right)^2.$$

8. (a) $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{n\sec^n\theta\tan\theta + n\cos^{n-1}\theta\sin\theta}{\sec\theta\tan\theta + \sin\theta}$

$= \frac{n(\sec^n\theta + \cos^n\theta)}{\sec\theta + \cos\theta}$ (अंश व हर को $\tan\theta$ से भाग देने पर)

$$\Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{n^2(\sec^n\theta + \cos^n\theta)^2}{(\sec\theta + \cos\theta)^2}$$

$$= \frac{n^2[(\sec^n\theta - \cos^n\theta)^2 + 4\sec^n\theta\cos^n\theta]}{(\sec\theta - \cos\theta)^2 + 4\sec\theta.\cos\theta} = \frac{n^2(y^2+4)}{x^2+4}$$

$$\Rightarrow (x^2+4)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = n^2(y^2+4).$$

9. (b) $y = x^{x^{x.....\infty}} \Rightarrow y = x^y \Rightarrow \log y = y\log x$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x(1-y\log x)}.$$

10. (a) $y = (x\log x)^{\log\log x}$

$\Rightarrow \log y = \log\log x[\log x + \log\log x]$

$$\Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\log x}(\log x + \log\log x) + \log\log x\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x\log x}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = y\left\{\frac{1}{x\log x}(\log x + \log\log x) + \log\log x\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x\log x}\right)\right\}.$$

11. (a) माना $\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}} = A$

$x^2 = \cos 2\theta$ रखने पर,

$$A = \frac{\sqrt{1+\cos 2\theta}+\sqrt{1-\cos 2\theta}}{\sqrt{1+\cos 2\theta}-\sqrt{1-\cos 2\theta}} = \frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta}$$

$$A = \frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta} = \tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$$

अब $y = \tan^{-1}\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right) = \theta+\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\cos^{-1}x^2$

$$\therefore \frac{dA}{dx} = \frac{1}{2}\frac{-1}{\sqrt{1-x^4}}2x = \frac{-x}{\sqrt{1-x^4}}.$$

12. (c) $x^3 = \sin\theta,\ y^3 = \sin\phi$ रखने पर,

$$\therefore \sqrt{1-x^6}+\sqrt{1-y^6} = a^3(x^3-y^3)$$

$$\Rightarrow \cos\theta+\cos\phi = a^3(\sin\theta-\sin\phi)$$

$$\text{या } 2\cos\frac{\theta+\phi}{2}\cos\frac{\theta-\phi}{2} = 2a^3\sin\frac{\theta-\phi}{2}\cos\frac{\theta+\phi}{2}$$

$$\text{या } \cos\frac{\theta+\phi}{2}\left[\cos\frac{\theta-\phi}{2} - a^3\sin\frac{\theta-\phi}{2}\right] = 0$$

यदि $\cos\frac{\theta+\phi}{2} = 0$, तो $\frac{\theta+\phi}{2} = \frac{\pi}{2}$

$\therefore \theta = \pi - \phi$ या $\sin\theta = \sin\phi$ या $x = y$

परन्तु समीकरण में $x = y$ रखने पर यह उसे संतुष्ट नहीं करता है।

अतः $\cos\frac{\theta-\phi}{2} - a^3\sin\frac{\theta-\phi}{2} = 0$ या $\cot\frac{\theta-\phi}{2} = a^3$

$\therefore \theta-\phi = 2\cot^{-1}a^3$ या $\sin^{-1}x^3 - \sin^{-1}y^3 = 2\cot^{-1}a^3$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर, $\frac{3x^2}{\sqrt{1-x^6}} - \frac{3y^2}{\sqrt{1-y^6}}\frac{dy}{dx} = 0$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y^2}\sqrt{\frac{1-y^6}{1-x^6}}.$$

13. (c) माना $y = \sec^{-1}\frac{2x}{1+x^2} + \sin^{-1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

$\because\ -1 \le \frac{2x}{1+x^2} \le 1,$

$\therefore\ x = -1$ तथा 1 पर, $\sec^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$ परिभाषित है।

$\therefore\ y$ अवकलनीय नहीं है। अतः $\frac{dy}{dx}$ परिभाषित नहीं है।

14. (b) माना $y = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)$ तथा $z = \tan^{-1}\left(\frac{2x\sqrt{1-x^2}}{1-2x^2}\right)$

$x = \tan\theta$ रखने पर,

$y = \tan^{-1}\left(\frac{\sec\theta - 1}{\tan\theta}\right) = \tan^{-1}\left(\tan\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{2}\tan^{-1}x$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2(1+x^2)}$

$x = \sin\theta$ रखने पर,

$z = \tan^{-1}\left(\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\cos 2\theta}\right) = \tan^{-1}(\tan 2\theta) = 2\theta$

$\therefore z = 2\sin^{-1}x \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$

अतः $\frac{dy}{dz} = \frac{dy/dx}{dz/dx} = \frac{1}{4(1+x^2)}\sqrt{1-x^2} \Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = \frac{1}{4}$.

15. (c) $2y\frac{dy}{dx} = p'(x) \Rightarrow 2\frac{dy}{dx} = \frac{p'(x)}{y} \Rightarrow 2\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{yp''(x) - p'(x)y'}{y^2}$

$\Rightarrow 2y^3\frac{d^2y}{dx^2} = y^2p''(x) - y\frac{dy}{dx}p'(x)$

$= p(x)p''(x) - \frac{1}{2}\{p'(x)\}^2$

$\Rightarrow 2\frac{d}{dx}\left(y^3\frac{d^2y}{dx^2}\right) = p'(x)p''(x) + p(x)p'''(x) - p'(x)p''(x)$

$= p(x)p'''(x)$.

16. (b) चूँकि $f(x)g(x) = 1$

अतः x के सापेक्ष अवकलन से, $f'g + fg' = 0$ .....(i)

(i) का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$f''g + 2f'g' + fg'' = 0$ .....(ii)

(ii) का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$f'''g + g'''f + 3f''g' + 3g''f' = 0$

$\Rightarrow \frac{f'''}{f'}(f'g) + \frac{g'''}{g'}(fg') + \frac{3f''}{f}(fg') + \frac{3g''}{g}(gf') = 0$

$\Rightarrow \left(\frac{f'''}{f'} + \frac{3g''}{g}\right)(f'g) = -\left(\frac{g'''}{g'} + \frac{3f''}{f}\right)(fg')$

$\Rightarrow -\left(\frac{f'''}{f'} + \frac{3g''}{g}\right)(fg') = -\left(\frac{g'''}{g'} + \frac{3f''}{f}\right)fg'$, [(i) से]

$\Rightarrow \frac{f'''}{f'} + \frac{3g''}{g} = \frac{g'''}{g'} + \frac{3f''}{f} \Rightarrow \frac{f'''}{f'} - \frac{g'''}{g'} = 3\left(\frac{f''}{f} - \frac{g''}{g}\right)$.

17. (d) $I_n = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}[x^{n-1} + nx^{n-1}\log x]$

$I_n = (n-1)!+nI_{n-1} \Rightarrow I_n - nI_{n-1} = (n-1)!$.

18. (a) दिया है, $x = \sin t$, $y = \sin pt$

$\frac{dx}{dt} = \cos t$, $\frac{dy}{dt} = p\cos pt$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{p\cos pt}{\cos t} = \frac{p\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}$

पुनः अवकलन करने पर,

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{p\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1-y^2}}\cdot(-2y)\frac{dy}{dx} - p\sqrt{1-y^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x)}{(1-x^2)}$

$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} = -py\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-y^2}}\frac{dy}{dx} + px\frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}$

$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} = -p^2y + x\frac{dy}{dx}$

$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + p^2y = 0$.

19. (c) $x^2(1+x) = \int_0^{x^2} f(t)\,dt$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर, $2x(1+x) + x^2 = f(x^2).2x$

$\Rightarrow f(x^2) = 1 + x + \frac{x}{2}, x > 0$

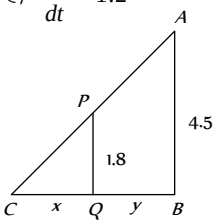
$x = 2$ रखने पर, $f(4) = 1 + 2 + \frac{2}{2} = 4$.

20. (c) यहाँ, $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ व $S = 4\pi r^2$

$\Rightarrow \frac{dV}{dt} = 4\pi r^2\frac{dr}{dt} \Rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{40}{4\pi r^2} = \frac{5}{32\pi}$

$\therefore \frac{dS}{dt} = 8\pi r\frac{dr}{dt} = 8\pi \times 8 \times \frac{5}{32\pi} = 10$.

21. (b) दिया है, $\frac{dy}{dt} = 1.2$



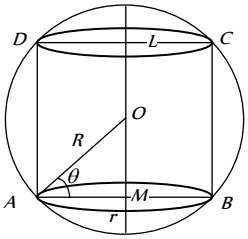
चित्रानुसार, $x = \frac{2}{3}y \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{2}{3}.\frac{dy}{dt}$

अतः, छाया की लम्बाई बढ़ने की दर $= \frac{dx}{dt} = 0.8$ मी/सेकण्ड.

22. (b) यदि r त्रिज्या तथा h ऊँचाई हो, तो चित्र से,

$r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 = R^2 \Rightarrow h^2 = 4(R^2 - r^2)$

अब, $V = \pi r^2 h = 2\pi r^2\sqrt{R^2 - r^2}$



$\therefore \frac{dV}{dr} = 4\pi r\sqrt{R^2 - r^2} + 2\pi r^2.\frac{1}{2}\frac{(-2r)}{\sqrt{R^2 - r^2}}$

उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ के लिए, $\frac{dV}{dr}=0$

$\Rightarrow 4\pi r\sqrt{R^2-r^2}=\frac{2\pi r^3}{\sqrt{R^2-r^2}} \Rightarrow 2(R^2-r^2)=r^2$

$\Rightarrow 2R^2=3r^2 \Rightarrow r=\sqrt{\frac{2}{3}}R \Rightarrow \frac{d^2V}{dr^2}=$ ऋणात्मक

अतः V अधिकतम होगा, जब $r=\sqrt{\frac{2}{3}}R$.

23. (a) $s=t^3+2t^2+t$

$v=\frac{ds}{dt}=3t^2+4t+1$

1 सेकण्ड बाद कण का वेग

$=v_{(t=1)}=\left(\frac{ds}{dt}\right)_{(t=1)}=3\times1^2+4\times1+1=8$ सेमी/सेकण्ड.

24. (a) दिया है, $y^2=px^3+q$ .....(i)

x के सापेक्ष अवकलन करने पर, $2y.\frac{dy}{dx}=3px^2$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{3p}{2}\left(\frac{x^2}{y}\right)$

$\therefore \left|\frac{dy}{dx}\right|_{2,3}=\frac{3p}{2}\times\frac{4}{3}=2p$

दी गई रेखा से स्पर्शी की प्रवणता $=4$

$\therefore 2p=4 \Rightarrow p=2$

समीकरण (i) से, $9=2\times8+q \Rightarrow q=-7$.

25. (a) $y=\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=2x^2+x$ .....(i)

चूँकि स्पर्श रेखा, अक्षों से बराबर कोण बनाती है

$\therefore y=45^o$ या -45^o

$\therefore \frac{dy}{dx}=\tan(\pm45^o)=\pm\tan(45^o)=\pm1$

$\therefore$ समीकरण (i) से, $2x^2+x=1$, (धनात्मक चिन्ह लेने पर)

$\Rightarrow 2x^2+x-1=0 \Rightarrow (2x-1)(x+1)=0$

$\therefore x=\frac{1}{2},-1$

दिये गये वक्र से,

जब $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{2}{3}.\frac{1}{8}+\frac{1}{2}.\frac{1}{4}=\frac{1}{12}+\frac{1}{8}=\frac{5}{24}$

तथा जब $x=-1$, $y=\frac{2}{3}(-1)+\frac{1}{2}.1=-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}=-\frac{1}{6}$

अतः अभीष्ट बिन्दु $\left(\frac{1}{2},\frac{5}{24}\right)$ तथा $\left(-1,-\frac{1}{6}\right)$ हैं।

26. (d) अभिलम्ब का झुकाव $=\frac{-1}{dy/dx}$

$\Rightarrow \tan\frac{3\pi}{4}=\frac{-1}{(dy/dx)_{(3,4)}}$

$\therefore \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(3,4)}=1$, $\therefore f'(3)=1$.

27. (d) $y^3+3x^2=12y \Rightarrow 3y^2.\frac{dy}{dx}+6x=12.\frac{dy}{dx}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx}(3y^2-12)+6x=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{6x}{12-3y^2}$

$\Rightarrow \frac{dx}{dy}=\frac{12-3y^2}{6x}$

चूँकि स्पर्श रेखा, y-अक्ष के समान्तर है

$\therefore \frac{dx}{dy}=0 \Rightarrow 12-3y^2=0$ या $y=\pm2$, तब $x=\pm\frac{4}{\sqrt{3}}$.

बिन्दु $\left(\pm\frac{4}{\sqrt{3}},-2\right)$ पर वक्र का समीकरण संतुष्ट नहीं होता है, अतः विकल्प (d) सही है।

28. (b,d) $f(x)=\int_0^x\frac{\cos t}{t}dt$, $x>0 \Rightarrow f'(x)=\frac{\cos x}{x}$, $x>0$

$\Rightarrow f'(x)=0 \Rightarrow \frac{\cos x}{x}=0 \Rightarrow x=(2n+1)\frac{\pi}{2}$, $n\in Z$ के लिए

अब $f''(x)=\frac{-x\sin x-\cos x}{x^2}$

$\therefore f''[(2n+1)\pi/2]=\frac{-2}{(2n+1)\pi}(-1)^n=\frac{2(-1)^{n+1}}{(2n+1)\pi}$.

इस प्रकार $f''(x)>0$, $n=-2,-4,-6,.....$

$f''(x)<0$, $n=0,2,4,$ .....

$f''(x)>0$, $n=1,3,5$ .....

$f''(x)<0$, $n=-1,-3,-5$ .....

अतः $f(x)$ का अधिकतम मान $n=-1,-3,-5,....$ पर तथा न्यूनतम मान $n=1,3,5,.....$ पर होगा।

29. (d) बिन्दु $x=-b$ पर $f(x)=(x+b)^2+2c^2-b^2$ का न्यूनतम मान प्राप्त होता है तथा $x=-c$ पर $g(x)=b^2+c^2-(x+c)^2$ का अधिकतम मान प्राप्त होता है।

$\Rightarrow 2c^2-b^2>b^2+c^2 \Rightarrow |c|>\sqrt{2}|b|$.

30. (c) यहाँ समूहों की संख्या $=\frac{N}{x}$

तथा प्रत्येक समूह के लिए समय $=(\alpha+\beta x^2)$ सेकण्ड

$\therefore$ कुल प्रसंस्करण (Processing) समय

$=T=\left(\frac{N}{x}\right)(\alpha+\beta x^2)=N\left(\frac{\alpha}{x}+\beta x\right)$ सेकण्ड

शीघ्र प्रसंस्करण (Processing) के लिए T न्यूनतम होगा

$\therefore \frac{dT}{dx} = N\left(-\frac{\alpha}{x^2} + \beta\right);\ \frac{d^2T}{dx^2} = \frac{2N\alpha}{x^3}$

T के उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ के लिए, $\frac{dT}{dx} = 0 \Rightarrow x = \sqrt{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}$

चूँकि $x = \sqrt{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}$ के लिए, $\frac{d^2T}{dx^2}$ धनात्मक है

$\therefore x = \sqrt{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}$ के लिए T निम्निष्ठ है।

31. (d) $f(x) = x^{25}(1-x)^{75}$

$f'(x) = x^{25}(75)(1-x)^{74}(-1) + 25x^{24}(1-x)^{75}$

उच्चिष्ठ व निम्निष्ठ के लिए,

$-75x^{25}(1-x)^{74} + 25x^{24}(1-x)^{75} = 0$

$\Rightarrow 25x^{24}(1-x)^{74}[(1-x) - 3x] = 0$

$\Rightarrow$ या तो $x = 0$ या $x = 1$ या $x = \frac{1}{4}$

अब $x = \frac{1}{4}$ पर, $f'\left(\frac{1}{4} - h\right) > 0$ तथा $f'\left(\frac{1}{4} + h\right) < 0$

$\therefore\ x = \frac{1}{4}$ पर, $f(x)$ का मान उच्चिष्ठ है।

ट्रिक : इस प्रश्न की विकल्पों से जाँच कर सकते हैं।

32. (b,d) $f(x) = \int_{-1}^{x} t(e^t - 1)(t-1)(t-2)^3(t-3)^5 dt$

$\therefore f'(x) = x(e^x - 1)(x-1)(x-2)^3(x-3)^5$

स्थानीय निम्निष्ठ मान के लिए, प्रवणता (Slope) अर्थात् $f'(x)$ का चिन्ह ऋणात्मक से धनात्मक परिवर्तित होना चाहिए।

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0, 1, 2, 3$

यदि $x = 0 - h$, जहाँ h एक बहुत छोटी संख्या है, तब

$f'(x) = (-)(-)(-1)(-1)(-1) =$ ऋणात्मक

यदि $x = 0 + h$; $f'(x) = (+)(+)(-)(-1)(-1) =$ ऋणात्मक

अतः $x = 0$ पर ना ही उच्चिष्ठ और ना ही निम्निष्ठ है।

यदि $x = 1 - h$

$f'(x) = (+)(+)(-)(-1)(-1) =$ ऋणात्मक

यदि $x = 1 + h$; $f'(x) = (+)(+)(+)(-1)(-1) =$ धनात्मक

अतः $x = 1$ पर स्थानीय निम्निष्ठ है।

यदि $x = 2 - h$; $f'(x) = (+)(+1)(+)(-)(-) =$ धनात्मक

यदि $x = 2 + h$; $f'(x) = (+)(+)(+)(+)(-1) =$ ऋणात्मक

अतः $x = 2$ पर स्थानीय उच्चिष्ठ है।

यदि $x = 3 - h$; $f'(x) = (+)(+)(+)(+)(-) =$ ऋणात्मक

यदि $x = 3 + h$; $f'(x) = (+)(+)(+)(+)(+) =$ धनात्मक

अतः $x = 3$ पर स्थानीय निम्निष्ठ है।

33. (c) माना $y = \exp(2 + \sqrt{3}\cos x + \sin x)$

$\Rightarrow y' = \exp(2 + \sqrt{3}\cos x + \sin x)(-\sqrt{3}\sin x + \cos x)$

अब $y' = 0 \ \Rightarrow\ -\sqrt{3}\sin x + \cos x = 0$

$\Rightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 0 \ \Rightarrow\ x = \frac{\pi}{6}$

अब $x = \frac{\pi}{6}$ पर y'' ऋणात्मक है

अतः y का अधिकतम मान $= \exp\left(2 + \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{2}\right)$

$= \exp(4)$.

34. (c) $f(x) = 2x^3 - 9ax^2 + 12a^2x + 1$

$f'(x) = 6x^2 - 18ax + 12a^2$

$f''(x) = 12x - 18a$

उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ के लिए,

$6x^2 - 18ax + 12a^2 = 0 \Rightarrow x^2 - 3ax + 2a^2 = 0$

$x = a$ या $x = 2a$, तब $x = a$ पर उच्चिष्ठ तथा $x = 2a$ पर निम्निष्ठ मान ग्रहण करता है।

$\because\ p^2 = q,\ \therefore a^2 = 2a \Rightarrow a = 2$ या $a = 0$

लेकिन $a > 0$, अतः $a = 2$.

35. (b) माना $f(x) = \frac{\ln(\pi + x)}{\ln(e + x)}$

$$\therefore f'(x) = \frac{\ln(e+x) \times \frac{1}{\pi + x} - \ln(\pi + x)\frac{1}{e + x}}{\ln^2(e + x)}$$

$$= \frac{(e+x)\ln(e+x) - (\pi + x)\ln(\pi + x)}{\ln^2(e+x) \times (e+x)(\pi + x)}$$

$\Rightarrow f'(x) < 0$, सभी $x \geq 0$ के लिए $\{\because \pi > e\}$

अतः $f(x)$, अंतराल $[0, \infty)$ में ह्रासमान है।

36. (b) $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$

$= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x$

$= 1 - \frac{4\sin^2 x \cos^2 x}{2} = 1 - \frac{\sin^2 2x}{2}$

$= 1 - \frac{1}{4}(2\sin^2 2x)$

$= 1 - \left(\frac{1 - \cos 4x}{4}\right) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x$

अतः $f(x)$, वर्धमान (increasing) होगा, जब $f'(x) > 0$

$f'(x) = -\sin 4x > 0 \Rightarrow \sin 4x < 0$

अतः $\pi < 4x < \frac{3\pi}{2}$ या $\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{8}$.

37. (a,c) $h(x) = f(x) - [f(x)]^2 + [f(x)]^3$

$$h'(x) = f'(x) - 2f(x)f'(x) + 3[f(x)]^2 f'(x)$$

$$= f'(x)[1 - 2f(x) + 3[f(x)]^2]$$

$$= 3f'(x)\left\{\left(f(x) - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{9}\right\}$$

$\therefore h'(x)$ और $f'(x)$ समान चिन्ह के हैं।

38. (a) विकल्प (a) में परिभाषित फलन, $x = \frac{1}{2}$ पर अवकलनीय नहीं है।

39. (b) $f(b) = f(2) = 8 - 24a + 10 = 18 - 24a$

$f(a) = f(1) = 1 - 6a + 5 = 6 - 6a$

$f'(x) = 3x^2 - 12ax + 5$

लैगरांज मध्यमान प्रमेय से,

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{18 - 24a - 6 + 6a}{2 - 1}$$

$\therefore f'(x) = 12 - 18a$

$x = \frac{7}{4}$ पर, $3 \times \frac{49}{16} - 12a \times \frac{7}{4} + 5 = 12 - 18a$

$\Rightarrow 3a = \frac{147}{16} - 7 \Rightarrow 3a = \frac{35}{16} \Rightarrow a = \frac{35}{48}$.

40. (d) $x \in [0,1]$ के लिए फलन f पर रोले प्रमेय लागू होती है, यदि

(i) $f(1) = f(0)$

(ii) फलन f, $x \in [0,1]$ के लिए सतत् है और $x \in (0,1)$ के लिए अवकलनीय है।

(i) से, $f(1) = 0$ जो कि सत्य है

(ii) से, $0 = f(0) = f(0_+) = \lim_{x \to 0_+} x^\alpha \ln x$

जो कि α के धनात्मक मानों के लिए सत्य है, अतः विकल्प (d) सत्य है।

अवकलन तथा अवकलन के अनुप्रयोग

SET Self Evaluation Test - 22

1. $\frac{d}{dx}\left(a^{\log_{10}\text{cosec}^{-1}x}\right)=$ **[Roorkee 1990]**

(a) $a^{\log_{10}\cos ec^{-1}x}.\frac{1}{\text{cosec}^{-1}x}.\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.\log_{10}a$

(b) $-a^{\log_{10}\text{cosec}^{-1}x}.\frac{1}{\text{cosec}^{-1}x}.\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}.\log_{10}a$

(c) $a^{\log_{10}\text{cosec}^{-1}x}.\frac{1}{\text{cosec}^{-1}x}.\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}.\log_{10}a$

(d) $-a^{\log_{10}\text{cosec}^{-1}x}.\frac{1}{\text{cosec}^{-1}x}.\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.\log_{10}a$

2. $\frac{d}{dx}\left(e^{\sqrt{1-x^2}}.\tan x\right)$ **[AI CBSE 1979]**

(a) $e^{\sqrt{1-x^2}}\left[\sec^2 x+\frac{x\tan x}{\sqrt{1-x^2}}\right]$

(b) $e^{\sqrt{1-x^2}}\left[\sec^2 x-\frac{x\tan x}{\sqrt{1-x^2}}\right]$

(c) $e^{\sqrt{1-x^2}}\left[\sec^2 x+\frac{\tan x}{\sqrt{1-x^2}}\right]$

(d) इनमें से कोई नहीं

3. यदि $y=\frac{5x}{\sqrt[3]{(1-x)^2}}+\cos^2(2x+1)$, तब $\frac{dy}{dx}=$ **[IIT 1980]**

(a) $\frac{5(3-x)}{3(1-x)^{5/3}}-2\sin(4x+2)$

(b) $\frac{5(3-x)}{3(1-x)^{2/3}}-2\sin(4x+4)$

(c) $\frac{5(3-x)}{3(1-x)^{2/3}}-2\sin(2x+1)$

(d) इनमें से कोई नहीं

4. यदि $y=\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\cos^{-1}\left[\frac{a\cos(x-\alpha)+b}{\theta}\right]$ जहाँ

$\theta=a+b\cos(x-\alpha)$, तब $\frac{dy}{dx}=$ **[Orissa JEE 2003]**

(a) $\frac{1}{\theta}$ (b) $\frac{2}{\theta}$

(c) $\frac{1}{\theta^2}$ (d) $\frac{2}{\theta^2}$

5. यदि $u=\sin^{-1}\sqrt{\frac{x^2+y^2}{x+y}}$, तब $xu_x+yu_y=$ **[Pb. CET 2001]**

(a) 0 (b) 1

(c) $\cos u$ (d) $\sin u$

6. यदि $f'(x)=\sin(\log x)$ तथा $y=f\left(\frac{2x+3}{3-2x}\right)$, तब $\frac{dy}{dx}=$ **[BIT Ranchi 1986]**

(a) $\frac{9\cos(\log x)}{x(3-2x)^2}$ (b) $\frac{9\cos\left(\log\frac{2x+3}{3-2x}\right)}{x(3-2x)^2}$

(c) $\frac{9\sin\left(\log\frac{2x+3}{3-2x^2}\right)}{(3-2x)^2}$ (d) इनमें से कोई नहीं

7. यदि $x^2+y^2=t-\frac{1}{t}, x^4+y^4=t^2+\frac{1}{t^2}$, तब $\frac{dy}{dx}=$ **[RPET 1999]**

(a) $1/xy^3$ (b) $1/x^3y$

(c) $-1/x^3y$ (d) $-1/xy^3$

8. यदि $x^py^q=(x+y)^{p+q}$, तब $\frac{d^2y}{dx^2}=$ **[WB JEE 1992]**

(a) 0 (b) 1

(c) 2 (d) इनमें से कोई नहीं

9. यदि $f(x)=x^n$, तब

$f(1)-\frac{f'(1)}{1!}+\frac{f''(1)}{2!}-\frac{f'''(1)}{3!}+.....+\frac{(-1)^nf^n(1)}{n!}=$ **[AIEEE 2003]**

(a) 2^n (b) 2^{n-1}

(c) 0 (d) 1

10. $x=\frac{1}{2}$ पर $\sqrt{1-x^2}$ के सापेक्ष $\sec^{-1}\frac{1}{2x^2-1}$ का अवकलन गुणांक है **[IT 1986; Kurukshetra CEE 2002; Pb. CET 2003]**

(a) 2 (b) 4

(c) 6 (d) 1

11. यदि $x=a\cos\theta, y=b\sin\theta$, तब $\frac{d^3y}{dx^3}=$

(a) $-\frac{3b}{a^3}\text{cosec}^4\theta\cot^4\theta$ (b) $-\frac{3b}{a^3}\text{cosec}^4\theta\cot\theta$

(c) $-\frac{3b}{a^3}\text{cosec}^4\theta\cot\theta$ (d) इनमें से कोई नहीं

12. यदि $x=e^t\sin t, y=e^t\cos t$, जहाँ t प्राचल है, तब (1, 1) पर $\frac{d^2y}{dx^2}=$ **[AMU 2001]**

(a) $-\frac{1}{2}$ (b) $-\frac{1}{4}$

(c) 0 (d) $\frac{1}{2}$

13. एक पत्थर चन्द्रमा की सतह से 24 मी/सेकण्ड की चाल से ऊपर की ओर फेंका गया। यदि t सेकण्ड के पश्चात् पत्थर की ऊँचाई $s = 24\ t - 0.8t^2$ मीटर हो, तो चन्द्रमा के तल पर गुरूत्वजनित त्वरण का मान क्या होगा (मी/सेकण्ड,में) **[MP PET 1992]**

(a) 0.8 (b) 1.6

(c) 2.4 (d) 4.9

14. सरल रेखा में गतिमान एक कण द्वारा t समय मे चली दूरी $s = \sqrt{at^2 + bt + c}$ है, कण का त्वरण है **[Kerala (Engg.) 2002]**

(a) t के समानुपाती (b) s के समानुपाती

(c) s^{-3} के समानुपाती (d) इनमें से कोई नहीं

15. एक पत्थर को शांत जल में फेंकने पर बनने वाली वृत्तीय तरंगों (Ripples) के बहने की दर 6 सेमी/सेकण्ड है, तो इसके क्षेत्रफल में जल वृद्धि की दर, जब वृत्ताकार तरंग की त्रिज्या 10सेमी हो, होगी **[RPET 1996]**

(a) 120 वर्ग सेमी/से (b) 12 वर्ग सेमी/से

(c) π वर्ग सेमी/से (d) 120π वर्ग सेमी/से

16. वक्र $y^n = a^{n-1}x$ के लिए, किसी बिन्दु पर अधोलम्ब अचर है, तो n का मान होगा **[Karnataka CET 1999,2004]**

(a) 2 (b) 3

(c) 0 (d) 1

17. वक्र $y = x(x-2)(x-4)$ के बिन्दुओं के भुज, जहाँ स्पर्श रेखा $x-$ अक्ष के समान्तर है, हैं **[UPSEAT 1999]**

(a) $x = 2 \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$ (b) $x = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

(c) $x = 2 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ (d) $x = \pm 1$

18. बिन्दु $(-a, a)$ पर वक्र $x^2y^2 = a^4$ के अधोस्पर्शी की लम्बाई है **[Karnataka CET 2001]**

(a) $3a$ (b) $2a$

(c) a (d) $4a$

19. बिन्दु (1, 1) पर वक्र $f(x) = x^2 + bx - b$ की स्पर्श रेखा तथा निर्देशांक अक्षों द्वारा बनाया गया त्रिभुज प्रथम चतुर्थांश में है। यदि त्रिभुज का क्षेत्रफल 2 है, तब b का मान है **[IIT Screening 2001]**

(a) –1 (b) 3

(c) –3 (d) 1

20. रेखा $2x + \sqrt{6}y = 2$, वक्र $x^2 - 2y^2 = 4$ की एक स्पर्श रेखा है। स्पर्श बिन्दु हैं **[IIT Screening 2004]**

(a) $(4, -\sqrt{6})$ (b) $(7, -2\sqrt{6})$

(c) $(2,3)$ (d) $(\sqrt{6},1)$

21. यदि $y = a\log|x| + bx^2 + x$, $x = -1$ तथा $x = 2$ पर चरम मान रखता है, तब **[IIT 1981]**

(a) $a = 2, b = -1$ (b) $a = 2, b = -\frac{1}{2}$

(c) $a = -2, b = \frac{1}{2}$ (d) इनमें से कोई नहीं

22. माना $f(x) = \begin{cases} |x|,\ 0 < |x| \le 2 \\ 1\ ,\ x = 0 \end{cases}$, तब $x = 0$ पर फलन रखता है **[IIT Screening 2000]**

(a) एक स्थानीय उच्चिष्ठ (b) कोई स्थानीय उच्चिष्ठ नहीं

(c) एक स्थानीय निम्निष्ठ (d) कोई चरम बिन्दु नहीं

23. डोमेन (प्रान्त) $x > 0$ में, फलन $f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$ के चरम बिन्दु हैं **[Orissa JEE 2002]**

(a) $(2n+1)\frac{\pi}{2}; n = 1, 2, ...$ (b) $(4n+1)\frac{\pi}{2}; n = 1, 2, ...$

(c) $(2n+1)\frac{\pi}{4}; n = 1, 2, ...$ (d) $n\pi; n = 1, 2 .....$

24. यदि $u = \sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta} + \sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}$, तब u^2 के महत्तम और न्यूनतम मानों का अन्तर है **[AIEEE 2004]**

(a) $(a-b)^2$ (b) $2\sqrt{a^2+b^2}$

(c) $(a+b)^2$ (d) $2(a^2+b^2)$

25. यदि $f(x) = x^5 - 20x^3 + 240x$, तब $f(x)$

(a) प्रत्येक जगह एकदिष्ट ह्रासमान है

(b) केवल $(0, \infty)$ में एकदिष्ट ह्रासमान है

(c) प्रत्येक जगह एकदिष्ट वर्धमान है

(d) केवल $(-\infty, 0)$ में एकदिष्ट वर्धमान है

26. फलन $\frac{(e^{2x}-1)}{(e^{2x}+1)}$ है **[Roorkee Qualifying 1998]**

(a) वर्धमान (b) ह्रासमान

(c) सम (d) विषम

27. माना $f(x) = \int e^x(x-1)(x-2)dx$, तब f किस अंतराल में ह्रासमान है **[IIT Screening 2000]**

(a) $(-\infty,-2)$ (b) $(-2,-1)$

(c) $(1, 2)$ (d) $(2,+\infty)$

28. यदि $f(x) = 2x - x^2$ के लिए अन्तराल [0, 1] में लैगरांज प्रमेय सत्यापित है, तो c का मान, जो कि $[0,1]$ में होगा, है

(a) $c = 0$ (b) $c = \frac{1}{2}$

(c) $c = \frac{1}{4}$ (d) $c = 1$

29. यदि फलन $f(x) = ax^3 + bx^2 + 11x - 6$ रोले प्रमेय की शर्तों को अन्तराल [1, 3] के लिए सन्तुष्ट करता है तथा $f'\left(2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0$, तब a और b के मान क्रमशः हैं **[MP PET 1998]**

(a) 1, – 6 (b) – 2, 1

(c) $-1, \frac{1}{2}$ (d) – 1, 6

30. यदि $z = y + f(v)$, जहाँ $v = \left(\frac{x}{y}\right)$, तो $v\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} =$ **[Orissa JEE 2004]**

(a) –1 (b) 1

(c) 0 (d) 2

AS Answers and Solutions

(SET - 22)

1. (b) माना $\text{cosec}^{-1}x = u,\ \log_{10} u = v$

श्रृंखला नियम से, $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv}.\frac{dv}{du}.\frac{du}{dx}$

$= a^v.\log_e a \times \frac{1}{u}.\log_{10} e \times \frac{1}{-|x|\sqrt{x^2-1}}$

$= -a^{\log_{10} \cos\text{ec}^{-1}x}.\frac{1}{\text{cosec}^{-1}x}.\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}.\log_{10} a$.

2. (b) $\frac{d}{dx}\left[e^{\sqrt{1-x^2}}\tan x\right]$

$= e^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x)\tan x + e^{\sqrt{1-x^2}}\sec^2 x$

$= e^{\sqrt{1-x^2}}\left[\sec^2 x - \frac{x\tan x}{\sqrt{1-x^2}}\right]$.

3. (a) $y = 5x(1-x)^{-2/3} + \cos^2(2x+1)$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{10x}{3(1-x)^{5/3}} + \frac{5}{(1-x)^{2/3}} - 4\cos(2x+1)\sin(2x+1)$

$= \frac{5}{(1-x)^{2/3}}\left[\frac{2x}{3(1-x)}+1\right] - 2\sin(4x+2)$

$= \frac{5(3-x)}{3(1-x)^{5/3}} - 2\sin(4x+2)$.

4. (a) दिये गये प्रतिबन्ध के अनुसार,

$\cos(y\sqrt{a^2-b^2}) = \frac{a\cos(x-a)+b}{a+b\cos(x-\alpha)}$

x के सापेक्ष दोनों पक्षों का अवकलन करने पर,

$\sqrt{a^2-b^2}\sin(y\sqrt{a^2-b^2})\frac{dy}{dx} = \frac{(a^2-b^2).\sin(x-\alpha)}{\theta^2}$

$\Rightarrow \sin(y\sqrt{a^2-b^2})\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}.\sin(x-\alpha)}{\theta^2}$

अब $\sin(y\sqrt{a^2-b^2}) = \frac{\sqrt{a^2-b^2}\sin(x-\alpha)}{\theta}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\theta}$.

5. (a) $u = \sin^{-1}\sqrt{\frac{x^2+y^2}{x+y}}$

$\sin u = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{x+y}}$

यूलर प्रमेय द्वारा,

$x\frac{\partial}{\partial x}(\sin u) + y\frac{\partial}{\partial y}(\sin u) = 0$

[$\because \sin u$, घात 0 का समघातीय है।]

$\Rightarrow x\cos u\frac{\partial u}{\partial x} + y\cos u\frac{\partial u}{\partial y} = 0$

$xu_x + yu_y = 0$.

6. (d) $y = f(t)$, जहाँ $t = \frac{2x+3}{3-2x}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = f'(t)\times\frac{dt}{dx} = \sin\left(\log\frac{2x+3}{3-2x}\right)\times\frac{12}{(3-2x)^2}$.

7. (b) $x^2+y^2 = t - \frac{1}{t}$ तथा $x^4+y^4 = t^2+\frac{1}{t^2}$

$(x^2)^2 + (y^2)^2 = t^2 + \frac{1}{t^2}$

$\Rightarrow (x^2+y^2)^2 - 2x^2y^2 = t^2+\frac{1}{t^2}$

$\Rightarrow \left(t-\frac{1}{t}\right)^2 - 2x^2y^2 = t^2+\frac{1}{t^2} \Rightarrow x^2y^2 = -1 \Rightarrow y^2 = \frac{-1}{x^2}$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$2y\frac{dy}{dx} = \frac{2}{x^3} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^3y}$.

8. (a) log लेकर अवकलन करने पर, $x\frac{dy}{dx} - y = 0$

पुनः अवकलन से, $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$.

9. (c) $f(x) = x^n \Rightarrow f(1) = 1$

$f'(x) = nx^{n-1} \Rightarrow f'(1) = n$

$f''(x) = n(n-1)x^{n-2} \Rightarrow f''(1) = n(n-1).....$

$f^n(x) = n! \Rightarrow f^n(1) = n!$

$= 1 - \frac{n}{1!} + \frac{n(n-1)}{2!} - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} + ... + (-1)^n\frac{n!}{n!}$

$= {}^nC_0 - {}^nC_1 + {}^nC_2 - {}^nC_3 + ... + (-1)^n\ {}^nC_n = 0$.

10. (b) माना $y_1 = \sec^{-1}\frac{1}{2x^2-1}$ व $y_2 = \sqrt{1-x^2}$

अब $\frac{dy_1}{dx} = \frac{-2}{\sqrt{1-x^2}}$ एवं $\frac{dy_2}{dx} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$

इस प्रकार $\frac{dy_1}{dy_2} = 4$ या $\frac{d}{d(\sqrt{1-x^2})}\left[\sec^{-1}\frac{1}{2x^2-1}\right] = 4$.

11. (c) चूँकि $y = b\sin\theta,\quad x = a\cos\theta$

अतः $\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a}\cot\theta$

$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{b}{a}\text{cosec}^2\theta\frac{d\theta}{dx} = -\frac{b}{a^2}\text{cosec}^3\theta$

$\Rightarrow \frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{b}{a^2}3\text{cosec}^2\theta(-\text{cosec}\,\theta\cot\theta)\frac{d\theta}{dx}$

$= \frac{3b}{a^2}\text{cosec}^3\theta\cot\theta\times\frac{-1}{a\sin\theta} = -\frac{3b}{a^3}\text{cosec}^4\theta\cot\theta$.

12. (a) बिन्दु (1, 1) पर, $1 = e^t \sin t, 1 = e^t \cos t$

$\Rightarrow \tan t = 1 \Rightarrow t = \pi/4$

अब, $\frac{dy}{dt} = e^t(\cos t - \sin t)$ तथा $\frac{dx}{dt} = e^t(\sin t + \cos t)$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\cos t - \sin t}{\cos t + \sin t}$

अब, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\cos t - \sin t}{\cos t + \sin t}\right)\frac{dt}{dx}$

$= \left[\frac{(\cos t + \sin t)(-\sin t - \cos t) - (\cos t - \sin t)(-\sin t + \cos t)}{(\cos t + \sin t)^2}\right]\frac{dt}{dx}$

$= \frac{-2}{(\cos t + \sin t)^2} \cdot \frac{1}{e^t(\sin t + \cos t)}$

$= \frac{-2}{(e^t \cos t + e^t \sin t)} \cdot \frac{1}{(\cos t + \sin t)^2}$

$= \frac{-2}{x + y} \cdot \frac{1}{(\cos t + \sin t)^2} = \frac{-2}{1+1} \cdot \frac{1}{\left(\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}\right)^2} = \frac{-1}{2}$.

13. (b) $\frac{ds}{dt}$ = वेग $= 24 = 24 - 1.6t$

अतः t पर त्वरण $\left[\frac{d^2s}{dt^2}\right] = -1.6$ है।

$\because$ पत्थर ऊपर फेंका गया है

$\therefore$ त्वरण $= 1.6$ मी/सेकण्ड.

14. (c) यहाँ, $s^2 = at^2 + bt + c$

दूरी 's' का समय 't' के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$2s\frac{ds}{dt} = 2at + b \quad \text{.....(i)}$$

$\therefore$ वेग $= \frac{ds}{dt} = \frac{1}{2}(at^2 + bt + c)^{-1/2}(2at + b)$

पुनः (i) का अवकलन करने पर, $2\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + 2s\frac{d^2s}{dt^2} = 2a$

या $s\frac{d^2s}{dt^2} = a - \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = a - \frac{1}{4}\frac{(2at+b)^2}{(at^2+bt+c)}$

या $\frac{d^2s}{dt^2}$ = त्वरण

$$= \frac{a}{(at^2+bt+c)^{1/2}} - \frac{1}{4}\frac{(2at+b)^2}{(at^2+bt+c)^{3/2}}$$

$$= \frac{1}{4(at^2+bt+c)^{3/2}}[4a(at^2+bt+c) - (2at+b)^2]$$

$$= \frac{1}{4(at^2+bt+c)^{3/2}}$$

$$[4a^2t^2 + 4abt + 4ac - 4a^2t^2 - b^2 - 4abt]$$

$$= \left(\frac{4ac - b^2}{4}\right)\frac{1}{s^3}.$$

अतः त्वरण $f \propto s^{-3}$, जहाँ $\frac{4ac - b^2}{4}$ अचर है।

15. (d) $A = \pi r^2$; $\frac{dA}{dt} = 2\pi r.\frac{dr}{dt} = 2\pi \times 10 \times 6 = 120\pi$.

16. (a) $y^n = a^{n-1}x \Rightarrow ny^{n-1}\frac{dy}{dx} = a^{n-1} \Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{a^{n-1}}{ny^{n-1}}$.

$\therefore$ अधोलम्ब का समीकरण $= y\frac{dy}{dx} = \frac{y\,a^{n-1}}{ny^{n-1}} = \frac{a^{n-1}y^{2-n}}{n}$

हम जानते हैं कि यदि अधोलम्ब अचर है, तो $\frac{a^{n-1}}{n}.y^{2-n}$ में y नहीं होना चाहिए। अतः $2 - n = 0$ या $n = 2$.

17. (a) $y = x(x-2)(x-4) = x(x^2 - 6x + 8) = x^3 - 6x^2 + 8x$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 12x + 8$

यदि स्पर्श रेखा x-अक्ष के समान्तर हो, तो $\frac{dy}{dx} = 0$

या $3x^2 - 12x + 8 = 0$

$\Rightarrow x = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 4 \times 3 \times 8}}{2 \times 3} = 2 \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$

18. (c) वक्र का समीकरण है, $x^2y^2 = a^4$

दी गई समीकरण का अवकलन करने पर,

$x^2 2y\frac{dy}{dx} + y^2 2x = 0$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x} \Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(-a,a)} = -\left(\frac{a}{-a}\right) = 1$

अतः अधोस्पर्शी की लम्बाई $= \frac{y}{\left(\frac{dy}{dx}\right)} = a$

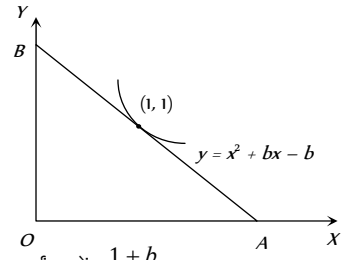
19. (c) $\frac{dy}{dx} = 2x + b$

बिन्दु (1, 1) पर स्पर्श रेखा का समीकरण है,

$y - 1 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(1,1)}.(x-1)$

$y - 1 = (b+2)(x-1)$ या $(2+b)x - y = 1 + b$

अतः $OA = \frac{1+b}{2+b}$ तथा $OB = -(1+b)$



प्रथम चतुर्थांश में, $\frac{1+b}{2+b} > 0$ तथा $1 + b < 0$

$\therefore \quad 1 + b < 0, 2 + b < 0 \Rightarrow b < -2$ .....(i)

अब ΔAOB का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}.\frac{1+b}{2+b}[-(1+b)] = 2$, (दिया है)

$\Rightarrow \quad 4(2+b) + (1+b)^2 = 0 \Rightarrow b^2 + 6b + 9 = 0$

$\Rightarrow \quad (b+3)^2 = 0, \quad \therefore \quad b = -3$, जो (i) को संतुष्ट करता है।

20. (a) वक्र और रेखा के समीकरण को हल करने पर $x = 4$, $y = -\sqrt{6}$. अतः स्पर्श बिन्दु $= (4, -\sqrt{6})$.

21. (b) चूँकि $\log|x| = \begin{cases} \log(x); & x > 0 \\ \log(-x); & x < 0 \end{cases}$

$$\therefore \frac{d}{dx}\log|x| = \begin{cases} \frac{1}{x}; & x > 0 \\ \frac{1}{(-x)}(-1) = \frac{1}{x}; & x < 0 \end{cases}$$

$x = -1, 2$ पर y चरम मान रखता है,

अतः $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(-1)} = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(2)} = 0$

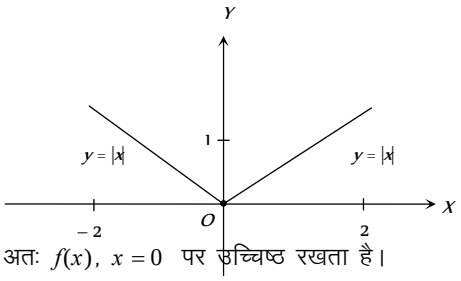
अब $\frac{dy}{dx} = \frac{a}{x} + 2bx + 1$

$\therefore \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(-1)} = -a - 2b + 1 = 0$

अतः $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(2)} = \frac{a}{2} + 4b + 1 = 0$; $\therefore a = 2, \; b = -\frac{1}{2}$.

22. (a) फलन का ग्राफ निम्न है

$f(0) = 1, f(0-h) < 1, f(0+h) < 1$



अतः $f(x)$, $x = 0$ पर उच्चिष्ठ रखता है।

23. (d) $f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}dt \Rightarrow f'(x) = \frac{\sin x}{x}$

$f'(x) = 0$ रखने पर, $\frac{\sin x}{x} = 0 \Rightarrow \sin x = 0$

$x = n\pi, n = 1, 2, 3, ...$

24. (a) $2u = \sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta} + \sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}$

$u^2 = a^2 + b^2 + 2\sqrt{(a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta)(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)}$

$= a^2 + b^2 + 2\sqrt{t(a^2 + b^2 - t)} = a^2 + b^2 + 2\sqrt{-t^2 + (a^2 + b^2)t}$

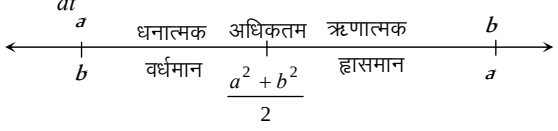
जहाँ $t = a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta, (a^2 > b^2)$

$t_{\max} = a^2$ तथा $t_{\min} = b^2$.

माना $y = -t^2 + (a^2 + b^2)t$

अब $\frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow -2t + (a^2 + b^2) = 0 \Rightarrow t = \frac{a^2 + b^2}{2}$

$\frac{dy}{dt}$ चिन्ह के लिए



$u = a + b$ $\quad u = \sqrt{2(a^2 + b^2)}$ $\quad u = a + b \; (a > b)$

$\therefore (u_{\max})^2 - (u_{\min})^2 = 2(a^2 + b^2) - (a + b)^2 = (a - b)^2$.

25. (c) $f'(x) = 5x^4 - 60x^2 + 240$

$= 5(x^4 - 12x^2 + 48) = 5[(x^2 - 6)^2 + 12]$

$\Rightarrow f'(x) > 0, \quad \forall x \in R$.

26. (a,d) $f(-x) = \frac{(e^{-2x} - 1)}{(e^{-2x} + 1)} = \frac{1 - e^{2x}}{1 + e^{2x}} = -\left[\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}\right] = -f(x)$

$\therefore f(x)$ एक विषम फलन है

अब, $f'(x) = \frac{(e^{2x} + 1).2e^{2x} - 2e^{2x}(e^{2x} - 1)}{(e^{2x} + 1)^2}$

$$= \frac{2e^{2x}(e^{2x} + 1 - e^{2x} + 1)}{(e^{2x} + 1)^2} = \frac{4e^{2x}}{(e^{2x} + 1)^2} > 0$$

$\Rightarrow f'(x)$ धनात्मक है, $\therefore f(x)$ एक वर्धमान फलन है।

27. (c) $f'(x) < 0$ यदि $e^x(x-1)(x-2) < 0$

स्पष्टतः $e^x > 0$

$\therefore (x-1)(x-2) < 0 \Rightarrow 1 < x < 2$, (चिन्हों के नियम से)

28. (b) यहाँ $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$

$\Rightarrow \frac{1 - 0}{1 - 0} = 2 - 2c \qquad \left\{\begin{matrix} \because b = 1, a = 0 \\ \Rightarrow f(1) = 1, f(0) = 0 \end{matrix}\right\}$

$\Rightarrow -2c = -1 \Rightarrow c = \frac{1}{2} \qquad \left\{\begin{matrix} \because f'(x) = 2 - 2x \\ f'(c) = 2 - 2c \end{matrix}\right\}$

29. (a) दिया है $f(x) = ax^3 + bx^2 + 11x - 6$

अब $f(1) = f(3)$ से,

$a + b + 11 - 6 = 27a + 9b + 33 - 6$

$13a + 4b = -11$ .....(i)

और $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + 11$

$\because f'\left(2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0$

$\therefore 3a\left(\frac{13}{3} + \frac{4}{\sqrt{3}}\right) + 2b\left(2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -11$ .....(ii)

(i) व (ii) से,

$13a + 4b = 3\left(\frac{13}{3} + \frac{4}{\sqrt{3}}\right)a + 2b\left(2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$b = -6a$ ......(iii)

(i) व (iii) से, $a = 1$ तथा $b = -6$.

30. (b) $z = y + f(v)$, (दिया है $v = \frac{x}{y}$)

$z = y + f\left(\frac{x}{y}\right)$ ......(i)

x व y के सापेक्ष आंशिक अवकलन करने पर,

$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{f'(x/y)}{y}$ .....(ii)

$\frac{\partial z}{\partial y} = 1 + f'\left(\frac{x}{y}\right)\left(-\frac{x}{y^2}\right)$ .....(iii)

अब, $v\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}$

$= \frac{x}{y}f'\left(\frac{x}{y}\right) \times \frac{1}{y} + 1 - \frac{x}{y^2}f'\left(\frac{x}{y}\right)$ या $v\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1$.

* * *