Chapter 35

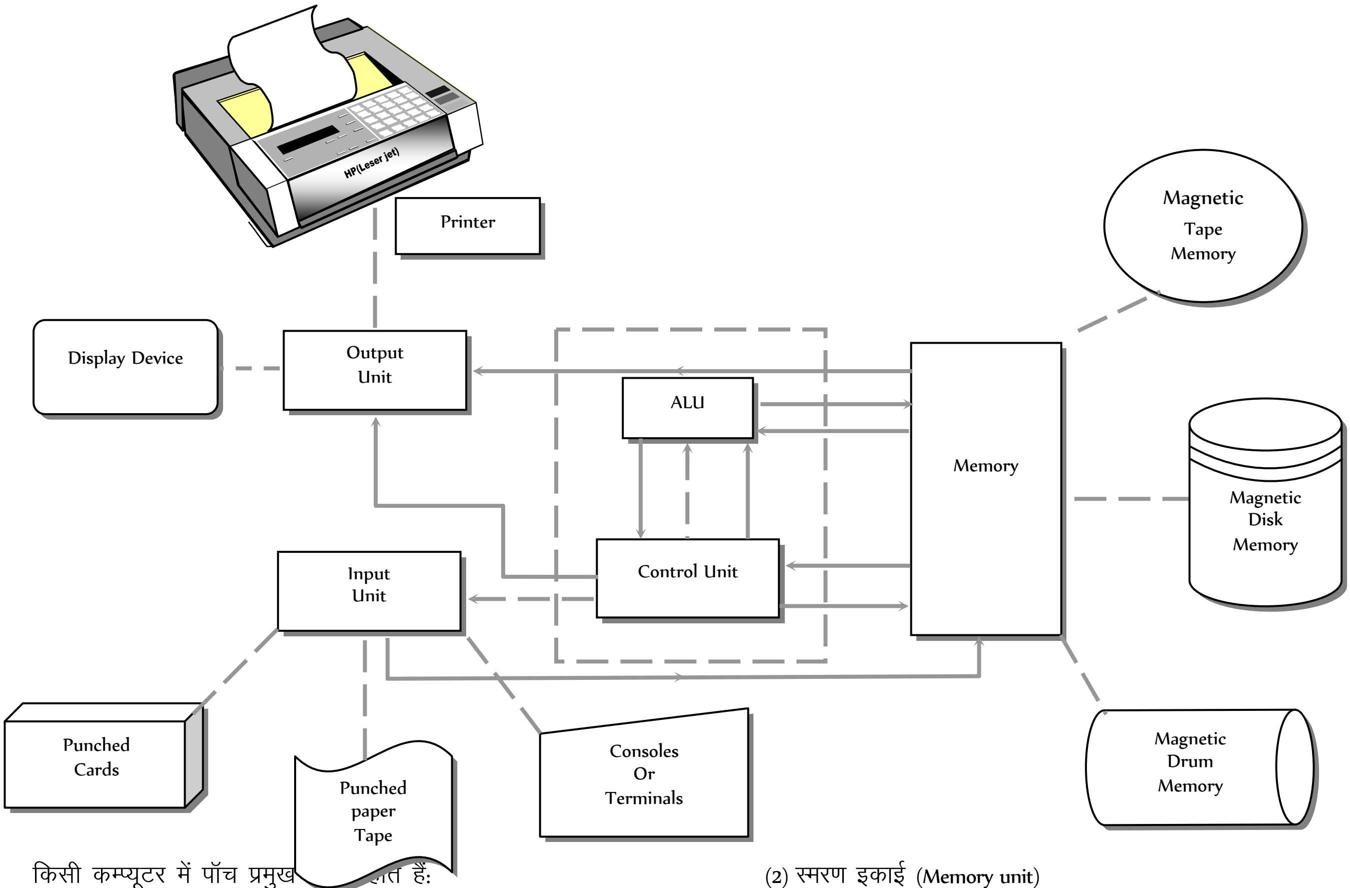
संगणना तथा द्विआधारी संक्रियायें

संगणना

प्रस्तावना (Introduction)

कम्प्यूटर (संगणक) एक बहुउपयोगी इलेक्ट्रॉनिक मशीन है, जो बहुत तीव्र गति से बहुत सी सूचनाओं की प्रक्रिया (processing) कर सकती है।

एक कम्प्यूटर करोड़ों गणनाओं को कुछ ही समय में कर सकता है। यह अंकगणितीय, तार्किक संक्रियाओं तथा गणनाओं को आसानी से कर सकता है।



किसी कम्प्यूटर में पाँच प्रमुख ... त हैं:

(1) अन्तःनिवेश इकाई (Input unit)

(2) स्मरण इकाई (Memory unit)

(3) नियंत्रण इकाई (Control unit)

Block Diagram of a General Purpose Computer

(4) आंकिक तथा तार्किक इकाई (Arithmetic-logical unit)

(5) निर्गत निवेश इकाई (Output unit)

(1) **अंतः निवेश इकाई** (Input unit) : इनपुट इकाई में उपयोग करने वाला, निर्दिष्ट सिद्धान्तों तथा सूचनाओं को कम्प्यूटर में संचारित करता है।

(2) **स्मरण इकाई** (Memory unit) : स्मरण इकाई सूचनाओं, निर्दिष्ट सिद्धान्तों तथा माध्यमिक परिणामों को संचित करती है। यह इन संचित सूचनाओं को आवश्यकता पड़ने पर कम्प्यूटर की अन्य इकाईयों को प्रदान करती है।

(3) **नियंत्रण इकाई** (Control unit) : नियंत्रण इकाई इलेक्ट्रॉनिक संदेशों को कम्प्यूटर के अन्य घटकों में भेजकर कम्प्यूटर के समस्त क्रियाकलापों को नियंत्रित करती है।

(4) **आंकिक तथा तार्किक इकाई** (Arithmetic Logical Units (ALU)) : ALU वह इकाई है, जहाँ अंकीय तथा तार्किक (उदाहरणार्थ $<, >$) गणनायें की जाती है। नियंत्रण इकाई (Control unit) तथा ALU को एक साथ केंद्रीय प्रक्रिया इकाई [Central Processing Unit (CPU)] कहते हैं।

(5) **निर्गत निवेश इकाई** (Output unit) : यह इकाई संचित परिणामों को स्मरण इकाई (Memory unit) से ग्रहण करती है, जिससे उपयोग करने वाला इन सूचनाओं को समझ सकें तथा अभीष्ट प्रारूप में प्राप्त कर सकें।

एक कम्प्यूटर, एक से अधिक अंतः निवेश तथा निर्गत निवेश इकाईयाँ (Input and output units) रख सकता है। उदाहरणार्थः मुद्रक (Printer) तथा प्रदर्शक (Display screen) दो विभिन्न निर्गत निवेश इकाईयाँ (Output units) है, जो एक ही कम्प्यूटर से जुड़ी होती है।

मेमोरी (Memory)

कम्प्यूटर की कार्यप्रणाली को समझने के लिए इसकी मेन मेमोरी (main memory) के बारे में जानना उपयोगी है। उपयोग करने वाले की दृष्टि से मेन मेमोरी को चित्रानुसार कई विभागों (Compartments or locations) का एक समूह समझ सकते हैं। प्रत्येक विभाग (Compartment) को एक अंक दिया जाता है, जो इसका पता (Address) कहलाता है तथा 0 से प्रारम्भ होता है चित्र (ii)

0	1	2
3	4	

fig. (i) Main memory as a collection of compartments (locations)

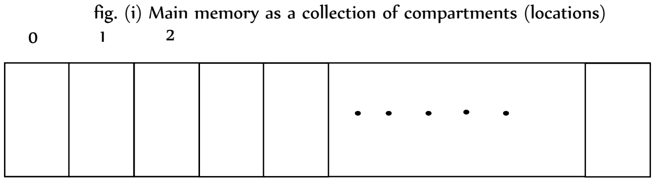


fig. (ii) Bits in a memory location

विभागों (Compartments) की कुल संख्या को मेमोरी का आकार कहते हैं। मेमोरी का प्रत्येक विभाग (जो ALU में भी दर्ज है) कई उपविभागों को रखता है (fig. (ii)) प्रत्येक उपविभाग (Sub-compartment) या तो 0 या 1 को संचित कर सकता है। कम्प्यूटर के भीतर संचित कोई भी सूचना 0 या 1 के रूप में होती है। अंक 0 या 1 द्विआधारी अंक (Binary numbers) कहलाते हैं, जिन्हें संक्षेप में बिट्स (bits) कहते हैं जो 'binary' शब्द से *b* तथा 'digit' शब्द से *i, t* लेकर बनता है। इसी प्रकार, दाशमिक अंक (Decimal digit) को dit तथा षोडशिक अंक (Hexadecimal digit) को hit कहते हैं। वह अंक पद्धति जिसमें केवल दो अंक प्रयुक्त होते हैं, द्विआधारी अंक प्रणाली कहलाती है। कम्प्यूटर, गणना करने के लिए द्विआधारी अंक प्रणाली का उपयोग करते हैं।

एलगोरिथम (Algorithms)

एक एलगोरिथम नियमों के सीमित समुच्चय को परिभाषित करता है, जो विशिष्ट समस्याओं को हल करने के लिए संक्रियाओं का अनुक्रम देता है। दूसरे शब्दों में, एलगोरिथम (Algorithm) समस्या को हल करने की विधि है।

एक एलगोरिथम पाँच महत्वपूर्ण गुण रखता है।

(1) सीमितता (Finiteness) (2) निश्चितता (Definiteness)

(3) पूर्णता (Completeness) (4) अंतःनिवेश (Input) तथा

(5) निर्गत निवेश (Output)

(1) **सीमितता** (Finiteness) : एक एलगोरिथम निश्चित पदों की संख्या के उपरान्त समाप्त होना चाहिए।

(2) **निश्चितता** (Definiteness) : एलगोरिथम का प्रत्येक पद उचित रूप से परिभाषित होना चाहिए अर्थात् क्रम या नियम स्पष्ट अर्थ का तथा दृढ़ होना चाहिए।

(3) **पूर्णता** (Completeness) : क्रम या नियम पूर्ण होना चाहिए, जिससे एलगोरिथम सभी विशिष्ट प्रकार की समस्याओं को हल करने योग्य हो।

(4) **अन्तःनिवेश** (Input) : एलगोरिथम में निश्चित अन्तःनिवेश होना चाहिए।

(5) **निर्गत निवेश** (Output) : एलगोरिथम का एक निश्चित निर्गत निवेश (Output) होना चाहिए, जिसका अंतःनिवेश (Input) से विशिष्ट सम्बन्ध हो।

एलगोरिथम के लिए उसकी दक्षता अति महत्वपूर्ण है। कुछ एलगोरिथम दूसरों की तुलना में अधिक दक्ष होते हैं, क्योंकि प्रोग्राम के लिए उनके कम पदों या कम मेमोरी की आवश्यकता होती है। अतः कम्प्यूटर पर समस्या हल करते समय ये अधिक संतोषजनक तथा मितव्ययी सिद्ध होते हैं। अतः परिणामी कार्यों में इन सभी बिंदुओं पर विचार करते हैं।

एलगोरिथम का निर्माण (Development of an algorithm)

एलगोरिथम के निर्माण में अनुक्रम, चयन तथा इटरेशन या पुनरावृत्ति की महत्वपूर्ण भूमिका है

(1) **अनुक्रम** (Sequence) : माना *a* तथा *b* के दिये गये मानों के लिए व्यंजक $a^3 + 4ab + b^2$ का मान ज्ञात करना है। इसके लिए एलगोरिथम (अर्थात् क्रियाविधि) में निम्न पद होते हैं

1. Get the value of a
2. Get the value of b
3. Calculate a^3, call it S
4. Calculate $4ab$, call it T
5. Calculate b^2, call it V
6. Find the sum $S + T + V$, call it M
7. Write the value of M as answer.

Steps of an algorithm to evaluate $a^3 + 4ab + b^2$, given the values of *a, b*

इस एलगोरिथम में एक के पश्चात् एक पद आते हैं तथा यह बहुत आसान विधि हैं इस एलगोरिथम में पदों का निश्चित अनुक्रम होता है; अर्थात्

(i) एक समय में एलगोरिथम का केवल एक पद लेते हैं।

(ii) एलगोरिथम का प्रत्येक पद एक और केवल एक बार लेते है। किसी भी पद की न तो पुनरावृत्ति करते हैं और न ही किसी पद को छोड़ते है।

(iii) एलगोरिथम के पदों को उसी क्रम में लेते हैं, जिस क्रम में लिखी गई है।

(iv) एलगोरिथम के अंतिम पद की समाप्ति, एलगोरिथम की समाप्ति को प्रदर्शित करती है।

यहाँ हम एक निश्चित परिपाटी का अनुसरण करते है। (i) अनुक्रम के क्रमिक पद, क्रमिक पंक्ति में होना चाहिए। (ii) पदों को अनावश्यक रूप से अंकित नहीं करना चाहिए।

(2) **चयन** (Selection) : प्रत्येक समस्या को हल करने के लिए केवल अनुक्रम पर्याप्त नहीं है। *x* के पूर्णांक मान के लिए समीकरण $m + nx = r$

(जहाँ *m, n, r* पूर्णांक है) पर विचार करते हैं। तब हम बीजगणितीय नियमों का उपयोग कर $x = (r - m) \div n, n \neq 0$ ज्ञात करते हैं। हम एक एलगोरिथम बनाते हैं, जो केवल कुछ पदों तक कार्य करें अर्थात् एक सेमी एलगोरिथम बनाते हैं।

Semi-algorithm (उपरोक्त समस्या के लिए) :

Step 1: *m, r* तथा *n* के मान प्राप्त करो।

Step 2: *r* में से *m* को घटाओ माना यह अंतर *b* है।

Step 3: *b* को *n* से भाग दो, यह परिणाम *x* के मान के रूप में Print होता है।

उदाहरणार्थ : माना $m = 9, n = 5$ तथा $r = 24$ इस स्थिति में $9 + 5x = 24$. दूसरे पद में $24 - 9 = b$ अर्थात् $b = 15$ तथा तीसरे पद में $\frac{b}{n} = \frac{15}{5} = 3$, अतः $x = 3$ होता है।

उपरोक्त पदों में दो दोष है। प्रथम, यदि $n = 0$ तब $m = r$ तथा x कोई भी पूर्णांक मान ग्रहण कर सकता है या $m \neq r$ तथा कोई हल संभव नहीं है अर्थात् कोई पूर्णांक x नहीं है जो दिये गये समीकरण को संतुष्ट करता है। द्वितीय, यदि b को n से विभाजित करने पर अशून्य शेषफल प्राप्त हो, तब x का कोई पूर्णांक मान दिये गये समीकरण को संतुष्ट नहीं करेगा। अतः एलगोरिथम इस प्रकार का होना चाहिए जो इस प्रकार की स्थितियों का निराकरण कर सके।

निम्निलिखित एलगोरिथम से सभी संभव स्थितियों का समाधान हो जाता है।

Step 1 : Get the values of *m, n* and *r*

Step 2 : If $n = 0$ and $m = r$
    then go to step 7
    else go to step 3

Step 3 : If $n = 0$ and $m \neq r$
    then go to step 6
    else go to step 4

Step 4 : **Subtract** *m* from *r*, call this difference b
    (*i.e.,* $b = r - m$)

Step 5: **Divide** *b* by *m*;
    If there is a remainder
    then go to step 6
    else print the value of $\frac{b}{n}$, which is the required value of *x*.

Step 6: **Print** 'No integer satisfies this equation'. Stop

Algorithm to solve an equation of the form $m + nx = r$, where *m, n, r, x* are integers

उपरोक्त एलगोरिथम से हम आवश्यकता के अनुरूप पदों का चयन कर सकते हैं जो कि *m, n* तथा *r* (परिणामतः *b* का मान) के मानों पर निर्भर करता है।

एलगोरिथम की यही योग्यता चयन कहलाती है। चयन की क्षमता यह है, कि यह एलगोरिथम का क्रियान्यवयन करने वाले को समस्या के अनुरूप विभिन्न पथों का अनुसरण करने की अनुमति देती है।

उपरोक्त एलगोरिथम में चयन को विशिष्ट शब्दों 'If, 'then', 'else' द्वारा व्यक्त करते हैं। यह ध्यान रखना चाहिए कि तीनों विशिष्ट शब्द (एक बार) मिलकर एक पद पूर्ण करते हैं। इन्हें लिखने का भी एक विशेष तरीका होता है, जब तक पद पूर्ण नहीं हो जाता, तब तक शब्द 'If के नीचे कुछ नहीं लिखते हैं, इसे इन्डेनटेशन (*indentation*) कहते हैं। शब्द 'then' तथा 'else' शब्द 'If' के सापेक्ष एक ही इन्डेनटेशन (indentation) में आते हैं।

(3) **इटरेशन या पुनरावृत्ति** (Iteration or Repetition) : एलगोरिथम में समस्या को हल करते समय कुछ पदों की पुनरावृत्ति होती है। यह इटरेशन या पुनरावृत्ति कहलाती है।

अब हम एक समस्या पर विचार करते है, जिसमें हमें एक अभाज्य संख्या का मान ज्ञात करना है, जो दिये गये पूर्णांक से ठीक अधिक है। इस समस्या को हल करने के लिए निम्न एलगोरिथम का उपयोग करते हैं।

Consider the given integer

S { add 1 to it
    test new number for primeness
    if it is prime,
        then write it down and stop

S { **else** add 1 to it
    test new number for primeness
    if it is prime,
        then write it down and stop

S { **else** add 1 to it
    test new number for primeness
    if.......

Algorithm for finding a prime number greater then a given positive integer

उपरोक्त प्रक्रिया में हम निम्न पदों को देखते हैं।

"add 1 to it
test new number for primeness
if it is prime
then write it down and stop "

जिनकी पुनरावृत्ति तब तक होती है, जब तक कि हम अभाज्य संख्या प्राप्त कर उसे Print नहीं कर लेते। यदि इस अनुक्रम को (जिसमें परिणाम भी शामिल है) *S* से प्रदर्शित करते है, तब *S* की पुनरावृत्ति परिणाम के print होने तक होती रहती है। इसे तकनीकी रूप से इटरेशन या पुनरावृत्ति कहते हैं।

चूँकि हम यह नहीं जानते कि *S* की पुनरावृत्ति कितनी बार होगी, क्योंकि यह दिये गए धनात्मक पूर्णांक पर निर्भर करती है। इस समस्या के निराकरण के लिये एलगोरिथम में इटरेशन को एक नये प्रकार से लिखते हैं।

Consider the given number
repeat
    add 1 to it
until the new number is prime
write the new number

Or

Consider the given number
add 1 to it
while the new number is not prime
    do add 1 to it
write the new number

Two different ways of writing iteration occuring in fig.

मिथ्या-भाषा (Pseudo language)

मनुष्यों द्वारा बोलने तथा लिखने के लिए उपयोग होने वाली भाषा को प्राकृतिक भाषा कहते हैं। प्राकृतिक भाषा विषमता लिये हुए होती है।

कम्प्यूटर एक मशीन है, अतः उसे निर्देश देते समय कोई विषमता नहीं होनी चाहिए। कम्प्यूटर से सम्बन्ध स्थापित करने वाली भाषा को कार्यकारी भाषा (programming languages) कहते है।

एलगोरिथम लिखने के लिए हम स्मृति सहायक चरों जैसें assignment, symbol ← निर्माणकारी शब्दों **If-then-else, Repeat-until, While-Do** तथा अन्य निर्माणकारी शब्द **For** का उपयोग करते हैं। हमें इन निर्देशों की एलगोरिथम में इनपुट देने के साथ साथ आउटपुट से अभिगुणित परिणाम प्राप्त करने के लिए भी आवश्यकता होती है। यह सभी एलगोरिथम को प्रदर्शित करने के लिए भाषा का निर्माण करते हैं। यह भाषा एक अच्छी कार्यकारी भाषा (programming language) के सभी गुण रखती है। इसे ही मिथ्या-भाषा (Pseudo-language) कहते हैं।

मिथ्या भाषा निर्माण (Pseudo language constructs)

(1) **If-then-else jpuk** (construct) **:** इस रचना (construct) के सामान्य रूप में हम क्रियाओं का चयन करते हैं। जब कोई निर्देश इस construct को क्रियान्वित करता है, तब वह प्रतिबन्ध ज्ञात करते हैं जिसके अर्न्तगत Step 1 या Step 2 क्रियान्वित हो।

```
If condition
   then step 1
   else step 2
```

यदि प्रतिबन्ध सत्य है, तब step 1 का क्रियान्वयन होगा अन्यथा (अर्थात् यदि प्रतिबन्ध सत्य नहीं है) step 2 का क्रियान्वयन होगा।

इस रचना (construct) की एक विशेष स्थिति में शब्द else नहीं होता है। इस रचना (construct) का सामान्य रूप हैं।

```
If condition
   then step
```

स्पष्टतः, जब इस रूप का उपयोग करते हैं तब प्रतिबन्ध के असत्य होने पर कोई क्रिया नहीं होती तथा step तभी क्रियान्वित होता है, जब प्रतिबन्ध सत्य है। दूसरे शब्दो में निम्निलिखित constructs भी समतुल्य है जो यही कार्य करता है।

```
If condition                 If condition
   then step        and         then step
                                else do nothing
```

(2) **Repeat-until रचना (Construct) :** इस रचना (construct) का सामान्य रूप है

```
Repeat
   Part of the algorithm
until condition
```

इस रचना (construct) का उपयोग तब करते हैं जब निश्चित क्रियाओं की पुनरावृत्ति की आवश्यकता होती है। चूँकि प्रतिबन्ध की जॉच अंत में करते हैं अतः "Part of algorithm" सदैव कम से कम एक बार क्रियान्वित होता है। जबकि 'while-do' रचना (construct) में प्रतिबन्ध की जॉच प्रारम्भ में करते हैं।

(3) **While-do-रचना (construct) :** यह 'repeat-until' रचना (construct) का वैकल्पिक है। इसका सामान्य रूप जिसका निर्देशों की पुनरावृत्ति में भी उपयोग होता है।

```
while condition
  do     T
```

जहाँ T निर्देशों का अनुक्रम है। जब इस रचना (construct) को क्रियान्वित करते हैं, सर्वप्रथम प्रतिबन्ध का मान ज्ञात करते हैं। यदि प्रतिबन्ध सत्य है, तब निर्देशों का अनुक्रम T क्रियान्वित होता है तथा पुनः प्रतिबन्ध का मान ज्ञात करते हैं। यदि प्रतिबन्ध असत्य है, तब एलगोरिथम के T के बाद के भाग का क्रियान्वयन होता है।

इस प्रकार प्रतिबन्ध की जॉच बार बार तब तक करते हैं जब तक यह असत्य न हो जाये। T के प्रत्येक क्रियान्वयन में एलगोरिथम के कुछ चर आ जाते है तथा स्पष्टतः कुछ पुनरावृत्तियों के पश्चात् प्रतिबन्ध असत्य हो जाता हैं। यह 'while-do-construct', के क्रियान्वयन को पूर्ण करता है तथा T के पश्चात् आने वाले भाग का क्रियान्वयन लागू करता है।

(4) **For रचना (construct):** जब हम यह जानते है, कि एलगोरिथम के किसी भाग का कितनी बार क्रियान्वयन होता है, तब हम 'For construct' का उपयोग करते हैं जिसका सामान्य रूप हैं

For identifier = initial value to test value by increment **Do** *S*.

इस construct के लिये शब्दों, **For, To, By** तथा **Do** रिजर्व (reserve) words है। प्रारम्भिक मान वह आरम्भिक मान देता है, जो identifier ग्रहण करता है जबकि *S* क्रियान्वित होता है। प्रत्येक क्रियान्वयन के बाद मान बढ़ाकर identifier का मान बढ़ाते है। *S* का क्रियान्वयन लगातार तब तक होता है, जब तक identifier का मान परीक्षण मान से अधिक न हो जाये।

आरेख चित्र (एलगोरिथम का प्रदर्शन)

(Flow charts (Presentation of algorithm))

किसी एलगोरिथम का ग्राफीय निरूपण आरेख चित्र कहलाता है। एक आरेख चित्र में अनुक्रम के उन पदों का जो समस्या को हल करने में क्रियान्वित होते हैं, चित्रात्मक तथा व्यवस्थित निरुपण होता है।

एक आरेख चित्र (flow-chart) में कुछ बॉक्स होते हैं, जो तीरों के द्वारा जुड़े होते हैं। प्रत्येक बॉक्स में कुछ निर्देश समाहित होते हैं। बॉक्सों को जोड़ने वाली रेखाओं का तीर इनके क्रियान्वयन की दिशा को प्रदर्शित करता है।

बॉक्स विभिन्न आकार के होते हैं। प्रत्येक विशिष्ट आकार के बॉक्सों में विशेष प्रकार के निर्देश समाहित होते हैं।

आरेख चित्र परिपाटी :

आरेख चित्र की रचना करते समय निम्न परिपाटी प्रेक्षित होती हैं।

(i) आरेख की सामान्य दिशा बाँये से दाँये तथा ऊपर से नीचे की ओर होती है।

(ii) Process संकेत से केवल एक आरेख रेखा या प्रवाह-रेखा निकलती है।

(iii) Decision-box में केवल एक आरेख रेखा प्रवेश करती है तथा कम से कम दो रेखायें बाहर निकलती है।

(iv) एक आरेख रेखा जो ऊपर की ओर जाती है, इटरेशन या लूप को पूर्ण करती हैं।

आधारभूत संक्रिया तथा आरेख चित्र :

तीन आधारभूत संक्रियायें है:

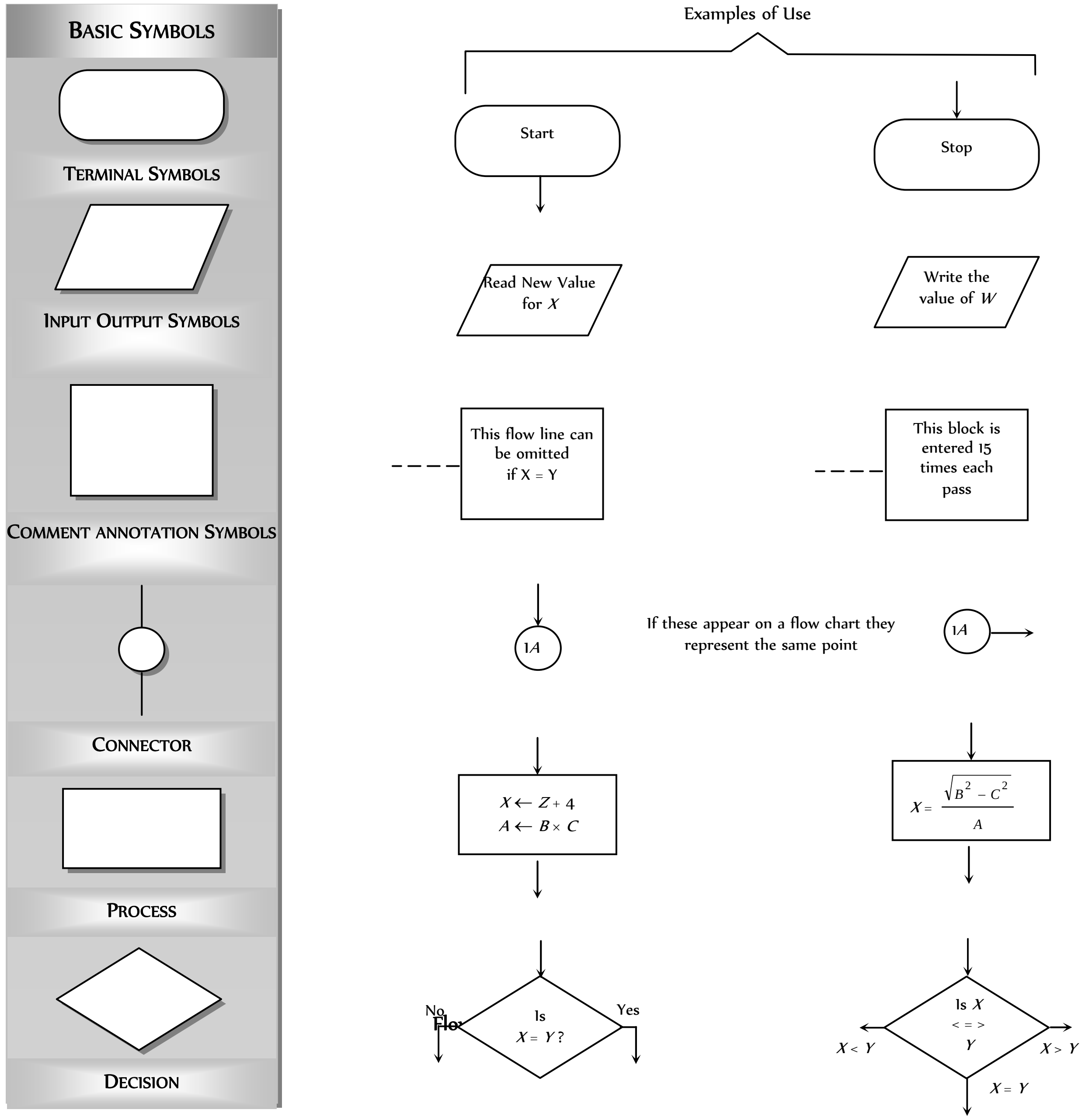
(i) अनुक्रम (Sequence) (ii) चयन (Selection)

(iii) इटरेशन (Iteration)

किसी इटरेशन के संगत आरेख चित्र का चयन या Repeat-Until construct या While-Do construct एक लूप का निर्माण करता है। लूप दो प्रकार के होते हैं।

(i) जब किसी संक्रिया की नियत संख्या तक पुनरावृत्ति होती है, किंतु चरों का मान कुछ भी हो सकता है, तब आरेख चित्र का संगत भाग एक नियत लूप का निर्माण करता है।

(ii) जब इटरेशन की संख्या, चरों के मानों पर निर्भर करती है, तब आरेख चित्र का संगत भाग एक चर लूप (Variable loop) का निर्माण करता है। इस लूप को पश्चगामी कूद (Backward jump) भी कहते हैं।



संख्या पद्धति (Number system)

(1) **दशमिक पद्धति** (Decimal system) **:** इस संख्या पद्धति का हम दैनिक जीवन में उपयोग करते हैं। दाशमिक पद्धति में हम अंकों 0, 1, 2,.......8, 9 का उपयोग करते हैं तथा इन 10 अंकों की सहायता से हम कोई भी परिमेय संख्या लिख सकते हैं। दाशमिक पद्धति, स्थानीय मान पद्धति पर आधारित है अर्थात् किसी अंक द्वारा प्रदर्शित मान संख्या में उस अंक की स्थिति पर निर्भर करता है। दाशमिक पद्धति में क्रमिक स्थानों पर दिये जाने वाले मान $10^4, 10^3, ... 10^0, 10^{-1}, 10^{-2}.....$ (बाँये से दाँये) होते हैं।

उदाहरणार्थ **:** संख्या 3864. 342 को निम्न प्रकार से लिख सकते हैं।

$3864.342 = 3 \times 10^3 + 8 \times 10^2 + 6 \times 10^1 + 4 \times 10^0 + 3 \times 10^{-1} + 4 \times 10^{-2} + 2 \times 10^{-3}$

संख्याओं को प्रदर्शित करने के लिए 10 आधार संकेत उपयोग किये जाते हैं। 10 इस पद्धति का आधार है तथा इस पद्धति को दस-आधारीय पद्धति या दाशमिक पद्धति कहते हैं।

(2) **द्विआधारी संख्या पद्धति** (Binary number system) **:** वह संख्या पद्धति जिसके लिए आधार 2 है, द्विआधारी पद्धति कहलाती है। इस पद्धति में, संख्याओं को दो आधार संकेतों 0 या 1 से प्रदर्शित करते हैं। इस पद्धति में क्रमिक स्थानों पर $2^4, 2^3, 2^2, 2^1, 2^0, 2^{-1}, 2^{-2}....$ अंक दिये जाते हैं जहाँ 2^0 इकाई स्थान पर होता है। द्विआधारी अंकों तथा दाशमिक अंकों को एक दूसरे में परिवर्तित कर सकते हैं।

(3) **अष्टिक संख्या पद्धति** (Octal number system) **:** जैसा कि नाम से स्पष्ट है, इस पद्धति में आधार $8(2^3)$ होता है। संख्याओं को आठ आधारभूत संकेतों 0, 1, 2,.......7 की सहायता से लिखा जाता है। क्रमिक स्थानों पर दिये जाने वाले मान .... $8^3, 8^2, 8^1, 8^0, 8^{-1}, 8^{-2}.....$ है, जहाँ 8^0 इकाई स्थान है। दाशमिक संख्या पद्धति को अष्टिक संख्या पद्धति में परिवर्तित कर सकते हैं।

(4) **षोडशिक संख्या पद्धति** (Hexadecimal system) **:** इस पद्धति में आधार 16 होता है। संख्याओं को 16 संकेतों 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F की सहायता से लिखते हैं। संकेत A, 10 को प्रदर्शित करता है (दाशमिक पद्धति में)। इसी प्रकार B, C, D, E, F क्रमशः 11, 12, 13, 14 तथा 15 को प्रदर्शित करता हैं। इस पद्धति में क्रमिक स्थानों पर दिये जाने वाले मान ...., $16^2, 16^1, 16^0, 16^{-1}.....$ है, जहाँ 16^0 इकाई स्थान है।

द्विआधारी संक्रियायें

परिभाषा (Definition)

किसी अरिक्त समुच्चय A पर द्विआधारी संक्रिया एक फलन है, जो A के अवयवों के प्रत्येक क्रमित युग्म से संलग्न है जबकि एक अद्वितीय अवयव c इस प्रकार परिभाषित है कि $c \in A$, यह गुणित समूह $A \times A$ से A में एक फलन है। संकेत रूप में, एक फलन $A \times A \to A$, समुच्चय A पर द्विआधारी संक्रिया कहलाती है।

अवयव $(a, b) \in A \times A$ के प्रतिबिम्ब को $a * b$ से प्रदर्शित करते है। यदि समुच्चय A, किसी संयोजन के सापेक्ष बन्द है, तब हम कहते है, कि समुच्चय A पर द्विआधारी संक्रिया * है।

माना, $a \in N, b \in N \Rightarrow a + b \in N \forall a, b \in N$

N के लिए गुणन भी एक द्विआधारी संक्रिया है, चूँकि $a \in N, b \in N \Rightarrow a \times b \in N \forall a, b \in N$

किन्तु N के लिए व्यवकलन (Subtract) एक द्विआधारी संक्रिया नहीं है, चूँकि $3 \in N, 5 \in N$ किन्तु $3 - 5 = -2 \notin N$

• यह स्पष्ट है, कि योग तथा गुणन Z (पूर्णांकों का), Q (परिमेय संख्या का), R (वास्तविक संख्या का) तथा C (सम्मिश्र संख्या का) समुच्चयों में से प्रत्येक के लिये द्विआधारी संक्रिया है।

• घटना Z, Q, R तथा C प्रत्येक समुच्चय के लिये द्विआधारी संक्रिया है, किन्तु यह N के लिए द्विआधारी संक्रिया नहीं है।

• विभाजन N, Z, Q, R तथा C में से किसी भी समुच्चय के लिये द्विआधारी संक्रिया नहीं है।

` (Types of binary operation)

(1) **क्रमविनिमेयक द्विआधारी संक्रिया** (Commutative binary operation) **:** समुच्चय S पर एक द्विआधारी संक्रिया * क्रमविनिमेय है, यदि $a * b = b * a \ \forall a, b \in S$

समुच्चय Z के लिये योग तथा गुणन क्रमविनिमेयक द्विआधारी संक्रियायें है, किन्तु व्यवकलन (Subtract) एक क्रमविनिमेयक द्विआधारी संक्रिया नहीं है, चूँकि $2 - 3 \neq 3 - 2$

(2) **साहचर्य द्विआधारी संक्रिया** (Associative binary operation) **:** माना समुच्चय S पर एक द्विआधारी संक्रिया * साहचर्य है, यदि $(a * b) * c = a * (b * c) \ \forall \ a, b, c \in S$

योग तथा गुणन N, Z, Q, R तथा C के लिये साहचर्य द्विआधारी संक्रियायें है, किन्तु व्यवकलन (Subtract) Z, Q, R तथा C के लिये साहचर्य द्विआधारी संक्रिया नहीं है।

(3) **वितरण द्विआधारी संक्रिया** (Distributive binary operation) **:** माना समुच्चय S पर दो द्विआधारी संक्रियायें * तथा o है, तब

(i) o पर बाँया वितरण है, यदि $a * (b \, o \, c) = (a * b) \, o \, (a * c) \ \forall \ a, b, c \in S$;

(ii) o पर दाँया वितरण है, यदि $(b \, o \, c) * a = (b * a) \, o \, (c * a) \ \forall \ a, b, c \in S$.

यदि o पर बाँया तथा दाँया वितरण * है, तब * को o पर वितरण कहते हैं।

उदाहरणार्थ **:** Z पर योग (+) के लिए, Z पर गुणन (.) वितरण नियम का पालन करता है, चूँकि $a(b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ तथा $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a \ \forall \ a, b, c \in Z$

किन्तु गुणन के लिये योग वितरण नियम का पालन नहीं करता है।

तत्समक तथा प्रतिलोम अवयव (Identity and Inverse elements)

(1) **तत्समक अवयव** (Identity element) **:** माना * समुच्चय S पर द्विआधारी संक्रिया है। किसी द्विआधारी संक्रिया * के लिये एक अवयव $e \in S$ तत्समक होगा यदि $a * e = a = e * a \ \forall \ a \in S$

Z पर योग के लिए 0 एक तत्समक अवयव है, चूँकि

$a + 0 = a = 0 + a \ \forall \ a \in Z$

R पर गुणन के लिये 1 तत्समक अवयव है, चूँकि $1 \times a = a = a \times 1 \ \forall \ a \in R$

(2) **प्रतिलोम अवयव** (Inversible element for a binary operation with identity): किसी द्विआधारी संक्रिया * के लिए समुच्चय A का अवयव a प्रतिलोमिक है, यदि $\exists \ b \in A$ इस प्रकार है कि

$a * b = e = b * a$ जहाँ e तत्समक है।

b को a का प्रतिलोम कहते हैं तथा इसे a^{-1} से प्रदर्शित करते हैं। समुच्चय A में प्रतिलोमिक अवयव को यूनिट कहते हैं। तत्समक अवयव सदैव प्रतिलोमिक होते हैं तथा स्वयं के व्युत्क्रम होते हैं। चूँकि $e * e = e * e = e$, इस प्रकार $e^{-1} = e$ है।

संयोजन तालिका (Composition table)

किसी परिमित समुच्चय पर द्विआधारी संक्रिया को एक तालिका द्वारा समझा सकते हैं, इस तालिका को संयोजन तालिका कहते हैं।

माना $S = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ एक परिमित समुच्चय हैं तथा S पर द्विधारी संक्रिया * है, तब * के लिये संयोजन तालिका को निम्नानुसार प्रदर्शित करते हैं।

हम समुच्चय S के अवयवों $a_1, a_2, ..., a_n$ को ऊपरी क्षैतिज पंक्ति में लिखते हैं तथा इसी क्रम में अवयवों को बाँयी ओर के ऊर्ध्वाधर स्तम्भ में लिखते हैं।

सारणी : 35.1

*	a_1	a_2	....	a_i	....	a_j	....	a_n
a_1	$a_1 * a_1$	$a_1 * a_2$	....	$a_1 * a_i$	....	$a_1 * a_j$	....	$a_1 * a_n$
a_2	$a_2 * a_1$	$a_2 * a_2$	....	$a_2 * a_i$	....	$a_2 * a_j$	....	$a_2 * a_n$
$\vdots$								
a_i	$a_i * a_1$	$a_i * a_2$	....	$a_i * a_i$	....	$a_i * a_j$	....	$a_i * a_n$
$\vdots$								
a_j	$a_j * a_1$	$a_j * a_2$	....	$a_j * a_i$	....	$a_j * a_j$	....	$a_j * a_n$
$\vdots$								
a_n	$a_n * a_1$	$a_n * a_2$	....	$a_n * a_i$	....	$a_n * a_j$	....	$a_n * a_n$

संयोजन तालिका

संयोजन तालिका से हम निम्न परिणाम प्राप्त करते हैं।

(1) यदि तालिका के प्रत्येक अवयव समुच्चय S के अवयव हो तथा S का प्रत्येक अवयव, प्रत्येक पंक्ति या स्तम्भ में केवल एक बार प्रतीत हो, तब संक्रिया को द्विआधारी संक्रिया कहते हैं।

द्विआधारी संक्रिया को सुपरिभाषित कहते हैं जिसका तात्पर्य यह है, कि द्विधारी संक्रिया *, S के प्रत्येक अवयव से S के अद्वितीय अवयव तक संलग्न है अर्थात् S, संक्रिया * के अर्न्तगत परिबद्ध है।

(2) यदि तालिका के अवयव विकर्ण (जो ऊपरी बाँयें कोने से प्रारम्भ होकर नीचे दाँये कोने पर समाप्त होता है) के सापेक्ष सममित है, तब द्विआधारी संक्रिया, S पर क्रमविनिमेयक नियम का पालन करती है, अन्यथा यह S पर क्रमविनिमेय नहीं होता है।

(3) यदि a_i अवयव वाली पंक्ति शीर्ष पंक्ति के सम्पाती है तथा a_i अवयव वाला स्तम्भ, सबसे बांयी ओर के स्तम्भ के सम्पाती है, तब S पर द्विआधारी संक्रिया * के लिये a_i तत्समक अवयव है।

(4) यदि प्रत्येक पंक्ति (सबसे ऊपरी पंक्ति के अतिरिक्त) या प्रत्येक स्तम्भ (सबसे बांयी ओर के स्तम्भ के अतिरिक्त) में तत्समक अवयव है तब S का प्रत्येक अवयव * के सापेक्ष व्युत्क्रमणीय होता है।

किसी अवयव (माना a) का प्रतिलोम ज्ञात करने के लिये a की पंक्ति (या स्तम्भ) पर विचार करते है, तब इस पंक्ति (या स्तम्भ) में तत्समक अवयव e की स्थिति ज्ञात करते है। यदि e, a_i के स्तम्भ (या पंक्ति) में प्रतीत होता है, तब a_i तथा a एक दूसरे के प्रतिलोम होते है।

यह ध्यान रखना चाहिये, कि संयोजन तालिका द्विआधारी संक्रियाओं की साहचर्यता ज्ञात करने में कोई सहायता नही करती है। यह प्रत्येक संभव प्रयासों द्वारा सत्यापित होना चाहिये।

Ordinary Thinking

Objective Questions

संगणना

1. एक समस्या का हल चरों के किसी प्रतिबन्ध से सम्बन्धित नहीं है तथा न ही पुनरावृत्तिक प्रकृति का है तब आधारभूत नियत्रंण संक्रिया है
   (a) अनुक्रमणीय (Sequential) (b) चयन (Selection)
   (c) पुनरावृत्ति (Repetitive) (d) इनमें से कोई नहीं
2. कम्प्यूटर क्रियान्वित कर सकता है
   (a) एक एलगोरिथम (An algorithm)
   (b) एक आरेख चित्र (A flow-chart)
   (c) एक कार्यक्रम (A program)
   (d) इनमें से कोई नहीं
3. एक आधारभूत नियंत्रण संरचना सदैव रखता है
   (a) एक प्रवेश तथा दो निर्गत बिन्दु
   (b) दो प्रवेश तथा एक निर्गत बिन्दु
   (c) एक प्रवेश तथा एक निर्गत बिन्दु
   (d) कितनी भी संख्या में प्रवेश तथा निर्गत बिन्दु
4. कम्प्यूटर का ह्रदय तथा तंत्रिका तंत्र है
   (a) अंतः निवेश इकाई (Input unit)
   (b) निर्गत निवेश इकाई (Output unit)
   (c) केन्द्रीय प्रक्रिया इकाई (CPU)
   (d) स्मरण इकाई (Memory unit)
5. एक एलगोरिथम रखता है, कम से कम
   (a) एक इनपुट (b) एक आउटपुट
   (c) एक असाइनमेंन्ट (d) इनमें से कोई नहीं
6. किसी समस्या में अनेक प्रकार के निर्दिष्ट सिद्वान्तों का अध्ययन करते हैं, तब आवश्यक नियंत्रण संरचना (control structure) है
   (a) केवल अनुक्रमणीय (Only sequential)
   (b) केवल चयन (Only selection)
   (c) पुनरावृत्ति संरचना (Repetition structure)
   (d) इनमें से कोई नहीं
7. नियंत्रण संरचना (control structure) IF-THEN-ELSE है
   (a) एकल चयन (Single selection)
   (b) बहुचयन (Multiple selection)
   (c) पुनरावृत्तिक सरंचना (Repetition structure)
   (d) इनमें से कोई नहीं
8. FOR-DO construct लूप को कम से कम कितनी बार क्रियान्वित करता है
   (a) एक बार (b) दो बार
   (c) तीन बार (d) इनमें से कोई नहीं
9. नियंत्रण संरचना (CASE-OF) है
   (a) एकल चयन (Single selection)
   (b) बहुचयन (Multiple selection)
   (c) पुनरावृत्ति सरंचना (Repetition structure)
   (d) इनमें से कोई नहीं
10. द्विआधारी संख्या 10101 का दाशमिक तुल्य है [DCE 1999]
    (a) 20 (b) 21
    (c) 22 (d) 23
11. $(10100110)_2$ का अष्टिक तुल्य है [DCE 1994]
    (a) 116 (b) 561
    (c) 615 (d) 516
12. अष्टिक संख्या 219 का दाशमिक तुल्य है [DCE 1999]
    (a) 140 (b) 145
    (c) 150 (d) 155

11. (101001110) का अष्टिक तुल्य है [DCE 1994]
(a) 116 (b) 561
(c) 615 (d) 516

12. अष्टिक संख्या 219 का दाशमिक तुल्य है [DCE 1999]
(a) 140 (b) 145
(c) 150 (d) 155

13. द्विआधारी संख्या $(101101.10101)_2$ का दाशमिक तुल्य है
(a) $(45.625)_{10}$ (b) $(45.065)_{10}$
(c) $(65.625)_{10}$ (d) $(45.65625)_{10}$

14. दाशमिक संख्या $(0.65625)_{10}$ का द्विआधारी तुल्य है
(a) $(0.10101)_2$ (b) $(0.110101)_2$
(c) $(0.10011)_2$ (d) $(0.10110)_2$

15. नियंत्रण इकाई व आंकिक तथा तार्किक इकाई कहलाता है
(a) आंकिक तथा तार्किक इकाई (ALU)
(b) केन्द्रीय प्रक्रिया इकाई (CPU)
(c) स्मरण इकाई
(d) अंतः निवेश इकाई

16. संगणक की तीसरी पीढ़ी में, कौन सा इलेक्ट्रोनिक उपकरण प्रयुक्त किया जाता था
(a) निर्वात नलिका
(b) ट्रांजिस्टर (Transistors)
(c) समाकलित परिपथ (Integrated circuit)
(d) उपरोक्त सभी

17. RAM का तात्पर्य है
(a) रेंडम ऐवेलेवल मेमोरी
(b) राइट ऐवेलेवल मेमोरी
(c) रेंडम एक्सेस मेमोरी
(d) उपरोक्त सभी

18. अष्टिक संख्या 473 का दाशमिक तुल्य है [DCE 1996]
(a) $(312)_{10}$ (b) $(308)_{10}$
(c) $(315)_{10}$ (d) इनमें से कोई नहीं

19. अष्टिक संख्या $(5473.64)_8$ का द्विआधारी तुल्य है
(a) $(1101001110\ 11.110101)_2$
(b) $(1011001110\ 11.110100)_2$
(c) $(1001001110\ 11.110100)_2$
(d) $(1011001111\ 01.110100)_2$

20. दशमिक संख्या 0.3125 का द्विआधारी तुल्य है
(a) 0101 (b) .1010
(c) .0101 (d) .1101

21. अष्टिक संख्या 1217 का दाशमिक तुल्य है [DCE 1999]
(a) 640 (b) 620
(c) 650 (d) 655

22. दशमिक संख्या $(0.225)_{10}$ का आष्टिक तुल्य है
(a) $(0.163146)_8$ (b) $(0.164136)_8$
(c) $(0.2641)_8$ (d) $(0.1646)_8$

23. द्विआधारी संख्या $(110011.11)_2$ का दाशमिक तुल्य है
(a) $(51.25)_{10}$ (b) $(51.50)_{10}$
(c) $(51)_{10}$ (d) $(51.75)_{10}$

24. द्विआधारी संख्या $(0.10100110)_2$ का आष्टिक तुल्य है
(a) $(0.510)_8$ (b) $(0.514)_8$
(c) $(0.524)_8$ (d) $(0.534)_8$

25. द्विआधारी संख्या $(1101.011)_2$ का आष्टिक तुल्य है
(a) $(25.4)_8$ (b) $(15.6)_8$
(c) $(14.6)_8$ (d) $(15.3)_8$

26. द्विआधारी संख्या 101010 का दाशमिक तुल्य है [DCE 1999]
(a) 20 (b) 42
(c) 22 (d) 23

27. अष्टिक संख्या $(2432)_8$ का षोडशिक तुल्य है
(a) $(51B)_{16}$ (b) $(51A)_{16}$
(c) $(25A)_{16}$ (d) $(25B)_{16}$

28. अष्टिक संख्या $(75.5)_8$ का दाशमिक तुल्य है
(a) $(61.0625)_{10}$ (b) $(61.065)_{10}$
(c) $(61.625)_{10}$ (d) $(61.725)_{10}$

29. द्विआधारी संख्या $(1100.1011)_2$ का दाशमिक तुल्य है
(a) $(122.6875)_{10}$ (b) $(12.6875)_{10}$
(c) $(12.4275)_{10}$ (d) $(12.6975)_{10}$

30. द्विआधारी संख्या $(1011.10101)_2$ का दाशमिक तुल्य है
(a) $(11.65625)_{10}$ (b) $(11.64625)_{10}$
(c) $(11.66725)_{10}$ (d) $(12.54625)_{10}$

31. एक किलोबाइट (Kilobyte) में कितने बाइट (Byte) होते है
(a) 512 (b) 1024
(c) 2048 (d) 4096

32. एक बाइट (Byte) में कितने बिट्स (bits) होते हैं
(a) 4 (b) 6
(c) 8 (d) 12

33. एक एलगोरिथम समाप्त होना चाहिये [DCE 1997]
(a) एक पुनरावृत्ति में
(b) एक पद में
(c) निश्चित पदों में
(d) निश्चित पदों में किन्तु कभी कभी अनन्त पदों में

द्विआधारी संक्रियायें

1. माना S एक परिमित समुच्चय है, जिसमें n अवयव है, तब S पर क्रमविनिमेय द्विआधारी संक्रियाओं की कुल संख्या है
(a) $n^{\frac{n(n+1)}{2}}$ (b) $n^{\frac{n(n-1)}{2}}$
(c) n^{n^2} (d) 2^{n^2}

2. यदि S एक परिमित समुच्चय है, जिसमें n अवयव है, तब S पर उन द्विआधारी संक्रियाओं की कुल संख्या जो क्रमविनिमेय नहीं है, होगी
(a) $n^{\frac{n(n+1)}{2}}$ (b) $n^{n^2}-n^{\frac{n(n+1)}{2}}$
(c) $n^{n^2-\frac{n(n-1)}{2}}$ (d) $n^{\frac{n(n-1)}{2}}$

3. यदि किसी द्विआधारी संक्रिया * के लिए S पर परिभाषित संयोजन तालिका मुख्य विकर्ण के परितः सममित है, तब
(a) S पर * साहचर्य है
(b) S पर * क्रमविनिमेय है
(c) S, * के लिए तत्समक अवयव रखता है
(d) इनमें से कोई नहीं

4. पूर्णांकों का व्यवकलन एक संक्रिया है, जो है [CET 1994]
(a) क्रमविनिमेय तथा साहचर्य

(b) साहचर्य किन्तु क्रमविनिमेय नहीं
(c) न तो क्रमविनिमेय और न ही साहचर्य
(d) क्रमविनिमेय किन्तु साहचर्य नहीं

5. नियम $a+b=b+a$ कहलाता है
(a) संवरक नियम (b) साहचर्य नियम
(c) क्रमविनिमेय नियम (d) वितरण नियम

6. यदि समुच्चय S पर द्विआधारी संक्रिया * के लिये संयोजन तालिका की कोई एक पंक्ति तालिका के सबसे ऊपर पंक्ति के सम्पाती है, तब
(a) * के लिये S बाँया तत्समक रखता है
(b) * के लिये S दाँया तत्समक रखता है
(c) * के लिये S तत्समक रखता है
(d) *, S क्रमविनिमेय तथा साहचर्य है

7. यदि समुच्चय S पर द्विआधारी संक्रिया * के लिये संयोजन तालिका का कोई एक स्तम्भ, तालिका के सबसे बाँयी ओर के स्तम्भ के सम्पाती है, तब
(a) * के लिये S बाँया तत्समक रखता है
(b) * के लिये S दाँया तत्समक रखता है
(c) * के लिये S तत्समक रखता है
(d) *, S पर क्रमविनिमेय तथा साहचर्य है

8. निम्न में से कौन सी द्विआधारी संक्रिया क्रमविनिमेय है
(a) R पर *, जो $a*b=a^2b$ द्वारा प्राप्त होता है
(b) R पर o जो $a o b=a^b$ द्वारा प्राप्त होता है
(c) $P(S)$ पर Δ, समुच्चय S पर घात समुच्चय $A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)$ द्वारा प्राप्त होता है
(d) इनमें से कोई नहीं

9. माना S एक परिमित समुच्चय है, जिसमें n अवयव हैं, तब S पर कुल द्विआधारी संक्रियाओं की संख्या है [EAMCET 1992]
(a) n^n (b) 2^{n^2}
(c) n^{n^2} (d) n^2

10. वास्तविक संख्याओं के समुच्चय पर * $a*b=1+ab$ द्वारा परिभाषित है, तब संक्रिया * है [CET 1991]
(a) क्रमविनिमेय किन्तु साह्चर्य नहीं
(b) साह्चर्य किन्तु क्रमविनिमेय नहीं
(c) न तो क्रमविनिमेय और न ही साह्चर्य
(d) क्रमविनिमय व साह्चर्य दोनों

Critical Thinking

Objective Questions

1. REPEAT-UNTIL नियंत्रण प्रक्रिया में लूप का क्रियान्वयन कम से कम होता है [DCE 1996]
(a) 3 बार (b) 2 बार
(c) 1 बार (d) इनमें से कोई नहीं

2. $(1101101)_2$ का मान है [DCE 2001]
(a) 81 (b) 121
(c) 109 (d) 92

3. $(264)_8$ का दाशमिक तुल्य है [DCE 1995]
(a) 180 (b) 170
(c) 166 (d) इनमें से कोई नहीं

4. दाशमिक संख्या 785का षोडशिक तुल्य है [DCE 1994]
(a) 1A2 (b) 311
(c) AB5 (d) इनमें से कोई नहीं

5. माना z पूर्णांको का समुच्चय है तथा z पर एक द्विआधारी संख्या o है जो $a o b=a+b-ab \ \forall \ a,b\in z$ द्वारा परिभाषित है, तब $a(\neq 1)\in z$ का प्रतिलोम अवयव है
(a) $\frac{a}{a-1}$ (b) $\frac{a}{1-a}$
(c) $\frac{a-1}{a}$ (d) इनमें से कोई नहीं

Answers

संगणना

1	a	2	c	3	c	4	c	5	b
6	b	7	a	8	a	9	b	10	b
11	d	12	b	13	d	14	a	15	b
16	c	17	c	18	c	19	b	20	c
21	d	22	a	23	d	24	b	25	d
26	b	27	b	28	c	29	b	30	a
31	b	32	c	33	c				

द्विआधारी संक्रियायें

1	a	2	b	3	b	4	c	5	c
6	a	7	b	8	c	9	c	10	a

Critical Thinking Questions

1	c	2	c	3	a	4	b	5	a

Answers and Solutions

संगणना

1. (a) आधारभूत नियंत्रण संक्रिया अनुक्रमणीय होगी क्योंकि यहाँ चयन व पुनरावृत्ति की आवश्यकता नहीं है
2. (c) संगणक द्वारा कार्यक्रम (Program) का क्रियांवन होता है न कि एलगोरिथम व आरेख चित्र का
3. (c) आधारभूत नियंत्रण संक्रिया सदैव एक प्रवेश व एक निर्गत बिन्दु रखता है
4. (c) केन्द्रीय प्रक्रिया (CPU) संगणक का हृदय होता है
5. (b) एक एलगोरिथम में कम से कम एक अंतः निवेश होता है।
6. (b) यह स्पष्ट है।
7. (a) यह स्पष्ट है।
8. (a) यह स्पष्ट है।
9. (b) यह स्पष्ट है।
10. (b) $(10101)_2=(......)_{10}$

$$=1\times 2^4+0\times 2^3+1\times 2^2+0\times 2^1+1\times 2^o$$

= 16 + 0 + 4 + 0 + 1 = 21.

11. (d) $(10100111 0)_2=(......)_8$
आष्टिक पद्धति के लिये, बायें से तीन अंकों का समूह बनाते हैं

$\therefore$ दी गयी संख्या $= [(101)_2(001)_2(110)_2]_8 = (516)_8$.

12. (b) $(219)_8 = (....)_{10}$

$= 2\times 8^2 + 1\times 8^1 + 9\times 8^o = 128 + 8 + 9 = 145$.

13. (d) $(101101.10101)_2 = 1\times 2^5 + 0\times 2^4 + 1\times 2^3 + 1\times 2^2 + 0\times 2^1 + 1\times 2^0 + 1\times 2^{-1} + 0\times 2^{-2} + 1\times 2^{-3} + 0\times 2^{-4} + 1\times 2^{-5}$

$= 32 + 0 + 8 + 4 + 0 + 1 + \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{8} + 0 + \frac{1}{32}$

$= (45.65625)_{10}$.

14. (a) $(0.65625)_{10} = (?)_2$

	Carry	
$0.65625\times 2 = 1.31250$		
$0.31250\times 2 = 0.62500$	1	(MSB)
$0.62600\times 2 = 1.25000$	0	↓
$0.25000\times 2 = 0.50000$	1	↓
$0.50000\times 2 = 1.00000$	0	↓
$0.00000\times 2 = 0.00000$	1	(LSB)

$(0.65625)_{10} = (0.10101)_2$

15. (b) केन्द्रीय प्रक्रिया इकाई (CPU).
16. (c) समाकलित परिपथ (integrated circuit)
17. (c) रेंडम एक्सेस मैमोरी
18. (c) $(473)_8 = (?)_{10} = 3\times 8^0 + 7\times 8^1 + 4\times 8^2$

$= 3\times 1 + 56 + 256 = 59 + 256$

$(473)_8 = (315)_{10}$.

19. (b) $(5473.64)_8 = (?)_2$

$(5473.64)_8 =$

5	4	7	3	•	6	4
101	100	111	011	•	110	100

$(5473.64)_8 = (1011001110\ 11.110100)_2$.

20. (c) $(0.3125)_{10} = (?)_2$

$0.3125\times 2 = 0.6250$	0	(MSB)
$0.6250\times 2 = 1.2500$	1	↓
$0.2500\times 2 = 0.5000$	0	↓
$0.50000\times 2 = 1.0000$	1	(LSB)
$0.0000\times 2 = 0.0000$		

$(0.3125)_{10} = (0.0101)_2$.

21. (d) $(1217)_8 = (?)_{10}$

$= 1\times 8^3 + 2\times 8^2 + 1\times 8^1 + 7\times 8^0$

$= 512 + 128 + 8 + 7 = 655$.

22. (a) $(0.225)_{10} = (?)_8$

$0.225\times 8 = 1.80$	1	(MSB)
$0.80\times 8 = 6.40$	6	↓
$0.40\times 8 = 3.20$	3	↓
$0.20\times 8 = 1.60$	1	↓
$0.60\times 8 = 4.80$	4	↓
$0.80\times 8 = 6.40$	6	(LSB)

6 आंकिक स्थानों तक

$(0.225)_{10} = (0.163146)_8$ 6 आंकिक स्थानों तक।

23. (d) $(110011.11)_2 = (?)_{10}$

$= 1\times 2^0 + 1\times 2^1 + 0\times 2^2 + 0\times 2^3 + 1\times 2^4 + 1\times 2^5 + 1\times 2^{-1} + 1\times 2^{-2}$

$= 1 + 2 + 0 + 0 + 16 + 32 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$

$= 51 + 0.5 + 0.25 = (51.75)_{10}$.

24. (b) $(0.10100110)_2 = (?)_8$

$= 0.$ 101 001 100 → 5 1 4

$= (0.514)_8$

$(0.10100110)_2 = (0.514)_8$.

25. (d) $(1101.011)_2 = (?)_8$

$= 1101.011$

$=$ 001 101 . 011 → 1 5 . 3

$(1101.011)_2 = (15.3)_8$.

26. (b) $(101010)_2 = (?)_{10}$

$= 0\times 2^0 + 1\times 2^1 + 0\times 2^2 + 1\times 2^3 + 0\times 2^4 + 1\times 2^5$

$= 0 + 2 + 0 + 8 + 0 + 32 = 42$.

27. (b) $(2432)_8 = (?)_{16}$

$= 010$ 100 011 010

$=$ (0101 0001 1010) → 5 1 A

$= (51A)_{16}$

$(2432)_8 = (51A)_{16}$.

28. (c) $(75.5)_8 = (?)_{10}$

$= 5\times 8^0 + 7\times 8^1 + 5\times 8^{-1}$

$= 5\times 1 + 56 + \frac{5}{8} = 61 + 0.625 = (61.625)_{10}$

$(75.5)_8 = (61.625)_{10}$.

29. (b) $(1100.1011)_2 = (?)_{10}$

$= 0\times 2^0 + 0\times 2^1 + 1\times 2^2 + 1\times 2^3 + 1\times 2^{-1} + 0\times 2^{-2} + 1\times 2^{-3} + 1\times 2^{-4}$

$= 0 + 0 + 4 + 8 + \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$

$= 12 + 0.5 + 0.125 + 0.0625$

$(1100.1011)_2 = (12.6875)_{10}$.

30. (a) $(1011.10101)_2 = (?)_{10}$

$= 1\times 2^3 + 0\times 2^2 + 1\times 2^1 + 1\times 2^0 + 1\times 2^{-1} + 0\times 2^{-2} + 1\times 2^{-3} + 0\times 2^{-4} + 1\times 2^{-5}$

$= 8 + 0 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{8} + 0 + \frac{1}{32} = (11.65625)_{10}$.

31. (b) एक किलोबाइट में 1024 बाइट होते हैं
32. (c) एक बाइट में 8 बिट्स होते हैं
33. (c) यह स्पष्ट है।

द्विआधारी संक्रियायें

1. (a) माना $S = \{a_i\}_{i=1,2,...n}$

क्रमविनिमेय संक्रियाओं के लिये $a_i * a_j = a_j * a_i$ .....(i)

$\forall i, j = 1, 2, ...n$

जहाँ * द्विआधारी संक्रिया को प्रदर्शित करता है

$\therefore$ $S \times S$ में विभिन्न अवयवों की संख्या अर्थात् $\{a_i\}_{i=1,2,....n} \times \{a_i\}_{i=1,2,....n}$ (i) के आधार पर

$= n\{(a_1, a_1), (a_1, a_2).....(a_1, a_n), (a_2, a_2), (a_2, a_3), ...(a_2, a_n), ...(a_{n-1}, a_{n-1}), (a_{n-1}, a_n), (a_n, a_n)\}$

$= n + (n-1) + (n-2) + ... + 2 + 1 = \frac{n(n+1)}{2}$

$\therefore$ क्रमविनिमेय द्विआधारी संक्रियाओं की संख्या

= (i) द्वारा फलन $f : S \times S \to S$ की संख्या

$= n.n.n.... \frac{n(n+1)}{2}$ बार $= n^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

2. (b) S पर कुल द्विआधारी संक्रियायें = फलन $f : S \times S \to S$ की संख्या

$= n.n.n.......\{(n \times n)$ बार$\} = n.n.....(n^2$ बार$) = n^{n^2}$

$\therefore$ अद्विआधारी संक्रियाओं की संख्या

= (कुल द्विआधारी संक्रियाओं की संख्या) – (क्रमविनिमेय द्विआधारी संक्रियाओं की संख्या)

$= n^{n^2} - n^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

3. (b) जब समुच्चय S पर द्विआधारी संक्रिया * के लिये संयोजन तालिका के अवयव विकर्ण (leading diagonal) (जो ऊपरी बायें कोने से प्रारम्भ होकर नीचे दॅाये कोने पर समाप्त होता है) के सापेक्ष सममित हो, तब $a_i * a_j = a_j * a_i \ \forall a_i, a_j \in S$

$\therefore$ S पर * क्रमविनिमेय है।

4. (c) माना संक्रिया (–) के लिये $a_i, a_j, a_k \in S$,

$a_i - a_j \neq a_j - a_i$

$\therefore$ व्यवकलन (Subtraction) क्रमविनिमेय नहीं हैं

$(a_i - a_j) - a_k \neq a_i - (a_j - a_k)$

$\therefore$ व्यवकलन साह्चर्य नहीं है

5. (c) $a + b = b + a$ क्रमविनिमेय नियम कहलाता है।

6. (a) जब समुच्चय S पर द्विआधारी संक्रिया * के लिये संयोजन तालिका की किसी भी पंक्ति, तालिका की सबसे ऊपरी पंक्ति के सम्पाती होती है।

$\Rightarrow \alpha * a_i = a_i, \alpha * a_j = a_j, \alpha * a_k = a_k \ \forall \alpha, a_i, a_j, a_k \in S$

$\Rightarrow$ * के लिये α बाँया तत्समक है।

* के लिये S बाँया तत्समक अवयव रखता है

7. (b) दिये गये प्रतिबंध के लिये,

$a_i * \alpha = a_i, a_j * \alpha = a_j, \ a_k * \alpha = a_k \ \ \forall a_i, a_j, a_k, \alpha \in S$

$\Rightarrow$ * के लिये α दाँया तत्समक है।

$\therefore$ * के लिये S दाँया तत्समक अवयव रखता है

8. (c) $a * b = a^2 b$

$b * a = b^2 a$ व $a^2 b \neq b^2 a$, $\therefore$ $a * b \neq b * a; a, b \in R$.

$\therefore$ R पर * क्रमविनिमेय नहीं है

अब, $a \, o \, b = a^b$

$b \, o \, a = b^a \neq a^b$

$\therefore$ $boa \neq aob$

$\therefore$ o क्रमविनिमेय नहीं है

$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = (B - A) \cup (A - B) = B \Delta A$

$\therefore$ अतः $P(S)$ पर Δ क्रमविनिमेय है

9. (c) चूँकि S पर द्विआधारी संक्रिया $S \times S$ से S पर फलन है अतः S पर कुल द्विआधारी संक्रियाओं की संख्या, $S \times S$ से S पर कुल फलनों की संख्या के बराबर होगी, जो कि n^{n^2} है।

10. (a) चूँकि, $a * b = 1 + ab = 1 + ba = b * a$

R पर * क्रमविनिमेय है।

किसी $a, b, c \in R$, के लिये,

$(a * b) * c = (1 + ab) * c = 1 + (1 + ba)c = 1 + c + abc$

व $a * (b * c) = a * (1 + bc) = 1 + a(1 + bc) = 1 + a + abc$

$\therefore$ $(a * b) * c \neq a * (b * c)$

$\therefore$ R पर * साहचर्य नहीं है।

Critical Thinking Questions

1. (c) यह स्पष्ट है।

2. (c) $(1101101)_2$

$= 1 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$

$= 64 + 32 + 0 + 8 + 4 + 0 + 1 = 109.$

3. (a) $(264)_8 = (.......)_{10} = 2 \times 8^2 + 6 \times 8^1 + 4 \times 8^0$

$= 128 + 48 + 4 = 180.$

4. (b) $(785)_{10} = (........)_{16}$

16	785	
16	49	1
	3	1
		3

$\therefore (785)_{10} = (311)_{16}$.

5. (a) माना एक द्विआधारी संक्रिया o जो z पर $a \, o \, b = a + b - ab$ द्वारा परिभाषित है, के लिये तत्समक अवयव e है।

तब $a \, o \, e = a = e \, o \, a \ \ \forall \ a \in z$

$\Rightarrow a + e - ae = a \ \ \forall \ \ a \in z \ \Rightarrow e(1 - a) = 0 \ \forall \ \ a \in z$

$\Rightarrow e = 0$.

अतः द्विआधारी संक्रिया o तथा z के लिये तत्समक अवयव 0 है।

माना $a \in z$ का प्रतिलोम x है, तब $a \, o \, x = x \, o \, a = 0$

$\Rightarrow a + x - ax = 0 \ \Rightarrow x(1 - a) = -a$

$\Rightarrow x = \frac{a}{a - 1}$ $(\because a \neq 1)$

इस प्रकार, $a(\neq 1) \in z$ का प्रतिलोम $\frac{a}{a-1}$ है।

संगणना तथा द्विआधारी संक्रियायें

SET Self Evaluation Test -35

1. WHILE-DO नियंत्रण संरचना में लूप का क्रियान्वयन कम से कम होता है [DCE 1995]
   (a) तीन बार (b) दो बार
   (c) एक बार (d) इनमें से कोई नहीं

2. नियंत्रण संरचना IF-THEN है [DCE 1994]
   (a) बहुचयन (b) द्विचयन
   (c) एकल चयन (d) इनमें से कोई नहीं

3. द्विआधारी पद्धति में 74.1875 है [DCE 2001]
   (a) 10010010.0011 (b) 1001010.0011
   (c) 1001010.0101 (d) 1001100.0101

4. द्विआधारी संख्या 111001 का आष्टिक समतुल्य है [DCE 1999]
   (a) 69 (b) 70
   (c) 71 (d) 82

5. द्विआधारी संक्रिया * जो, $a * b = \frac{ab}{2}$, $a, b \in Q_0$ (अशून्य परिमेय संख्याओं का समुच्चय है) द्वारा परिभाषित है, के लिये तत्समक अवयव है
   (a) 1 (b) 0
   (c) 2 (d) इनमें से कोई नहीं

AS Answers and Solutions

(SET - 35)

1. (d) यह स्पष्ट है।

2. (c) यह स्पष्ट है।

3. (b) पूर्णांक भाग के लिये

2	74	–
2	37	0
2	18	1
2	9	0
2	4	1
2	2	0
	1	0
		1

$= (1001010)_2$

भिन्नात्मक भाग के लिये,

$$\begin{array}{r} 0.1875 \\ \times \quad 2 \\ \hline \mathbf{0}.3750 \\ \times \quad 2 \\ \hline \mathbf{0}.7500 \\ \times \quad 2 \\ \hline \mathbf{1}.5000 \\ \times \quad 2 \\ \hline \mathbf{1}.0000 \end{array} = (0.0011)_2$$

अतः 74.1875 का द्विआधारी $(1001010.0011)_2$ है।

4. (c) $(111001)_2 =$

1 1 1 0 0 1

$1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 2^0 \quad 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$

↓ ↓

7 1

$= (71)_8$.

5. (c) माना Q_0 पर द्विआधारी संक्रिया * जो $a * b = \frac{ab}{2}$ के द्वारा परिभाषित है, के लिये तत्समक अवयव e है,

तब $a * e = a = e * a$ सभी $a \in Q_0$ के लिये

$\Rightarrow \frac{ae}{2} = a \;\; \forall \; a \in Q_0$

$\Rightarrow e = 2$.

* * *