સમાંતર શ્રેણી 5

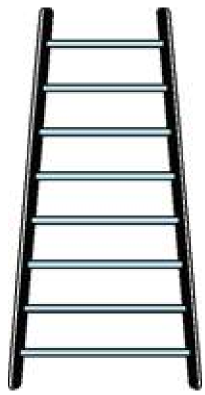
5.1 પ્રાસ્તાવિક

તમે એ ચોક્કસ નોંધ્યું હશે કે, પ્રકૃતિમાં અનેક વસ્તુઓ, સૂરજમુખીના ફૂલની પાંદડીઓ, મધપૂડાનાં છિદ્રો, મકાઈના ડોડા પરના દાણા, અનાનસ અને પાઈ કોન (pine cone) પરના કુંતલ વગેરે એક નિશ્ચિત તરાહને અનુસરે છે.

હવે આપણે રોજિંદા જીવનમાં અનુભવવામાં આવતી કેટલીક તરાહ જોઈએ. અત્રે આવાં કેટલાંક ઉદાહરણો આપેલ છે.

(i) રીનાએ નોકરી માટે અરજી કરી અને નોકરી માટે તેની પસંદગી થઈ. તેનો શરૂઆતનો માસિક પગાર ₹ 8000 છે અને પછી પ્રતિ વર્ષ માસિક પગાર વધારો ₹ 500 નક્કી થાય છે. તેનો ₹ માં માસિક પગાર પ્રથમ, દ્વિતીય, તૃતીય, ... વર્ષે અનુક્રમે 8000, 8500, 9000, ... હશે.

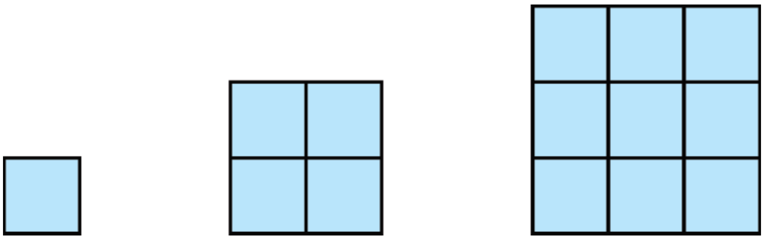
(ii) એક નિસરણીના પગથિયાંની લંબાઈ નીચેથી ઉપર તરફ એકસરખી 2 સેમી ઘટતી જાય છે. (જુઓ આકૃતિ 5.1.) સૌથી નીચેના પગથિયાની લંબાઈ 45 સેમી છે. તળિયાથી ટોચ તરફના પહેલા, બીજા, ત્રીજા, ... 8માં પગથિયાની (સેમીમાં) લંબાઈ અનુક્રમે, 45, 43, 41, 39, 37, 35, 33, 31 થાય.



આકૃતિ 5.1

(iii) કોઈ બચત યોજનામાં મૂકેલ રકમ દર 3 વર્ષે $\frac{5}{4}$ ગણી થાય છે. ₹ 8000ના રોકાણની (₹ માં) પાકતી રકમ 3, 6, 9 અને 12 વર્ષને અંતે અનુક્રમે 10,000, 12,500, 15,625 અને 19,531.25 થાય.

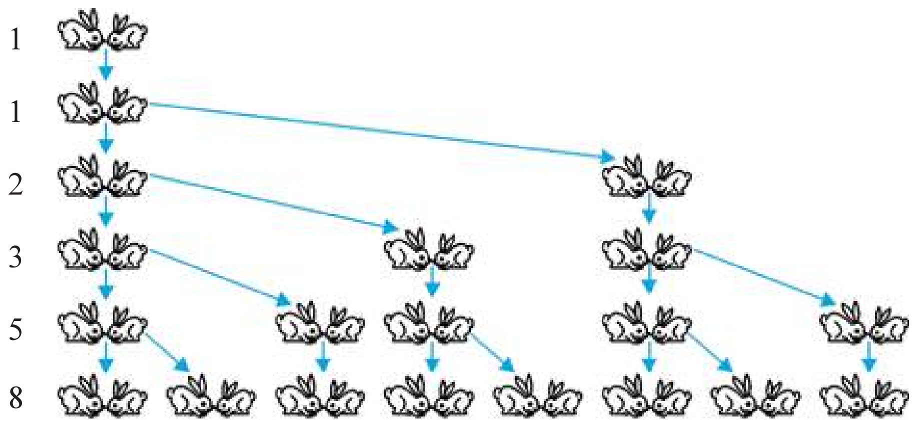
(iv) 1, 2, 3, ... એકમ લંબાઈના ચોરસમાં એકમ લંબાઈના ચોરસની સંખ્યા અનુક્રમે 1^2, 2^2, 3^3, ... છે. (જુઓ આકૃતિ 5.2.)



આકૃતિ 5.2

(v) શકીલા જ્યારે તેની પુત્રી 1 વર્ષની હતી ત્યારે તેના ગલ્લામાં ₹ 100 મૂકે છે અને પછી તે દરેક વર્ષે તેમાં ₹ 50નો ઉમેરો કરે છે. તેના પહેલા, બીજા, ત્રીજા, ચોથા... જન્મદિવસે તેના ગલ્લાની (₹ માં) રકમ અનુક્રમે 100, 150, 200, 250, ... હતી.

(vi) સસલાંનું એક જોડું પ્રથમ મહિને પ્રજનન કરવા માટે પરીપક્વ નથી. સસલાંની પ્રત્યેક નવી જોડ બીજા અને આવનારા દરેક મહિને એક જોડ સસલાંને જન્મ આપે છે (જુઓ આકૃતિ 5.3). માની લો કે, કોઇ સસલું મૃત્યુ પામતું નથી, તો પહેલા, બીજા, ત્રીજા, ..., છઠ્ઠા મહિનાના પ્રારંભે સસલાંની જોડની સંખ્યા અનુક્રમે, 1, 1, 2, 3, 5, 8 હશે.



આકૃતિ 5.3

ઉપરનાં ઉદાહરણોમાં આપણે કેટલીક તરાહ જોઈ શકીએ છીએ. કેટલાકમાં આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે પુરોગામી પદમાં કોઈ અચળ સંખ્યા ઉમેરી પછીનું પદ મેળવી શકાય છે. કેટલાકમાં અચળ સંખ્યા વડે ગુણવાથી, જ્યારે બીજા કેટલાકમાં તે ક્રમિક સંખ્યાના વર્ગ સ્વરૂપે વગેરે રીતે જણાય છે.

આ પ્રકરણમાં આપણે જેમાં પુરોગામી પદમાં અચળ સંખ્યા ઉમેરવાથી અનુગામી પદ મળે છે, એવી એક તરાહની ચર્ચા કરીશું. આપણે એ પણ જોઈશું કે તેનું n મું પદ અને n ક્રમિક પદોનો સરવાળો કેવી રીતે શોધી શકાય અને આ જ્ઞાનનો ઉપયોગ કેટલાક રોજિંદા પ્રશ્નોના ઉકેલ મેળવવા કરીશું.

5.2 સમાંતર શ્રેણી :

નીચે આપેલ સંખ્યાઓની યાદી પર વિચાર કરો :

(i) 1, 2, 3, 4, ...

(ii) 100, 70, 40, 10, ...

(iii) – 3, –2, –1, 0, ...

(iv) 3, 3, 3, 3, ...

(v) –1.0, –1.5, –2.0, –2.5, ...

યાદીમાં આપેલ દરેક સંખ્યાને **પદ** કહેવાય.

ઉપરની યાદીમાં એક પદ આપેલ હોય તો પછીનું પદ તમે લખી શકશો ? જો હા, તો કેવી રીતે ? કદાચ કોઈ તરાહ કે નિયમનો ઉપયોગ કરી તમે તે કરી શકો.

ચાલો, આપણે અવલોકન કરીએ અને નિયમ લખીએ:

(i) માં પ્રત્યેક પદ, તેના આગળના પદથી 1 વધુ છે.

(ii) માં પ્રત્યેક પદ, તેના આગળના પદથી 30 ઓછું છે.

(iii) માં પ્રત્યેક પદ મેળવવા તેની આગળના પદમાં 1 ઉમેરો.

(iv) માં પ્રત્યેક પદ 3 છે અર્થાત્ દરેક પદ મેળવવા તેની આગળના પદમાં 0 ઉમેરો (કે, તેમાંથી 0 બાદ કરો).

(v) માં પ્રત્યેક પદ મેળવવા તેની આગળના પદમાં -0.5 ઉમેરો (અર્થાત્, તેમાંથી 0.5 બાદ કરો.)

ઉપરની યાદીમાં આપે જોયું કે પ્રત્યેક પદ મેળવવા તેની આગળના પદમાં કોઈ નિશ્ચિત સંખ્યા ઉમેરવામાં આવે છે. સંખ્યાઓની આવી યાદી માટે કહી શકાય કે આ પદો **સમાંતર શ્રેણી (Arithmetic Progression અથવા A.P.)** બનાવે છે.

*આમ, **જેમાં પ્રથમ પદ સિવાયના પ્રત્યેક પદ, આગળના પદમાં નિશ્ચિત સંખ્યા ઉમેરી મેળવી શકાય તેવી સંખ્યાઓની યાદી એ સમાંતર શ્રેણી છે.***

*આ નિશ્ચિત સંખ્યાને **સમાંતર શ્રેણીનો સામાન્ય તફાવત** કહેવાય છે. યાદ રાખો કે, તે **ધન, ઋણ અથવા શૂન્ય** હોઈ શકે છે.*

ચાલો, આપણે સમાંતર શ્રેણીના પ્રથમ પદને a_1, બીજા પદને a_2, ... n માં પદને a_n વડે દર્શાવીએ અને સામાન્ય તફાવતને d વડે દર્શાવીએ. આથી, સમાંતર શ્રેણી $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ માટે

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = ... = a_n - a_{n-1} = d$$

સમાંતર શ્રેણીનાં કેટલાંક વધારે ઉદાહરણ નીચે પ્રમાણે છે :

(a) એક શાળામાં સવારની સભામાં એક હારમાં ઊભેલા કેટલાક વિદ્યાર્થીઓની ઊંચાઇ (સેમીમાં) 147, 148, 149, ..., 157 છે.

(b) કોઈ શહેરના જાન્યુઆરી મહિનાના એક સપ્તાહના ન્યૂનતમ તાપમાનની વધતા ક્રમમાં નોંધણી (ડિગ્રી સેલ્સિયસમાં) –3.1, –3.0, –2.9, –2.8, –2.7, –2.6, –2.5 છે.

(c) ₹ 1000 પર અચળ 5 ટકાના દરે લોનના પૈસા ચૂકવ્યા બાદ (₹ માં) બાકી રહેતી રકમ 950, 900, 850, 800, ..., 50 છે.

(d) કોઈ શાળામાં 1 થી 12 ધોરણના પ્રથમ ક્રમે આવેલ વિદ્યાર્થીઓને (₹ માં) અપાતી રોકડ ઇનામની રકમ 200, 250, 300, 350, ..., 750 છે.

(e) જો પ્રત્યેક મહિને ₹ 50ની બચત કરાય તો 10 મહિનામાં થયેલ બચતની રકમ (₹ માં) દર માસના અંતે 50, 100, 150, 200, 250, 300, 350, 400, 450, 500 હશે.

ઉપરની યાદી શા માટે સમાંતર શ્રેણી છે. એ સમજાવવાનું તમારા ઉપર સ્વાધ્યાય તરીકે છોડવામાં આવે છે.

તમે જોઈ શકો છો કે,

પ્રથમ પદ a અને સામાન્ય તફાવત d લેતાં, $a, a + d, a + 2d, a + 3d, ...$ સમાંતર શ્રેણી દર્શાવે છે. આને સમાંતર શ્રેણીનું વ્યાપક સ્વરૂપ કહેવાય છે.

આપણે નોંધીએ કે ઉપરનાં ઉદાહરણો (a) થી (e) માં પદની સંખ્યા ***નિશ્ચિત (finite)*** છે. આવી સમાંતર શ્રેણીને ***સાન્ત (finite)*** સમાંતર શ્રેણી કહેવાય. વળી આપણે નોંધીએ કે આ પ્રત્યેક સમાંતર શ્રેણીમાં અંતિમ પદ છે. આ વિભાગમાં આપેલ ઉદાહરણ (i) થી (v) માંની એક પણ સમાંતર શ્રેણી સાન્ત શ્રેણી નથી. આથી, તેને ***અનંત સમાંતર શ્રેણી (Infinite Arithmetic Progression)*** *કહેવાય.* આવી સમાંતર શ્રેણીમાં અંતિમ પદ ના મળે.

હવે, એક સમાંતર શ્રેણી જાણવા કેટલી ન્યૂનતમ માહિતીની જરૂર પડે? શું પ્રથમ પદ જાણવું પૂરતું છે? કે માત્ર સામાન્ય તફાવતની જાણકારી પૂરતી છે? તમે જોઈ શકશો કે આ બંને માહિતી, પ્રથમ પદ a અને સામાન્ય તફાવત d બંને જ્ઞાત હોય તે જરૂરી છે.

ઉદાહરણ તરીકે પ્રથમ પદ $a = 6$ અને સામાન્ય તફાવત $d = 3$ હોય તેવી સમાંતર શ્રેણી,

6, 9, 12, 15, ..., બને.

અને $a = 6$ અને સામાન્ય તફાવત $d = -3$ હોય તેવી સમાંતર શ્રેણી,

6, 3, 0, –3, ..., બને.

આ જ રીતે, જ્યારે,

$a = -7$, $d = -2$, ત્યારે સમાંતર શ્રેણી $-7, -9, -11, -13, \ldots$

$a = 1.0$, $d = 0.1$, ત્યારે સમાંતર શ્રેણી $1.0, 1.1, 1.2, 1.3, \ldots$

$a = 0$, $d = 1\frac{1}{2}$, ત્યારે સમાંતર શ્રેણી $0, 1\frac{1}{2}, 3, 4\frac{1}{2}, 6, \ldots$

$a = 2$, $d = 0$, ત્યારે સમાંતર શ્રેણી $2, 2, 2, 2, \ldots$

આમ, જો a અને d આપેલ હોય તો સમાંતર શ્રેણી લખી શકાય. તેનાથી વિપરીત પ્રક્રિયા માટે શું કહી શકો? અર્થાત્, જો તમને સંખ્યાઓની યાદી આપેલ હોય તો તમે કહી શકો કે તે એક સમાંતર શ્રેણી છે અને તે શ્રેણીના a અને d શોધી શકો? પ્રથમ પદ a હોવાથી, તે સહેલાઈથી લખી શકાય. આપણે જાણીએ છીએ કે, કોઈ પદમાં અચળ સંખ્યા ઉમેરી પછીનું પદ મેળવી શકાય. તે ઉમેર્યા બાદ કોઈ પણ પદમાંથી આગળના પદની બાદબાકી કરતાં d મળી શકે, અર્થાત્, આ રીતે મળેલ પદ સમાંતર શ્રેણી માટે સમાન હોવું જોઈએ.

ઉદાહરણ તરીકે સંખ્યાઓની યાદી

6, 9, 12, 15, ..., માટે

$$a_2 - a_1 = 9 - 6 = 3,$$
$$a_3 - a_2 = 12 - 9 = 3,$$
$$a_4 - a_3 = 15 - 12 = 3$$

અહીં કોઈ પણ બે ક્રમિક પદોનો તફાવત પ્રત્યેક વિકલ્પમાં 3 છે. આથી, આપેલ પદ સમાંતર શ્રેણીનાં પદ છે. તેનું પ્રથમ પદ $a = 6$ અને સામાન્ય તફાવત $d = 3$ છે.

સંખ્યાઓની યાદી

6, 3, 0, –3, ..., માટે

$$a_2 - a_1 = 3 - 6 = -3,$$
$$a_3 - a_2 = 0 - 3 = -3,$$
$$a_4 - a_3 = -3 - 0 = -3$$

આ જ પ્રમાણે, આ પણ એક સમાંતર શ્રેણી છે. તેનું પ્રથમ પદ 6 અને સામાન્ય તફાવત –3 છે.

વ્યાપક રીતે, સમાંતર શ્રેણી $a_1, a_2, \ldots a_n$ માટે, a_{k+1} અને a_k એ અનુક્રમે $k+1$ માં અને k માં પદ હોય, તો

$$d = a_{k+1} - a_k$$

આપેલ સમાંતર શ્રેણીમાં d શોધવા પ્રત્યેક $a_2 - a_1$, $a_3 - a_2$, $a_4 - a_3 \ldots$ જાણવાની જરૂર નથી. આમાંથી કોઈ પણ એકની કિંમત શોધવી પર્યાપ્ત છે.

1, 1, 2, 3, 5, ... આ યાદીના આંકડા તપાસો. અહીં, કોઈ પણ બે ક્રમિક પદ વચ્ચેનો તફાવત સરખો નથી. આથી, તે સમાંતર શ્રેણી નથી.

આપણે નોંધીએ કે, 6, 3, 0, -3, ... સમાંતર શ્રેણીમાં d શોધવા આપણે 3 માંથી 6 ની બાદબાકી કરી, નહીં કે 6 માંથી 3 ની બાદબાકી. અર્થાત્ d શોધવા $(k + 1)$ માં પદમાંથી k માં પદની બાદબાકી કરવી જોઈએ. પછી ભલે $(k + 1)$ મું પદ નાનું કેમ ના હોય.

ચાલો, આપણે કેટલાંક ઉદાહરણ દ્વારા આ સંકલ્પના વધુ સ્પષ્ટ કરીએ.

ઉદાહરણ 1 : સમાંતર શ્રેણી $\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \ldots$ માટે પ્રથમ પદ a અને સામાન્ય તફાવત d લખો.

ઉકેલ : અહીં, $a = \frac{3}{2}$, $d = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1$

આપણે નોંધીએ કે, **જો આપણે જાણતા હોઈએ કે, આપેલ પદો સમાંતર શ્રેણીમાં છે, તો કોઈ પણ બે ક્રમિક પદના તફાવત દ્વારા d શોધી શકીએ.**

ઉદાહરણ 2 : નીચેનામાંથી કઈ સંખ્યાની યાદી સમાંતર શ્રેણી છે? જો તે સમાંતર શ્રેણી હોય તો તેના પછીનાં બે પદ લખો :

(i) 4, 10, 16, 22, ...
(ii) 1, – 1, – 3, – 5, ...
(iii) – 2, 2, – 2, 2, – 2, ...
(iv) 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, ...

ઉકેલ : (i) અહીં,

$$a_3 - a_1 = 10 - 4 = 6$$
$$a_3 - a_2 = 16 - 10 = 6$$
$$a_4 - a_3 = 22 - 16 = 6$$

અર્થાત્, $a_{k+1} - a_k$ હંમેશાં સમાન રહે છે.

આથી, આપેલ સંખ્યાની યાદી સમાંતર શ્રેણી બનાવે છે અને સામાન્ય તફાવત $d = 6$ છે.

આપણે સ્વીકારી લઈએ છીએ કે, આ જ તરાહ આગળ પણ ચાલશે.

પછીનાં બે પદ : 22 + 6 = 28 અને 28 + 6 = 34

(ii) $a_2 - a_1 = -1 - 1 = -2$

$$a_3 - a_2 = -3 - (-1) = -3 + 1 = -2$$
$$a_4 - a_3 = -5 - (-3) = -5 + 3 = -2$$

અર્થાત્, $a_{k+1} - a_k$ હંમેશાં સમાન રહે છે.

આથી, આપેલ સંખ્યાની યાદી સમાંતર શ્રેણી બનાવે છે તથા સામાન્ય તફાવત $d = -2$ છે.

આપણે સ્વીકારી લઈએ છીએ કે, આ જ તરાહ આગળ પણ ચાલશે.

પછીનાં બે પદ : $-5 + (-2) = -7$ અને $-7 + (-2) = -9$

(iii) $a_2 - a_1 = 2 - (-2) = 2 + 2 = 4$

$a_3 - a_2 = -2 \ \ -2 = -4$

આમ, $a_2 - a_1 \neq a_3 - a_2$. આથી, આપેલ સંખ્યાની યાદી સમાંતર શ્રેણી બનાવતી નથી.

(iv) $a_2 - a_1 = 1 - 1 = 0$

$a_3 - a_2 = 1 - 1 = 0$

$a_4 - a_3 = 2 - 1 = 1$

અહીં, $a_2 - a_1 = a_3 - a_2$ પરંતુ $a_2 - a_1 \neq a_4 - a_3$.

આથી, આપેલ સંખ્યાની યાદી સમાંતર શ્રેણી બનાવતી નથી.

સ્વાધ્યાય 5.1

1. નીચે આપેલ સ્થિતિમાંથી કઈ સ્થિતિમાં સંખ્યાની યાદી સમાંતર શ્રેણી બને અને કેમ?

(i) ટૅક્સીનું ભાડું; પ્રથમ કિલોમીટર માટે ₹ 15 અને પછીના વધારાના પ્રત્યેક કિલોમીટર માટે ₹ 8 છે.

(ii) નળાકારમાં રહેલ હવાનું પ્રમાણ; હવા કાઢવાના પંપ દ્વારા દર વખતે નળાકારની બાકી રહેલ હવાનો $\frac{1}{4}$ ભાગ બહાર કાઢે છે.

(iii) પ્રત્યેક મીટરના ખોદકામ બાદ એક કૂવો ખોદવા માટે લાગતો ખર્ચ; પ્રથમ મીટરના ₹ 150 અને પછીના પ્રત્યેક મીટર દીઠ ₹ 50 પ્રમાણે વધતો જાય છે.

(iv) 8 % ના વાર્ષિક ચક્રવૃદ્ધિ દરથી શરૂઆતની રકમ ₹ 10000 મૂકેલ હોય, તો દર વર્ષે ખાતામાં જમા થતી રકમ

2. જ્યારે પ્રથમ પદ a અને સામાન્ય તફાવત d નાં મૂલ્યો નીચે પ્રમાણે હોય ત્યારે સમાંતર શ્રેણીનાં પ્રથમ ચાર પદ શોધો :

(i) $a = 10, d = 10$ (ii) $a = -2, d = 0$

(iii) $a = 4, d = -3$ (iv) $a = -1, d = \frac{1}{2}$

(v) $a = -1.25, d = -0.25$

3. નીચે આપેલ સમાંતર શ્રેણી માટે, પ્રથમ પદ અને સામાન્ય તફાવત શોધો :

(i) $3, 1, -1, -3, \ldots$ (ii) $-5, -1, 3, 7, \ldots$

(iii) $\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{9}{3}, \frac{13}{3}, \ldots$ (iv) $0.6, 1.7, 2.8, 3.9, \ldots$

4. નીચેનામાંથી કઈ શ્રેણી સમાંતર શ્રેણી છે? જો તે સમાંતર શ્રેણી બનાવે તો સામાન્ય તફાવત d અને પછીનાં ત્રણ પદ લખો :

(i) $2, 4, 8, 16, \ldots$ (ii) $2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, \ldots$

(iii) $-1.2, -3.2, -5.2, -7.2, \ldots$ (iv) $-10, -6, -2, 2, \ldots$

(v) $3, 3+\sqrt{2}, 3+2\sqrt{2}, 3+3\sqrt{2}, \ldots$

(vi) 0.2, 0.22, 0.222, 0.2222, ...

(vii) 0, – 4, – 8, –12, ...

(viii) $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \ldots$

(ix) 1, 3, 9, 27, ...

(x) $a, 2a, 3a, 4a, \ldots$

(xi) $a, a^2, a^3, a^4, \ldots$

(xii) $\sqrt{2}, \sqrt{8}, \sqrt{18}, \sqrt{32}, \ldots$

(xiii) $\sqrt{3}, \sqrt{6}, \sqrt{9}, \sqrt{12}, \ldots$

(xiv) $1^2, 3^2, 5^2, 7^2, \ldots$

(xv) $1^2, 5^2, 7^2, 73, \ldots$

5.3 સમાંતર શ્રેણીનું n મું પદ

ચાલો આપણે વિભાગ 5.1માં આપેલ ઉદાહરણમાં આપેલ માહિતી પ્રમાણે જ્યાં રીના એક નોકરી માટે અરજી કરે છે અને નિયુક્તિ પામે છે તે ઉદાહરણનો ફરી વિચાર કરીએ. તેને શરૂઆતમાં માસિક ₹ 8000 અને પછીના વર્ષે ₹ 500 નો ઈજાફો (વેતન વધારો) આપવાનું નક્કી થાય છે. પાંચમા વર્ષે તેનો માસિક પગાર કેટલો હશે?

આનો જવાબ શોધવા, બીજા વર્ષે તેનો માસિક પગાર કેટલો હશે તે જોઈએ.

બીજા વર્ષનો પગાર ₹ (8000 + 500) = ₹ 8500 હશે. આ જ રીતે, આપણે ત્રીજા, ચોથા અને પાંચમા વર્ષે પગારની માહિતી મેળવવા માટે આગળના વર્ષના માસિક પગારની રકમમાં ₹ 500 ઉમેરી શકાય.

આમ, ત્રીજા વર્ષે મળતો પગાર = ₹ (8500 + 500)

= ₹ (8000 + 500 + 500)

= ₹ (8000 + 2 × 500)

= ₹ [8000 + (**3 – 1**) × 500] (ત્રીજા વર્ષ માટે)

= ₹ 9000

ચોથા વર્ષે મળતો પગાર = ₹ (9000 + 500)

= ₹ (8000 + 500 + 500 + 500)

= ₹ (8000 + 3 × 500)

= ₹ [8000 + (**4 – 1**) × 500] (ચોથા વર્ષ માટે)

= ₹ 9500

પાંચમા વર્ષે મળતો પગાર = ₹ (9500 + 500)

= ₹ (8000 + 500 + 500 + 500 + 500)

= ₹ (8000 + 4 × 500)

= ₹ [8000 + (**5 – 1**) × 500] (પાંચમા વર્ષ માટે)

= ₹ 10000

જુઓ કે આપણને મળતી સંખ્યાઓની યાદી,

8000, 8500, 9000, 9500, 10,000, ... છે.

આ સંખ્યાઓ સમાંતર શ્રેણી બનાવે છે. (કેમ?)

હવે, ઉપરની સંખ્યાઓની યાદી જોઈ તમે કહી શકશો કે છઠ્ઠા વર્ષે તેનું માસિક વેતન કેટલું હશે? પંદરમા વર્ષે તેનું માસિક વેતન કેટલું હશે? અને માની લઈએ કે તે હજુ નોકરી કરે છે, તો 25માં વર્ષે તેનું માસિક વેતન કેટલું હશે? આનો જવાબ મેળવવા તમે દરેક વખતે આગળના વર્ષના વેતનમાં ₹ 500 ઉમેરશો. શું આ પ્રક્રિયાને આપણે વધુ ટૂંકી બનાવી શકીએ? ચાલો જોઈએ. જે રીતે વેતનના આંકડા ઉપર મેળવ્યા તે પરથી તમને થોડો ખ્યાલ તો આવ્યો જ હશે.

15માં વર્ષે મળતું વેતન = 14માં વર્ષે મળતું વેતન + ₹ 500

$$= ₹ \left[8000 + \underbrace{500 + 500 + \ldots + 500}_{13 \text{ વખત}}\right] + ₹\ 500$$

$$= ₹\ [8000 + 14 \times 500]$$

$$= ₹\ [8000 + (15 - 1) \times 500] = ₹\ 15{,}000$$

અર્થાત્, પ્રથમ વેતન + (15 – 1) × વાર્ષિક વેતન વધારો

આ જ રીતે, તેને 25માં વર્ષે મળતું માસિક વેતન

$$= ₹\ [8000 + (25 - 1) \times 500] = ₹\ 20{,}000$$

= પ્રથમ વેતન + (25 – 1) × વાર્ષિક વેતન વધારો

આ ઉદાહરણ પરથી તમને સમાંતર શ્રેણીનું 15મું પદ અથવા 25મું પદ અને વ્યાપક રીતે n મું પદ કઈ રીતે લખવું તેનો ખ્યાલ આવ્યો હશે.

ધારો કે, $a_1, a_2, a_3, \ldots$ સમાંતર શ્રેણી છે. તેનું પ્રથમ પદ a_1 એ a અને સામાન્ય તફાવત d છે.

તો, બીજું પદ, $a_2 = a + d = a + (2 - 1)\, d$

ત્રીજું પદ, $a_3 = a_2 + d = (a + d) + d = a + 2d = a + (3 - 1)\, d$

ચોથું પદ, $a_4 = a_3 + d = (a + 2d) + d = a + 3d = a + (4 - 1)\, d$

. . . .

. . . .

આમ, આપણે કહી શકીએ કે n મું પદ $a_n = a + (n - 1)\, d$.

આથી, ***પ્રથમ પદ a અને સામાન્ય તફાવત d હોય તેવી સમાંતર શ્રેણીનું n મું પદ $a_n = a + (n - 1)\, d$ દ્વારા મળે.***

a_n ને સમાંતર શ્રેણીનું વ્યાપક પદ પણ કહેવાય છે. જો સમાંતર શ્રેણીમાં m પદો હોય તો a_m તેનું અંતિમ પદ દર્શાવે છે. તેને ઘણી વખતે l દ્વારા પણ દર્શાવાય છે.

ચાલો, કેટલાંક ઉદાહરણો જોઈએ.

ઉદાહરણ 3 : સમાંતર શ્રેણી 2, 7, 12, ... નું 10 મું પદ શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $a = 2$, $d = 7 - 2 = 5$ અને $n = 10$

હવે, $a_n = a + (n - 1)\, d$

$a_{10} = 2 + (10 - 1) \times 5 = 2 + 45 = 47$

આથી, આપેલ સમાંતર શ્રેણીનું 10 મું પદ 47 છે.

ઉદાહરણ 4 : સમાંતર શ્રેણી 21, 18, 15... નું કયું પદ -81 હશે? વળી કોઈ પદ 0 હશે? સકારણ જવાબ આપો.

ઉકેલ : અહીં, $a = 21$, $d = 18 - 21 = -3$ અને ધારો કે $a_n = -81$

આપણે n નું મૂલ્ય શોધવું છે.

$a_n = a + (n - 1)\ d$ હોવાથી,

$$-81 = 21 + (n-1)(-3)$$

$$\therefore\ -81 = 24 - 3n$$

$$\therefore\ -105 = -3n$$

$$\therefore\ n = 35$$

આથી, આપેલ સમાંતર શ્રેણીનું 35મું પદ −81 થાય.

હવે, આપણે એ જાણવું છે કે $a_n = 0$ થાય તેવો ધન પૂર્ણાંક n શક્ય છે? જો આવો ધન પૂર્ણાંક n શક્ય હોય તો,

$$21 + (n-1)(-3) = 0$$

$$\therefore\ 3(n-1) = 21$$

$$\therefore\ n = 8$$

આથી, આઠમું પદ 0 બને.

ઉદાહરણ 5 : જેનું ત્રીજું પદ 5 અને 7 મું પદ 9 હોય એવી સમાંતર શ્રેણી શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $a_3 = a + (3 - 1)\ d = a + 2d = 5$ (1)

અને $a_7 = a + (7 - 1)\ d = a + 6d = 9$ (2)

સુરેખ સમીકરણયુગ્મ (1) અને (2) ને ઉકેલતાં,

$a = 3$ અને $d = 1$ મળે.

આથી, માંગેલ સમાંતર શ્રેણી 3, 4, 5, 6, 7, ... છે.

ઉદાહરણ 6 : ચકાસો કે 301 એ 5, 11, 17, 23, ... સંખ્યાની યાદીનું કોઈ પદ છે કે નહીં?

ઉકેલ : અહીં,

$a_2 - a_1 = 11 - 5 = 6$, $a_3 - a_2 = 17 - 11 = 6$, $a_4 - a_3 = 23 - 17 = 6$

$a_{k+1} - a_k$ નું મૂલ્ય $k = 1, 2, 3$ વગેરે માટે સમાન હોવાથી આપેલ સંખ્યાની યાદી સમાંતર શ્રેણી છે.

હવે, $a = 5$ અને $d = 6$.

ધારો કે, સમાંતર શ્રેણીનું n મું પદ 301 છે.

આપણે જાણીએ છીએ કે,

$$a_n = a + (n-1)\ d$$

આથી, $$301 = 5 + (n-1) \times 6$$

$$\therefore\ 301 = 6n - 1$$

$$\therefore\ n = \frac{302}{6} = \frac{151}{3}$$

પરંતુ, n ધન પૂર્ણાંક સંખ્યા જ હોવો જોઈએ. (કેમ?)

આથી, આપેલ યાદીનું કોઈ પણ પદ 301 ના હોઈ શકે.

ઉદાહરણ 7 : બે અંકની કેટલી સંખ્યાઓ 3 વડે વિભાજ્ય હશે ?

ઉકેલ : 3 વડે વિભાજ્ય બે અંકની સંખ્યાઓ :

12, 15, 18,..., 99 છે.

શું આ સમાંતર શ્રેણી છે ? હા. અહીં, $a = 12$, $d = 3$, $a_n = 99$.

$a_n = a + (n - 1)\, d$ હોવાથી,

$$99 = 12 + (n - 1) \times 3$$

$$\therefore \quad 87 = (n - 1) \times 3$$

$$\therefore \quad n - 1 = \frac{87}{3} = 29$$

$$\therefore \quad n = 29 + 1 = 30$$

આમ, 3 વડે વિભાજ્ય બે અંકના પૂર્ણાંકોની સંખ્યા 30 છે.

ઉદાહરણ 8 : સમાંતર શ્રેણી 10, 7, 4,..., –62 માં છેલ્લેથી (પ્રથમ પદ તરફ) 11મું પદ શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $a = 10$, $d = 7 - 10 = -3$, $l = -62$.

$$l = a + (n - 1)\, d$$

છેલ્લેથી 11મું પદ શોધવા, આપેલ સમાંતર શ્રેણીમાં કેટલાં પદ છે તે શોધીશું.

$$-62 = 10 + (n - 1)(-3)$$

$$\therefore \quad -72 = (n - 1)(-3)$$

$$\therefore \quad n - 1 = 24$$

$$\therefore \quad n = 25$$

આમ, આપેલ સમાંતર શ્રેણીમાં 25 પદ છે.

છેલ્લેથી 11મું પદ એ 15મું પદ બને. (આપણે નોંધીએ કે તે 14મું પદ નહિ હોય. કેમ ?)

આથી, $a_{15} = 10 + (15 - 1)(-3) = 10 - 42 = -32$

આથી, છેલ્લેથી 11મું પદ – 32 છે.

વૈકલ્પિક ઉકેલ :

જો આપેલ સમાંતર શ્રેણીના પદ ઊલટા ક્રમમાં લખીએ, તો $a = -62$ અને $d = 3$ (કેમ ?)

આથી, આ પ્રશ્ન a અને d નાં મૂલ્યો પરથી 11મું પદ શોધવાનો બને.

આથી, $a_{11} = -62 + (11 - 1) \times 3 = -62 + 30 = -32$

આથી, છેલ્લેથી માંગેલ 11 માં પદનું મૂલ્ય – 32 થાય.

ઉદાહરણ 9 : ₹ 1000ની રકમ 8 % વાર્ષિક સાદા વ્યાજ પર મૂકવામાં આવે છે. દરેક વર્ષને અંતે મળતા વ્યાજની ગણતરી કરો. શું આ વ્યાજ સમાંતર શ્રેણી બનાવે છે ? જો હા, તો 30 વર્ષના અંતે મળતા વ્યાજની ગણતરી કરો.

ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે, સાદા વ્યાજની ગણતરી માટે

$$\text{સાદું વ્યાજ} = \frac{P \times R \times T}{100} \text{ સૂત્રનો ઉપયોગ થાય છે.}$$

આથી, પ્રથમ વર્ષના અંતે વ્યાજ $= ₹\ \frac{1000 \times 8 \times 1}{100}$

$= ₹\ 80$

બીજા વર્ષના અંતે વ્યાજ $= ₹\ \frac{1000 \times 8 \times 2}{100}$

$= ₹\ 160$

ત્રીજા વર્ષના અંતે વ્યાજ $= ₹\ \frac{1000 \times 8 \times 3}{100}$

$= ₹\ 240$

આ જ રીતે, ચોથા, પાંચમા વગેરે વર્ષ માટે વ્યાજ મેળવી શકાય.

આથી, પહેલા, બીજા, ત્રીજા ... વર્ષના અંતે મળતા વ્યાજ અનુક્રમે 80, 160, 240, ... છે.

આ એક સમાંતર શ્રેણી છે કારણ કે બે ક્રમિક પદનો તફાવત 80 છે. અર્થાત્ $d = 80$. વળી, $a = 80$.

આથી, 30 વર્ષના અંતે મળતું વ્યાજ શોધવા આપણે a_{30} શોધીશું.

$$a_{30} = a + (30 - 1)\, d = 80 + 29 \times 80 = 2400$$

આમ, 30 વર્ષના અંતે મળતું વ્યાજ ₹ 2400 હશે.

ઉદાહરણ 10 : ફૂલોની એક ક્યારીમાં પ્રથમ હારમાં 23 ગુલાબના છોડ, બીજી હારમાં 21 ગુલાબના છોડ, ત્રીજી હારમાં 19 ગુલાબના છોડ, વગેરે છે. તેની છેલ્લી હારમાં 5 ગુલાબના છોડ છે. આ ક્યારામાં કુલ કેટલી હાર હશે ?

ઉકેલ : પ્રથમ, દ્વિતીય, તૃતીય, ... હારમાં ગુલાબના છોડની સંખ્યા

23, 21, 19, ..., 5 છે.

આ સંખ્યાઓ એક સમાંતર શ્રેણી બનાવે છે. (કેમ ?)

ધારો કે હારની સંખ્યા n છે.

અહીં, $a = 23$, $d = 21 - 23 = -2$, $a_n = 5$

હવે, $a_n = a + (n - 1)\, d$

આથી, $5 = 23 + (n - 1)(-2)$

$\therefore\ -18 = (n - 1)(-2)$

$\therefore\ n = 10$

આથી, ફૂલની ક્યારીમાં 10 હાર છે.

સ્વાધ્યાય 5.2

1. નીચેના કોષ્ટકમાં સમાંતર શ્રેણીનું પ્રથમ પદ a, સામાન્ય તફાવત d અને n મું પદ a_n છે. ખાલી જગા પૂરો :

	a	d	n	a_n
(i)	7	3	8	...
(ii)	–18	...	10	0
(iii)	...	–3	18	–5
(iv)	–18.9	2.5	...	3.6
(v)	3.5	0	105	...

2. નીચેનામાંથી સાચો જવાબ શોધો અને ચકાસો :

(i) સમાંતર શ્રેણી 10, 7, 4, ... નું 30 મું પદ .... છે.

(A) 97 (B) 77 (C) –77 (D) –87

(ii) સમાંતર શ્રેણી $-3, -\frac{1}{2}, 2, ...$ નું 11 મું પદ .... છે.

(A) 28 (B) 22 (C) –38 (D) $-48\frac{1}{2}$

3. નીચેની સમાંતર શ્રેણીમાં ખાલી ખાનાનાં પદ શોધો :

(i) $2, \boxed{}, 26$

(ii) $\boxed{}, 13, \boxed{}, 3$

(iii) $5, \boxed{}, \boxed{}, 9\frac{1}{2}$

(iv) $-4, \boxed{}, \boxed{}, \boxed{}, \boxed{}, 6$

(v) $\boxed{}, 38, \boxed{}, \boxed{}, \boxed{}, -22$

4. સમાંતર શ્રેણી 3, 8, 13, 18, ... નું કેટલામું પદ 78 થાય ?

5. નીચેની સમાંતર શ્રેણીમાં પદોની સંખ્યા શોધો :

(i) 7, 13, 19, ..., 205 (ii) $18, 15\frac{1}{2}, 13, ..., -47$

6. સમાંતર શ્રેણી 11, 8, 5, 2 ... નું કોઈ પદ –150 હોઈ શકે ?

7. સમાંતર શ્રેણીનું 11 મું પદ 38 અને 16 મું પદ 73 હોય તો તેનું 31મું પદ શોધો.

8. એક સમાંતર શ્રેણીમાં 50 પદ છે. જો ત્રીજું પદ 12 અને છેલ્લું પદ 106 હોય, તો તેનું 29 મું પદ શોધો.

9. જો સમાંતર શ્રેણીનું ત્રીજું અને નવમું પદ અનુક્રમે 4 અને –8 હોય, તો તે શ્રેણીનું કયું પદ 0 થાય ?

10. કોઈ સમાંતર શ્રેણીમાં 17 મું પદ 10 માં પદ કરતાં 7 વધુ છે. તેનો સામાન્ય તફાવત શોધો.

11. સમાંતર શ્રેણી 3, 15, 27, 39, ... નું કયું પદ 54 માં પદ કરતાં 132 વધુ હશે ?

12. બે સમાંતર શ્રેણીના સામાન્ય તફાવત સમાન છે. તેમના 100 માં પદનો તફાવત 100 હોય તો 1000 મા પદનો તફાવત કેટલો હશે ?

13. ત્રણ અંકની કેટલી સંખ્યા 7 વડે વિભાજ્ય હશે ?

14. 10 અને 250 વચ્ચે 4 ના કેટલા ગુણિત હશે ?

15. n ના કયા મૂલ્ય માટે બે સમાંતર શ્રેણીઓ 63, 65, 67,... અને 3, 10, 17, ...ના n માં પદ સમાન થાય ?

16. એવી સમાંતર શ્રેણી શોધો કે જેનું ત્રીજું પદ 16 અને 7 મું પદ 5 માં પદથી 12 વધુ હોય.

17. 3, 8, 13, ..., 253 સમાંતર શ્રેણી હોય, તો તેનું છેલ્લેથી 20 મું પદ શોધો.

18. એક સમાંતર શ્રેણીના ચોથા અને આઠ માં પદનો સરવાળો 24 છે. અને છઠ્ઠા અને દસ માં પદનો સરવાળો 44 છે. આ સમાંતર શ્રેણીનાં પ્રથમ ત્રણ પદ શોધો.

19. સુબ્બા રાવે 1995 માં ₹ 5000 ના વાર્ષિક વેતનથી કામ શરૂ કર્યું અને તેમને દર વર્ષે માસિક ₹ 200 ની વેતન વૃદ્ધિ મળે છે. કયા વર્ષે તેમનું વેતન ₹ 7000 થશે ?

20. રામકલી વર્ષના પ્રથમ અઠવાડિયે ₹ 5 ની બચત કરે છે. અને પછી તેની અઠવાડિક બચતમાં ₹ 1.75 નો વધારો કરે છે. જો n માં અઠવાડિયે તેની બચત ₹ 20.75 હોય તો n નું મૂલ્ય શોધો.

5.4 સમાંતર શ્રેણીનાં પ્રથમ *n* પદનો સરવાળો

આવો આપણે વિભાગ 5.1 માં આપેલ પરિસ્થિતિનો ફરી વિચાર કરીએ, તેમાં શકીલા તેની પુત્રીના ગલ્લામાં, તે જ્યારે 1 વર્ષની હતી ત્યારે ₹ 100 મૂકે છે અને બીજા જન્મદિવસે ₹ 150 મૂકે છે, ત્રીજા જન્મ દિવસે ₹ 200 મૂકે છે, અને આ રીતે આગળ વધે છે. તે જ્યારે 21 વર્ષની હશે ત્યારે ગલ્લામાં કેટલા રૂપિયા જમા થયા હશે ?

અહીં, ગલ્લામાં મૂકાતી રકમ (₹ માં) પહેલા, બીજા, ત્રીજા, ચોથા,... જન્મદિવસે અનુક્રમે 100, 150, 200, 250, ... હશે. અને આ જ ક્રમ 21માં જન્મદિવસ સુધી ચાલશે. 21માં જન્મદિવસે ગલ્લાની કુલ રકમ શોધવા આપણે ઉપરની યાદી પ્રમાણે 21 સંખ્યાઓ લખી તેનો સરવાળો કરવો જોઈએ. તમને નથી લાગતું કે આ કંટાળાજનક અને સમય દુર્વ્યય કરનાર ક્રિયા છે ? શું આપણે આ પ્રક્રિયાને ટૂંકી બનાવી શકીએ ? જો આપણે સરવાળો શોધવાની કોઈ રીત શોધી શકીએ તો જ આ શક્ય છે. ચાલો જોઈએ.

ગોસ (જેના વિશે આપણે પ્રકરણ 1માં વાંચી ગયાં છીએ) જ્યારે 10 વર્ષના હતા ત્યારે તેમણે આપેલ પ્રશ્નના ઉકેલ પર ધ્યાન કેન્દ્રિત કર્યું. તેમને 1 થી 100 સુધીના ધન પૂર્ણાંકનો સરવાળો કરવાનું કહેવામાં આવેલું. તેમણે તરત જ જવાબ આપ્યો કે સરવાળો 5050 છે. શું તમે વિચારી શકો કે તેમણે આ કેવી રીતે વિચાર્યું હશે ? તેમણે

$$S = 1 + 2 + 3 + \ldots + 99 + 100 \text{ લખ્યું.}$$

અને પૂર્ણાંકોનો ક્રમ બદલી,

$$S = 100 + 99 + ... + 3 + 2 + 1$$ એમ લખ્યું.

બંનેનો સરવાળો કરતાં,

$$2S = (100 + 1) + (99 + 2) + ... + (3 + 98) + (2 + 99) + (1 + 100)$$

$$= 101 + 101 + ... + 101 + 101 \quad \text{(100 વખત)}$$

$$S = \frac{100 \times 101}{2} = 5050$$ અર્થાત્ સરવાળો = 5050

આપણે આ જ સંકલ્પનાનો ઉપયોગ સમાંતર શ્રેણી $a, a + d, a + 2d, ...$ નાં પ્રથમ n પદનો સરવાળો શોધીશું :

આ સમાંતર શ્રેણીનું n મું પદ $a + (n - 1) d$ છે.

ધારો કે S આ સમાંતર શ્રેણીનાં પ્રથમ n પદોનો સરવાળો દર્શાવે છે.

$$S = a + (a + d) + (a + 2d) + ... + [a + (n - 1) d] \tag{1}$$

પદનો ક્રમ બદલી પુનઃ લખતાં,

$$S = [a + (n - 1) d] + [a + (n - 2) d] + ... + (a + d) + a \tag{2}$$

(1) અને (2) નો સરવાળો કરતાં,

$$2S = \underbrace{[2a+(n-1)d]+[2a+(n-1)d]+....+[2a+(n-1)d]+[2a+(n-1)d]}_{(n \text{ વખત})}$$

અથવા $2S = n [2a + (n - 1) d]$ (કારણ કે પદોની સંખ્યા n છે અને બધા સમાન છે.)

અથવા $S = \frac{n}{2} [2a + (n - 1) d]$

*આથી, **સમાંતર શ્રેણીનાં પ્રથમ n પદનો સરવાળો નીચેના સૂત્રથી મળે છે.***

$$\mathbf{S = \frac{n}{2} [2a + (n - 1) d]}$$

આપણે તેને $S = \frac{n}{2} [a + a + (n - 1) d]$ તરીકે પણ લખી શકીએ.

અર્થાત્

$$\mathbf{S = \frac{n}{2} (a + a_n)} \tag{3}$$

હવે, જો સમાંતર શ્રેણીમાં પદોની કુલ સંખ્યા n હોય, તો અંતિમ પદ $a_n = l$

(3) પરથી, આપણે કહી શકીએ કે

$$\mathbf{S = \frac{n}{2} (a + l)} \tag{4}$$

જ્યારે સમાંતર શ્રેણીનું પ્રથમ અને અંતિમ પદ આપેલ હોય અને સામાન્ય તફાવત આપેલ ના હોય ત્યારે આ પરિણામ ઉપયોગી બને છે.

હવે, આપણે શરૂઆતમાં ઉપર ઉપસ્થિત કરેલા પ્રશ્ન પર પાછા ફરીએ. શકીલાની પુત્રીના ગલ્લાની રકમ તેના પહેલા, બીજા, ત્રીજા, ચોથા, ... જન્મદિવસે અનુક્રમે (₹ માં) 100, 150, 200, 250, ... હતી.

આ એક સમાંતર શ્રેણી છે. આપણે તેની 21મી વર્ષગાંઠે કુલ કેટલા રૂપિયા ભેગા થયા હશે તે જાણવું છે. અર્થાત્, સમાંતર શ્રેણીનાં 21 પદનો સરવાળો કરવાનો છે.

અહીં, $a = 100$, $d = 50$ અને $n = 21$ માટે સૂત્રનો ઉપયોગ કરતાં,

$$S = \frac{n}{2}\,[2a + (n - 1)\,d\,]$$

આપણને $$S = \frac{21}{2}\,[2 \times 100 + (21 - 1) \times 50]$$ મળે.

$$\therefore S = \frac{21}{2}\,[200 + 1000]$$

$$= \frac{21}{2} \times 1200 = 12600$$

આમ, 21 માં જન્મ દિવસે ગલ્લામાં ભેગી થયેલી રકમ કુલ ₹ 12600 હશે.

આ સૂત્રનો ઉપયોગ કરવાથી ગણતરી સરળ નથી બની?

હવેથી આપણે સમાંતર શ્રેણીનાં પ્રથમ n પદના સરવાળાને S ને બદલે S_n થી દર્શાવીશું. આપણે સમાંતર શ્રેણીનાં 20 પદોનો સરવાળો દર્શાવવા માટે S_{20} લખીશું. પ્રથમ n પદોના સરવાળાના સૂત્રમાં કુલ ચાર રાશિ S, a, d અને n નો ઉપયોગ થાય છે. જો આપણે તે પૈકી ત્રણ જાણતા હોઈએ તો ચોથી રાશિ શોધી શકાય.

નોંધ : સમાંતર શ્રેણીનું n મું પદ, તેનાં પ્રથમ n પદોના સરવાળા તથા પ્રથમ $(n - 1)$ પદોના સરવાળાના તફાવત જેટલું હોય છે. અર્થાત્ $\boldsymbol{a_n = S_n - S_{n-1}}$

ચાલો આપણે કેટલાંક ઉદાહરણ જોઈએ :

ઉદાહરણ 11 : સમાંતર શ્રેણી 8, 3, –2,... નાં પ્રથમ 22 પદનો સરવાળો શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $a = 8$, $d = 3 - 8 = -5$, $n = 22$.

આપણે જાણીએ છીએ કે,

$$S_n = \frac{n}{2}\,[2a + (n - 1)\,d\,]$$

આથી, $$S_{22} = \frac{22}{2}\,[16 + 21\,(-5)] = 11\,(16 - 105) = 11\,(-89) = -979$$

આથી, આપેલ સમાંતર શ્રેણીનાં પ્રથમ 22 પદોનો સરવાળો –979 છે.

ઉદાહરણ 12 : સમાંતર શ્રેણીનાં પ્રથમ 14 પદોનો સરવાળો 1050 હોય અને તેનું પ્રથમ પદ 10 હોય, તો તે શ્રેણીનું 20 મું પદ શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $S_{14} = 1050$, $n = 14$, $a = 10$.

હવે, $$S_n = \frac{n}{2}\,[2a + (n - 1)\,d\,]$$

આથી, $$1050 = \frac{14}{2}\,[20 + 13\,d\,]$$

$$= 140 + 91\,d$$

$$\therefore 910 = 91\,d$$

$$\therefore d = 10$$

આથી, $a_{20} = 10 + (20 - 1) \times 10 = 200$. અર્થાત્ 20 મું પદ 200 છે.

ઉદાહરણ 13 : સમાંતર શ્રેણી 24, 21, 18,.... નાં કેટલાં પદોનો સરવાળો 78 થાય.

ઉકેલ : અહીં, $a = 24$, $d = 21 - 24 = -3$, $S_n = 78$. આપણે n નું મૂલ્ય શોધવું છે.

આપણે જાણીએ છીએ કે, $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$

અહીં, $78 = \frac{n}{2}[48 + (n-1)(-3)]$

$= \frac{n}{2}(51 - 3n)$

$\therefore 3n^2 - 51n + 156 = 0$

$\therefore n^2 - 17n + 52 = 0$

$\therefore (n-4)(n-13) = 0$

$\therefore n = 4$ અથવા 13

n નાં બંને મૂલ્યો શક્ય છે આથી, માંગેલ પદની સંખ્યા 4 અથવા 13 થાય.

નોંધ :

1. આ ઉદાહરણમાં પ્રથમ ચાર પદનો સરવાળો = પ્રથમ 13 પદનો સરવાળો = 78
2. આ બંને જવાબ શક્ય છે કેમ કે 5 માં પદથી 13 માં પદનાં મૂલ્યોનો સરવાળો 0 બને છે. આ શક્ય છે કેમ કે a નું મૂલ્ય ધન અને d નું મૂલ્ય ઋણ છે. આથી, કેટલાંક પદ ધન અને બાકીનાં પદ ઋણ બનશે અને આથી કુલ સરવાળો 0 બનાવશે.

ઉદાહરણ 14 : સરવાળો શોધો :

(i) પ્રથમ 1000 ધન પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ (ii) પ્રથમ n ધન પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ

ઉકેલ :

(i) ધારો કે, $S_{1000} = 1 + 2 + 3 + ... + 1000$

સમાંતર શ્રેણીના પ્રથમ n પદોના સરવાળાના સૂત્ર,

$S_n = \frac{n}{2}(a + l)$ નો ઉપયોગ કરતાં,

$S_{1000} = \frac{1000}{2}(1 + 1000) = 500 \times 1001 = 500500$

આથી, પ્રથમ 1000 ધન પૂર્ણાંકોનો સરવાળો 500500 થાય.

(i) ધારો કે, $S_n = 1 + 2 + 3 + ... + n$

અહીં, $a = 1$ અને અંતિમ પદ $l = n$ છે.

આથી, $S_n = \frac{n(1+n)}{2}$ અથવા $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$

આથી, **પ્રથમ n ધન પૂર્ણાંકોનો સરવાળો**

$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ મળશે.

ઉદાહરણ 15 : જો n મું પદ $a_n = 3 + 2n$ હોય, તો સંખ્યાઓની આ યાદીનાં પ્રથમ 24 પદોનો સરવાળો શોધો.

ઉકેલ : $a_n = 3 + 2n$, હોવાથી,

$a_1 = 3 + 2 = 5$

$a_2 = 3 + 2 \times 2 = 7$

$a_3 = 3 + 2 \times 3 = 9$

.
.
.

આથી, સંખ્યાઓની યાદી 5, 7, 9, 11,... બને.

અહીં, $7 - 5 = 9 - 7 = 11 - 9 = 2$ વગેરે.

આથી, તે સમાંતર શ્રેણી બને છે. સામાન્ય તફાવત $d = 2$.

S_{24} શોધવા, $n = 24, a = 5, d = 2$

$$S_{24} = \frac{24}{2}[2 \times 5 + (24 - 1) \times 2] = 12\,[10 + 46]$$

$$= 672$$

આમ, શ્રેણીનાં પ્રથમ 24 પદોનો સરવાળો 672 થશે.

નોંધ : $a_n - a_{n-1}$

$= (3 + 2n) - [3 + 2(n - 1)]$

$= 2n - 2n + 2 = 2$

$\therefore$ શ્રેણી સમાંતર શ્રેણી છે તથા સામાન્ય તફાવત = 2

ઉદાહરણ 16 : ટીવી સેટના ઉત્પાદકે ત્રીજા વર્ષે 600 ટી.વી. અને 7 માં વર્ષે 700 ટી.વી. બનાવ્યાં છે. તે માને છે કે દરેક વર્ષે ઉત્પાદિત ટીવીની સંખ્યા એક સમાન વધતી હોવી જોઈએ. તો

(i) પ્રથમ વર્ષનું ઉત્પાદન (ii) 10 માં વર્ષનું ઉત્પાદન

(iii) પ્રથમ 7 વર્ષમાં કુલ ઉત્પાદિત ટીવીની સંખ્યા શોધો.

ઉકેલ : દરેક વર્ષે ઉત્પાદિત ટીવીની સંખ્યા સમાન રીતે વધતી હોવાથી,

પ્રથમ, દ્વિતીય, તૃતીય... વર્ષે ઉત્પાદિત ટીવીની સંખ્યા એક સમાંતર શ્રેણી બનાવશે.

ધારો કે n મા વર્ષે ઉત્પાદિત ટીવીની સંખ્યા a_n છે.

આથી, $a_3 = 600$ અને $a_7 = 700$

અથવા $a + 2d = 600$ અને $a + 6d = 700$

સમીકરણો ઉકેલતાં, આપણને $d = 25$ અને $a = 550$ મળે છે.

આથી, પ્રથમ વર્ષે ઉત્પાદિત ટીવીની સંખ્યા 550 હશે.

(ii) હવે, $a_{10} = a + 9d = 550 + 9 \times 25 = 775$

આથી, 10 માં વર્ષે ઉત્પાદિત ટીવીની સંખ્યા 775 છે.

(iii) વળી, $S_7 = \frac{7}{2}[2 \times 550 + (7 - 1) \times 25]$

$$= \frac{7}{2}[1100 + 150] = 4375$$

આથી, પ્રથમ 7 વર્ષમાં ઉત્પાદિત ટીવીની કુલ સંખ્યા 4375 છે.

સ્વાધ્યાય 5.3

1. નીચે આપેલ સમાંતર શ્રેણી માટે માંગ્યા પ્રમાણે સરવાળો શોધો :

(i) 2, 7, 12, ... 10 પદ સુધી

(ii) –37, –33, –29,... 12 પદ સુધી

(iii) 0.6, 1.7, 2.8, ..., 100 પદ સુધી

(iv) $\frac{1}{15}, \frac{1}{12}, \frac{1}{10}, \ldots$ 11 પદ સુધી

2. નીચેના સરવાળા શોધો : (સમાંતર શ્રેણી આપેલ છે.)

(i) $7 + 10\frac{1}{2} + 14 + \ldots + 84$

(ii) $34 + 32 + 30 + \ldots + 10$

(iii) $-5 + (-8) + (-11) + \ldots + (-230)$

3. સમાંતર શ્રેણીમાં

(i) $a = 5$, $d = 3$, $a_n = 50$ આપેલ હોય, તો n અને S_n શોધો.

(ii) $a = 7$, $a_{13} = 35$ આપેલ હોય, તો d અને S_{13} શોધો.

(iii) $a_{12} = 37$, $d = 3$ આપેલ હોય, તો a અને S_{12} શોધો.

(iv) $a_3 = 15$, $S_{10} = 125$ આપેલ હોય, તો d અને a_{10} શોધો.

(v) $d = 5$, $S_9 = 75$ આપેલ હોય, તો a અને a_9 શોધો.

(vi) $a = 2$, $d = 8$, $S_n = 90$ આપેલ હોય, તો n અને a_n શોધો.

(vii) $a = 8$, $a_n = 62$, $S_n = 210$ આપેલ હોય, તો n અને d શોધો.

(viii) $a_n = 4$, $d = 2$, $S_n = -14$ આપેલ હોય, તો n અને a શોધો.

(ix) $a = 3$, $n = 8$, $S = 192$ આપેલ હોય, તો d શોધો.

(x) $l = 28$, $S = 144$ હોય અને પદોની સંખ્યા 9 હોય, તો a શોધો.

4. સમાંતર શ્રેણી 9, 17, 25, ... નાં કેટલાં પદનો સરવાળો 636 થાય ?

5. સમાંતર શ્રેણીનું પ્રથમ પદ 5, અંતિમ પદ 45 અને સરવાળો 400 છે. શ્રેણીનાં પદોની સંખ્યા અને સામાન્ય તફાવત શોધો.

6. સમાંતર શ્રેણીનાં પ્રથમ પદ અને અંતિમ પદ અનુક્રમે 17 અને 350 છે. જો સામાન્ય તફાવત 9 હોય તો તેમાં કેટલાં પદ હશે અને તેમનો સરવાળો કેટલો થશે ?

7. જે સમાંતર શ્રેણીમાં $d = 7$ અને 22 મું પદ 149 હોય, તેનાં 22 પદોનો સરવાળો શોધો.

8. સમાંતર શ્રેણીનું બીજું અને ત્રીજું પદ અનુક્રમે 14 અને 18 હોય તો તેનાં પ્રથમ 51 પદોનો સરવાળો શોધો.

9. સમાંતર શ્રેણીનાં પ્રથમ 7 પદોનો સરવાળો 49 અને 17 મું પદ 289 હોય તો, તેનાં પ્રથમ n પદોનો સરવાળો શોધો.

10. a_n નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત છે :

(i) $a_n = 3 + 4n$

(ii) $a_n = 9 - 5n$

સાબિત કરો કે, $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ સમાંતર શ્રેણી બનાવે છે. વળી, દરેકમાં પ્રથમ 15 પદોનો સરવાળો શોધો.

11. સમાંતર શ્રેણીનાં પ્રથમ n પદોનો સરવાળો $4n - n^2$ હોય, તો તેનું પ્રથમ પદ કયું હશે (અર્થાત્ S_1) ? પ્રથમ બે પદોનો સરવાળો કેટલો હશે ? બીજું પદ કયું હશે ? આ જ રીતે ત્રીજું, 10 મું અને n મું પદ શોધો.

12. 6 વડે વિભાજ્ય પ્રથમ 40 ધન પૂર્ણાંકોનો સરવાળો શોધો.

13. 8 ના પ્રથમ 15 ગુણિતોનો સરવાળો શોધો.

14. 0 અને 50 વચ્ચેના અયુગ્મ પૂર્ણાંકોનો સરવાળો શોધો.

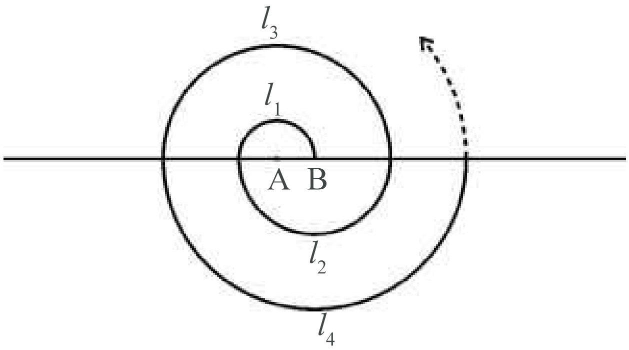
15. નિર્માણ કામ માટે થયેલ કરારમાં નિશ્ચિત તારીખ કરતાં વિલંબથી પૂરા થતા કામ માટે નીચે પ્રમાણેના દંડની જોગવાઈ છે :

પ્રથમ દિવસ માટે ₹ 200, બીજા દિવસ માટે ₹ 250, ત્રીજા દિવસ માટે ₹ 300 વગેરે. પ્રત્યેક દિવસ માટે દંડની રકમ આગળના દિવસ કરતાં ₹ 50 વધુ છે. જો કોન્ટ્રાક્ટર 30 દિવસનો વિલંબ કરે તો તેણે ભરવી પડતી દંડની રકમ શોધો.

16. કોઈ એક શાળામાં વિદ્યાર્થીઓના સમગ્ર શૈક્ષણિક પ્રદર્શન માટે અપાતા 7 ઈનામો માટે કુલ ₹ 700 ની જોગવાઈ કરવાની છે. જો પ્રત્યેક ઈનામ આગળના ઈનામ કરતાં ₹ 20 ઓછું હોય, તો પ્રત્યેક ઈનામની રકમ શોધો.

17. એક શાળામાં વિદ્યાર્થીઓ વાયુ પ્રદૂષણ ઓછું કરવા માટે શાળાની અંદર અને બહાર વૃક્ષ વાવવાનું વિચારે છે. એવું નક્કી કરાયું કે પ્રત્યેક ધોરણનો પ્રત્યેક વિભાગ તે જે ધોરણમાં ભણતા હોય તેટલાં વૃક્ષ વાવશે. દાખલા તરીકે ધોરણ I નો વિભાગ 1 વૃક્ષ, ધોરણ II નો વિભાગ 2 વૃક્ષ અને આવું ધોરણ XII સુધી ચાલશે. દરેક ધોરણમાં ત્રણ વિભાગ છે. આ વિદ્યાર્થીઓ દ્વારા કેટલાં વૃક્ષનું વાવેતર થશે ?

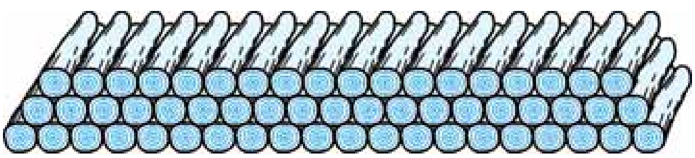
18. વારાફરતી A અને B ને કેન્દ્ર લઈ ક્રમિક અર્ધવર્તુળોની મદદથી એક કુંતલ (Spiral) બનાવેલ છે. તેની શરૂઆત A થી થાય છે. આકૃતિ 5.4માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે ત્રિજ્યાઓ 0.5 સેમી, 1.0 સેમી, 1.5 સેમી, 2.0 સેમી ... હોય તો આવા 13 ક્રમિક અર્ધવર્તુળોથી બનતા કુંતલની લંબાઈ શોધો. ($\pi = \frac{22}{7}$ લો.)



આકૃતિ 5.4

[**સૂચન :** ક્રમિક અર્ધવર્તુળની લંબાઈ l_1, l_2, l_3, l_4, ... અને કેન્દ્રો અનુક્રમે A, B, A, B ... છે.]

19. લાકડાની 200 ભારીઓ નીચે પ્રમાણે ગોઠવવામાં આવે છે : તળિયાની હારમાં 20 ભારી, તેની ઉપરની હારમાં 19 ભારી, તેની ઉપરની હારમાં 18 ભારીઓ વગેરે. (જુઓ આકૃતિ 5.5.) આવી 200 ભારીઓ ગોઠવવા માટે કેટલી હાર થશે અને સૌથી ઉપરની હારમાં કેટલી ભારીઓ થશે ?



આકૃતિ 5.5

20. એક બટાકા ઉપાડવાની હરીફાઈમાં આરંભ બિંદુ પર એક ડોલ રાખેલ છે અને ત્યાર બાદ તેનાથી 5મી દૂર પ્રથમ બટાકું મૂકેલ છે ત્યાર પછી દર ત્રણ મીટરે એક બટાકું સીધી રેખામાં ગોઠવેલ છે. આવાં 10 બટાકા રેખા પર મૂકેલ છે. (જુઓ આકૃતિ 5.6.)

આકૃતિ 5.6

દરેક હરીફે બાલદી પાસેથી દોડી પોતાની નજીકનું બટાકું ઉપાડી, પાછા આવી બાલદીમાં નાંખવાનું છે. ત્યારબાદ આ જ પ્રમાણે બીજું, ત્રીજું એમ છેલ્લું બટાકું બાલદીમાં મૂકાય ત્યાં સુધી દોડવાનું છે. હરીફે કેટલું અંતર દોડવું પડે ?

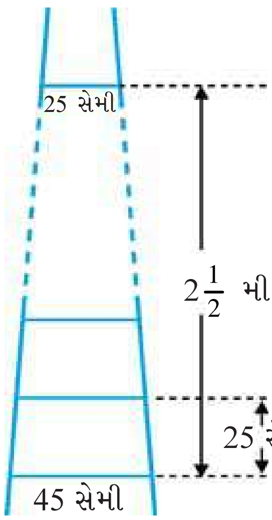
[**સૂચન :** પ્રથમ અને દ્વિતીય બટાકું ઉપાડવા હરીફ દ્વારા કપાતું અંતર (મીટરમાં) $2 \times 5 + 2 \times (5 + 3)$]

સ્વાધ્યાય 5.4 (વૈકલ્પિક)*

1. સમાંતર શ્રેણી 121, 117, 113, ... નું પ્રથમ ઋણ પદ કયું હશે ? (**સૂચન :** $a_n < 0$ થાય તેવો સૌથી નાનો n શોધો.)

2. કોઈ સમાંતર શ્રેણીના ત્રીજા અને સાતમાં પદનો સરવાળો 6 છે અને તેનો ગુણાકાર 8 છે. આ સમાંતર શ્રેણીનાં પ્રથમ 16 પદનો સરવાળો શોધો.

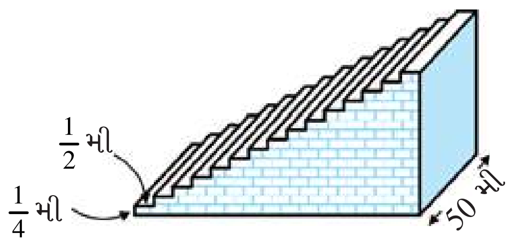
3. એક સીડીના બે ક્રમિક પગથિયાં વચ્ચેનું અંતર 25 સેમી છે. (જુઓ આકૃતિ 5.7). સૌથી નીચેના પગથિયાની લંબાઈ 45 સેમી છે અને એકધારા ઘટાડા સાથે સૌથી ઉપરના પગથિયાની લંબાઈ 25 સેમી છે. સૌથી ઉપરના અને સૌથી નીચેના પગથિયા વચ્ચેનું અંતર $2\frac{1}{2}$ મીટર હોય, તો પગથિયામાં વપરાયેલ કુલ લાકડાની લંબાઈ શોધો. [**સૂચન :** પગથિયાંની સંખ્યા $= \frac{250}{25} + 1$]



આકૃતિ 5.7

4. એક હારમાં આવેલા મકાનોને ક્રમશઃ 1 થી 49 ક્રમાંક આપેલ છે. સાબિત કરો કે એવી સંખ્યા x મળે કે જેથી તેની આગળના મકાનના ક્રમાંકોનો સરવાળો તે પછીના મકાનોનાં ક્રમાંકોના સરવાળા જેટલો થાય. x નું મૂલ્ય શોધો. [**સૂચન :** $S_{x-1} = S_{49} - S_x$]

5. ફૂટબોલના એક મેદાનમાં 15 પગથિયાંવાળી નાની અગાસી છે. તે પ્રત્યેકની લંબાઈ 50 મી છે અને તે નક્કર કોંક્રિટનાં બનાવેલ છે. દરેક પગથિયાંની ઊંચાઈ



આકૃતિ 5.8

* આ સ્વાધ્યાય પરીક્ષાના દૃષ્ટિકોણથી નથી.

$\frac{1}{4}$ મી તથા પહોળાઈ $\frac{1}{2}$ મી છે. (જુઓ આકૃતિ 5.8) આ અગાસી બનાવવા માટે કુલ કેટલા ઘનફળ કોંક્રિટની જરૂર પડશે?

[**સૂચન :** પ્રથમ પગથિયું બનાવવા જરૂરી કોંક્રિટનું ઘનફળ $= \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times 50$ મી^{3}]

5.5 સારાંશ

આ પ્રકરણમાં તમે નીચેના મુદ્દાઓનો અભ્યાસ કર્યો.

1. જેમાં પ્રથમ પદ સિવાયનું પ્રત્યેક પદ તેની આગળના પદમાં નિશ્ચિત સંખ્યા ઉમેરી મેળવી શકાય એવી સંખ્યાઓની યાદી **સમાંતર શ્રેણી** છે. નિશ્ચિત સંખ્યા d ને **સામાન્ય તફાવત** કહેવાય છે. સમાંતર શ્રેણીનું વ્યાપક સ્વરૂપ $a, a + d, a + 2d, a + 3d, \ldots$ છે.
2. આપેલ સંખ્યાઓની યાદી $a_1, a_2, a_3, \ldots$ માટે જો $a_2 - a_1, a_3 - a_2, a_4 - a_3, \ldots$, સમાન સંખ્યા આવે અર્થાત્ જો તમામ ભિન્ન k માટે $a_{k+1} - a_k$ સમાન હોય, તો તે શ્રેણી સમાંતર શ્રેણી કહેવાય.
3. સમાંતર શ્રેણી માટે જો પ્રથમ પદ a અને સામાન્ય તફાવત d હોય તો તેનું n મું પદ (અથવા વ્યાપક પદ) $a_n = a + (n - 1)\, d$ દ્વારા મળે.
4. સમાંતર શ્રેણીનાં પ્રથમ n પદોનો સરવાળો $S_n = \frac{n}{2}\,[2a + (n - 1)\, d\,]$ દ્વારા મળે.
5. સમાંતર શ્રેણીનું છેલ્લું પદ (ધારો કે n મું પદ) l હોય તો બધાં જ પદોનો સરવાળો

   $S_n = \frac{n}{2}\,(a + l)$ દ્વારા મળે.

વાચકને નોંધ

જો a, b, c સમાંતર શ્રેણીમાં હોય, તો $b = \frac{a+c}{2}$ અને b ને a તથા c નો સમાંતર મધ્યક કહેવાય.