$$= 1 - \frac{54}{504}$$

$$= 1 - 0.1071$$

$$= 0.8929$$

$$\therefore \; r \simeq 0.89$$

અહીં r ની કિંમત 1 ની વધુ નજીક છે. તેથી કહી શકાય કે વેચાણ અને નફાના ક્રમો વચ્ચે ગાઢ ધન સહસંબંધ છે.

નોંધ :

(1) ક્રમાંકો R_x અને R_y ના તફાવતોનો સરવાળો હંમેશાં શૂન્ય થાય છે. એટલે કે, $\Sigma d = \Sigma (R_x - R_y) = 0$

(2) જો બે ચલો x અને y ની પ્રત્યેક જોડ માટે $R_x = R_y$ થાય તો d ની દરેક કિંમત શૂન્ય થાય અને તેથી $\Sigma d^2 = 0$ થાય. આ સંજોગોમાં r ની કિંમત 1 થશે.

(3) જો x અને y ચલોના ક્રમાંકો એકબીજાથી તદ્દન ઊલટા ક્રમમાં હોય (જુઓ ઉદાહરણ 18)તો $r = -1$ થાય.

પ્રવૃત્તિ

તમારા વર્ગના યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરેલા કોઈ પણ દસ વિદ્યાર્થીઓએ આંકડાશાસ્ત્ર અને અર્થશાસ્ત્ર વિષયોમાં પ્રથમ કસોટીમાં મેળવેલા ગુણની માહિતી એકઠી કરો અને તે પરથી બંને વિષયોના ગુણ વચ્ચે કાર્લ પિયર્સન અને સ્પિયરમૅનની રીતે સહસંબંધાંક શોધો અને સરખાવો.

ઉદાહરણ **24 : એક ટ્રાન્સપોર્ટ કંપની માટે ડ્રાઈવરનો વાહન ચલાવવાનો અનુભવ (વર્ષમાં) અને તેના દ્વારા થયેલા અકસ્માતની સંખ્યા વચ્ચેનો સંબંધ જાણવા આઠ ડ્રાઈવરના વાહન ચલાવવાના અનુભવ (વર્ષ) અને અકસ્માતની સંખ્યાને આપેલા ક્રમો પરથી ક્રમાંકોના તફાવતોના વર્ગોનો સરવાળો 126 થાય છે. આ પરથી ક્રમાંક સહસંબંધાંક શોધો :**

અહીં $n = 8$ અને ક્રમાંકોના તફાવતોના વર્ગોનો સરવાળો 126 છે. એટલે કે $\Sigma d^2 = 126$ છે.

$$r = 1 - \frac{6\Sigma d^2}{n(n^2-1)}$$

$$= 1 - \frac{6(126)}{8(64-1)}$$

$$= 1 - \frac{756}{504}$$

$$= 1 - 1.5$$

$$r = -0.5$$

ઉદાહરણ **25 : એક જિલ્લાના જુદી જુદી શાળામાંથી પસંદ પામેલા દસ વિદ્યાર્થીઓને તેમની રમતગમત પ્રવૃત્તિ અને સામાન્ય જ્ઞાનના કૌશલ્ય પરથી ક્રમ આપવામાં આવે છે અને તે પરથી ક્રમાંક સહસંબંધાંક 0.2 મળે છે. પાછળથી એવું માલૂમ પડ્યું કે એક વિદ્યાર્થીના આ બે ગુણધર્મોના ક્રમાંકોનો તફાવત 2 ને બદલે 3 લેવાઈ ગયો હતો. ક્રમાંક સહસંબંધાંકની સુધારેલી કિંમત શોધો.**

અહીં, $n = 10$

d ની ખોટી કિંમત $= 3$

d ની સાચી કિંમત $= 2$

હવે, $r = 1 - \frac{6\Sigma d^2}{n(n^2-1)}$

$\therefore \quad 0.2 = 1 - \frac{6\Sigma d^2}{10(100-1)}$

$\therefore \quad 0.2 = 1 - \frac{6\Sigma d^2}{990}$

$\therefore \quad \frac{6\Sigma d^2}{990} = 1 - 0.2$

$\therefore \quad \frac{6\Sigma d^2}{990} = 0.8$

$\therefore \quad \Sigma d^2 = \frac{0.8 \times 990}{6}$

$\therefore \quad \Sigma d^2 = 132$

એક તફાવત 2 ને બદલે 3 લેવાયો હતો તેથી Σd^2 ની સુધારેલી કિંમત નીચે મુજબ મળે.

સુધારેલ $\Sigma d^2 = 132 -$ (ખોટો $d)^2$ + (સાચો $d)^2$

$= 132 - 3^2 + 2^2$

$= 132 - 9 + 4$

$= 127$

$\therefore$ ક્રમાંક સહસંબંધાંકની સુધારેલી કિંમત નીચે મુજબ મળે :

$r = 1 - \frac{6\Sigma d^2}{n(n^2-1)}$

$= 1 - \frac{6(127)}{10(100-1)}$

$= 1 - \frac{762}{990}$

$= 1 - 0.7697$

$= 0.2303$

$\therefore r \simeq 0.23$

સ્પિયરમૅનના ક્રમાંક સહસંબંધની રીતના ગુણ અને મર્યાદાઓ

ગુણ :

(1) આ રીત સમજવામાં સરળ છે.

(2) ક્રમાંક સહસંબંધાંકની ગણતરી કાર્લ પિયર્સનના સહસંબંધાંકની ગણતરી કરતા સહેલી છે.

(3) ગુણાત્મક માહિતી આપેલી હોય ત્યારે સહસંબંધાંક શોધવાની આ એક જ રીત છે.

(4) જ્યારે માહિતીમાં પ્રસાર વધુ હોય અથવા અંતિમ અવલોકનો માહિતીમાં હોય ત્યારે કાર્લ પિયર્સનની રીતને બદલે સ્પિયરમૅનની રીતના ઉપયોગને અગ્રિમતા આપવામાં આવે છે.

મર્યાદાઓ :

(1) અવલોકનોની મૂળ કિંમતોને બદલે તેના ક્રમનો ઉપયોગ થતો હોવાથી હંમેશાં કેટલીક માહિતીનો લોપ થાય છે. તેથી આ રીતે મળતા સહસંબંધાંકની કિંમત કાર્લ પિયર્સનની રીતથી મળતા સહસંબંધાંક જેટલી ચોક્કસ હોતી નથી.

(2) જ્યારે અવલોકનોની સંખ્યા વધુ હોય અને ક્રમ ન આપેલા હોય તો ક્રમ આપવાનું કાર્ય કંટાળાજનક બને છે.

(3) માહિતી દ્વિચલ આવૃત્તિ-વિતરણ સ્વરૂપમાં હોય ત્યારે આ રીતનો ઉપયોગ કરવામાં આવતો નથી. (આ પરિસ્થિતિમાં કાર્લ પિયર્સનની રીતનો ઉપયોગ થાય છે અને ઉચ્ચતર કક્ષાએ તમે તેનો અભ્યાસ કરશો.)

સ્વાધ્યાય 2.3

1. બે બજાર વિશ્લેષકો, છેલ્લાં કેટલાંક સમયમાં કરેલા વિકાસને આધારે છ કંપનીઓને નીચે મુજબ ક્રમ આપે છે.

કંપની	A	B	C	D	E	F
વિશ્લેષક 1 દ્વારા ક્રમ	5	2	1	4	3	6
વિશ્લેષક 2 દ્વારા ક્રમ	6	4	3	2	1	5

આ પરથી બંને વિશ્લેષકોના મૂલ્યાંકન વચ્ચેનો સહસંબંધાંક શોધો.

2. એક નિદર્શમાં આપેલા જુદા જુદા નવ ગામોએ 'સ્વચ્છતા અભિયાન' અને 'બેટી બચાવો અભિયાન' અંગે કરેલાં કાર્યોને આધારે એક અધિકારી તેમને નીચે મુજબ ક્રમ આપે છે.

ગામ	1	2	3	4	5	6	7	8	9
સ્વચ્છતા અભિયાન માટે ક્રમ	4	8	7	1	9	5	6	2	3
બેટી બચાવો અભિયાન માટે ક્રમ	6	8	5	1	9	7	3	4	2

આ પરથી બંને અભિયાનની કામગીરી વચ્ચે સહસંબંધાંક શોધો.

3. એક રાજ્યની ટાઉન પ્લાનિંગ સમિતિએ કરેલા સર્વે પરથી નીચે મુજબ માહિતી મળે છે.

શહેર	A	B	C	D	E
વસ્તી (લાખ)	57	45	14	18	8
વસ્તી વધારાનો દર (દર હજારે)	13	20	10	15	5

આ માહિતી પરથી શહેરોની વસ્તી અને વસ્તી-વધારાના દર વચ્ચે ક્રમાંક સહસંબંધાંક શોધો.

4. એક સાયન્સ કોલેજના વિદ્યાર્થીઓમાંથી લીધેલા દસ વિદ્યાર્થીઓના એક નિદર્શ પરથી નીચે મુજબ માહિતી મળે છે.

વિદ્યાર્થી	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ગણિતમાં ગુણ	39	65	62	90	82	75	25	98	36	78
આંકડાશાસ્ત્રમાં ગુણ	47	53	58	86	62	68	60	91	51	84

આ પરથી વિદ્યાર્થીઓએ મેળવેલા ગણિત અને આંકડાશાસ્ત્રનાની ક્ષમતા વચ્ચે ક્રમાંક સહસંબંધાંક શોધો.

5. નીચે આપેલી પતિ અને પત્નીની ઊંચાઈ વિશેની માહિતી પરથી તેમની ઊંચાઈ વચ્ચેનો ક્રમાંક સહસંબંધાંક ગણો.

પતિની ઊંચાઈ (સેમી)	156	153	185	157	163	191	162
પત્નીની ઊંચાઈ (સેમી)	154	148	162	157	162	170	154

6. એક ઇન્ટરવ્યૂમાં ઉમેદવારોના દેખાવ (Performance)ને આધારે બે ઇન્ટરવ્યૂ લેનારા વ્યક્તિઓએ તેઓને નીચે મુજબ ગુણ આપે છે. તે પરથી ઇન્ટરવ્યૂ લેનાર બે વ્યક્તિના મૂલ્યાંકન વચ્ચેનો ક્રમાંક સહસંબંધાંક શોધો.

ઉમેદવાર	A	B	C	D	E	F	G	H
પ્રથમ વ્યક્તિ દ્વારા અપાયેલ ગુણ	28	44	10	28	47	35	19	40
બીજી વ્યક્તિ દ્વારા અપાયેલ ગુણ	32	45	25	32	41	32	24	38

7. બે નિર્ણાયકો, દસ સ્પર્ધકોને એક સૌંદર્ય-સ્પર્ધામાં ક્રમ આપે છે અને તે પરથી તેમના ક્રમાંકોના તફાવતોના વર્ગોનો સરવાળો 214 મળે છે. આ પરથી ક્રમાંક સહસંબંધાંક શોધો.

8. દસ વિદ્યાર્થીઓએ કોઈ બે વિષયોમાં મેળવેલા ગુણ પરથી ક્રમાંક સહસંબંધાંક 0.5 મળે છે. પાછળથી એવી ખબર પડે છે કે, એક વિદ્યાર્થીના ક્રમનો તફાવત 7 હોવો જોઈતો હતો, પરંતુ ભૂલથી તે 3 લેવાયો હતો. તો ક્રમાંક સહસંબંધાંકની સુધારેલી કિંમત શોધો.

*

2.9 સહસંબંધાંકના અર્થઘટનમાં રાખવી પડતી સાવચેતી

સહસંબંધાંક એ બે ચલ વચ્ચેના સુરેખ સહસંબંધની ઘનિષ્ઠતા દર્શાવતું માપ છે. rનું ખોટું અર્થઘટન બે ચલ વચ્ચેના સંબંધ અંગે આપણને ગેરમાર્ગે દોરી શકે છે. સાવચેતીરૂપે નીચે આપેલાં કેટલાક મુદ્દાને ધ્યાનમાં રાખવા જોઈએ :

(1) સહસંબંધાંક એ ફક્ત સુરેખ સંબંધની ઘનિષ્ઠતા દર્શાવતું માપ છે. પણ તેનાથી બે ચલ વચ્ચે કાર્યકારણનો સંબંધ છે કે નહિ તે અંગે કોઈ જ ખ્યાલ આવતો નથી અને તેના પરથી બે ચલોમાંથી કયો ચલ સાપેક્ષ (કાર્યસ્વરૂપ) અને કયો ચલ નિરપેક્ષ (કારણ સ્વરૂપ) છે તે વિશે કોઈ જાણકારી મળતી નથી.

અનુભવથી સહસંબંધાંકનું યોગ્ય અર્થઘટન કરી શકાય છે અને તે માટે તપાસકર્તાને અભ્યાસ હેઠળના બે ચલ વિશે અને તેને અસર કરતાં પરિબળો વિશે પૂરતું જ્ઞાન હોવું જરૂરી છે. એવાં ઘણાં ઉદાહરણો આપી શકાય જેમાં બે ચલો વચ્ચે કોઈ અર્થપૂર્ણ સંબંધ ન હોય પરંતુ બે ચલો પરનાં અવલોકનો પરથી ગણેલા સહસંબંધાંક $|r|$ ની કિંમત 1ની ખૂબ નજીક હોય. સામાન્ય રીતે ચલો વચ્ચેના કાર્યકારણ સંબંધની પૂર્વ જાણકારી વગર જ્યારે r ની ગણતરી કરવામાં આવે ત્યારે આમ બને છે. દા.ત., એક શહેરમાં માર્ગ-અકસ્માતમાં મૃત્યુ પામતી વ્યક્તિઓની સંખ્યા અને તે જ ગાળામાં તુવેરદાળના ભાવની માહિતી પરથી તેમની વચ્ચે r ની કિંમત 1ની નજીક (ગાઢ સહસંબંધ) મળી શકે, પરંતુ અહીં તેમની વચ્ચે કોઈ અર્થપૂર્ણ સંબંધ હોઈ શકે નહિ. તેથી આ પ્રકારના સહસંબંધને અર્થહીન (nonsense) અથવા ભ્રામક (spurious) સહસંબંધ કહે છે.

(2) ક્યારેક બે ચલો વચ્ચે સહસંબંધ ન હોય છતાં બીજાં કારણોની હાજરીને લીધે $|r|$ ની કિંમત 1ની નજીક મળી શકે છે. દા.ત., ચોખા અને શેરડીની ઊપજ વચ્ચે ગાઢ ધન સહસંબંધ જોવા મળી શકે છે, પરંતુ આ બે ચલો વચ્ચે કોઈ પ્રત્યક્ષ સંબંધ નથી. આમ થવાનું કારણ બંને ચલો પર બાહ્ય પરિબળો જેવાં કે હવામાન, સિંચાઈપદ્ધતિ, ખાતર વગેરેનો સાનુકૂળ પ્રભાવ હોઈ શકે.

(3) જ્યારે $r = 0$ હોય ત્યારે આપણે ફક્ત એટલું જ કહી શકીએ કે બે ચલો વચ્ચે સુરેખ સહસંબંધ નથી. બીજી રીતે કહીએ તો સુરેખ સંબંધનો અભાવ છે. પણ બે ચલો વચ્ચે સુરેખ સિવાયનો (દ્વિઘાતી કે બીજા કોઈ પ્રકારનો) સહસંબંધ હોઈ શકે છે. દા.ત.

x	–4	–3	–2	–1	1	2	3	4
y	16	9	4	1	1	4	9	16

ઉપરના ઉદાહરણ માટે કાર્લ પિયર્સનની રીતે r શોધવામાં આવે તો તેની કિંમત શૂન્ય મળે છે. તેથી આપણે એવું અર્થઘટન કરી શકીએ કે બે ચલ વચ્ચે સહસંબંધ નથી. પરંતુ આ ખોટું અર્થઘટન છે. ચલ X અને Yની કિંમતો જોતાં માલૂમ પડે છે કે તેમની વચ્ચે $Y = X^2$ સંબંધ જોવા મળે છે. આ સંબંધ સુરેખ નહિ પણ દ્વિઘાતી છે. આમ, બંને ચલ વચ્ચે સંપૂર્ણ દ્વિઘાતી સંબંધ હોવા છતાં આપણને $r = 0$ મળે છે. તેથી ઉપરના ઉદાહરણ પરથી આપણે સમજી શકીએ છીએ કે $r = 0$ એ ફક્ત સુરેખ સહસંબંધ નથી એવું દર્શાવે છે. પણ બીજા કોઈ પ્રકારનો સહસંબંધ હોઈ શકે છે.

(4) જે વિસ્તાર, વર્ગ કે સમયગાળા દરમિયાન માહિતી મેળવી હોય તે માટે જ સહસંબંધાંકની કિંમતનું અર્થઘટન સીમિત રાખવું યોગ્ય ગણાય. તે અર્થઘટનને આવા વિસ્તાર કે વર્ગની અથવા સમયગાળાની બહારની માહિતી માટે યોગ્ય ચકાસણી કર્યા સિવાય લાગુ પાડવું જોઈએ નહિ અન્યથા ગેરસમજ ઊભી થઈ શકે છે.

દા.ત., એક કંપની કોઈ નવી વસ્તુનું ઉત્પાદન શરૂ કરે છે અને તેના વેચાણ માટે જાહેરાત કરે તો શરૂઆતમાં સામાન્ય રીતે વસ્તુની ગુણવત્તા સારી હોય તો જાહેરાત-ખર્ચ વધવાની સાથે તે વસ્તુનું વેચાણ પણ વધે છે. પરંતુ એક સમય મર્યાદા બાદ વધુ જાહેરાત-ખર્ચ કરવામાં આવે તોપણ તેના વેચાણમાં ખાસ ફેરફાર થતો નથી. શરૂઆતના ઉત્પાદન સમયે જાહેરાત-ખર્ચ અને વેચાણ વચ્ચે સામાન્ય રીતે ગાઢ ધન સહસંબંધ જોવા મળે પરંતુ અમુક સમય પછી આમ ન પણ બને. એટલે જાહેરાત-ખર્ચ અને વેચાણ વચ્ચે ગાઢ ધન સહસંબંધ છે તે અર્થઘટન તેના સમયગાળાની બહારની માહિતી માટે લાગુ પાડી શકાય નહિ.

કેટલાંક ઉદાહરણો :

ઉદાહરણ 26 : નીચે આપેલ પરિણામો પરથી સહસંબંધાંકની કિંમત શોધો.

$\boldsymbol{Cov(x, y) : s_x^2 = 3:5}$ **અને** $\boldsymbol{s_x : s_y = 1:2}$

અહીં, $Cov(x, y) : s_x^2 = 3:5$ $\quad \therefore \dfrac{Cov(x, y)}{s_x^2} = \dfrac{3}{5}$

અને $s_x : s_y = 1:2$ $\quad \therefore \dfrac{s_x}{s_y} = \dfrac{1}{2}$

હવે, $$r = \frac{Cov(x, y)}{s_x \, s_y} = \frac{Cov(x, y)}{s_x^2} \times \frac{s_x}{s_y}$$

$$= \frac{3}{5} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{3}{10}$$

$$\therefore \quad r = 0.3$$

ઉદાહરણ 27 : એક દ્વિચલ માહિતી પરથી નીચેનાં પરિણામો મળે છે.

$n = 10$, $\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y}) = 72$, $s_x = 3$ **અને** $\Sigma(y-\bar{y})^2 = 160$ **આ પરથી સહસંબંધાંક શોધો.**

આપેલી વીગત પરથી સૌપ્રથમ આપણે s_y શોધીશું.

$$s_y = \sqrt{\frac{\Sigma(y-\bar{y})^2}{n}} = \sqrt{\frac{160}{10}} = \sqrt{16} = 4$$

હવે, નીચેના સૂત્રમાં જરૂરી કિંમતો મૂકતાં,

$$r = \frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{ns_x s_y}$$

$$= \frac{72}{10(3)(4)}$$

$$= \frac{72}{120}$$

$$\therefore \quad r = 0.6$$

ઉદાહરણ 28 : એક શિક્ષણવિદ્દે મોબાઇલ ફોનમાં સોશિયલ મીડિયાના વપરાશ અને પરિક્ષાના પરિણામ વચ્ચે સંબંધ જાણવા એક પ્રયોગ કર્યો. તે માટે પસંદ થયેલા દસ વિદ્યાર્થીઓના સમૂહમાં તેઓએ છેલ્લા અઠવાડિયામાં મોબાઇલ ફોનમાં 'સોશિયલ મીડિયા' પર ગાળેલો સમય x (કલાકમાં) અને પછી તરત લેવાયેલ 50 ગુણની પરીક્ષામાં મેળવેલ ગુણ y પરથી નીચેનાં પરિણામો મળે છે.

$\Sigma x = 133$, $\Sigma y = 220$, $\Sigma x^2 = 2344$, $\Sigma y^2 = 6500$ **અને** $\Sigma xy = 3500$

પાછળથી માલૂમ પડ્યું એ X અને Y નાં અવલોકનોની એક જોડ $(15, 25)$ ને બદલે $(13, 20)$ લેવાઈ હતી. આ પરથી X અને Y વચ્ચે સહસંબંધાંકની સાચી કિંમત શોધો.

અહીં $n = 10$, $\Sigma x = 133$, $\Sigma y = 220$, $\Sigma x^2 = 2344$, $\Sigma y^2 = 6500$ અને $\Sigma xy = 3500$

ખોટી જોડ : $(13, 20)$

સાચી જોડ : $(15, 25)$

હવે ઉપર્યુક્ત માપોની સુધારેલી કિંમતો નીચે મુજબ મેળવીએ.

$\Sigma x = 133 - 13 + 15 = 135$

$\Sigma x = 220 - 20 + 25 = 225$

$\Sigma x^2 = 2344 - (13)^2 + (15)^2 = 2344 - 169 + 225 = 2400$

$\Sigma y^2 = 6500 - (20)^2 + (25)^2 = 6500 - 400 + 625 = 6725$

$\Sigma xy = 3500 - (13 \times 20) + (15 \times 25) = 3500 - 260 + 375 = 3615$

હવે, આ સુધારેલી કિંમતો નીચેના સૂત્રમાં મૂકતાં,

$$r = \frac{n\Sigma xy - (\Sigma x)(\Sigma y)}{\sqrt{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2} \cdot \sqrt{n\Sigma y^2 - (\Sigma y)^2}}$$

$$= \frac{10(3615) - (135)(225)}{\sqrt{10(2400) - (135)^2} \cdot \sqrt{10(6725) - (225)^2}}$$

$$= \frac{36150-30375}{\sqrt{24000-18225} \cdot \sqrt{67250-50625}}$$

$$= \frac{5775}{\sqrt{5775} \cdot \sqrt{16625}}$$

$$= \frac{5775}{\sqrt{96009375}}$$

$$= \frac{5775}{9798.4374}$$

$$= 0.5894$$

$\therefore \quad r \simeq 0.59$

ઉદાહરણ 29 : (1) જો બે ચલ X અને Y વચ્ચે સહસંબંધાંક 0.5 હોય, તો નીચેનાની કિંમત શોધો.
(i) $r\ (x, -y)$ (ii) $r\ (-x, y)$ (iii) $r\ (-x, -y)$

અહીં $r\ (x, y) = 0.5$

સહસંબંધાંકના ગુણધર્મ (નં. 5) પરથી,

(i) $r(x, -y) = -r(x, y) = -0.5$

(ii) $r(-x, y) = -r(x, y) = -0.5$

(iii) $r(-x, -y) = r(x, y) = 0.5$

(2) જો $r(x, y) = 0.8$ હોય તો નીચેના માટે $r(u, v)$ શોધો.

(i) $u = x - 10$ અને $v = y + 10$

(ii) $u = \frac{x-5}{3}$ અને $v = 2y + 7$

(iii) $u = \frac{2x-3}{10}$ અને $v = \frac{10-y}{100}$

(iv) $u = \frac{5-x}{2}$ અને $v = \frac{5+y}{2}$

(v) $u = \frac{20-x}{3}$ અને $v = \frac{20-y}{7}$

અહીં, $r(x, y) = 0.8$

સહસંબંધાંકના ગુણધર્મ (4 અને 5)પરથી, u અને v ને વ્યાખ્યાયિત કરતાં $r(u, v)$ની કિંમત X અને Y ના સહગુણકોના ચિહ્નો પર આધારિત રહેશે. એટલે કે $r(u, v) = r(x, y)$ અથવા $-r(x, y)$ થશે.

(i) $r\ (x-10, y+10) = r(u, v) = 0.8$

(ii) $r\left(\frac{x-5}{3}, 2y+7\right) = r(u, v) = 0.8$

(iii) $r\left(\frac{2x-3}{10}, \frac{10-y}{100}\right) = r(u, v) = -0.8$

(iv) $r\left(\frac{5-x}{2}, \frac{5+y}{2}\right) = r(u, v) = -0.8$

(v) $r\left(\frac{20-x}{3}, \frac{20-y}{7}\right) = r(u, v) = 0.8$

ઉદાહરણ 30 : MBA ઇન્સ્ટિટ્યૂટના વિદ્યાર્થીઓના એક જૂથ દ્વારા શાળા કક્ષાએ અંતિમ વર્ષમાં અને સ્નાતક કક્ષાના અંતિમ વર્ષમાં પરીક્ષાના પરિણામો વચ્ચેનો સંબંધ જાણવા માટેના પ્રોજેક્ટ દરમિયાન તેમણે લીધેલા નિદર્શના દસ વિદ્યાર્થીઓએ ધોરણ 12 માં મેળવેલા ગુણની ટકાવારી (x) અને સ્નાતક કક્ષાના અંતિમ વર્ષમાં મેળવેલા ગુણની ટકાવારી (y)ની માહિતી પરથી નીચેનાં પરિણામો મળે છે.

$$n = 10, \Sigma(x-65) = -2,\ \Sigma(y-60) = 2,\ \Sigma(x-65)^2 = 176,\ \Sigma(y-60)^2 = 140, \Sigma(x-65)(y-60) = 141$$

આ પરથી ધોરણ 12 અને સ્નાતક કક્ષાના અંતિમ વર્ષના ગુણની ટકાવારી વચ્ચે સહસંબંધાંકની કિંમત શોધો.

અહીં $\Sigma(x-65) = -2 \neq 0 \qquad \therefore\ A = 65$

$\Sigma(y-60) = 2 \neq 0 \qquad \therefore\ B = 60$

(અહીં વિચલનોનો સરવાળો શૂન્ય નથી, તેથી $65 \neq \bar{x}$ અને $60 \neq \bar{y}$)

હવે, $u = (x-65)$ અને $v = (y-60)$ વ્યાખ્યાયિત કરીએ.

તેથી, $\Sigma(x-65) = \Sigma u = -2,\ \Sigma(y-60) = \Sigma v = 2$

$\Sigma(x-65)^2 = \Sigma u^2 = 176,\ \Sigma(y-60)^2 = \Sigma v^2 = 140$

$\Sigma(x-65)(y-60) = \Sigma uv = 141$

ઉપર્યુક્ત કિંમતોને નીચેના સૂત્રમાં મૂકતાં,

$$r = \frac{n\Sigma uv - (\Sigma u)(\Sigma v)}{\sqrt{n\Sigma u^2 - (\Sigma u)^2} \cdot \sqrt{n\Sigma v^2 - (\Sigma v)^2}}$$

$$= \frac{10(141) - (-2)(2)}{\sqrt{10(176) - (-2)^2} \cdot \sqrt{10(140) - (2)^2}}$$

$$= \frac{1414}{\sqrt{1756} \cdot \sqrt{1396}}$$

$$= \frac{1414}{\sqrt{2451376}}$$

$$= \frac{1414}{1565.6871}$$

$$= 0.9031$$

$$\therefore\ r \simeq 0.90$$

ઉદાહરણ 31 : કિશોરવયનાં બાળકોની ઉંમર વર્ષમાં (X) અને તેમની પ્રોટીનની દૈનિક જરૂરિયાત ગ્રામમાં (Y) વચ્ચેના સંબંધનો અભ્યાસ કરવા રાજ્યના આરોગ્ય વિભાગે મેળવેલા દસ બાળકોના નિદર્શમાંથી નીચેની માહિતી મળે છે.

$$\Sigma x = 140,\ \Sigma y = 150,\ \Sigma(x-10)^2 = 180,\quad \Sigma(y-15)^2 = 215, \Sigma(x-10)(y-15) = 60$$

આ પરથી X અને Y વચ્ચે સહસંબંધાંક શોધો.

અહીં, $\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{140}{10} = 14,\quad \bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{150}{10} = 15$

આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે ચલ x માટે વિચલનો મધ્યક $(\overline{x} = 14)$ માંથી લીધેલા નથી. તેથી ઉકેલ મેળવવા માટે $u = (x - A) = (x - 10)$ અને $v = (y - B) = (y - 15)$ વ્યાખ્યાયિત કરવું અનુકૂળ રહેશે.

આપણને નીચેની માહિતી આપેલી છે.

$\Sigma(x-10)^2 = \Sigma u^2 = 180,\ \Sigma(y-15)^2 = \Sigma v^2 = 215,\ \Sigma(x-10)(y-15) = \Sigma uv = 60$

હવે, r ના યોગ્ય સૂત્રનો ઉપયોગ કરવા સૌપ્રથમ Σu અને Σv ની કિંમતો આપણે શોધવી પડશે.

$\Sigma u = \Sigma(x-10) = \Sigma x - \Sigma 10 = \Sigma x - n(10) = 140 - 10(10) = 140 - 100 = 40$

$\Sigma v = \Sigma(y-15) = \Sigma y - \Sigma 15 = \Sigma y - n(15) = 150 - 10(15) = 150 - 150 = 0$

$\left\{\because\ \Sigma k = \underbrace{k + k + k + \dots\dots\dots + k}_{n \text{ વખત}} = nk \text{ જ્યાં, } k \text{ અચળ}\right\}$

ઉપર્યુક્ત કિંમતોને નીચેના સૂત્રમાં મૂકતાં,

$$r = \frac{n\Sigma uv - (\Sigma u)(\Sigma v)}{\sqrt{n\Sigma u^2 - (\Sigma u)^2} \cdot \sqrt{n\Sigma v^2 - (\Sigma v)^2}}$$

$$= \frac{10(60) - (40)(0)}{\sqrt{10(180) - (40)^2} \cdot \sqrt{10(215) - (0)^2}}$$

$$= \frac{600 - 0}{\sqrt{1800 - 1600} \cdot \sqrt{2150 - 0}}$$

$$= \frac{600}{\sqrt{200 \cdot \sqrt{2150}}}$$

$$= \frac{600}{\sqrt{430000}}$$

$$= \frac{600}{655.7439}$$

$$= 0.9150$$

$$\therefore\ r \simeq 0.92$$

ઉદાહરણ 32 : બે જુદા જુદા વિષયોમાં વિદ્યાર્થીઓની ક્ષમતા વચ્ચેનો સંબંધ જાણવા માટે એક શાળાના બાળકોમાંથી સાત વિદ્યાર્થીઓનો એક નિદર્શ લેવામાં આવે છે. આ સાત વિદ્યાર્થીઓએ બે વિષયોમાં મેળવેલાં ગુણની માહિતી પરથી તેમને આપેલા ક્રમોના તફાવતોના વર્ગોનો સરવાળો 25.5 મળે છે. વધુમાં એ પણ જાણવા મળે છે કે, કોઈ એક વિષયમાં બે વિદ્યાર્થીઓના ગુણ સરખા છે અને બાકી બધા જ ગુણ જુદા-જુદા છે. આ પરથી ક્રમાંક સહસંબંધાંક શોધો.

અહીં $n = 7$ અને $\Sigma d^2 = 25.5$

બે વિદ્યાર્થીઓના એક વિષયમાં ગુણ સરખા છે. $(\therefore m = 2)$ તેથી આપણે કહી શકીએ કે, અવલોકનોને ક્રમ આપવામાં ગાંઠ પડે છે અને તેથી CF મેળવવા માટે $\left(\frac{m^3 - m}{12}\right)$ પદ એક જ વખત લેવું પડશે.

સુધારો CF $= \left(\frac{m^3-m}{12}\right) = \left(\frac{2^3-2}{12}\right) = 0.5$

$$r = 1-\frac{6\left[\Sigma d^2 + CF\right]}{n(n^2-1)}$$

$$= 1-\frac{6[25.5+0.5]}{7(49-1)}$$

$$= 1-\frac{6(26)}{336}$$

$$= 1-\frac{156}{336}$$

$$= 1 - 0.4643$$

$$= 0.5357$$

$$\therefore \quad r \simeq 0.54$$

સારાંશ

- **સહસંબંધ :** બે ચલની કિંમતોમાં એક સાથે ફેરફારો થતા હોય અને તેમની વચ્ચે પ્રત્યક્ષ કે પરોક્ષ કાર્યકારણનો સંબંધ હોય.
- **સુરેખ સહસંબંધ :** બે ચલની કિંમતોમાં થતો ફેરફાર અચળ પ્રમાણમાં હોય એટલે કે બે સહસંબંધિત ચલોની કિંમતોની જોડ દર્શાવતાં બિંદુઓ એક સુરેખા પર હોય.
- **ધન સહસંબંધ :** સહસંબંધિત ચલોની કિંમતોમાં થતા ફેરફારો એક જ દિશામાં હોય.
- **ઋણ સહસંબંધ :** સહસંબંધિત ચલોની કિંમતોમાં થતા ફેરફારો એકબીજાની વિરુદ્ધ દિશામાં હોય.
- **સહસંબંધાંક :** બે ચલ વચ્ચેના સુરેખ સહસંબંધની ઘનિષ્ઠતાનું સંખ્યાત્મક માપ r એટલે સહસંબંધાંક.
- **વિકીર્ણ આકૃતિ :** સુરેખ સહસંબંધ અને તેનો પ્રકાર (ધન કે ઋણ) જાણવાની એક સરળ પદ્ધતિ.
- **કાર્લ પિયર્સનની રીત :** બધા જ પ્રાપ્તાંકોનો ઉપયોગ કરી બે ચલ વચ્ચેના સુરેખ સહસંબંધનો પ્રકાર અને ઘનિષ્ઠતાનું માપ (r) શોધવા માટેની શ્રેષ્ઠ રીત.
- **સ્પિયરમૅનની ક્રમાંક સહસંબંધની રીત :** ગુણાત્મક ચલો વચ્ચેનો સહસંબંધાંક શોધવા માટેની રીત. જ્યારે સંખ્યાત્મક ચલોમાં પ્રસાર વધુ હોય ત્યારે સહસંબંધાંક મેળવવાની ઇચ્છનીય રીત.
- બે ચલ વચ્ચે કાર્યકારણનો સંબંધ પ્રસ્થાપિત (સાબિત) ન કરી શકાય પરંતુ તે છે એ ધારણા હેઠળ સહસંબંધનો અભ્યાસ કરવામાં આવે છે.
- $r = 0$ એ ફક્ત સુરેખ સહસંબંધનો અભાવ છે તેમ સૂચવે છે, પરંતુ અન્ય પ્રકારનો સહસંબંધ હોઈ શકે છે.

પ્રકરણની એક ઝલક

સહસંબંધ

- **સુરેખ સહસંબંધ**
  - **રીતો**
    - **વિકીર્ણ આકૃતિની રીત** — સહસંબંધનો ફક્ત પ્રકાર જ જાણી શકાય
    - **કાર્લ પિયર્સનની રીત** — સહસંબંધાંક શોધવાની શ્રેષ્ઠ રીત
    - **સ્પિયરમૅનની રીત** — ગુણાત્મક ચલો વચ્ચેનો સહસંબંધાંક શોધવાની રીત
- **વક્રીય સહસંબંધ**

સૂત્રોની યાદી

કાર્લ પિયર્સનની રીત :

સહસંબંધાંક $= r$

(1) $r = \dfrac{\text{સહવિચરણ}}{(X \text{નું પ્રવિ})(Y \text{નું પ્રવિ})} = \dfrac{Cov(X,Y)}{s_x \cdot s_y}$

જ્યાં, $Cov(X,Y) = \dfrac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{n} = \dfrac{\Sigma xy - n\bar{x}\,\bar{y}}{n}$

$s_x = \sqrt{\dfrac{\Sigma(x-\bar{x})^2}{n}}$ અને $s_y = \sqrt{\dfrac{\Sigma(y-\bar{y})^2}{n}}$

(2) $r = \dfrac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sqrt{\Sigma(x-\bar{x})^2} \cdot \sqrt{\Sigma(y-\bar{y})^2}}$

(3) $r = \dfrac{n\Sigma xy - (\Sigma x)(\Sigma y)}{\sqrt{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2} \cdot \sqrt{n\Sigma y^2 - (\Sigma y)^2}}$

(4) $r = \dfrac{n\Sigma uv - (\Sigma u)(\Sigma v)}{\sqrt{n\Sigma u^2 - (\Sigma u)^2} \cdot \sqrt{n\Sigma v^2 - (\Sigma v)^2}}$ જ્યાં, $u = x - A$ અથવા $\dfrac{x-A}{c_x}$, $v = y - B$ અથવા $\dfrac{y-B}{c_y}$

(5) $r = \dfrac{\Sigma(x-\bar{x})\,(y-\bar{y})}{n \cdot s_x \cdot s_y}$

(6) $r = \dfrac{\Sigma xy - n\bar{x}\,\bar{y}}{n \cdot s_x \cdot s_y}$

(5) અને (6) : ખાસ કરીને ટૂંકા દાખલા માટે

સ્પિયરમૅનની ક્રમાંક સહસંબંધની રીત :

(7) $r = 1 - \dfrac{6\Sigma d^2}{n(n^2-1)}$ જ્યારે અવલોકનો પુનરાવર્તિત ન થતા હોય.

(8) $r = 1 - \dfrac{6\left[\Sigma d^2 + CF\right]}{n(n^2-1)}$ જ્યારે અમુક અવલોકનો પુનરાવર્તિત થતા હોય.

જ્યાં $d = x$ નો ક્રમ $-$ y નો ક્રમ $= R_x - R_y$

$CF =$ સુધારો $= \Sigma\left(\dfrac{m^3-m}{12}\right)$

$m =$ કોઈ અવલોકન જેટલી વખત પુનરાવર્તન પામે તે સંખ્યા

સ્વાધ્યાય 2

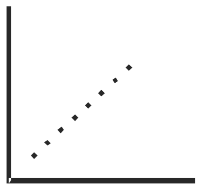
વિભાગ A

નીચે આપેલ બહુવિકલ્પ પ્રશ્નો માટે સાચા વિકલ્પની પસંદગી કરો :

1. સહસંબંધના સંદર્ભમાં જે આકૃતિમાં જોડયુક્ત બિંદુઓ (x,y) દર્શાવવામાં આવે તે આકૃતિને તમે શું કહેશો ?

(a) સ્તંભાલેખ (b) વર્તુળ આકૃતિ (c) વિકીર્ણ આકૃતિ (d) આવૃત્તિ વક્ર

2. જો X અને Y વચ્ચે નીચે મુજબ વિકીર્ણ આકૃતિ મળે તો બે ચલ કેવો સહસંબંધ ધરાવે છે ?



(a) સંપૂર્ણ ધન સહસંબંધ (b) આંશિક ધન સહસંબંધ

(c) સંપૂર્ણ ઋણ સહસંબંધ (d) આંશિક ઋણ સહસંબંધ

3. જો X અને Y વચ્ચે નીચે મુજબ વિકીર્ણ આકૃતિ મળે તો તે બે ચલ કેવો સહસંબંધ ધરાવે છે ?

(a) સંપૂર્ણ ધન સહસંબંધ (b) આંશિક ધન સહસંબંધ

(c) સંપૂર્ણ ઋણ સહસંબંધ (d) આંશિક ઋણ સહસંબંધ

4. વિકીર્ણ આકૃતિમાં બધાં જ બિંદુઓ એક જ સુરેખા પર આવેલાં હોય તો r ની કિંમત શું થાય ?

(a) 0 (b) 1 અથવા -1 (c) 0.5 (d) -0.5

5. સહસંબંધાંક rનો વિસ્તાર શું છે ?

(a) $-1 < r < 1$ (b) 0 થી 1 (c) $-1 \le r \le 1$ (d) -1 થી 0

6. જો ચલ 'વજન'નો એકમ કિગ્રા અને ચલ 'ઊંચાઈ'નો એકમ સેમી હોય, તો તેમની વચ્ચેના સહસંબંધાંકનો એકમ વિશે શું કહી શકાય ?

(a) કિગ્રા (b) સેમી (c) કિમી (d) એકમ ન હોય

7. જો બે ચલ વચ્ચે અચળ પ્રમાણમાં એકબીજાથી વિરુદ્ધ દિશામાં ફેરફાર થતા હોય, તો તે બે ચલ વચ્ચે કેવા પ્રકારનો સહસંબંધ મળે ?

(a) આંશિક ધન સહસંબંધ (b) સંપૂર્ણ ઋણ સહસંબંધ

(c) સંપૂર્ણ ધન સહસંબંધ (d) આંશિક ઋણ સહસંબંધ

8. કાર્લ પિયર્સનના સહસંબંધાંક ગણવાના સૂત્રમાં અંશ શું દર્શાવે છે ?

(a) X અને Y ના વિચરણોનો ગુણાકાર (b) X અને Y નું સહવિચરણ

(c) X નું વિચરણ (d) Y નું વિચરણ

9. નીચેના પૈકી r ની કઈ કિંમત શક્ય નથી ?

(a) 0.99 (b) -1.07 (c) -0.85 (d) 0

10. જો $u = \frac{x-A}{c_x}$ અને $v = \frac{y-B}{c_y}$, $c_x > 0,\ c_y > 0$ હોય તો નીચેના પૈકી કયુ વિધાન સાચું છે ?

(a) $r(x, y) \neq r(u, v)$ (b) $r(x, y) > r(u, v)$ (c) $r(x, y) = r(u, v)$ (d) $r(x, y) < r(u, v)$

11. જો $r(x, y) = 0.7$ હોય, તો $r(x+0.2,\ y+0.2)$ ની કિંમત કેટલી થાય ?

(a) 0.7 (b) 0.9 (c) 1.1 (d) –0.7

12. જો $r(-x, y) = -0.5$ હોય, તો $r(x, -y)$ ની કિંમત કેટલી થાય ?

(a) 0.5 (b) –0.5 (c) 1 (d) 0

13. જો $\Sigma d^2 = 0$ હોય, તો ક્રમાંક સહસંબંધાંકની કિંમત કેટલી થાય ?

(a) 0 (b) –1 (c) 1 (d) 0.5

14. ક્રમાંક સહસંબંધની રીતમાં જો પ્રત્યેક અવલોકનની જોડ માટે પ્રચલિત સંકેતોમાં $R_x = R_y$ હોય, તો r ની કિંમત શું થાય ?

(a) 0 (b) –1 (c) 1 (d) 0.1

15. ક્રમાંક સહસંબંધની રીતમાં બે ચલના ક્રમાંકોના તફાવતોનો સરવાળો શું થાય ?

(a) 0 (b) –1 (c) 1 (d) કોઈ પણ વાસ્તવિક સંખ્યા

16. ક્રમાંક સહસંબંધની રીતમાં જો બે ચલોના ક્રમ એકબીજાથી ઊલટા ક્રમમાં હોય, તો r ની કિંમત શું થાય ?

(a) $r = 0$ (b) $r = -1$ (c) $r = 1$ (d) $r = 0.1$

17. ક્રમાંક સહસંબંધમાં પુનરાવર્તન પામતા પ્રત્યેક અવલોકન માટે પ્રચલિત સંકેતોમાં Σd^2 માં કયું પદ ઉમેરવામાં આવે છે ?

(a) $\frac{m^2-1}{12}$ (b) $\frac{m^3-m}{12}$ (c) $\frac{6m^3-m}{12}$ (d) $n\left(n^2-1\right)$

18. જ્યારે કોઈ વસ્તુના ભાવ સ્થિર હોય ત્યારે તે વસ્તુના વેચાયેલા એકમોની સંખ્યા અને તેનાથી થતી આવક વચ્ચે કેવો સહસંબંધ થશે ?

(a) સંપૂર્ણ ધન (b) આંશિક ધન (c) સંપૂર્ણ ઋણ (d) આંશિક ઋણ

વિભાગ B

નીચેના પ્રશ્નોના એક વાક્યમાં જવાબ આપો :

1. સહસંબંધની વ્યાખ્યા આપો.

2. સહસંબંધાંકની વ્યાખ્યા આપો.

નીચે આપેલ પ્રશ્ન 3થી 6માં ચલની આપેલી જોડ વચ્ચે ધન સહસંબંધ છે કે ઋણ સહસંબંધ છે તે જણાવો.

3. જીવન વીમાની કોઈ એક યોજના હેઠળ વીમો ઉતરાવતી વખતે પુખ્ત વયની વ્યક્તિની ઉંમર અને જીવન વીમાનું પ્રીમિયમ

4. કોઈ દેશમાં બહુસ્વીકૃત વસ્તુનું છેલ્લાં પાંચ વર્ષનું વાર્ષિક વેચાણ અને તેનાથી થતો નફો

5. કોઈ દેશમાં સામાન્ય વ્યક્તિની આવક સ્થિર હોય ત્યારે ફુગાવાનો દર અને તે દેશના સામાન્ય વ્યક્તિની ખરીદશક્તિ

6. સમુદ્ર સપાટીથી સ્થળની ઊંચાઈ અને હવામાં ઑક્સિજનનું પ્રમાણ

7. ક્રૂડ ઑઇલની વાર્ષિક આયાત અને તે જ સમયગાળામાં થતાં લગ્નોની સંખ્યા વચ્ચેના સહસંબંધ વિશે શું કહી શકાય ?

8. X અને Y વચ્ચે સહસંબંધાંક 0.4 છે. હવે X ના પ્રત્યેક અવલોકનમાં 5 ઉમેરવામાં આવે અને Y ના પ્રત્યેક અવલોકનોમાંથી 10 બાદ કરવામાં આવે તો આ ફેરફાર બાદ સહસંબંધાંક શું થશે ?

9. વિકીર્ણ આકૃતિની મુખ્ય મર્યાદા શું છે ?

10. જો $n\left(n^2-1\right)$ની કિંમત Σd^2ની કિંમત કરતાં છ ગણી હોય, તો rની કિંમત શું થાય ?

11. જો સહવિચરણનું મૂલ્ય ઋણ હોય, તો સહસંબંધાંક rનું ચિહ્ન શું થાય ?

વિભાગ C

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

1. ધન સહસંબંધનો અર્થ ઉદાહરણ સહિત સમજાવો.
2. ઋણ સહસંબંધનો અર્થ ઉદાહરણ સહિત સમજાવો.
3. કાર્લ પિયર્સનની રીતની ધારણાઓ લખો.
4. વિકીર્ણ આકૃતિની વ્યાખ્યા આપો.
5. અર્થહીન સહસંબંધ એટલે શું ?
6. કાર્ય-કારણનો સંબંધ સમજાવો.
7. સમજાવો : સંપૂર્ણ ધન સહસંબંધ
8. સમજાવો : સંપૂર્ણ ઋણ સહસંબંધ
9. ક્રમાંક સહસંબંધની જરૂર ક્યારે પડે છે ?
10. કયા સંજોગોમાં કાર્લ પિયર્સનની રીતે અને ક્રમાંક સહસંબંધની રીતે મેળવેલા સહસંબંધાંક સરખા થાય છે ?
11. જો $Cov(x, y)=120,\ s_x=12,\ s_y=15$ હોય તો rની કિંમત શોધો.
12. જો $\Sigma(x-\overline{x})(y-\overline{y})=-65,\ s_x=3,\ s_y=4$ અને $n=10$ હોય, તો rની કિંમત શોધો.
13. અવલોકનોની 10 જોડ માટે $\Sigma d^2=120$ હોય, તો ક્રમાંક સહસંબંધાંકની કિંમત શોધો.

વિભાગ D

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

1. વિકીર્ણ આકૃતિની રીત સમજાવો.

2. વિકીર્ણ આકૃતિની રીતના ગુણ અને મર્યાદા જણાવો.

3. સહસંબંધાંકના ગુણધર્મો લખો.

4. કાર્લ પિયર્સનની રીતના ગુણ અને મર્યાદાઓ જણાવો.

5. $r=1$, $r=-1$ અને $r=0$ નું અર્થઘટન કરો.

6. સ્પિયરમૅનના ક્રમાંક સહસંબંધની રીત સમજાવો.

7. સ્પિયરમૅનના ક્રમાંક સહસંબંધની રીતના ગુણ અને મર્યાદાઓ જણાવો.

8. આંશિક સહસંબંધનું અર્થઘટન તમે કેવી રીતે કરશો ?

9. સહસંબંધાંકના અર્થઘટનમાં રાખવી પડતી સાવચેતી જણાવો.

10. બે ચલ વરસાદ મિમિમાં (X) અને પાકની ઊપજ ક્વિન્ટલ/હેક્ટર (Y) વિશે નીચેની માહિતી મળે છે.

$n=10$, $\bar{x}=120$, $\bar{y}=150$, $s_x=30$, $s_y=40$ અને $\Sigma xy=189000$ આ પરથી સહસંબંધાંકની કિંમત શોધો.

11. અવલોકનોની 9 જોડ માટે નીચેની માહિતી મળે છે.

$\Sigma x=51$, $\Sigma y=72$, $\Sigma x^2=315$, $\Sigma y^2=582$, $\Sigma xy=408$ આ પરથી સહસંબંધાંક શોધો.

12. એક નૃત્ય સ્પર્ધામાં આઠ સ્પર્ધકોને બે નિર્ણાયકોએ આપેલા ક્રમ પરથી નીચેની માહિતી મળે છે.

$$\Sigma\left(R_x-R_y\right)^2=126$$

જ્યાં, R_x અને R_y એ બે નિર્ણાયકો દ્વારા સ્પર્ધકોને મળેલા ક્રમ દર્શાવે છે. આ પરથી સ્પિયરમૅનનો ક્રમાંક સહસંબંધાંક શોધો.

13. નોકરી માટે આવેલા પાંચ ઉમેદવારોને ઇન્ટરવ્યુને આધારે બે નિષ્ણાતોએ આપેલા ક્રમ (3, 5), (5, 4), (1, 2), (2, 3) અને (4, 1) છે. આ માહિતી પરથી ક્રમાંક સહસંબંધાંક શોધો.

વિભાગ E

નીચેનાના ઉકેલ મેળવો :

1. એક રોગચાળાના સમય દરમિયાન નાક પર પહેરવાના માસ્કની વેચાણ કિંમત અને તેની માંગ વચ્ચેનો સંબંધ જાણવા એકઠી કરાયેલી માહિતી નીચે મુજબ છે.

ભાવ (₹)	38	45	40	42	35
માંગ (એકમો)	103	92	97	98	100

આ પરથી માસ્કના ભાવ અને ભાવ વચ્ચે કાર્લ પિયર્સનની રીતે સહસંબંધાંક શોધો.

2. એક અનુસ્નાતક કક્ષાના અભ્યાસમાં વિદ્યાર્થીઓના માનવ સંસાધન સંચાલન અને વ્યક્તિત્વ વિકાસ જેવા વિષયોમાં તેમની ક્ષમતા વચ્ચેનો સંબંધ જાણવા પાંચ વિદ્યાર્થીઓનો નિદર્શ લઈ નીચે મુજબ માહિતી મેળવવામાં આવે છે.

વિદ્યાર્થી	1	2	3	4	5
માનવસંશાધન સંચાલનમાં ગુણ	45	25	40	20	45
વ્યક્તિત્વ વિકાસમાં ગુણ	47	23	17	35	48

આ માહિતી પરથી બંને વિષયોના ગુણ વચ્ચે કાર્લ પિયર્સનની રીતે સહસંબંધાંક ગણો.

3. એક વિક્રેતા વિવિધ બ્રાંડની લિપસ્ટિકને તેમની લોકપ્રિયતા અનુસાર શૉકેસમાં પ્રદર્શિત કરવા ઇચ્છે છે. તેથી જુદી જુદી બ્રાંડની લિપસ્ટિકને ક્રમ આપવા બે નિષ્ણાત પ્રેયલ અને નિશીને આમંત્રિત કરે છે.

લિપસ્ટિક	A	B	C	D	E	F	G
પ્રેયલે આપેલ ક્રમ	5	6	7	1	3	2	4
નિશીએ આપેલ ક્રમ	5	7	6	2	1	4	3

આ પરથી બંને નિષ્ણાતોએ આપેલા નિર્ણયો વચ્ચેની સામ્યતા જાણવા ક્રમાંક સહસંબંધાંક શોધો.

4. અમદાવાદ શહેરમાં ચ્હાના ભાવ અને કૉફીના ભાવ વચ્ચેનો સંબંધ જાણવા માટે એક વેપારી છેલ્લા છ મહિનામાં ચ્હા અને કૉફીના ભાવો વિશે નીચે મુજબ માહિતી મેળવે છે.

ચ્હાનો કિગ્રા દીઠ ભાવ (₹)	340	370	450	320	300	360
કૉફીનો 100 ગ્રામ દીઠ ભાવ (₹)	190	215	200	180	163	175

આ પરથી ચ્હા અને કૉફીના ભાવો વચ્ચે ક્રમાંક સહસંબંધાંક શોધો.

5. એક વિદેશી ફળની સ્થાનિક બજારમાં ખૂબજ અનિશ્ચિત માંગ જોવા મળે છે. ફળોનો એક વિક્રેતા તે વિદેશી ફળનો ભાવ અને પુરવઠા વચ્ચેનો સંબંધ જાણવા નીચે મુજબ છેલ્લા દસ મહિનાના સરેરાશ ભાવ અને પુરવઠાની વીગતો મેળવે છે.

સરેરાશ એકમ દીઠ ભાવ (₹)	65	68	43	38	77	48	35	30	25	50
પુરવઠો (સો એકમો)	52	53	42	60	45	41	37	38	25	27

આ માહિતી પરથી સરેરાશ ભાવ અને પુરવઠા વચ્ચે ક્રમાંક સહસંબંધાંક શોધો.

6. ઓછા સમયના અંતરે વિદ્યાર્થીઓની પરીક્ષા લેવામાં આવે તો પરિણામો વચ્ચેનો સંબંધ જાણવા એક શિક્ષકે છેલ્લા બે અઠવાડિયામાં લીધેલી બે પરીક્ષાના પરિણામ પરથી સાત વિદ્યાર્થીઓના નીચે મુજબ ક્રમ મળે છે.

વિદ્યાર્થી	A	B	C	D	E	F	G
પ્રથમ પરીક્ષામાં ક્રમ	5	1	2	3.5	3.5	7	6
દ્વિતીય પરીક્ષામાં ક્રમ	7	1	4	6	5	3	2

આ પરથી બંને પરીક્ષાના પરિણામો વચ્ચે સામ્યતા જાણવા ક્રમાંક સહસંબંધાંક શોધો.

વિભાગ F

નીચેનાના ઉકેલ મેળવો :

1. આઠ જિલ્લામાં ખાતરનો વપરાશ (ટનમાં) અને ઉત્પાદકતા (ટનમાં)ની માહિતી નીચે આપેલ છે.

ખાતર (ટન)	15	18	20	25	29	35	40	38
ઉત્પાદકતા (ટન)	85	93	95	105	115	130	140	145

કાર્લ પિયર્સનની રીતે સહસંબંધાંક શોધો.

2. એક મોટા શહેરનાં છ બાળકોએ વિડિયો ગૅમ્સ રમવામાં ગાળેલા અઠવાડિક સરેરાશ કલાકો અને એક પરીક્ષામાં તેમણે મેળવેલા મૂલ્યાંકન ગુણ (Grade Point)ની નીચેની માહિતી પરથી કાર્લ પિયર્સનની રીતે સહસંબંધાંક શોધો.

વિડિયો ગેમ્સ રમવામાં ગાળેલા અઠવાડિક સરેરાશ કલાકો	43	47	45	50	40	51
પરીક્ષામાં મેળવેલા મૂલ્યાંકન ગુણ	5.2	4.9	5.0	4.7	5.4	4.3

3. નીચેની માહિતી પરથી વસ્તીની ગીચતા (ચોરસ કિમીદીઠ) અને મૃત્યુદર (દર હજારે) વચ્ચે કાર્લ પિયર્સનની રીતે સહસંબંધાંક શોધો.

શહેર	A	B	C	D	E	F	G
ગીચતા (ચો કિમી દીઠ)	750	600	350	500	200	700	850
મૃત્યુદર (દર હજારે)	30	20	15	20	10	25	50

4. ઈલેક્ટ્રિક પંખાનું ઉત્પાદન કરતી કંપનીઓની જાહેરાત-ખર્ચ અને વેચાણ વચ્ચેના સંબંધનો અભ્યાસ કરવા નીચેની માહિતી એકઠી કરવામાં આવી છે. આ માહિતી પરથી કંપનીઓના જાહેરાત-ખર્ચ અને વેચાણ વચ્ચેનો સહસંબંધાંક કાર્લ પિયર્સનની રીતે મેળવો.

કંપની	A	B	C	D	E	F
જાહેરાત ખર્ચ (લાખ ₹)	140	120	80	100	80	180
ઈલેક્ટ્રિક પંખાનું વેચાણ (કરોડ ₹)	35	45	15	40	20	50

5. એક ડૉક્ટર તેમના એક સંશોધન કાર્ય માટે માતાના વજન અને જન્મ સમયે તેના બાળકના વજન વચ્ચેનો સંબધ જાણવા એક વિસ્તારના અમુક મેટરનીટી હોમમાંથી સાત માતા અને તેમના બાળકના વજન વિશે માહિતી મેળવે છે.

માતાનું વજન (કિગ્રા)	59	72	66	64	77	66	60
બાળકનું વજન (કિગ્રા)	2.5	3.4	3.1	2.7	2.8	2.3	3.0

આ માહિતી પરથી માતા અને બાળકના વજન વચ્ચે ક્રમાંક સહસંબંધાંક શોધો.

6. અમદાવાદમાં દિવસનું મહત્તમ તાપમાન અને આઇસક્રીમના વેચાણ વચ્ચેનો સંબંધ જાણવા માટે નીચેની માહિતી મેળવવામાં આવી છે.

મહત્તમ તાપમાન (સેલ્સિયસ)	35	42	40	39	44	40	45	40
આઇસક્રીમનું વેચાણ (કિગ્રા)	600	680	750	630	920	750	900	720

આ પરથી ક્રમાંક સહસંબંધાંક ગણો.

7. વિદેશમાં અભ્યાસ કરવા માટે જરૂરી પ્રવેશ પરીક્ષા ઑનલાઇન લેવાય છે. તે ઑનલાઇન પરીક્ષા (જેમાં ખોટા જવાબ પડે તો ઋણ ગુણ મળે તે પદ્ધતિ છે)માં નિદર્શમાં પસંદ થયેલ પાંચ વિદ્યાર્થીઓએ આપસૂઝ આવડત (reasoning ability) અને ઇંગ્લિશ બોલવાની આવડતમાં મેળવેલા ગુણ નીચે મુજબ છે.

વિદ્યાર્થી	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**
આપસૂઝ આવડતમાં ગુણ	5	5	5	5	5
ઇંગ્લિશ બોલવાની આવડતમાં ગુણ	2	–2	–2	0	2

આ પરથી વિદ્યાર્થીઓની આપસૂઝ આવડત અને ઇંગ્લિશ બોલવાની આવડત વચ્ચે ક્રમાંક સહસંબંધાંક શોધો.

8. એક નૃત્યની સ્પર્ધામાં બે નૃત્યના ગુરુ, છ નૃત્યકાર A, B, C, D, E અને F ને તેમના નૃત્ય પરથી નીચે મુજબ ક્રમ આપે છે.

ક્રમ	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
પહેલા ગુરુ દ્વારા	B	F	A	C	D	E
બીજા ગુરુ દ્વારા	F	A	C	B	E	D

આ પરથી બંને ગુરુના મૂલ્યાંકન વચ્ચે સહસંબંધાંક શોધો.

9. બે ચલ ફુગાવો (X) અને વ્યાજદર (Y) માટે નીચેની માહિતી મળે છે.

$$n = 50,\ \Sigma x = 500,\ \Sigma y = 300,\ \Sigma x^2 = 5450,\ \Sigma y^2 = 2000,\ \Sigma xy = 3090$$

પાછળથી જાણવા મળ્યું કે, અવલોકનની એક જોડ (10, 6) ભૂલથી વધારાની લેવાઈ ગઈ હતી. આ અવલોકનની જોડને માહિતીમાંથી કાઢીને સહસંબંધાંકની કિંમત શોધો.

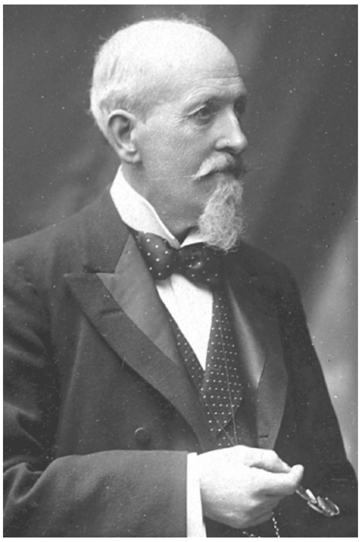
10. દસ પેઢી માટે વેચાણ (X) અને ખર્ચ (Y) વિશે નીચે મુજબ માહિતી મળે છે.

$$\bar{x} = 58,\ \bar{y} = 14,\ \Sigma(x-65)^2 = 850,\ \Sigma(y-13)^2 = 32,\ \Sigma(x-65)(y-13) = 0$$

આ પરથી સહસંબંધાંક શોધો.

11. 10 વ્યક્તિઓ દૈનિક કેલરી X લે છે અને તેમનું વજન Y કિગ્રા છે. તે માહિતી પરથી ક્રમાંક સહસંબંધાંક 0.6 મળે છે. પાછળથી ચકાસણી કરતાં માલૂમ પડ્યું કે, એક વ્યક્તિના X અને Y ચલોના ક્રમોની વચ્ચેનો તફાવત 4ને બદલે 2 લેવાયો હતો, તો ક્રમાંક સહસંબંધાંકની સાચી કિંમત શોધો.

12. 10 વ્યક્તિઓ માટે આરોગ્યનો આંક (health index) x અને અપેક્ષિત આયુષ્ય (Life expectancy) y વિશે માહિતી મેળવવામાં આવી છે. ક્રમાંક સહસંબંધાંક શોધવા આ માહિતીને ક્રમ આપવામાં આવે છે અને બધા ક્રમોના તફાવતોના વર્ગોનો સરવાળો 42.5 મળે છે. આરોગ્ય આંક 70 માહિતીમાં ત્રણ વખત અને અપેક્ષિત આયુષ્ય 45 માહિતીમાં બે વખત પુનરાવર્તન પામે છે, તો આ માહિતી પરથી ક્રમાંક સહસંબંધાંક શોધો.



Charles Edward Spearman
(1863 –1945)

Charles Edward Spearman was an English psychologist known for work in statistics, as a pioneer of factor analysis and for Spearman's rank correlation coefficient. He also did seminal work on models for human intelligence, including his theory that disparate cognitive test scores reflect a single General intelligence factor and coining the term g factor.

After serving army for 15 years, he went on to study for a Ph.D. in experimental psychology. Spearman joined University College London and stayed there until he retired in 1931. Initially he was Reader and head of the small psychological laboratory. In 1911 he was promoted to the Grote professorship of the Philosophy of Mind and Logic. His title changed to Professor of Psychology in 1928 when a separate Department of Psychology was created.

His many published papers cover a wide field, but he is especially distinguished by his pioneer work in the application of mathematical methods to the analysis of the human mind and his original studies of correlation in this sphere.

●

"Prediction is very difficult, especially about the future."

– Niels Bohr

3

સુરેખ નિયતસંબંધ
(Linear Regression)

વિષયવસ્તુ :

3.1 પ્રસ્તાવના

આપણે અગાઉના પ્રકરણ 2માં સહસંબંધનો અભ્યાસ કર્યો. તેમાં આપણે જોયુ કે સહસંબંધાંક દ્વારા બે ચલ વચ્ચે સંબંધ ઋણ છે કે ધન છે તેનો ખ્યાલ આવે છે. ઉપરાંત તેમની વચ્ચેની નિકટતાનું સંખ્યાત્મક માપ પણ મળે છે, પરંતુ સહસંબંધાંક પરથી એક ચલની જ્ઞાત કિંમત માટે તેને અનુરૂપ બીજા ચલની અપેક્ષિત કે અનુમાનિત કિંમત મેળવી શકાતી નથી. ઘણી વખત જ્યારે બે ચલ વચ્ચે કોઈ સંબંધ હોય ત્યારે એક ચલની જ્ઞાત કિંમત પરથી બીજા ચલની અંદાજિત કે અનુમાનિત કિંમત તે સંબંધનો ઉપયોગ કરી મેળવવાની જરૂરિયાત ઊભી થાય છે.

દા.ત., આપણે જાણીએ છીએ કે કોઈ વસ્તુના જાહેરાત-ખર્ચ અને તે વસ્તુના વેચાણ વચ્ચે સહસંબંધ છે. હવે જાહેરાત-ખર્ચની કોઈ કિંમતને અનુરૂપ વસ્તુના વેચાણ વિશે અનુમાન કરવુ હોય તો ફક્ત સહસંબંધ પરથી તે મેળવી શકાતું નથી. આ માટે નિયતસંબંધનો ઉપયોગ કરવો જરૂરી બને છે.

નિયતસંબંધ (Regression)નો શાબ્દિક અર્થ 'પ્રતિગમન' અથવા 'સરેરાશ કિંમત તરફ પરત આવવું' એવો થાય છે. માનવ આનુવંશિકતાના અભ્યાસ દરમિયાન સર ફ્રાન્સિસ ગોલ્ટન નામના આંકડાશાસ્ત્રીએ સૌપ્રથમ 'નિયતસંબંધ' પદનો ઉપયોગ કર્યો. પિતા અને પુખ્તવયના પુત્રની 1000 જોડ માટે ઊંચાઈની માહિતી એકઠી કરી તેમણે નીચેના રસપ્રદ તારણો મેળવ્યાં.

(i) વધુ ઊંચાઈવાળા પિતાના પુત્રો વધુ ઊંચાઈ અને ઓછી ઊંચાઈવાળા પિતાના પુત્રો ઓછી ઊંચાઈ ધરાવે છે.

(ii) વધુ ઊંચાઈ ધરાવતા પિતાના સમૂહની સરેરાશ ઊંચાઈ કરતા તેમના પુત્રોની સરેરાશ ઊંચાઈ ઓછી છે.

(iii) ઓછી ઊંચાઈ ધરાવતા પિતાના સમૂહની સરેરાશ ઊંચાઈ કરતા તેમના પુત્રોની સરેરાશ ઊંચાઈ વધુ છે.

ઉપરનાં તારણો પરથી સ્પષ્ટ છે કે, પુત્રોની ઊંચાઈ તેમના પિતાની ઊંચાઈના સંદર્ભમાં પીછેહઠ વલણ દર્શાવે છે. આ વલણને લીધે જ માનવજાત ઠીંગણા અને ખૂબ ઊંચા માણસો એવા બે ભાગોમાં વહેંચાઈ નથી. આ પ્રકારના સંબંધને દર્શાવવા સર ફ્રાન્સિસ ગોલ્ટને 'નિયતસંબંધ' એવું નામ આપ્યું.

નિયતસંબંધ એ બે સહસંબંધિત ચલ વચ્ચેનો વિધેયાત્મક સંબંધ છે. હવે આપણે બે ચલ વચ્ચે કાર્ય-કારણનો સંબંધ છે એવી પૂર્વધારણા લઈ તે ચલ વચ્ચેના નિયતસંબંધનો અભ્યાસ કરીશું.

3.2 સુરેખ નિયતસંબંધ મૉડેલ (Linear Regression Model)

કોઈ સંબંધ કે સમસ્યાને રજૂ કરતા એક કે તેથી વધુ સમીકરણોના સમૂહને મૉડેલ કહેવાય છે. કાર્ય-કારણનો સંબંધ ધરાવતા બે ચલ વચ્ચેના સંબંધને દર્શાવતા આંકડાશાસ્ત્રીય મૉડેલને નિયતસંબંધ મૉડેલ કહે છે. સામાન્ય રીતે કાર્ય-કારણનો સંબંધ ધરાવતા ચલમાં કારણ સ્વરૂપ ચલને X વડે દર્શાવાય છે. તેને આપણે નિરપેક્ષ અથવા કારણભૂત (explanatory) ચલ કહીશું. જ્યારે કાર્ય-સ્વરૂપ ચલને Y વડે દર્શાવાય છે, તેને આપણે સાપેક્ષ અથવા અસરયુક્ત (explained) ચલ કહીશું. નીચેનાં ઉદાહરણો દ્વારા નિરપેક્ષ ચલ અને સાપેક્ષ ચલનો અર્થ સમજીએ.

(i) 'જાહેરાત-ખર્ચ' અને 'વેચાણ' વચ્ચેના સંબંધમાં સામાન્ય રીતે 'જાહેરાત-ખર્ચ' વધે (કે ઘટે) તેને કારણે વેચાણ પણ વધે (કે ઘટે) છે. તેથી આપણે 'જાહેરાત-ખર્ચ'ને નિરપેક્ષ ચલ X તરીકે અને 'વેચાણ'ને સાપેક્ષ ચલ Y તરીકે લઈશું.

(ii) કોઈ વિસ્તારમાં 'વરસાદ' અને 'ચોખાની ઊપજ' વચ્ચેના સંબંધમાં સ્પષ્ટ છે કે, 'ચોખાની ઊપજ' એ 'વરસાદ' પર આધાર રાખે છે. તેથી આપણે 'વરસાદ'ને નિરપેક્ષ ચલ X તરીકે અને 'ચોખાની ઊપજ'ને સાપેક્ષ ચલ Y તરીકે લઈશું.

નિયતસંબંધ મૉડેલમાં સાપેક્ષ ચલ Yને નિરપેક્ષ ચલ Xના કોઈ યોગ્ય ગાણિતિક વિધેય દ્વારા રજૂ કરવામાં આવે છે. હવે આપણે સુરેખ નિયતસંબંધ મૉડેલને નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત કરીશું.

$$Y = \alpha + \beta X + u$$

જ્યાં, Y = સાપેક્ષ ચલ

X = નિરપેક્ષ ચલ

α = અચળાંક

β = અચળાંક

u = મૉડેલનો વિક્ષેપ (disturbance) ચલ

અહીં, u એ બે ચલ X અને Y વચ્ચે સુરેખ સંબંધની અપૂર્ણતા દર્શાવે છે. પ્રાકૃતિક વિજ્ઞાન (Natural Science) જેમકે ગણિતમાં સંપૂર્ણ સુરેખ સંબંધ શક્ય છે. તેથી દેખીતું છે કે આ કિસ્સામાં વિક્ષેપ ચલ uની કિંમત 0 થશે. બીજા શબ્દોમાં કહીએ તો જો બે ચલ X અને Y વચ્ચે સંપૂર્ણ સહસંબંધ હોય તો નિયતસંબંધ મૉડેલ $Y = \alpha + \beta X$ થાય. પરંતુ વેપાર, અર્થશાસ્ત્ર અને સામાજિક વિજ્ઞાનમાં બે ચલ વચ્ચે સામાન્ય રીતે સંપૂર્ણ સુરેખ સંબંધ જોવા મળતો નથી કારણ કે સહસંબંધિત ચલો પર અન્ય પરિબળોની અસર પણ થાય છે. એટલે કે જ્યારે X અને Y ચલ વચ્ચે આંશિક સહસંબંધ હોય ત્યારે નિયતસંબંધ મૉડેલનું સ્વરૂપ $Y = \alpha + \beta X + u$ થાય છે. ઉપર્યુક્ત ચર્ચા પરથી સુરેખ નિયતસંબંધને સરળ શબ્દોમાં નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત કરી શકાય.

''બે સહસંબંધિત ચલો વચ્ચેનો ગાણિતિક કે વિધેયાત્મક સુરેખ સંબંધ કે જેના દ્વારા નિરપેક્ષ ચલની કોઈ આપેલી (જ્ઞાત) કિંમત માટે તેને અનુરૂપ સાપેક્ષ ચલની કિંમતનું અનુમાન થઈ શકે તેને **સુરેખ નિયતસંબંધ** કહે છે.''

3.3 નિયતસંબંધ રેખાનું અન્વાયોજન (Fitting of Regression Line)

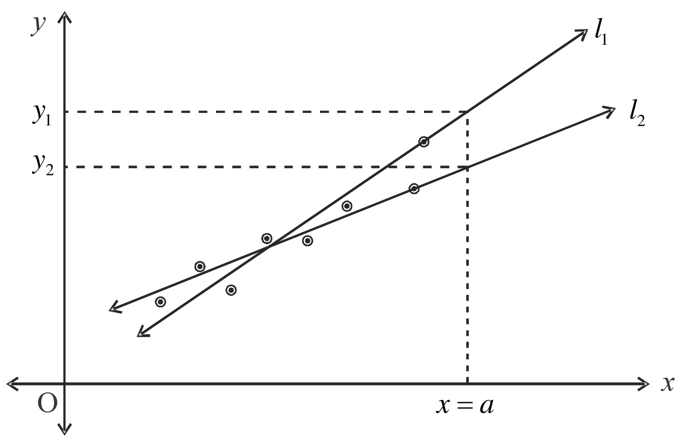
બે સહસંબંધિત ચલોની વિકીર્ણ આકૃતિમાં જો બધાં બિંદુઓ કોઈ રેખાની આસપાસ જ હોય તો આપણે કહી શકીએ કે, ચલો વચ્ચે સુરેખ નિયતસંબંધ છે. બે ચલો વચ્ચેનો સંબંધ દર્શાવતી આવી રેખા મેળવવાની પદ્ધતિને નિયતસંબંધ રેખાનું અન્વાયોજન કહે છે.

નિયતસંબંધ રેખાના અન્વાયોજન માટે બે રીતો છે : (1) વિકીર્ણ આકૃતિની રીત (2) ન્યૂનતમ વર્ગોની રીત

3.3.1 વિકીર્ણ આકૃતિની રીત

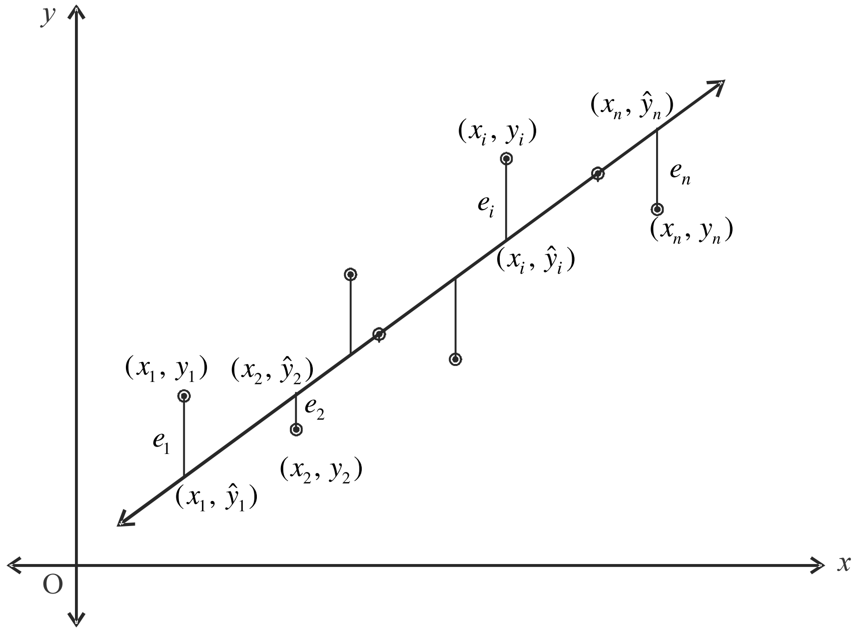
ધારો કે સહસંબંધિત ચલ X અને Yનાં અવલોકનોની n ક્રમિત જોડ $(x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n)$ છે. આ માહિતી પરથી વિકીર્ણ આકૃતિ દોરવામાં આવે છે. હવે વિકીર્ણ આકૃતિનાં લગભગ બધાં જ બિંદુઓની શક્ય તેટલી નજીકથી પસાર થાય તેવી એક રેખા દોરવામાં આવે છે. જો Y સાપેક્ષ ચલ અને X નિરપેક્ષ ચલ હોય તો આવી રેખાને Yની X પરની નિયતસંબંધ રેખા કહેવાય છે અને તે પરથી નિરપેક્ષ ચલ Xની આપેલી કિંમત પરથી તેને અનુરૂપ સાપેક્ષ ચલ Yની અનુમાનિત કિંમત મેળવી શકાય છે. આ પ્રકારની રેખા દોરવા માટે કોઈ ગણતરીની જરૂર પડતી નથી. તેથી નિયતસંબંધ રેખાના અન્વાયોજનની આ સરળ અને ઝડપી રીત છે. પરંતુ આમ કરવામાં એક સમસ્યા ઉદ્ભવે છે. જુદી-જુદી વ્યક્તિઓ જુદી-જુદી રેખા દોરી શકે અને તેથી નિરપેક્ષ ચલ Xની એક જ કિંમત માટે જુદી-જુદી વ્યક્તિઓ સાપેક્ષ ચલ Yની કિંમત વિશે જુદા-જુદા અનુમાનો મેળવી શકે. નીચેની વિકીર્ણ આકૃતિ પરથી આ બાબત સરળતાથી સમજી શકાય છે.

એક જ માહિતી પરથી બનતી નીચેની વિકીર્ણ આકૃતિમાં બે જુદી-જુદી વ્યક્તિઓએ બે જુદી-જુદી રેખા l_1 અને l_2 દોરી છે. અહીં જોઈ શકાય છે કે નિરપેક્ષ ચલ Xની કોઈ કિંમત 'a' માટે તેને અનરૂપ સાપેક્ષ ચલ Yની અનુમાનિત કિંમત રેખા l_1 પરથી 'y_1' મળશે જ્યારે રેખા l_2 પરથી તે 'y_2' મળશે. આમ નિરપેક્ષ ચલ Xની એક જ કિંમત માટે તેને અનુરૂપ સાપેક્ષ ચલ Yની જુદી-જુદી રેખા પરથી જુદી-જુદી અનુમાનિત કિંમત મળે છે. તેથી આ રીત વ્યક્તિલક્ષી (subjective) છે તેમ કહી શકાય. આ રીતથી મળતી નિયતસંબંધ રેખાને શ્રેષ્ઠ અન્વાયોજિત રેખા ન કહી શકાય કેમ કે તેનાથી સાપેક્ષ ચલની શ્રેષ્ઠ અનુમાનિત કિંમત જ મળે છે તેવી કોઈ ખાત્રી નથી. શ્રેષ્ઠ અન્વાયોજિત નિયતસંબંધ રેખા મેળવવા માટે ન્યૂનતમ વર્ગોની રીતનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે.



3.3.2 ન્યૂનતમ વર્ગોની રીત

ધારો કે બે સહસંબંધિત ચલો X (નિરપેક્ષ ચલ) અને Y (સાપેક્ષ ચલ)નાં અવલોકનોની n ક્રમિત જોડ $(x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n)$ મેળવેલી છે. ન્યૂનતમ વર્ગોની રીત સમજવા માટે આ માહિતીની વિકીર્ણ આકૃતિ દોરીશું.



જો X અને Y વચ્ચેના સુરેખ નિયતસંબંધને દર્શાવતી શ્રેષ્ઠ રેખાનું સમીકરણ $\hat{y} = a + bx$ હોય, તો આ રેખાના અચળાંકો a અને b ન્યૂનતમ વર્ગોની રીતથી નીચે મુજબ મેળવી શકાય છે.

ધારો કે ચલ Xની $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ કિંમતોને અનુરૂપ ચલ Yની રેખા પરથી મેળવેલ અનુમાનિત કિંમતો $\hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3, ... \hat{y}_n$ છે અને ચલ Yની અવલોકિત કિંમતો $y_1, y_2, y_3, ... y_n$ છે. હવે Xની કોઈ કિંમત $X = x_i$ને અનુરૂપ Yની અનુમાનિત કિંમત $\hat{y}_i = a + bx_i$ થાય. ચલ Yની અવલોકિત કિંમત y_i અને અનુમાનિત કિંમત $\hat{y}_i$ વચ્ચેના ઊભા (vertical) અંતર (y-અક્ષને સમાંતર અંતર)ને અનુમાનની ત્રુટિ (error) કહે છે. તેને e_i વડે દર્શાવાય છે.

$$\therefore \; e_i = y_i - \hat{y}_i = y_i - (a + bx_i) = y_i - a - bx_i$$

જ્યાં, $i = 1, 2, 3, ..., n$

સ્પષ્ટ છે કે રેખાની ઉપરની બાજુનાં બિંદુઓ માટે ત્રુટિ ધન થશે અને રેખાની નીચેની બાજુના બિંદુઓ માટે ત્રુટિ ઋણ થશે અને જે બિંદુઓ રેખા પર હોય તેવાં બિંદુઓ માટે ત્રુટિ શૂન્ય થશે.

હવે અન્વાયોજિત રેખા $\hat{y} = a + bx$ (Yની X પરની નિયતસંબંધ રેખા)ના અચળાંકો a અને bની કિંમતો એવી રીતે મેળવવામાં આવે છે કે જેથી ત્રુટિઓના વર્ગોનો સરવાળો ઓછામાં ઓછો એટલે કે ન્યૂનતમ થાય.

અર્થાત્ $\Sigma e_i^2 = \Sigma(y_i - \hat{y}_i)^2 = \Sigma(y_i - a - bx_i)^2$ ન્યૂનતમ થાય.

બીજગણિતની સરળ પદ્ધતિથી આપણે a અને bની તેવી કિંમતો મેળવી શકીએ છીએ જે સરળતા ખાતર અનુગ (suffix) i ને અવગણતા નીચે મુજબ છે.

$$b = \frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\Sigma(x-\bar{x})^2}$$

$$= \frac{n\Sigma xy - (\Sigma x)(\Sigma y)}{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}$$

અને

$$a = \bar{y} - b\,\bar{x}$$

આ રીતે મેળવેલી રેખા $\hat{y} = a + bx$ વિકીર્ણ આકૃતિનાં બધાં જ બિંદુઓની શક્ય તેટલી નજીકથી પસાર થતી રેખા છે. નિયતસંબંધ રેખા મેળવતી વખતે ત્રુટિઓના વર્ગોનો સરવાળો ન્યૂનતમ કરવામાં આવે છે. તેથી આ રીતને **ન્યૂનતમ વર્ગોની રીત** કહે છે.

આ રીતથી મળતી b ની કિંમતને Y ની X પરથી નિયતસંબંધ રેખાનો નિયતસંબંધાંક (regression coefficient) કહે છે. તેને નિયતસંબંધ રેખાનો ઢાળ (slope) પણ કહે છે અને અચળાંક a ને નિયતસંબંધ રેખાનો અંતઃખંડ (intercept) કહે છે.

નિયતસંબંધાંક b નું અર્થઘટન

b = ચલ X ની કિંમતમાં એક એકમ ફેરફાર કરવાથી ચલ Y ની કિંમતમાં થતો અનુમાનિત ફેરફાર

એટલે કે, જ્યારે $b > 0$, નિરપેક્ષ ચલ X ની કિંમતમાં એક એકમનો વધારો થાય તો સાપેક્ષ ચલ Y ની કિંમતમાં b એકમોનો અંદાજિત વધારો થાય.

જ્યારે $b < 0$, નિરપેક્ષ ચલ X ની કિંમતમાં એક એકમનો વધારો થાય તો સાપેક્ષ ચલ Y ની કિંમતમાં $|b|$ એકમોનો અંદાજિત ઘટાડો થાય.

અત્રે નોંધનીય છે કે, ન્યૂનતમ વર્ગોની રીત દ્વારા મેળવાયેલી નિયતસંબંધ રેખા શ્રેષ્ઠ અન્વાયોજિત રેખા તરીકે પણ ઓળખાય છે.

નોંધ : (1) નિયતસંબંધાંક b ને b_{yx} વડે પણ દર્શાવી શકાય છે. જરૂરિયાત ન જણાય તો સામાન્ય રીતે નિયતસંબંધાંકને આપણે ફક્ત b વડે જ દર્શાવીશું.

(2) જો વિકીર્ણ આકૃતિમાં બધાં જ બિંદુઓ એક જ રેખા પર હોય તો બધાં જ બિંદુઓ માટે ત્રુટિ શૂન્ય થાય તેથી સાપેક્ષ ચલ y ની અનુમાનિત કિંમત $\hat{y}$ એ જ તેની પ્રાપ્ત અવલોકિત કિંમત થાય. તેથી નિયતસંબંધ રેખાનું સ્વરૂપ $\hat{y} = a + bx$ ને બદલે $y = a + bx$ પણ લખી શકાય. સ્પષ્ટ છે કે આ સંજોગોમાં $b > 0$ હોય તો સહસંબંધાંક r ની કિંમત 1 થાય અને $b < 0$ હોય તો સહસંબધાંક r ની કિંમત –1 થાય.

સમજૂતી માટે વધારાની માહિતી

સામાન્ય રીતે નિયતસંબંધ રેખા માટે 'શ્રેષ્ઠ અન્વાયોજિત રેખા'ને બદલે ફક્ત 'અન્વાયોજિત રેખા' એવો ઉલ્લેખ કરવામાં આવે છે.

હવે આપણે નિયતસંબંધ રેખા મેળવવાનાં કેટલાંક ઉદાહરણો જોઈએ.

ઉદાહરણ**1 : કોઈ ચોક્કસ કંપનીની એક મૉડેલની કારનું આયુષ્ય (વપરાશના વર્ષ) અને તેનો સરેરાશ વાર્ષિક નિભાવ ખર્ચ માટે મેળવેલા અવલોકનો નીચે મુજબ છે.**

કારનું આયુષ્ય (વર્ષ)	2	4	6	8
સરેરાશ વાર્ષિક નિભાવ ખર્ચ (હજાર ₹)	10	20	25	30

આ પરથી નિભાવ ખર્ચની કારના આયુષ્ય પરની નિયતસંબંધ રેખા મેળવો. જો કારનું આયુષ્ય 10 વર્ષ હોય તો નિભાવ ખર્ચનું અનુમાન પણ મેળવો.

અહીં, 'કારનું આયુષ્ય'એ નિરપેક્ષ ચલ છે. તેથી તેને ચલ X વડે દર્શાવીશુ અને 'નિભાવ ખર્ચ'એ સાપેક્ષ ચલ છે, તેથી તેને Y વડે દર્શાવીશું. માહિતી જોતા આપણે નિયતસંબંધ રેખા શોધવા માટે નીચે મુજબ કોષ્ટક બનાવીશું

	કારનું આયુષ્ય (વર્ષ) x	નિભાવ ખર્ચ (હજાર ₹) y	xy	x^2
	2	10	20	4
	4	20	80	16
	6	25	150	36
	8	30	240	64
કુલ	**20**	**85**	**490**	**120**

$\overline{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{20}{4} = 5, \quad \overline{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{85}{4} = 21.25$

હવે નિયતસંબંધાંક નીચે મુજબ શોધીએ

$$b = \frac{n\Sigma xy - (\Sigma x)(\Sigma y)}{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}$$

$$= \frac{4(490)-(20)(85)}{4(120)-(20)^2}$$

$$= \frac{1960-1700}{480-400}$$

$$= \frac{260}{80}$$

$$= 3.25$$

$\therefore \; b = 3.25$

હવે $\overline{x}, \overline{y}$ અને b ની કિંમતો a ના સૂત્રમાં મૂકતાં,

$a = \overline{y} - b\,\overline{x}$

$= 21.25 - 3.25(5)$

$= 21.25 - 16.25$

$\therefore \; a = 5$

તેથી, 'નિભાવખર્ચ' (Y) ની 'કારના આયુષ્ય' (X) પરની નિયતસંબંધની રેખા

$\hat{y} = a + bx$

$\therefore \; \hat{y} = 5 + 3.25\,x$

$X = 10$ મૂકતાં,

$\hat{y} = 5 + 3.25(10)$

$= 5 + 32.5 = 37.5$

$\therefore \; \hat{y} = 37.5$

આમ, જ્યારે કારનું આયુષ્ય વર્ષ 10 વર્ષ હોય ત્યારે તેનો અનુમાનિત નિભાવખર્ચ ₹ 37.5 હજાર થાય.

નોંધ : $b = 3.25$ છે તેથી કહી શકાય કે દર વર્ષે (Xમાં એકમ ફેરફાર) થવાથી, કારના નિભાવખર્ચમાં અંદાજે ₹ 3.25 હજાર નો વધારો (Yમાં થતો ફેરફાર) થાય છે.

ઉદાહરણ 2 : એક કંપનીના જુદા-જુદા પ્રકારના લૅપટૉપનું માસિક વેચાણ (સો એકમોમાં) અને તેના નફા (લાખ ₹ માં)ની છેલ્લા છ માસની વીગત નીચે મુજબ છે.

માસ	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
વેચાયેલા લૅપટૉપની સંખ્યા (સો એકમો) x	5	7	5	12	8	3
નફો (લાખ ₹) y	8	9	10	15	10	6

આ પરથી Y ની X પરની નિયતસંબંધ રેખા મેળવો. ઉપરાંત $X = 7$ માટે Y ની કિંમતના અનુમાનમાં થતી ત્રુટિ શોધો.

	વેચાયેલા લૅપટૉપની સંખ્યા (સો એકમો) x	નફો (લાખ ₹) y	xy	x^2
	5	8	40	25
	7	9	63	49
	5	10	50	25
	12	15	180	144
	8	10	80	64
	3	6	18	9
કુલ	**40**	**58**	**431**	**316**

$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{40}{6} = 6.67$; $\bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{58}{6} = 9.67$

હવે, નિયતસંબંધાંક bની કિંમત નીચે મુજબ શોધીએ.

$$b = \frac{n\Sigma xy - (\Sigma x)(\Sigma y)}{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}$$

$$= \frac{6(431) - (40)(58)}{6(316) - (40)^2}$$

$$= \frac{2586 - 2320}{1896 - 1600}$$

$$= \frac{266}{296}$$

$$= 0.8986$$

$$\simeq 0.90$$

$\therefore b \simeq 0.90$

હવે $\bar{x}, \bar{y}$ અને bની કિંમતો a ના સૂત્રમાં મૂકતાં,

$$a = \bar{y} - b\bar{x}$$

$$= 9.67 - 0.90(6.67)$$

$$= 9.67 - 6.003$$

$$= 3.667$$

$\therefore a \simeq 3.67$

આમ Yની X પરની નિયતસંબંધ રેખા

$$\hat{y} = a + bx$$

$$\therefore \hat{y} = 3.67 + 0.9x$$

હવે $X = 7$ માટે ત્રુટિ શોધવા, સૌ પ્રથમ તેને અનુરૂપ Y ની અનુમાનિત કિંમત મેળવીએ.

$X = 7$ મૂકતાં

$\hat{y} = 3.67 + 0.9(7)$

$= 3.67 + 6.3$

$\therefore\ \hat{y} = 9.97$ લાખ ₹

હવે આપેલી માહિતી પરથી આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે, $X = 7$ ને અનુરૂપ Y ની અવલોકિત કિંમત 9 છે.

$\therefore$ ત્રુટિ $e = y - \hat{y}$

$= 9 - 9.97$

$\therefore\ e = -0.97$ લાખ ₹

ઉદાહરણ 3 : એક કંપનીની કારના સર્વિસ સેન્ટરમાં અકસ્માત પામેલી કારના સમારકામ માટે લાગતો સમય અને સમારકામના ખર્ચ વચ્ચેનો સંબંધ જાણવા માટે નીચે મુજબ માહિતી એકઠી કરવામાં આવી છે.

કારના સમારકામનો સમય (માનવકલાકો)	32	40	25	29	35	43
સમારકામનું ખર્ચ (હજાર ₹)	25	35	18	22	28	46

આ પરથી Y (સમારકામનું ખર્ચ)ની X (સમારકામનો સમય) પરની નિયતસંબંધ રેખા મેળવો. જો કારને સમારકામ માટે 50 કલાક લાગતા હોય, તો તેના સમારકામના ખર્ચનું અનુમાન મેળવો.

અહીં $n = 6,\ \bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{204}{6} = 34$ અને $\bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{174}{6} = 29$

	સમારકામ સમય (માનવકલાકો) x	**સમારકામનું ખર્ચ (હજાર ₹) y**	$x-\bar{x}$	$y-\bar{y}$	$(x-\bar{x})(y-\bar{y})$	$(x-\bar{x})^2$
	32	25	–2	–4	8	4
	40	35	6	6	36	36
	25	18	–9	–11	99	81
	29	22	–5	–7	35	25
	35	28	1	–1	–1	1
	43	46	9	17	153	81
કુલ	**204**	**174**	**0**	**0**	**330**	**228**

$$b = \frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\Sigma(x-\bar{x})^2}$$

$= \frac{330}{228}$

$= 1.4474$

$\simeq 1.45$

$\therefore\ b \simeq 1.45$

હવે $\bar{x}$, $\bar{y}$ અને bની કિંમતો a ના સૂત્રમાં મૂકતાં,

$a = \bar{y} - b\,\bar{x}$

$= 29 - 1.45(34)$

$= 29 - 49.3$

$\therefore\ a = -20.3$

આમ, Y ની X પરની નિયતસંબંધ રેખા

$$\hat{y} = a + bx$$

$$\therefore \quad \hat{y} = -20.3 + 1.45x$$

$X = 50$ મૂકતાં,

$$\hat{y} = -20.3 + 1.45(50)$$

$$= -20.3 + 72.5$$

$$\therefore \quad \hat{y} = 52.2$$

આમ, જ્યારે સમારકામનો સમય 50 કલાક હોય ત્યારે સમારકામનો અનુમાનિત ખર્ચ 52.2 (હજાર ₹) થાય.

સ્વાધ્યાય 3.1

1. એક વસ્તુના ભાવ (₹માં) અને તેની માંગ (સો એકમોમાં) વિશે નીચે આપેલી માહિતી પરથી માંગની ભાવ પરની નિયતસંબંધ રેખા મેળવો અને જ્યારે ભાવ ₹ 20 હોય, ત્યારે માંગનું અનુમાન મેળવો.

ભાવ (₹)	12	14	15	16	18	21
માંગ (સો એકમોમાં)	18	12	10	8	7	5

2. કાર બનાવતી કંપનીના કારના એક મૉડેલ માટે કાર વપરાશના સમય અને કારના સરેરાશ વાર્ષિક નિભાવ ખર્ચ વચ્ચેના સંબંધનો અભ્યાસ કરવા માટે નીચે મુજબ માહિતી મેળવવામાં આવી.

કાર	1	2	3	4	5	6
કાર-વપરાશનો સમય (વર્ષ) x	3	1	2	2	5	3
સરેરાશ વાર્ષિક નિભાવ ખર્ચ (હજાર ₹) y	10	5	8	7	13	8

આ પરથી Y ની X પરની નિયતસંબંધ રેખા મેળવો. જ્યારે કાર-વપરાશનો સમય 5 વર્ષ હોય ત્યારે વાર્ષિક નિભાવખર્ચનું અનુમાન અને તેની ત્રુટિ શોધો.

3. કોઈ એક વર્ષમાં પાંચ જિલ્લામાં થયેલા સરેરાશ વરસાદ (સેમીમાં) અને પાકનું કુલ ઉત્પાદન (ટનમાં) વિશે માહિતી નીચે આપેલી છે.

સરેરાશ વરસાદ (સેમી)	25	32	38	29	31
પાક (ટન)	84	90	95	88	93

આ પરથી પાકના ઉત્પાદનની વરસાદ પરની નિયતસંબંધ રેખા શોધો અને જો સરેરાશ વરસાદ 35 સેમી હોય, તો થતા પાકના ઉત્પાદનનું અનુમાન મેળવો.

4. યંત્ર પર કામ કરતા કારીગરોનો અનુભવ અને તેમનાં કાર્ય-કૌશલ્ય આંક (performance ratings) વિશે માહિતી નીચે આપી છે.

કારીગર	1	2	3	4	5	6	7	8
અનુભવ (વર્ષ) x	12	5	10	3	18	4	12	16
કાર્ય-કૌશલ્ય આંક y	83	75	80	78	89	68	88	87

આ પરથી કાર્ય-કૌશલ્ય આંકની અનુભવ પરની નિયતસંબંધ રેખાની ગણતરી કરો અને કોઈ એક કારીગરનો અનુભવ 7 વર્ષ હોય, તો કાર્ય-કૌશલ્ય આંક વિશે અનુમાન કરો.

*

3.4 નિયતસંબંધના અભ્યાસની ઉપયોગિતા

નિયતસંબંધની કેટલીક ઉપયોગિતા નીચે મુજબ છે.

(1) બે સહસંબંધિત ચલો વચ્ચેનો વિધેયાત્મક સંબંધ જાણી શકાય છે.

(2) એક વખત વિધેયાત્મક સંબંધ પ્રસ્થાપિત થઈ જાય પછી નિરપેક્ષ ચલ X ની જ્ઞાત કિંમત પરથી સાપેક્ષ ચલ Y ની અજ્ઞાત કિંમતનું અનુમાન મેળવી શકાય છે.

(3) આપણે નિરપેક્ષ ચલ X ની કિંમતમાં થતા એકમ ફેરફારથી ચલ Y માં થતો અંદાજિત ફેરફાર જાણી શકીએ છીએ.

(4) નિયતસંબંધ રેખા પરથી સાપેક્ષ ચલની અનુમાનિત કિંમત શોધવામાં થતી ભૂલ (ત્રુટિ) જાણી શકાય છે.

અર્થશાસ્ત્રીઓ, આયોજનકારો, ધંધાર્થીઓ, વહીવટકર્તાઓ, સંશોધનકારો વગેરેને નિયતસંબંધ ખૂબ જ ઉપયોગી બને છે.

નિયતસંબંધાંકની ગણતરી માટેની ટૂંકી રીત

જ્યારે X અને Y ની કિંમતો પ્રમાણમાં મોટી હોય અને/અથવા અપૂર્ણાંક હોય ત્યારે x^2, xy જેવાં પદોની ગણતરી મુશ્કેલ બને છે. આ સંજોગોમાં વૈકલ્પિક સૂત્ર વાપરી શકાય છે. આ સૂત્ર નિયતસંબંધાંકના નીચેના ગુણધર્મ પર આધારિત છે.

ગુણધર્મ : નિયતસંબંધાંક ઊગમબિંદુ પરિવર્તનથી સ્વતંત્ર છે. પરંતુ માપ (scale)ના પરિવર્તનથી સ્વતંત્ર નથી.

જો Yની X પરની નિયતસંબંધ રેખાનો નિયતસંબંધાંક $b = b_{yx}$ હોય, તો ઉપરના ગુણધર્મ પરથી તેનાં ટૂંકી રીતે સૂત્રો નીચે મુજબ લખી શકાય.

(1) જો $u = x - A$ અને $v = y - B$ હોય તો

$$b = b_{yx} = b_{vu} = \frac{n\Sigma uv - (\Sigma u)(\Sigma v)}{n\Sigma u^2 - (\Sigma u)^2} \text{ થાય.}$$

(2) જો $u = \frac{x-A}{c_x}$ અને $v = \frac{y-B}{c_y}$ હોય તો

$$b = b_{yx} = b_{vu} \cdot \frac{c_y}{c_x} = \frac{n\Sigma uv - (\Sigma u)(\Sigma v)}{n\Sigma u^2 - (\Sigma u)^2} \times \frac{c_y}{c_x} \text{ થાય.}$$

અહીં, A, B, c_x અને c_y અચળાંકો છે અને $c_x > 0, c_y > 0$

ઉદાહરણ4 : એક સમૂહના વ્યક્તિઓની માસિક આવક (હજાર ₹માં) અને માસિક ખર્ચ (હજાર ₹માં) વચ્ચેનો સંબંધ જાણવા માટે તે સમૂહમાંથી સાત વ્યક્તિઓના નિદર્શ પરથી નીચેની માહિતી મળે છે.

વ્યક્તિ	1	2	3	4	5	6	7
માસિક આવક (હજાર ₹)	60	70	64	68	62	65	72
માસિક ખર્ચ (હજાર ₹)	50	59	57	50	53	58	60

આ માહિતી પરથી વ્યક્તિઓની માસિક ખર્ચની માસિક આવક પરની નિયતસંબંધ રેખા મેળવો. જો સમૂહમાં કોઈ વ્યક્તિની માસિક આવક 75 હજાર ₹ હોય, તો તેના માસિક ખર્ચનું અનુમાન મેળવો.

માસિક ખર્ચની માસિક આવક પરની નિયતસંબંધ રેખા મેળવવાની હોઈ 'માસિક ખર્ચ'ને ચલ Y અને 'માસિક આવક'ને ચલ X વડે દર્શાવીશું.

અહીં $\overline{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{461}{7} = 65.86$ અને $\overline{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{387}{7} = 55.29$

તેથી આપણે $A = 65$ અને $B = 55$ લઈ u અને v નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત કરી શકીએ.

$u = x - A = x - 65$ અને $v = y - B = y - 55$

	માસિક આવક (હજાર ₹) x	માસિક ખર્ચ (હજાર ₹) y	$u = x - 65$	$v = y - 55$	uv	u^2
	60	50	–5	–5	25	25
	70	59	5	4	20	25
	64	57	–1	2	–2	1
	68	50	3	–5	–15	9
	62	53	–3	–2	6	9
	65	58	0	3	0	0
	72	60	7	5	35	49
કુલ	**461**	**387**	**6**	**2**	**69**	**118**

ટૂંકી રીતે bની કિંમત નીચે મુજબ શોધી શકાય

$$b = b_{yx} = b_{vu} = \frac{n\Sigma uv - (\Sigma u)(\Sigma v)}{n\Sigma u^2 - (\Sigma u)^2}$$

$$= \frac{7(69)-(6)(2)}{7(118)-(6)^2}$$

$$= \frac{483-12}{826-36}$$

$$= \frac{471}{790}$$

$$= 0.5962$$

$$\therefore \ b \simeq 0.60$$

હવે, $a = \overline{y} - b\overline{x}$

$$= 55.29 - 0.60(65.86)$$

$$= 55.29 - 39.516$$

$$= 15.774$$

$$\therefore \ a = 15.77$$

આમ, Y ની X પરની નિયતસંબંધ રેખા

$$\hat{y} = a + bx$$

$$\therefore \ \hat{y} = 15.77 + 0.60x$$

$X = 75$ મૂકતાં,

$$\hat{y} = 15.77 + 0.60(75)$$

$$= 15.77 + 45$$

$$= 60.77$$

$$\therefore \quad \hat{y} = 60.77$$

તેથી જો કોઈ વ્યક્તિની માસિક આવક 75 હજાર ₹ હોય તો તેનો અંદાજિત માસિક ખર્ચ 60.77 હજાર ₹ થાય.

ઉદાહરણ 5 : ઉદાહરણ 1માં આપેલ માહિતી માટે, નિભાવખર્ચ (Y)ની કારના આયુષ્ય (X) પરની નિયતસંબંધ રેખા ટૂંકી રીતનો ઉપયોગ કરી મેળવો.

કારનું આયુષ્ય (વર્ષ) x	2	4	6	8
નિભાવખર્ચ (હજાર ₹) y	10	20	25	30

અહીં, X ની બધી જ કિંમતોને 2 વડે અને Y ની બધી જ કિંમતોને 5 વડે નિ:શેષ ભાગી શકાય છે. અને $\bar{x} = 5$ અને $\bar{y} = 21.25$ છે. તેથી આપણે $A = 4, B = 20, c_x = 2, c_y = 5$ લઈશું.

હવે u અને v નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત કરીએ.

$$u = \frac{x-A}{c_x} = \frac{x-4}{2} \quad \text{અને} \quad v = \frac{y-B}{c_y} = \frac{y-20}{5}$$

	x	y	$u = \frac{x-4}{2}$	$v = \frac{y-20}{5}$	uv	u^2
	2	10	–1	–2	2	1
	4	20	0	0	0	0
	6	25	1	1	1	1
	8	30	2	2	4	4
કુલ	**20**	**85**	**2**	**1**	**7**	**6**

$$b = b_{vu} \cdot \frac{c_y}{c_x} = \frac{n\Sigma uv - (\Sigma u)(\Sigma v)}{n\Sigma u^2 - (\Sigma u)^2} \times \frac{c_y}{c_x}$$

$$= \frac{4(7)-2(1)}{4(6)-(2)^2} \times \frac{5}{2}$$

$$= \frac{28-2}{24-4} \times \frac{5}{2}$$

$$= \frac{26}{20} \times \frac{5}{2}$$

$$b = 3.25$$

હવે $a = \bar{y} - b\bar{x} = 21.25 - 3.25(5) = 21.25 - 16.25 = 5$

Y ની X પરની નિયતસંબંધ રેખા

$$\hat{y} = a + bx$$

$$\therefore \quad \hat{y} = 5 + 3.25x$$

નોંધ : અહીં આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે, $b_{vu} = \frac{26}{20} = 1.3$, પણ જ્યારે $\frac{c_y}{c_x} = \frac{5}{2}$ વડે ગુણવામાં આવે ત્યારે આપણને $b = 1.3 \times \frac{5}{2} = 3.25$ (ઉદાહરણ 1માં મેળવ્યા મુજબ) મળે છે. તેથી આપણે સમજી શકીએ છીએ કે, જ્યારે ચલ X અને/અથવા Y ના માપ (scale)નું પરિવર્તન કરવામાં આવે તો b મેળવવા માટે b_{vu} ને $\frac{c_y}{c_x}$ વડે ગુણવા જરૂરી બને છે.

ઉદાહરણ 6 : ગુજરાત રાજ્યની એક યુનિવર્સિટીમાં ચાલુ વર્ષે વિદેશથી ભણવા માટે આવેલા વિદ્યાર્થીઓમાંથી સાત વિદ્યાર્થીઓનો એક નિદર્શ લઈ તેમના બુદ્ધિમત્તાનો આંક (I.Q.) અને તેમણે 75 ગુણની પરીક્ષામાં મેળવેલ ગુણની માહિતી નીચે આપેલી છે.

વિદ્યાર્થી	1	2	3	4	5	6	7
I.Q. x	85	95	100	90	110	125	70
ગુણ y	46	50	50	45	60	70	40

આ પરથી y ની x પરની નિયતસંબંધ રેખા મેળવો અને કોઈ વિદ્યાર્થીનો I.Q. 120 હોય, તો તેના ગુણનું અનુમાન કરો. તદુપરાંત I.Q. 100 હોય ત્યારે અનુમાનમાં થતી ત્રુટિ શોધો.

અહીં, $n = 7$, $\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{675}{7} = 96.43$, $\bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{361}{7} = 51.57$

X અને Y ની કિંમતો મોટી, તેમનાં મધ્યકો અપૂર્ણાંક અને X ની બધી જ કિંમતો 5 વડે નિઃશેષ ભાગી શકાય તેવી હોવાથી આપણે ટૂંકી રીતનો ઉપયોગ કરીશું.

$A = 95$, $B = 50$, $c_x = 5$, $c_y = 1$ લઈ આપણે u અને v નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત કરીએ.

$u = \frac{x - A}{c_x} = \frac{x - 95}{5}$ અને $v = \frac{y - B}{c_y} = \frac{y - 50}{1} = y - 50$

	I.Q. x	ગુણ y	$u = \frac{x-95}{5}$	$v = y - 50$	uv	u^2
	85	46	–2	–4	8	4
	95	50	0	0	0	0
	100	50	1	0	0	1
	90	45	–1	–5	5	1
	110	60	3	10	30	9
	125	70	6	20	120	36
	70	40	–5	–10	50	25
કુલ	**675**	**361**	**2**	**11**	**213**	**76**

$$b = \frac{n\Sigma uv-(\Sigma u)(\Sigma v)}{n\Sigma u^2-(\Sigma u)^2} \times \frac{c_y}{c_x}$$

$$= \frac{7(213)-(2)(11)}{7(76)-(2)^2} \times \frac{1}{5}$$

$$= \frac{1491-22}{532-4} \times \frac{1}{5}$$

$$= \frac{1469}{528} \times \frac{1}{5}$$

$$= \frac{1469}{2640}$$

$$= 0.5564$$

$\therefore\ b \simeq 0.56$

હવે $a = \overline{y} - b\overline{x}$

$$= 51.57 - 0.56(96.43)$$

$$= 51.57 - 54.0008$$

$$= -2.4308$$

$\therefore\ a \simeq -2.43$

તેથી, Y ની X પરની નિયતસંબંધ રેખા

$$\hat{y} = a + bx$$

$$\therefore\ \hat{y} = -2.43 + 0.56x$$

$X = 120$ મૂકતાં,

$$\hat{y} = -2.43 + 0.56(120)$$

$$= -2.43 + 67.2$$

$\therefore\ \hat{y} = 64.77$ ગુણ

તેથી જ્યારે કોઈ વિદ્યાર્થીનો I.Q. 120 હોય ત્યારે તેના ગુણ અંદાજે 65 થાય.

હવે I.Q. (X) = 100 માટે ત્રુટિ શોધવા સૌપ્રથમ Y ની અનુમાનિત કિંમત $\hat{y}$ મેળવવી પડે.

$$\hat{y} = -2.43 + 0.56x$$

X = 100 લેતાં,

$$\hat{y} = -2.43 + 0.56(100)$$

$$= -2.43 + 56$$

$\therefore\ \hat{y} = 53.57$ ગુણ

પરંતુ X = 100 ને અનુરૂપ Y ની અવલોકન પરથી મળતી કિંમત 50 છે. (આપેલી માહિતી જુઓ.)

$\therefore$ ત્રુટિ $e = y - \hat{y}$

$= 50 - 53.57$

$\therefore \quad e = -3.57$ ગુણ

નોંધ : અત્રે યાદ રાખવું જરૂરી છે કે નિરપેક્ષ ચલ (X) ની ફક્ત તે જ કિંમતો માટે ત્રુટિ શોધી શકાય છે કે જેના માટે તેને અનુરૂપ સાપેક્ષ ચલ (Y) ની પ્રાપ્ત અવલોકિત કિંમતો જ્ઞાત હોય.

અહીં આ ઉદાહરણમાં $X = 120$ ને અનુરૂપ Y ની કિંમતના અનુમાનમાં થતી ત્રુટિ શોધી ન શકાય કેમકે $X = 120$ ને અનુરૂપ Y ની પ્રાપ્ત અવલોકિત કિંમત જ્ઞાત નથી.

ઉદાહરણ 7 : સુરેખ સહસંબંધ પ્રકરણના ઉદાહરણ 12ની માહિતી અને ગણતરી પરથી નફાની વેચાણ પરની નિયતસંબંધ રેખા મેળવો જ્યારે વેચાણ 3 કરોડ ₹ હોય ત્યારે થતા નફાનું અનુમાન કરો.

તે ઉદાહરણ પરથી આપણે જાણીએ છીએ કે,

$$u = \frac{x-A}{c_x} = \frac{x-2}{0.1} \text{ અને } v = \frac{y-B}{c_y} = \frac{y-5600}{100}$$

$\therefore c_x = 0.1$ અને $c_y = 100$

અત્રે નોંધીએ કે ગણતરીમાં સરળતા ખાતર $(x-A)$ને 10 વડે ગુણ્યા હતા પરંતુ c_xએ $(x-A)$ના છેદમાં હોવાથી c_xની કિંમત $\frac{1}{10}$ = 0.1 થાય.

($\because$ 10 વડે ગુણવા એટલે જ $\frac{1}{10}$ = 0.1 વડે ભાગવા.)

$$\text{હવે } b = \frac{n\Sigma uv - (\Sigma u)(\Sigma v)}{n\Sigma u^2 - (\Sigma u)^2} \times \frac{c_y}{c_x}$$

$$= \frac{9(121)-(0)(1)}{9(60)-(0)^2} \times \frac{100}{0.1}$$

$$= \frac{1089}{540} \times \frac{100}{0.1}$$

$$= \frac{108900}{54}$$

$= 2016.6667$

$\therefore b \simeq 2016.67$

હવે $a = \bar{y} - b\bar{x}$

$= 5611.11 - 2016.67(2)$

$= 5611.11 - 4033.34$

$\therefore \quad a = 1577.77$

તેથી નફો (Y) ની વેચાણ (X) પરની નિયતસંબંધ રેખા

$\hat{y} = a + bx$

$\therefore \quad \hat{y} = 1577.77 + 2016.67x$

$X = 3$ મૂકતાં,

$$\hat{y} = 1577.77 + 2016.67(3)$$

$$= 1577.77 + 6050.01$$

$$\therefore \quad \hat{y} = 7627.78$$

આમ, જ્યારે વેચાણ 3 કરોડ ₹ થાય ત્યારે અનુમાનિત નફો 7627.78 (હજાર ₹) થાય.

પ્રવૃત્તિ

તમે ધોરણ 12માં અભ્યાસ કરતા હોવ તે વર્ષના જૂનથી ડિસેમ્બર માસ દરમિયાન તમારી માસિક કૌટુંબિક આવક અને માસિક ખર્ચની વીગતો એકઠી કરો. તે પરથી માસિક ખર્ચની માસિક આવક પરની નિયતસંબંધ રેખા મેળવો. તે પરથી પછીના વર્ષના જાન્યુઆરી માસની આવક માટે તે માસના ખર્ચનું અનુમાન કરો. જાન્યુઆરી માસના અંતે ખરેખર ખર્ચ કેટલો થાય છે તે ચકાસો અને તમારા અનુમાનમાં થયેલી ત્રુટિ શોધો.

3.5 સહવિચરણ અને સહસંબંધાંક પરથી નિયતસંબંધાંક

જ્યારે બે ચલો X અને Y ની દ્વિચલ માહિતી માટે મધ્યક, પ્રમાણિત વિચલન (અથવા વિચરણ), સહવિચરણ, સહસંબંધાંક જેવા સારસૂચક માપ (summary measures) જાણતા હોઈએ ત્યારે નિયતસંબંધાંક અને નિયતસંબંધ રેખા નીચે મુજબ શોધી શકાય છે.

(1) જ્યારે $\bar{x}, \bar{y}, s_x^2$ (અથવા s_x), s_y^2 (અથવા s_y) અને Cov(x, y) જેવાં માપો જાણતા હોઈએ ત્યારે,

$$b = \frac{\text{સહવિચરણ}(x, y)}{x\text{નું વિચરણ}} = \frac{Cov(x, y)}{s_x^2}$$

અને $a = \bar{y} - b\bar{x}$

જ્યાં $Cov(x, y) = \dfrac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{n} = \dfrac{\Sigma xy - n\,\bar{x}\,\bar{y}}{n}$

$$s_x^2 = \frac{\Sigma(x-\bar{x})^2}{n} = \frac{\Sigma x^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x}{n}\right)^2 = \frac{\Sigma x^2}{n} - \bar{x}^2$$

$$s_y^2 = \frac{\Sigma(y-\bar{y})^2}{n} = \frac{\Sigma y^2}{n} - \left(\frac{\Sigma y}{n}\right)^2 = \frac{\Sigma y^2}{n} - \bar{y}^2$$

(2) જ્યારે $\bar{x}, \bar{y}, r, s_x$ (અથવા s_x^2), અને s_y (અથવા s_y^2) જેવાં માપ જાણતા હોઈએ ત્યારે,

$$b = r \cdot \frac{y \text{ નું પ્ર.વિ.}}{x \text{ નું પ્ર.વિ.}} = r \cdot \frac{s_y}{s_x}$$

અને $a = \bar{y} - b\bar{x}$

a અને b ની કિંમતો મૂકી, Y ની X પરની નિયતસંબંધ રેખા એટલે કે $\hat{y} = a + bx$ મેળવી શકાય.

હવે આપણે કેટલાંક સારસૂચક માપ આપેલાં હોય અને નિયતસંબંધ રેખા શોધવાની હોય તેવાં ઉદાહરણો લઈએ.

ઉદાહરણ **8 :** દસ જુદા જુદા વિસ્તારમાં ચોમાસા દરમિયાન પડેલા વરસાદ સેમીમાં (*X*) અને બાજરીની ઊપજ ક્વિન્ટલ પ્રતિ હેક્ટરમાં (*Y*) વચ્ચેના સંબંધનો અભ્યાસ કરવા માટે મેળવેલી માહિતી પરથી નીચે મુજબનાં માપ મળે છે.

$\boldsymbol{n = 10, \bar{x} = 40, \bar{y} = 175, s_x = 12, Cov(x, y) = 360}$

આ પરથી ઊપજ *Y*ની વરસાદ *X* પરની નિયતસંબંધ રેખા મેળવો

અહીં $Cov(x, y) = 360$ અને $s_x = 12 \therefore s_x^2 = 144$

$$b = \frac{Cov(x, y)}{s_x^2}$$

$$= \frac{360}{144}$$

$$\therefore \quad b = 2.5$$

અને $a = \bar{y} - b\bar{x}$

$$= 175 - 2.5(40)$$

$$= 175 - 100$$

$$\therefore a = 75$$

આમ *Y*ની *X* પરની નિયતસંબંધ રેખા

$$\hat{y} = a + bx$$

$$\therefore \quad \hat{y} = 75 + 2.5x$$

ઉદાહરણ **9 :** કુટુંબની વાર્ષિક આવક (X) અને મ્યુચ્યુઅલ ફંડમાં કુટુંબનું વાર્ષિક રોકાણ (Y) એ બે ચલો વચ્ચેનો અભ્યાસ કરવા એક શહેરમાંથી મેળવેલો **100** કુટુંબોની નિદર્શ માહિતીનો સાર નીચે દર્શાવ્યો છે.

X = કુટુંબની વાર્ષિક આવક (લાખ ₹ માં)

Y = કુટુંબનું મ્યુચ્યુઅલ ફંડમાં વાર્ષિક રોકાણ (હજાર ₹ માં)

$\boldsymbol{\bar{x} = 5.5, \ \bar{y} = 40.5, \ s_x = 1.2, \ s_y = 12.8, \ r = 0.65}$

આ માહિતી પરથી કુટુંબના મ્યુચ્યુઅલ ફંડમાં રોકાણની કુટુંબની વાર્ષિક આવક પરની નિયતસંબંધ રેખા મેળવો. જો કોઈ કુટુંબની વાર્ષિક આવક **4.5** લાખ ₹ હોય, તો તેનો મ્યુચ્યુઅલ ફંડમાં વાર્ષિક રોકાણનું અનુમાન મેળવો.

અહીં $n = 100, \bar{x} = 5.5, \bar{y} = 40.5$

$s_x = 1.2, s_y = 12.8$ અને $r = 0.65$

હવે $b = r \cdot \frac{s_y}{s_x}$

$$= 0.65 \times \frac{12.8}{1.2}$$

$$= 6.9333$$

$$\therefore \quad b \simeq 6.93$$

અને $a = \overline{y} - b\overline{x}$

$= 40.5 - 6.93\ (5.5)$

$= 40.5 - 38.115$

$= 2.385$

$\therefore \quad a \simeq 2.39$

આમ Yની X પરની નિયતસંબંધ રેખા

$\hat{y} = a + bx$

$\therefore \quad \hat{y} = 2.39 + 6.93x$

$X = 4.5$ મૂકતાં,

$\hat{y} = 2.39 + 6.93(4.5)$

$= 2.39 + 31.185$

$= 33.575$

$\therefore \quad \hat{y} \simeq 33.58$

તેથી, જ્યારે કોઈ કુટુંબની વાર્ષિક આવક 4.5 લાખ ₹ હોય ત્યારે મ્યુચ્યુઅલ ફંડનું વાર્ષિક અંદાજિત રોકાણ 33.58 હજાર ₹ થાય.

ઉદાહરણ 10 : એક બોલપેન બનાવતી કંપનીની છેલ્લા વર્ષના દરેક માસના અંતે બોલપેનનો ભાવ (₹માં) અને તે સમયે બોલપેનના પુરવઠા (એકમોમાં)ની નીચે આપેલી માહિતી પરથી જ્યારે બોલપેનનો ભાવ 40 ₹ હોય ત્યારે તેના પુરવઠાનું અનુમાન મેળવો.

વીગત	ભાવ (x)	પુરવઠો (y)
સરેરાશ	30	500
વિચરણ	25	10,000
$r = 0.8$		

અહીં $\overline{x} = 30, \overline{y} = 500, s_x^2 = 25, s_y^2 = 10000$ અને $r = 0.8$

$s_x^2 = 25$ હોવાથી $s_x = 5$

$s_y^2 = 10000$ હોવાથી $s_y = 100$

અહીં ભાવ $X = 40$ માટે પુરવઠો Y ની કિંમતનું અનુમાન કરવાનું હોઈ આપણે Y ની X પરની નિયત સંબંધ રેખા મેળવીશું.

$$b = r \cdot \frac{s_y}{s_x}$$

$$= 0.8 \times \frac{100}{5}$$

$\therefore \quad b = 16$

$a = \overline{y} - b\overline{x}$

$= 500 - 16\ (30)$

$= 500 - 480$

$\therefore \quad a = 20$

આમ Yની X પરની નિયતસંબંધ રેખા

$\hat{y} = a + bx$

$\therefore \quad \hat{y} = 20 + 16x$

$X = 40$ મૂકતાં,

$\hat{y} = 20 + 16(40)$

$= 20 + 640$

$\therefore \quad \hat{y} = 660$ એકમો

તેથી, ભાવ ₹ 40 અનુરૂપ પુરવઠાનું અનુમાન 660 એકમો થશે.

ઉદાહરણ 11 : દક્ષિણ ભારતના એક રાજ્યમાં એક વ્યક્તિ ખાદ્ય પદાર્થમાંથી બનતી ચમચીનું ઉત્પાદન કરે છે. વપરાશ બાદ તે ચમચી ખાઈ શકાય તેવી હોય છે. પ્રાયોગિક ધોરણે તેણે કોઈ રાજ્યમાં તે ચમચી વેચાણ અર્થે રજૂ કરેલ છે. છેલ્લા છ મહિનામાં સરેરાશ ભાવ (₹ માં) અને તેની માંગ (સો એકમોમાં) પરથી નીચેના પરિણામો મળે છે.

$$\boldsymbol{n = 6, \Sigma x = 45, \Sigma y = 122, \Sigma x^2 = 439, \Sigma xy = 605}$$

આ માહિતી પરથી ચમચીની માંગ (Y)ની ભાવ (X) પરની નિયતસંબંધ રેખા શોધો. અને ભાવ ₹ 10 હોય ત્યારે ચમચીની માંગનું અનુમાન કરો.

અહીં $\overline{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{45}{6} = 7.5$, $\overline{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{122}{6} = 20.33$

$$b = \frac{n\Sigma xy - (\Sigma x)(\Sigma y)}{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}$$

$$= \frac{6(605) - (45)(122)}{6(439) - (45)^2}$$

$$= \frac{3630 - 5490}{2634 - 2025}$$

$$= \frac{-1860}{609}$$

$= -3.0542$

$\therefore \quad b \simeq -3.05$

$a = \overline{y} - b\overline{x}$

$= 20.33 - (-3.05)\ (7.5)$

$= 20.33 + 22.875$

$= 43.205$

$\therefore \quad a \simeq 43.21$

આમ Y ની X પરની નિયતસંબંધ રેખા

$$\hat{y} = a + bx$$

$$\therefore \quad \hat{y} = 43.21 - 3.05x$$

$X = 10$ મૂકતાં,

$$\hat{y} = 43.21 - 3.05(10)$$

$$= 43.21 - 30.5$$

$$\therefore \quad \hat{y} = 12.71$$

તેથી, જ્યારે ભાવ ₹ 10 હોય ત્યારે અનુમાનિત માંગ 12.71 (સો એકમો) હોય.

ઉદાહરણ 12 : એક કંપની દ્વારા ઉત્પાદિત પવનચક્કી દ્વારા વીજળી ઉત્પાદિત કરતા એક એકમમાં જુદા-જુદા સમયે પવનની ગતિ (કિમી પ્રતિ કલાક) અને વીજળી-ઉત્પાદન (વૉટ) વિશેનાં પાંચ અવલોકનો નોંધવામાં આવ્યાં, તે પરથી નીચે મુજબ માહિતી મળે છે :

પવનની ગતિ = X કિમી પ્રતિ કલાક

વીજળી-ઉત્પાદન = Y વૉટ

$$\bar{x} = 20, \ \bar{y} = 186, \ \Sigma xy = 23200, \ s_x^2 = 50$$

આ માહિતી પરથી વીજળીના ઉત્પાદન (Y)ની પવનની ગતિ (X) પરની નિયતસંબંધ રેખા મેળવો. જો પવનની ગતિ 25 કિમી પ્રતિ કલાક હોય ત્યારે અંદાજિત વીજળીનું ઉત્પાદન મેળવો.

અહીં, $n = 5, \ \Sigma xy = 23200, \ \bar{x} = 20, \ \bar{y} = 186$ અને $s_x^2 = 50$

હવે $b = \dfrac{Cov(x, y)}{s_x^2}$

$$= \frac{\Sigma xy - n\,\bar{x}\,\bar{y}}{n \cdot s_x^2}$$

$$= \frac{23200 - 5(20)(186)}{5(50)}$$

$$= \frac{23200 - 18600}{250}$$

$$= \frac{4600}{250}$$

$$\therefore \quad b = 18.4$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x}$$

$$= 186 - 18.4 \ (20)$$

$$= 186 - 368$$

$$\therefore \ a = -182$$

આમ Yની X પરની નિયતસંબંધ રેખા

$$\hat{y} = a + bx$$

$$\therefore \quad \hat{y} = -182 + 18.4x$$

$X = 25$ મૂકતાં,

$$\hat{y} = -182 + 18.4(25)$$

$$= -182 + 460$$

$$\therefore \quad \hat{y} = 278$$

તેથી, જ્યારે પવનની ગતિ 25 કિમી પ્રતિકલાક હોય ત્યારે અંદાજે 278 વૉટ વીજળીનું ઉત્પાદન થાય.

સ્વાધ્યાય 3.2

1. કપાસના પાક પર ખાતરના વપરાશની અસર જાણવા માટે કરેલા એક અભ્યાસમાંથી નીચે મુજબ માહિતી મળે છે.

ખાતરનો વપરાશ (10 કિગ્રા) x	28	35	25	24	20	25	20
કપાસનો પાક હેક્ટરદીઠ (ક્વિન્ટલ) y	128	140	115	120	105	122	100

આ પરથી Y ની X પરની નિયતસંબંધ રેખા મેળવો અને ખાતરનો વપરાશ 300 કિગ્રા થયો હોય તો હેક્ટર દીઠ કપાસના પાકનું અનુમાન મેળવો.

2. પિતા અને પુત્રની ઊંચાઈ વચ્ચેનો સંબંધ ચકાસવા માટે પિતા અને પુખ્ત વયના પુત્રની આઠ જોડની નીચે આપેલી માહિતી પરથી પુત્રની ઊંચાઈની પિતાની ઊંચાઈ પરની નિયતસંબંધ રેખા મેળવો.

પિતાની ઊંચાઈ (સેમી) x	167	169	171	168	173	166	167	165
પુત્રની ઊંચાઈ (સેમી) y	158	170	169	172	170	168	164	167

જ્યારે કોઈ પિતાની ઊંચાઈ 170 સેમી હોય ત્યારે તેના પુત્રની ઊંચાઈનું અનુમાન કરો.

3. સમુદ્રસપાટીથી સ્થળની ઊંચાઈ (altitude) અને તે સ્થળે હવામાં અસરકારક ઑક્સિજનના પ્રમાણ વિશેની નીચેની માહિતી પરથી અસરકારક ઑક્સિજનના પ્રમાણ (Y)ની સમુદ્રસપાટીથી ઊંચાઈ (X) પરની નિયતસંબંધ રેખા મેળવો. (305 મીટર $\simeq$ 1000 ફૂટ)

સ્થળની ઊંચાઈ (305 મીટર) x	0	1	2	3	4	5	6
અસરકારક ઑક્સિજન (%) y	20.9	20.1	19.4	17.9	17.9	17.3	16.6

જો કોઈ સ્થળની સમુદ્રસપાટીથી ઊંચાઈ 7 એકમ (1 એકમ = 305 મીટર) હોય તો ત્યાં હવામાં અસરકારક ઑક્સિજનની ટકાવારીનો અંદાજ મેળવો.

4. એક મોટા શહેરના ઘરમાં વપરાશની જગ્યા અને માસિક ભાડા વચ્ચેનો સંબંધ જાણવા માટે નીચે પ્રમાણે માહિતી એકઠી કરવામાં આવી છે.

વપરાશની જગ્યા (ચોરસ મીટર) x	55	60	75	80	100	120	140
માસિક ભાડું (₹) y	18,000	19,000	20,000	20,000	25,000	30,000	50,000

આ પરથી Y ની X પરની નિયતસંબંધ રેખા મેળવો. જો કોઈ ઘરની વપરાશની જગ્યા 110 ચોરસ મીટર હોય, તો તેનું માસિક ભાડું કેટલું હશે, તેનું અનુમાન કરો.

5. એક મોલમાં પ્રતિદિન આવતા ગ્રાહકોની સંખ્યા અને વેચાણ (દસ હજાર ₹) વચ્ચેનો સંબંધ જાણવા માટે નીચે મુજબ નિદર્શ માહિતી મળે છે.

ગ્રાહકોની સંખ્યા x	50	70	100	70	150	120
વેચાણ (દસ હજાર ₹) y	2.0	2.0	2.5	1.4	4.0	2.5

આ પરથી Y ની X પરની નિયતસંબંધ રેખા મેળવો. જો કોઈ એક દિવસે 80 ગ્રાહકો તે મોલની મુલાકાત લે તો મોલમાં કેટલું વેચાણ થયું હશે તેનું અનુમાન કરો.

6. એક શહેરમાં કાપડના ધંધામાં કાર્યરત દસ પેઢીનો સરેરાશ વાર્ષિક નફો (લાખ ₹માં) અને સરેરાશ વાર્ષિક વહીવટી-ખર્ચ (લાખ ₹માં)ની માહિતી નીચે મુજબ છે.

વીગત	નફો (લાખ ₹ માં) x	વહીવટી-ખર્ચ (લાખ ₹ માં) y
મધ્યક	60	25
પ્રમાણિત વિચલન	6	3
સહવિચરણ = 10.4		

આ પરથી Y ની X પરની નિયતસંબંધ રેખા મેળવો.

7. ગુજરાતના જુદા જુદા તાલુકામાં પડેલ સરેરાશ વરસાદ (સેમીમાં) અને મકાઈની ઊપજ (ક્વિન્ટલ પ્રતિ હેક્ટર માં) વચ્ચેનો સંબંધ જાણવા એકઠી કરેલી માહિતી પરથી નીચેના પરિણામો મળે છે.

વીગત	વરસાદ (સેમી) x	મકાઈની ઊપજ (ક્વિન્ટલ પ્રતિ હેક્ટર) y
મધ્યક	82	180
વિચરણ	64	225
સહસંબંધાંક = 0.82		

જ્યારે વરસાદ 60 સેમી પડે ત્યારે થતી મકાઈની ઊપજનું અનુમાન મેળવો.

8. કાંડા ઘડિયાળની બૅટરી (સૅલ)ના ભાવ ₹ માં (X) અને તેનો પુરવઠા સો એકમોમાં (Y) વચ્ચેના સંબંધનો અભ્યાસ કરવા એકઠી કરેલી માહિતી પરથી નીચેના પરિણામો મળે છે.

$n = 10,\ \Sigma x = 130, \Sigma y = 220,\ \Sigma x^2 = 2288,\ \Sigma xy = 3467$

આ માહિતી પરથી Y ની X પરની નિયતસંબંધ રેખા શોધો અને ભાવ ₹ 16 હોય ત્યારે પુરવઠાનું અનુમાન કરો.

9. એક શહેરમાં ઉનાળામાં જુદા જુદા છ દિવસો દરમિયાન મહત્તમ તાપમાન (X) અને આઇસક્રીમનું વેચાણ (Y)ની વીગત પરથી નીચે મુજબ માહિતી મળે છે.

મહત્તમ તાપમાન = X (ડિગ્રી સેલ્સિયસમાં)

આઇસક્રીમનું વેચાણ = Y (લાખ ₹માં)

$\overline{x} = 40,\ \overline{y} = 1.2,\ \Sigma xy = 306,\ s_x^2 = 20$

આ માહિતી પરથી આઇસક્રીમના વેચાણની મહત્તમ તાપમાન પરની નિયતસંબંધ રેખા મેળવો. જો કોઈ દિવસનું મહત્તમ તાપમાન 42 ડિગ્રી સેલ્સિયસ હોય, તો તે દિવસે આઇસક્રીમના વેચાણનો અંદાજ મેળવો.

*

3.6 નિશ્ચાયકતાનો આંક (Coefficient of Determination)

આપણે જાણીએ છીએ કે નિયતસંબંધ એ બે સહસંબંધિત ચલ વચ્ચેનો વિધેયાત્મક સંબંધ છે અને નિરપેક્ષ ચલની કોઈ કિંમત માટે તેને અનુરૂપ સાપેક્ષ ચલની કિંમતનું અનુમાન કરવા તે ઉપયોગી છે. આવા અનુમાનની વિશ્વસનીયતા જાણવા માટેનું એક માપ નિશ્ચાયકતાનો આંક છે.

ધારો કે Y ની X પરની નિયતસંબંધ રેખા $\hat{y} = a + bx$ છે, તો સાપેક્ષ ચલ Y ની અવલોકન પરથી મળતી અવલોકિત કિંમતો y અને તેને અનુરૂપ નિયતસંબંધ રેખા પરથી મળેલી તેની અનુમાનિત કિંમતો $\hat{y}$ વચ્ચેના સહસંબંધાંકના વર્ગને **નિશ્ચાયકતાનો આંક** કહે છે. તેને R^2 વડે દર્શાવાય છે.

$$\therefore R^2 = \left[r\left(y, \hat{y}\right)\right]^2$$

સહેલાઈથી ચકાસી શકાય છે કે, અહીં બે ચલ વચ્ચેના સંબંધના અભ્યાસમાં R^2નું મૂલ્ય $r^2\left(x, y\right)$ એટલે કે r^2 જેટલું જ થાય છે.

$$\begin{aligned} R^2 &= \left[r\left(y, \hat{y}\right)\right]^2 \\ &= \left[r\left(y, a + bx\right)\right]^2 \\ &= \left[r\left(y, x\right)\right]^2 \\ &= \left[r\left(x, y\right)\right]^2 \end{aligned}$$

$\left\{ \because \right.$ ઊગમ બિંદુ અને માપ બંને પરિવર્તનથી r સ્વતંત્ર છે. તેથી $\hat{y}\left(= a + bx\right)$ ચલમાંથી a બાદ કરી ત્યારબાદ b વડે ભાગતાં rની કિંમત બદલાશે નહીં. $\}$

$$\therefore R^2 = r^2$$

આમ, $R^2 = r^2$ હોવાથી આપણે કહી શકીએ કે સાપેક્ષ ચલ Yની અનુમાનિત કિંમતની વિશ્વસનીયતા મુખ્યત્વે X અને Y વચ્ચેના સહસંબંધાંક પર આધાર રાખે છે.

જો $r = \pm 1$ હોય તો $R^2 = r^2 = 1$ થાય અને X અને Y વચ્ચે સંપૂર્ણ સુરેખ સહસંબંધ થાય. તેથી આપણે કહી શકીએ કે નિયતસંબંધ રેખા પરથી મેળવેલ Yની અનુમાનિત કિંમત 100 % વિશ્વસનીય છે. પરંતુ જો $r = 0$ હોય તો $R^2 = r^2 = 0$ અને X અને Y વચ્ચે સુરેખ સહસંબંધ નથી, તેથી આપણે કહી શકીએ કે, નિયતસંબંધ રેખા પરથી મેળવેલ Y ની અનુમાનિત કિંમત બિલકુલ વિશ્વસનીય નથી.

ઉપરની ચર્ચા પરથી સ્પષ્ટ છે કે, R^2ની મોટી કિંમત બે ચલ વચ્ચે ઘનિષ્ઠ સુરેખ સહસંબંધ દર્શાવે છે. તેથી નિશ્ચાયકતાના આંક (R^2) પરથી સુરેખ નિયતસંબંધની ધારણા યોગ્ય છે કે કેમ તે ચકાસી શકાય છે. જો R^2ની કિંમત 1 ની નજીક હોય તો X અને Y વચ્ચેનો સંબંધ સુરેખ નિયતસંબંધ છે એવી ધારણા યોગ્ય ગણાય અને જો R^2ની કિંમત 0ની નજીક હોય તો X અને Y વચ્ચેનો સંબંધ સુરેખ છે એવી ધારણા યોગ્ય ગણાય નહિ.

સાપેક્ષ ચલ Y માં થતા કુલ ફેરફારમાંથી કેટલું ચલન નિયતસંબંધ રેખા દ્વારા સમજાવી શકાય તે નિશ્ચયતાના આંક પરથી મળે છે. દા.ત., જો કોઈ માહિતી માટે $r = 0.9$ હોય તો નિશ્ચાયકતાનો આંક $(0.9)^2 = 0.81$ થાય અને તેથી $r^2 \times 100\,\%$ $= 81\,\%$ થાય, એટલે કહી શકાય કે ચલ Y માં થતા કુલ ચલનમાંથી 81 % ચલનની સમજૂતી નિયતસંબંધ રેખા પરથી મળે છે. તેથી આપણે કહી શકીએ કે પસંદ કરેલુ નિયતસંબંધનું સુરેખ મૉડેલ આ માહિતી માટે યોગ્ય છે.

ઉદાહરણ 13 : નીચેના કોષ્ટકમાં જુદી-જુદી કંપનીમાં કામ કરતા તકનિકી કારીગરોનો અનુભવ (વર્ષમાં) અને તેમના માસિક પગાર (હજાર ₹માં) આપેલા છે.

અનુભવ (વર્ષ) x	12	8	16	20	5	14	10
માસિકપગાર (હજાર ₹) y	22	15	25	30	12	24	20

આ માહિતી પરથી નિશ્ચાયકતાના આંકની ગણતરી કરો તેમજ અનુભવ અને માસિક પગાર વચ્ચે સુરેખ નિયતસંબંધની ધારણા ચકાસો.

અહીં, $n = 7$, $\overline{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{85}{7} = 12.14$, $\overline{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{148}{7} = 21.14$

	અનુભવ (વર્ષ) x	માસિક પગાર (હજાર ₹) y	xy	x^2	y^2
	12	22	264	144	484
	8	15	120	64	225
	16	25	400	256	625
	20	30	600	400	900
	5	12	60	25	144
	14	24	336	196	576
	10	20	200	100	400
કુલ	**85**	**148**	**1980**	**1185**	**3354**

$$R^2 = r^2 = \left[\frac{n\Sigma xy - (\Sigma x)(\Sigma y)}{\sqrt{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2} \cdot \sqrt{n\Sigma y^2 - (\Sigma y)^2}}\right]^2$$

$$= \left[\frac{7(1980) - (85)(148)}{\sqrt{7(1185) - (85)^2} \cdot \sqrt{7(3354) - (148)^2}}\right]^2$$

$$= \frac{[13860 - 12580]^2}{[8295 - 7225] \cdot [23478 - 21904]}$$

$$= \frac{(1280)^2}{(1070) \cdot (1574)}$$

$$= \frac{1638400}{1684180}$$

$$= 0.9728$$

$$\therefore R^2 \simeq 0.97$$

R^2ની કિંમત 0.97 છે. 1ની ખૂબ નજીક છે. તેથી આપણે કહી શકીએ કે, અનુભવના વર્ષ અને પગાર માસિક વચ્ચે સુરેખ નિયતસંબંધ છે એ ધારણા યોગ્ય ગણાય.

નોંધ : ઉપરના ઉદાહરણમાં $u = x - A$ અને $v = y - B$ (જ્યાં A અને B અનુકૂળ અચળ કિંમતો) લઈને પણ R^2 શોધી શકાય.

ઉદાહરણ 14 : વસ્તીની ગીચતા અને ચામડીના દર્દોથી પીડાતી વ્યક્તિઓની સંખ્યા વચ્ચેનો સંબંધ જાણવા છ શહેરો માટે વસ્તીની ગીચતા (ચો કિમીદીઠ) અને ચામડીનાં દર્દોથી પીડાતા દર્દીઓ (દર હજારે) વિશે નીચે મુજબ માહિતી મળે છે.

ગીચતા (ચો કિમીદીઠ) x	12,000	14,500	19,000	17,500	13,500	16,000
દર્દીઓની સંખ્યા (દર હજારે) y	80	60	90	80	40	30

આ માહિતી પરથી Y અને X પરની નિયતસંબંધ રેખા મેળવો. જો કોઈ શહેરની ગીચતા 15000 (ચો કિમીદીઠ) હોય તો તેમાં ચામડીનાં દર્દોથી પીડાતા દર્દીઓની સંખ્યાનું અનુમાન કરો. આ નિયતસંબંધ મૉડેલની વિશ્વસનીયતા ચકાસો.

અહીં, $n = 6, \bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{92500}{6} = 15416.67$; $\bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{380}{6} = 63.33$

આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે, ચલ X ની કિંમતો 500ના ગુણકમાં અને ચલ Y ની કિંમતો 10ના ગુણકમાં છે. તેથી $A = 15000$, $B = 60$, $c_x = 500$, $c_y = 10$ લઈ આપણે ટૂંકી રીતનો ઉપયોગ કરીશું. હવે આપણે u અને v નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત કરીએ.

$$u = \frac{x-A}{c_x} = \frac{x-15000}{500} \quad \text{અને} \quad v = \frac{y-B}{c_y} = \frac{y-60}{10}$$

	ગીચતા (ચો કિમી દીઠ) x	દર્દીઓની સંખ્યા (દર હજારે) y	$u = \frac{x-15000}{500}$	$v = \frac{y-60}{10}$	uv	u^2	v^2
	12000	80	–6	2	–12	36	4
	14500	60	–1	0	0	1	0
	19000	90	8	3	24	64	9
	17500	80	5	2	10	25	4
	13500	40	–3	–2	6	9	4
	16000	30	2	–3	–6	4	9
કુલ	**92500**	**380**	**5**	**2**	**22**	**139**	**30**

$$b = \frac{n\Sigma uv - (\Sigma u)(\Sigma v)}{n\Sigma u^2 - (\Sigma u)^2} \times \frac{c_y}{c_x}$$

$$= \frac{6(22)-(5)(2)}{6(139)-(5)^2} \times \frac{10}{500}$$

$$= \frac{132-10}{834-25} \times \frac{1}{50}$$

$$= \frac{122}{809} \times \frac{1}{50}$$

$$= \frac{122}{40450}$$

$$\therefore b \simeq 0.003$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x}$$
$$= 63.33 - 0.003\,(15416.67)$$
$$= 63.33 - 46.25$$

$$\therefore a = 17.08$$

Y ની X પરની નિયતસંબંધ રેખા

$$\hat{y} = a + bx$$
$$\therefore \hat{y} = 17.08 + 0.003\,x$$

$X = 15000$ મૂકતાં,

$$\hat{y} = 17.08 + 0.003(15000)$$
$$= 17.08 + 45$$
$$\therefore \hat{y} = 62.08$$

તેથી કોઈ શહેરની ગીચતા 15000 હોય, તો તેમાં ચામડીનાં દર્દથી પીડાતા દર્દીઓની અનુમાનિત સંખ્યા દર હજારે $62.08 \simeq 62$ થાય.

હવે નિયતસંબંધ મૉડેલની વિશ્વસનીયતા નિશ્ચાયકતાના આંક R^2 પરથી ચકાસી શકાય છે. તેથી આપણે તે મેળવીએ

$$R^2 = r^2 = \left[\frac{n\Sigma uv - (\Sigma u)\,(\Sigma v)}{\sqrt{n\Sigma u^2 - (\Sigma u)^2}\cdot\sqrt{n\Sigma v^2 - (\Sigma v)^2}}\right]^2$$

$$= \frac{\left[6(22) - (5)\,(2)\right]^2}{\left[6(139) - (5)^2\right]\left[6(30) - (2)^2\right]}$$

$$= \frac{(122)^2}{(809)\,(176)}$$

$$= \frac{14884}{142384}$$

$$= 0.1045$$

$$\therefore R^2 \simeq 0.10$$

R^2ની કિંમત 0ની ખૂબ નજીક હોવાથી નિયતસંબંધ મૉડેલ વિશ્વસનીય છે તેમ કહી શકાય નહિ.

3.7 નિયતસંબંધાંકના ગુણધર્મ

(1) સહસંબંધાંક r અને નિયતસંબંધાંક b બંનેનાં ચિહ્નો સમાન હોય છે.

($\because$ આપણે જાણીએ છીએ કે, પ્રમાણિત વિચલનો s_x અને s_y હંમેશાં અનૃણ હોય છે અને $-1 \le r \le 1$ હોય છે. તેથી $b = r \cdot \frac{s_y}{s_x}$ પરથી સમજી શકાય છે, કે r નું ચિહ્ન હશે તે જ ચિહ્ન b નું પણ થશે.)

(2) નિયતસંબંધાંક એ ઊગમબિંદુ પરિવર્તનથી સ્વતંત્ર છે પરંતુ માપ (scale) પરિવર્તનથી સ્વતંત્ર નથી.

(આ ગુણધર્મની વિસ્તૃત ચર્ચા નિયતસંબંધાંકની ગણતરીની ટૂંકી રીતની સમજૂતીમાં કરેલ છે.)

નોંધ : Y ની X પરની નિયતસંબંધ રેખા હંમેશાં $(\bar{x}, \bar{y})$ બિંદુમાંથી પસાર થાય છે.

ઉદાહરણ 15 : પિતાની ઊંચાઈ સેમીમાં (X) અને પુખ્ત વયના પુત્રની ઊંચાઈ સેમીમાં (Y) વચ્ચેનો સંબંધ જાણવાના પ્રયોગમાં એક નિદર્શમાં છ પિતા-પુત્રની જોડ પસંદ કરવામાં આવે છે. તે પરથી મળતાં પરિણામો નીચે મુજબ છે.

$$\Sigma x = 1020, \Sigma y = 990, \Sigma(x-170)^2 = 60, \Sigma(y-165)^2 = 105$$

$$\Sigma(x-170)(y-165) = 45$$

આ માહિતી પરથી પુખ્ત વયના પુત્રની ઊંચાઈ (Y)ની પિતાની ઊંચાઈ (X) પરની નિયતસંબંધ રેખા મેળવો. તેમજ નિયતસંબંધ મૉડેલની વિશ્વસનીયતા ચકાસો.

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{1020}{6} = 170$$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{990}{6} = 165$$

$$\therefore \Sigma(x-170)^2 = \Sigma(x-\bar{x})^2 = 60$$

$$\Sigma(y-165)^2 = \Sigma(y-\bar{y})^2 = 105$$

$$\Sigma(x-170)(y-165) = \Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y}) = 45$$

$$\therefore b = \frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\Sigma(x-\bar{x})^2}$$

$$= \frac{45}{60}$$

$$\therefore b = 0.75$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x}$$

$$= 165 - 0.75(170)$$

$$= 165 - 127.5$$

$$\therefore a = 37.5$$

આમ, Y ની X પરની નિયતસંબંધ રેખા

$$\hat{y} = a + bx$$

$$\therefore \hat{y} = 37.5 + 0.75x$$

હવે, નિયતસંબંધ મૉડેલની વિશ્વસનીયતા ચકાસવા નિશ્ચાયકતાનો આંક R^2 મેળવીએ.

$$R^2 = \left[\frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sqrt{\Sigma(x-\bar{x})^2} \cdot \sqrt{\Sigma(y-\bar{y})^2}}\right]^2$$

$$= \frac{(45)^2}{(60)(105)}$$

$$= \frac{2025}{6300}$$

$$= 0.3214$$

$$\therefore R^2 \simeq 0.32$$

R^2ની કિંમત 0થી નજીક હોવાથી આ નિયતસંબંધ મૉડેલ વિશ્વસનીય છે તેમ કહી શકાય નહિ.

ઉદાહરણ 16 : (i) જો Y ની X પરની નિયતસંબંધ રેખા $\hat{y}=12-1.5x$ હોય અને X નો મધ્યક 6 હોય, તો Y નો મધ્યક શોધો. (ii) જો Y ની X પરની નિયતસંબંધ રેખા $\hat{y}=11.5+0.65x$ હોય અને $\bar{y}=18$ હોય, તો $\bar{x}$ ની કિંમત શોધો.

(i) આપણે જાણીએ છીએ કે, નિયતસંબંધ રેખા $(\bar{x}, \bar{y})$ બિંદુમાંથી હંમેશાં પસાર થાય છે. તેથી નિયતસંબંધ રેખાના સમીકરણમાં x ની જગ્યાએ $\bar{x}$ મૂકતાં જે $\hat{y}$ મળે તે જ $\bar{y}$ થાય અથવા $\hat{y}$ ની જગ્યાએ $\bar{y}$ મૂકતાં જે x મળે તે જ $\bar{x}$ થાય.

$\hat{y}=12-1.5x$ માં x ની જગ્યાએ $\bar{x}=6$ મૂકતાં,

$\hat{y}=12-1.5(6)$

$\therefore \hat{y}=12-9$

$\therefore \hat{y}=3$ તેથી $\bar{y}=3$

આમ, Y નો મધ્યક 3 થાય.

(ii) ઉપરની ચર્ચા મુજબ $\hat{y}=11.5+0.65x$ માં $\hat{y}$ ને બદલે $\bar{y}=18$ મૂકતાં, જે x મળે તે $\bar{x}$ થશે.

$\hat{y}=11.5+0.65x$ માં $\hat{y}=\bar{y}=18$ મૂકતાં,

$18 = 11.5+0.65x$

$\therefore 6.5 = 0.65x$

$\therefore x = \frac{6.5}{0.65}$

$\therefore x = 10$ તેથી $\bar{x}=10$

આમ, X નો મધ્યક 10 થાય.

ઉદાહરણ 17 : (i) જો $\bar{x}=5, \bar{y}=11$ અને $b=1.2$ હોય, તો Y ની X પરની નિયતસંબંધ રેખા મેળવો. (ii) જો $\bar{x}=60, \bar{y}=75$ અને $s_x^2 : Cov(x, y)=5:3$ હોય, તો Y ની X પરની નિયતસંબંધ રેખા મેળવો અને તે પરથી $X=65$ માટે Y ની કિંમતનું અનુમાન મેળવો.

(i) અહીં $b=1.2$ તથા $\bar{x}=5$ અને $\bar{y}=11$ છે.

હવે, $a=\bar{y}-b\bar{x}$

$\therefore a=11-1.2(5)$

$=11-6$

$\therefore a=5$

Y ની X પરની નિયતસંબંધ રેખા નીચે મુજબ મળે.

$\hat{y}=a+bx$

$\therefore \hat{y}=5+1.2x$

(ii) અહીં $\overline{x} = 60, \overline{y} = 75$ અને $s_x^2 : Cov(x, y) = 5:3$ છે.

$s_x^2 : Cov(x, y) = 5:3$

$\therefore \quad \frac{s_x^2}{Cov(x, y)} = \frac{5}{3}$ તેથી $\frac{Cov(x, y)}{s_x^2} = \frac{3}{5}$

હવે, $b = \frac{Cov(x, y)}{s_x^2} = \frac{3}{5} = 0.6$

અને $a = \overline{y} - b\overline{x}$

$= 75 - 0.6\,(60)$

$= 75 - 36$

$\therefore \ a = 39$

Y ની X પરની નિયતસંબંધ રેખા નીચે મુજબ મળે.

$\hat{y} = a + bx$

$\therefore \ \hat{y} = 39 + 0.6x$

$X = 65$ મૂકતાં,

$\hat{y} = 39 + 0.6\,(65)$

$= 39 + 39$

$\therefore \ \hat{y} = 78$

આમ, $X = 65$ માટે Y ની અનુમાનિત કિંમત 78 થાય.

ઉદાહરણ **18 : (i)** **Y ની X પરની અન્વાયોજિત નિયતસંબંધ રેખા $\hat{y} = 50 + 3.5x$ છે. જો આ રેખાના અન્વાયોજનમાં એક અવલોકન $(16, 108)$ નો ઉપયોગ થયો હોય, તો $X = 16$ માટે Y ની અનુમાનિત કિંમતની ત્રુટિ શોધો.**

(ii) જો $\hat{y} = 22 + 0.8x$ રેખાના અન્વાયોજનમાં એક અવલોકન $(10, 30)$ નો ઉપયોગ થયો હોય, તો $X = 10$ માટે Y ની અનુમાનિત કિંમતની ત્રુટિ શોધો. ત્રુટિના જવાબ પરથી આપ શું તારવી શકો ?

(i) $\hat{y} = 50 + 3.5x$ માં $X = 16$ મૂકતાં,

$\hat{y} = 50 + 3.5(16)$

$= 50 + 56$

$\therefore \ \hat{y} = 106$

અને અવલોકિત માહિતી પરથી $X = 16$ માટે $Y = 108$ છે.

$\therefore$ ત્રુટિ $e = y - \hat{y}$

$= 108 - 106$

$\therefore \ e = 2$

આમ, $X = 16$ માટે Yની અનુમાનિત કિંમતની ત્રુટિ 2 થાય.

(ii) $\hat{y} = 22 + 0.8x$ માં $X = 10$ મૂકતાં,

$$\hat{y} = 22 + 0.8(10)$$

$$= 22 + 8$$

$$\therefore \hat{y} = 30$$

અને અવલોકિત માહિતી પરથી $X = 10$ માટે $Y = 30$ છે.

$\therefore$ ત્રુટિ $e = y - \hat{y}$

$$= 30 - 30$$

$$\therefore e = 0$$

આમ, $X = 10$ માટે Y ની અનુમાનિત કિંમતની ત્રુટિ 0 થાય છે.

અહીં, ત્રુટિની કિંમત શૂન્ય મળે છે તેથી આપણે કહી શકીએ કે, બિંદુ $(10, 30)$ એ અન્વાયોજિત રેખા $\hat{y} = 22 + 0.8x$ પર જ આવેલું હોય.

નોંધ : ન્યૂનતમ વર્ગોની રીતે મળતી નિયતસંબંધ રેખાથી ઉપરની તરફ આવેલા બિંદુ માટે ત્રુટિ ધન, નીચે તરફ આવેલા બિંદુ માટે ત્રુટિ ઋણ અને રેખા પર આવેલા બિંદુ માટે ત્રુટિ શૂન્ય થાય.

ઉદાહરણ **19 : (i) જો Y ની X પરની નિયતસંબંધ રેખા $\hat{y} = 25 + 3x$ હોય અને $Cov(x, y) = 48$ હોય તો X નું પ્રમાણિત વિચલન મેળવો. જો Y નું પ્રમાણિત વિચલન 15 હોય તો નિશ્ચાયકતાનો આંક પણ શોધો. (ii) ઉપરના પ્રશ્નમાં આપેલી નિયતસંબંધ રેખા માટે જો Y ની કિંમતમાં અંદાજે 15 એકમોનો વધારો કરવો હોય, તો X ની કિંમતમાં કેટલા એકમોનો વધારો કરવો પડે ?**

(i) y ની x પરની નિયતસંબંધ રેખા $\hat{y} = 25 + 3x$ ને તેના સામાન્ય સ્વરૂપ $\hat{y} = a + bx$ સાથે સરખાવતાં નિયતસંબંધાંક $b = 3$ મળે છે. હવે $Cov(x, y) = 48$ આપેલ હોવાથી

$$b = \frac{Cov(x, y)}{s_x^2}$$

$$\therefore \quad 3 = \frac{48}{s_x^2}$$

$$\therefore \quad s_x^2 = 16$$

$$\therefore \quad s_x = 4$$

આમ, X નું પ્રમાણિત વિચલન 4 થાય.

હવે Y નું પ્રમાણિત વિચલન $s_y = 15$ આપેલ છે.

તેથી, નિશ્ચાયકતાનો આંક $R^2 = \left[\frac{Cov(x, y)}{s_x \cdot s_y}\right]^2$

$\therefore \quad R^2 = \left[\frac{48}{4 \times 15}\right]^2 = (0.8)^2 = 0.64$ થાય.

બીજી રીત :

$$b = r \cdot \frac{s_y}{s_x}$$

$\therefore 3 = r \cdot \frac{15}{4}$

$\therefore r = \frac{3 \times 4}{15}$

$\therefore r = 0.8$

$\therefore R^2 = r^2 = (0.8)^2 = 0.64$

(ii) અહીં, $\hat{y} = 25 + 3x$ છે અને નિયતસંબંધાંક $b = 3$ છે. જે દર્શાવે છે કે X ની કિંમતમાં એક એકમનો વધારો થાય તો Y ની અનુમાનિત કિંમતમાં 3 એકમનો વધારો થાય. તેથી જો Y ની કિંમતમાં અંદાજે 15 એકમોનો વધારો કરવો હોય તો X ની કિંમતમાં $\frac{15}{3} = 5$ એકમોનો વધારો કરવો પડે.

ઉદાહરણ 20 : (i) જો Yની X પરની નિયતસંબંધ રેખા $\hat{y} = \frac{x}{2} + 5$ અને $s_y : s_x = 5:8$ હોય તો નિશ્ચાયકતાનો આંક મેળવો. (ii) જો Yની X પરની નિયતસંબંધ રેખા $4x + 5y - 65 = 0$ હોય તો નિયતસંબંધાંક bની કિંમત શોધો.

(i) Y ની X પરની નિયતસંબંધ રેખા $\hat{y} = \frac{x}{2} + 5 = \frac{1}{2} \cdot x + 5$ ને સામાન્ય સ્વરૂપ $\hat{y} = a + bx$ સાથે સરખાવતાં

$b = \frac{1}{2}$ મળે છે.

હવે, $s_y : s_x = 5:8$

$\therefore \frac{s_y}{s_x} = \frac{5}{8}$

અને $b = r \cdot \frac{s_y}{s_x}$

$\therefore \frac{1}{2} = r \cdot \frac{5}{8}$

$\therefore r = \frac{1}{2} \times \frac{8}{5}$

$\therefore r = 0.8$

$\therefore$ નિશ્ચાયકતાનો આંક $R^2 = r^2 = (0.8)^2 = 0.64$ થાય.

(ii) Yની X પરની નિયતસંબંધ રેખા $4x + 5y - 65 = 0$ આપેલી છે.

હવે તેને તેના સામાન્ય સ્વરૂપમાં ફેરવીએ.

$4x + 5y - 65 = 0$

$\therefore 5y = 65 - 4x$

$\therefore y = \frac{65 - 4x}{5}$

$\therefore y = \frac{65}{5} - \frac{4x}{5}$

$\therefore y = 13 - 0.8x$

હવે તેને $\hat{y} = a + bx$ સાથે સરખાવતાં $b = -0.8$ મળે છે.