4

# வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள்

G.H. லெப்னிட்ஸ்
( ஜூலை 1, 1646 – நவம்பர் 14, 1716 )

## அறிமுகம்

முதலில் ஜெர்மானிய தத்துவமேதை, கணிதவியலாளர் மற்றும் தர்க்கவியலார் G. H. லெப்னிட்ஸ் என்பவரால் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு உருவாக்கப்பட்டது.

இயற்கணித சமன்பாடுகளான $5x-3(x-6)=4x$, $x^2-7x+12=0$, $|18x-5|=3$போன்றவற்றை முந்தைய வகுப்புகளில் கற்றிருப்பீர்கள். இங்கு சமன்பாட்டை தீர்ப்பது இலக்காக உள்ளது. அதாவது சமன்பாட்டை நிறைவு செய்யும் மாறியின் மதிப்பு(கள்) காண்பது நோக்கமாக உள்ளது. எடுத்துக்காட்டாக $x=9$ என்பது முதல் சமன்பாட்டின் தீர்வாக உள்ளது. ஏனெனில் $x=9$ என பிரதியிடும்போது சமன்பாட்டின் இருபுறமும் சமமாக இருக்கும்.

பொதுவாக ஒவ்வொரு இயற்கணித சமன்பாடும் அதற்கேற்ப பிரத்யோகமான தீர்வு காணும் முறையைப் பெற்றிருக்கும், இருபடிச் சமன்பாடுகள் ஒரு முறையிலும், மட்டுகளை பெற்றுள்ள சமன்பாடுகள் வேறொரு முறையிலும் மற்றும் பலவகையான முறைகளில் தீர்க்கப்படுகிறது.

இதே பொதுவான கருத்துக்கள், வகைக்கெழுக்களை பெற்றுள்ள வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டில் பயன்படுகிறது. பலவகையான வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் உள்ளன. ஒவ்வொரு வகையும் அதற்கேற்ப பிரத்யேகமான தீர்வு காணும் முறையைப் பெற்றிருக்கும்.

பொருளியல், வணிகவியல் மற்றும் பொறியியல் சார்ந்த பல கணக்குகள் இயல்பில் சிக்கலாகவும் மற்றும் புரிந்து கொள்வது மிகவும் கடினமாகவும் இருக்கும். ஆனால் அவற்றை வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டு வடிவில் வரையறுக்கும் போது பகுப்பாய்வு செய்வது எளிதாக இருக்கும்.

### கற்றல் நோக்கங்கள்

இந்த அத்தியாயத்தை படித்த பின்பு பின்வரும் பாடக்கருத்துக்களை மாணவர்கள் புரிந்து கொள்ள இயலும்.

- வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளின் வரிசை.
- வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளின் படி.
- வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளின் பொதுத்தீர்வு மற்றும் சிறப்புத் தீர்வு.
- வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளை அமைத்தல்.
- மாறிகள் பிரிபடக்கூடிய வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள்.
- சமபடித்தான வகைக் கெழுச் சமன்பாடுகள்.
- நேரிய வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள்.
- மாறிலிகளைக் கெழுக்களாகக் கொண்ட இரண்டாம் வரிசை நேரிய வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள்.

1A9CQ



XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 4.indd 84 08-12-2021 18:22:55

ஒரு சார்பு மற்றும் அவற்றின் ஒன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட வகைக்கெழுக்களை கொண்ட சமன்பாடு வகைக்கெழுச் சமன்பாடு ஆகும். அதாவது $y = f(x)$ சார்பு மற்றும் அதன் வகைக்கெழுக்கள் $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots$ கொண்ட சமன்பாடு வகைக்கெழுச் சமன்பாடாகும்.

எடுத்துக்காட்டாக,

(i) $\frac{dy}{dx} = x + 5$ (ii) $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2-y^2}}$

(iii) $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$ (iv) $\frac{d^2x}{dt^2} + m^2x = 0$

வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் இரு வகைப்படும் அவையாவன (i) சாதாரண வகைக் கெழுச் சமன்பாடுகள் மற்றும் (ii) பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் ஆகும். நாம் இந்த அத்தியாயத்தில் சாதாரண வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளைப் பற்றிய கருத்துக்களை மட்டும் பார்ப்போம்.

## 4.1 வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் அமைத்தல் (Formation of ordinary differential equations)

### 4.1.1 சாதாரண வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் வரையறை (Definition of ordinary differential equation)

$y = f(x)$ வளைவரையின் சாதாரண வகைக்கெழுக்கள் $\left(\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots\right)$ கொண்ட சமன்பாடு சாதாரண வகைக்கெழு சமன்பாடு ஆகும். இங்கு ஒரே ஒரு சாரா மாறி இடம்பெற்றுள்ளது.

### 4.1.2 வகைகெழுச்சமன்பாடடின் வரிசை மற்றும் படி (Order and degree of a differential equation)

ஒரு வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டில் இடம் பெற்றிருக்கும் வகைக்கெழுவின் மிக உயர்ந்த வரிசையே அவ்வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் **வரிசை (order)** எனப்படும்.

வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டில் **படி (degree)** என்பது அதிலுள்ள வகைக்கெழுக்களின் உச்ச வரிசையின் படியாகும். குறிப்பாக வகைக்கெழுவில் பின்னங்கள் மற்றும் படி மூலங்கள் இருப்பின் அவற்றை நீக்கிய பின் படி காணப்பட வேண்டும்.

$$\frac{d^3y}{dx^3} + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^5 + y = 7$$

என்ற வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டை கருத்தில் கொள்க. இங்கு உச்ச வரிசை வகைக்கெழு $\frac{d^3y}{dx^3}$ (அதாவது மூன்றாம் வரிசை வகைக்கெழு). எனவே, வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் வரிசை 3 ஆகும்.

மேலும், உச்ச வரிசை $\frac{d^3y}{dx^3}$ -ன் அடுக்கு 1 ஆகும். எனவே வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் படி 1 ஆகும்.

### எடுத்துக்காட்டு 4.1

கீழ்க்காணும் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் வரிசை மற்றும் படி ஆகியவற்றைக் காண்க.

(i) $\frac{d^2y}{dx^2} + 3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 4y = 0$

(ii) $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 3y = 0$

(iii) $\frac{d^3y}{dx^3} - 3\left(\frac{dy}{dx}\right)^6 + 2y = x^2$

(iv) $\left[1 + \frac{d^2y}{dx^2}\right]^{\frac{3}{2}} = a\frac{d^2y}{dx^2}$

(v) $y' + (y'')^2 = (x + y'')^2$

(vi) $\frac{d^3y}{dx^3} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^{\frac{1}{2}} = 0$

(vii) $y = 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 4x\frac{dx}{dy}$

**உங்களுக்கு தெரியுமா?**

வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் வரிசை மற்றும் படி (வரையறுக்கப்பட்டிருப்பின்) எப்பொழுதும் மிகை முழுக்களாக இருக்கும்.

### தீர்வு

(i) $\frac{d^2y}{dx^2} + 3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 4y = 0$

உச்சவரிசை வகைக்கெழு $\frac{d^2y}{dx^2}$ ஆகும்.

$\therefore$ வரிசை $= 2$

உச்சவரிசை $\frac{d^2y}{dx^2}$ -ன்படி 1 ஆகும்.



XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 4.indd 85 08-12-2021 18:23:02

$\therefore$ படி $= 1$

(ii) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} + 3y = 0$

உச்சவரிசை வகைக்கெழு $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ ஆகும்.

$\therefore$ வரிசை = 2

உச்சவரிசை $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ -ன்படி $1$ ஆகும்.

$\therefore$ படி $= 1$

(iii) $\dfrac{d^3y}{dx^3} - 3\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^6 + 2y = x^2$

$\therefore$ வரிசை $= 3$, படி $= 1$

(iv) $\left[1 + \dfrac{d^2y}{dx^2}\right]^{\frac{3}{2}} = a\dfrac{d^2y}{dx^2}$

மேற்காணும் சமன்பாட்டில் படி மூலத்தினை நீக்க, இருபுறமும் வர்க்கப்படுத்திய பின் கிடைப்பது

$$\left[1 + \frac{d^2y}{dx^2}\right]^3 = a^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2$$

$\therefore$ வரிசை = 2, படி = 3

(v) $y' + (y'')^2 = (x + y'')^2$

$$y' + (y'')^2 = x^2 + 2xy'' + (y'')^2$$

$$y' = x^2 + 2xy'' \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x^2 + 2x\frac{d^2y}{dx^2}$$

$\therefore$ வரிசை = 2, படி = 1

(vi) $\dfrac{d^3y}{dx^3} - \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^{\frac{1}{2}} = 0$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^{\frac{1}{2}}$$

சமன்பாட்டில் உள்ள படி மூலத்தினை நீக்க, இருபுறமும் வர்க்கப்படுத்தியப்பின் கிடைப்பது

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 = \frac{dy}{dx}$$

$\therefore$ வரிசை = 3, படி = 2

(vii) $y = 2\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + 4x\dfrac{dx}{dy}$

$$y = 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 4x\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)}$$

$$y\frac{dy}{dx} = 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 4x$$

$\therefore$ வரிசை $=1$, படி $= 3$

### வளைவரைகளின் குடும்பம் (Family of Curves)

சில சமயங்களில், வளைவரைகளின் குடும்பத்தை ஒன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட மாறத்தக்க மாறிலிகளைக் கொண்ட ஒரே ஒரு சமன்பாட்டின் மூலம் குறிக்கலாம். மாறிலிகளுக்கு வெவ்வேறு மதிப்புகளை அளிப்பதன் மூலம் வளைவரைக் குடும்பத்தின் வெவ்வேறு வளை வரைகளைப் பெறலாம். மாறத்தக்க மாறிலிகளை குடும்பத்தின் துணை அலகு என்போம்.

எடுத்துக்காட்டுகள் :

(i) $y^2 = 4ax$ என்ற சமன்பாடு ஆதியை உச்சியாக கொண்ட பரவளையக் குடும்பத்தைக் குறிக்கிறது. இங்கு $a$ ஒரு துணை அலகு.

(ii) ஆதியை மையமாகக் கொண்ட பொது மைய வட்டங்களின் குடும்பம் $x^2 + y^2 = a^2$ என்ற சமன்பாட்டால் குறிக்கப்படுகிறது. இங்கு $a$ ஒரு துணை அலகு.

(iii) ஒரு தளத்தில் அமையும் நேர் கோட்டுக் குடும்பத்தின் சமன்பாடு $y = mx + c$ என்ற சமன்பாட்டால் குறிக்கப்படுகிறது. இங்கு $m$ மற்றும் $c$ என்பன துணை அலகுகள்.

### 4.1.3 வகைக்கெழுச் சமன்பாடு அமைத்தல் (Formation of ordinary differential equation)

$f(x, y, c_1) = 0$ -------(1) என்ற சமன்பாட்டை கருத்தில் கொள்க. இங்கு $c_1$ என்பது மாறத்தக்கமாறிலியாகும். இச்சமன்பாட்டிலிருந்து வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டை அமைக்கலாம். அதற்கு சமன்பாடு (1) -ஐ அதிலுள்ள ஒரு சாரா மாறியை பொறுத்து ஒரு முறை வகைப்படுத்த வேண்டும்.

சமன்பாடு (1) மற்றும் அதன் வகைக்கெழு விலிருந்து $c_1$ ஐ நீக்குவதன் மூலம் தேவையான வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டை நாம் பெறுகிறோம்.



XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 4.indd 86 08-12-2021 18:23:08

$f(x, y, c_1, c_2) = 0$. இங்கு $c_1$ மற்றும் $c_2$ என்பன மாறத்தக்க மாறிலிகள். இச்சமன்பாட்டை இருமுறை வகைப்படுத்த வேண்டும். கொடுக்கப்பட்ட சார்பு மற்றும் இரு தொடர் வகைக்கெழு ஆகியவற்றிலிருந்து $c_1$ மற்றும் $c_2$-வை நீக்கியபின் தேவையான வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டை நாம் பெறுகிறோம்.

### குறிப்பு

பெறப்படும் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் வரிசையானது வளைவரைக் குடும்பத்தின் சமன்பாட்டில் உள்ள மாறத்தக்க மாறிலிகளின் எண்ணிக்கைக்குச் சமமாக இருக்கும்.

### எடுத்துக்காட்டு 4.2

$y = mx + c$ எனும் நேர்கோட்டுத் தொகுப்பில் (i) $m$ ஒரு மாறத்தக்க மாறிலி (ii) $c$ ஒரு மாறத்தக்க மாறிலி (iii) $m$, $c$ ஆகிய இரண்டுமே மாறத்தக்க மாறிலிகள் எனில் வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் அமைக்க.

**தீர்வு:**

(i) $y = mx + c$ ...(1)

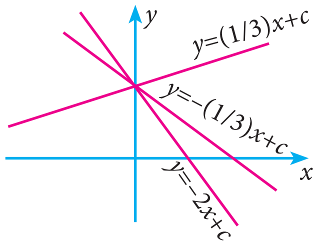
$m$ மட்டுமே மாறத்தக்க மாறிலி என்பதால், ஒருமுறை வகைப்படுத்த கிடைப்பது

$$\frac{dy}{dx} = m \quad ...(2)$$

(1) மற்றும் (2) -லிருந்து $m$-ஐ நீக்குவதால் கிடைக்கும் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு

$$y = x\frac{dy}{dx} + c$$

$$x\frac{dy}{dx} - y + c = 0$$ இதுவே தேவையான முதல் வரிசை வகைக்கெழுச் சமன்பாடு.



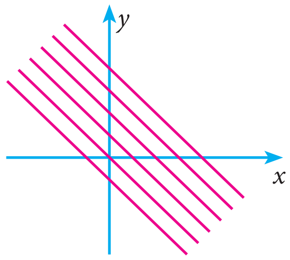

படம் 4.1

(ii) $c$ மாறத்தக்க மாறிலி

சமன்பாடு (1) -ஐ வகைப்படுத்த கிடைப்பது

$$\frac{dy}{dx} = m$$

இந்த சமன்பாட்டில் $c$ நீக்கப்பட்டிருப்பதால், தேவையான வகைக்கெழுச் சமன்பாடு $\frac{dy}{dx} = m$ ஆகும்.



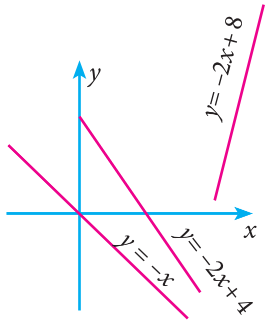

படம் 4.2

(iii) இங்கு $m, c$ ஆகிய இரண்டுமே மாறத்தக்க மாறிலிகள் என்பதால், சமன்பாடு (1) -ஐ இருமுறை வகைப்படுத்த கிடைப்பது

$$\frac{dy}{dx} = m$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

இந்த சமன்பாட்டில் $m, c$ இரண்டுமே நீக்கப் பட்டிருப்பதால் தேவையான வகைக்கெழுச் சமன்பாடு $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ ஆகும்.




படம் 4.3

### எடுத்துக்காட்டு 4.3

$y = \frac{a}{x} + b$ என்ற வளைவரைக் குடும்பத்தின் வகைக்கெழுச்சமன்பாட்டைக் காண்க. இங்கு $a$ மற்றும் $b$ என்பன மாறத்தக்க மாறிலிகள்.

**தீர்வு:**

$$y = \frac{a}{x} + b \quad ...(1)$$

$x$-ஐ பொறுத்து வகைப்படுத்தக் கிடைப்பது



XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 4.indd 87 08-12-2021 18:23:11

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-a}{x^2}$$

$$x^2 \frac{dy}{dx} = -a$$

மீண்டும் $x$-ஐ பொறுத்து வகைப்படுத்தக் கிடைப்பது

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 2x\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow x\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} = 0$$

இதுவே தேவையான வகைக்கெழுச் சமன்பாடாகும்

### எடுத்துக்காட்டு 4.4

$y = ae^{4x} + be^{-x}$ என்ற வளைவரைக்கு தொடர்புடைய வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டைக் காண்க. இங்கு $a$ மற்றும் $b$ என்பன மாறத்தக்க மாறிலிகள்.

**தீர்வு:**

$$y = ae^{4x} + be^{-x} \qquad (1)$$

$$\frac{dy}{dx} = 4ae^{4x} - be^{-x} \qquad (2)$$

மற்றும் $$\frac{d^2y}{dx^2} = 16ae^{4x} + be^{-x} \qquad (3)$$

$$(1)+(2) \Rightarrow \quad y + \frac{dy}{dx} = 5ae^{4x} \qquad (4)$$

$$(2)+(3) \Rightarrow \frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2} = 20ae^{4x}$$

$$= 4\left(5ae^{4x}\right)$$

$$= 4\left(y + \frac{dy}{dx}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2} = 4y + 4\frac{dy}{dx}$$

$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} - 4y = 0$ என்பது தேவையான வகைக்கெழுச் சமன்பாடாகும்.

### எடுத்துக்காட்டு 4.5

$y = e^x\left(a\cos x + b\sin x\right)$ என்ற வளைவரைக் குடும்பத்தின் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டைக் காண்க. இங்கு $a$ மற்றும் $b$ என்பன மாறத்தக்க மாறிலிகள்.

**தீர்வு :**

$$y = e^x\left(a\cos x + b\sin x\right) \qquad (1)$$

$(1)$-ஐ $x$ -ஐ பொறுத்து வகைப்படுத்த, பெறுவது

$$\frac{dy}{dx} = e^x\left(a\cos x + b\sin x\right) + e^x\left(-a\sin x + b\cos x\right)$$

$$= y + e^x(-a\sin x + b\cos x) \qquad ((1)\text{-லிருந்து}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} - y = e^x(-a\sin x + b\cos x) \qquad (2)$$

மீண்டும் வகைப்படுத்த கிடைப்பது,

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = e^x(-a\sin x + b\cos x) + e^x(-a\cos x - b\sin x)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = e^x(-a\sin x + b\cos x) - e^x(a\cos x + b\sin x)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = \left(\frac{dy}{dx} - y\right) - y$$

($(1)$ மற்றும் $(2)$ லிருந்து)

$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 2y = 0$ என்பது தேவையான வகைக்கெழுச் சமன்பாடாகும்.

### பயிற்சி 4.1

1. பின்வரும் வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளின் வரிசை மற்றும் படி காண்க.

(i) $\frac{dy}{dx} + 2y = x^3$

(ii) $\frac{d^3y}{dx^3} + 3\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 2\frac{dy}{dx} = 0$

(iii) $\frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{y - \frac{dy}{dx}}$

(iv) $\frac{d^3y}{dx^3} = 0$

(v) $\frac{d^2y}{dx^2} + y + \left(\frac{dy}{dx} - \frac{d^3y}{dx^3}\right)^{3/2} = 0$



XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 4.indd 88 08-12-2021 18:23:22

(vi) $(2-y'')^2 = y''^2 + 2y'$

(vii) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + y = x - \frac{dx}{dy}$

2. பின்வருவனவற்றிற்கு வகைக்கெழுச் சமன்பாடு களைக் காண்க.

   (i) $y = cx + c - c^3$ (ii) $y = c(x-c)^2$

   (iii) $xy = c^2$ (iv) $x^2 + y^2 = a^2$

3. $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$ -ல் α, β ஆகியவற்றை நீக்கி வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டை அமைக்க.

4. ஆதி வழிச்செல்லும் அனைத்து நேர்கோட்டுத் தொகுப்பின் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டை அமைக்க.

5. செவ்வகலம் $4a$ ஆகவும், அச்சினை $x$ -அச்சிற்கு இணையாகவும் கொண்ட பரவளையத் தொகுப்பின் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டை அமைக்க.

6. ஆதி வழிச் செல்வதும், மையம் $y$-அச்சின் மீது அமையுமாறும் உள்ள வட்டக் குடும்பத்தின் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டைக் காண்க.

7. ஆதியை குவியமாகவும், $x$ அச்சினை அச்சாகவும் கொண்ட பரவளையத் தொகுப்பின் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டைக் காண்க.

### வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தீர்வு (Solution of a Differential Equation)

கொடுக்கப்பட்ட வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டினை நிறைவு செய்யுமாறு அமையும் சார்ந்த மற்றும் சாரா மாறிகளுக்கிடையேயான வகைக்கெழுக்களற்ற தொடர்பு, அச்சமன்பாட்டின் தீர்வு ஆகும்.

வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தீர்விலுள்ள மாறத்தக்க மாறிலிகளின் எண்ணிக்கையானது அவ்வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் வரிசைக்குச் சமமாக இருக்க வேண்டும். அத்தீர்வினை சமன்பாட்டின் பொதுத்தீர்வு (முழுமைத் தீர்வு) என்போம்.

## 4.2 முதல் வரிசை மற்றும் முதல் படி வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் (First order and first degree differential equations)

வரிசை ஒன்று மற்றும் படி ஒன்றுடைய வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டினை $f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$ என எழுதலாம். இங்கு நாம் சில வகை சமன்பாடுகளின் தீர்வுகளைக் காண்போம்.

### 4.2.1 பொதுத்தீர்வு மற்றும் சிறப்புத் தீர்வு (General solution and particular solution)

எந்த ஒரு வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டிற்கும் பொதுத்தீர்வு மற்றும் சிறப்புத்தீர்வு காண இயலும்.

### 4.2.2 மாறிகள் பிரிபடக்கூடிய வகைக்கெழுச் சமன்பாடு (Differential Equation in which variables are separable)

ஒரு சமன்பாட்டில் அனைத்து $x$ -ல் அமையும் உறுப்புகள் மற்றும் $dx$ ஒரு புறத்திலும், அனைத்து $y$ -ல் அமையும் உறுப்புகள் மற்றும் $dy$ மறுபுறத்திலும் அமையுமாறு பிரிக்கத்தக்க வகையிலிருப்பின், அவைகள் பிரிபடக்கூடிய மாறிகள் என அழைக்கப்படும். அத்தகைய சமன்பாட்டின் பொதுவடிவம்.

$f(x)dx = g(y)dy$ (அல்லது ) $f(x)dx + g(y)dy = 0$

நேரடியாக தொகையிடுவதன் மூலம் நாம் தீர்வைப் பெறலாம்.

#### எடுத்துக்காட்டு 4.6

தீர்க்க : $(x^2+x+1)dx + (y^2-y+3)dy = 0$

**தீர்வு:** $(x^2+x+1)dx + (y^2-y+3)dy = 0$

இது, $f(x)dx + g(y)dy = 0$ என்ற வடிவில் உள்ளது.

தொகையிட நாம் பெறுவது,

$$\int(x^2+x+1)dx + \int(y^2-y+3)\,dy = c$$

$$\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x\right)+\left(\frac{y^3}{3}-\frac{y^2}{2}+3y\right) = c$$

#### எடுத்துக்காட்டு 4.7

தீர்க்க : $\frac{dy}{dx} = e^{x-y} + x^2e^{-y}$

**தீர்வு :** $\frac{dy}{dx} = e^{x-y} + x^2e^{-y} = e^{-y}e^{x} + e^{-y}x^2$



XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 4.indd 89 08-12-2021 18:23:26

$$= e^{-y}\left(e^{x}+x^{2}\right)$$

மாறிகளை பிரிக்க நாம் பெறுவது,

$$e^{y}dy = \left(e^{x}+x^{2}\right)dx$$

தொகையிட நாம் பெறுவது, $\int e^{y}dy = \int\left(e^{x}+x^{2}\right)dx$

$$e^{y} = e^{x} + \frac{x^{3}}{3} + c$$

### எடுத்துக்காட்டு 4.8

தீர்க்க : $3e^{x}\tan y dx + (1+e^{x})\sec^{2} y dy = 0$, $y(0) = \frac{\pi}{4}$

**தீர்வு:**

$$3e^{x}\tan y dx + (1+e^{x})\sec^{2} y\, dy = 0$$

$$3e^{x}\tan y\; dx = -(1+e^{x})\sec^{2} y\; dy$$

$$\frac{3e^{x}}{1+e^{x}}dx = -\frac{\sec^{2} y}{\tan y}dy$$

தொகையிட நாம் பெறுவது $3\int\frac{e^{x}}{1+e^{x}}dx = -\int\frac{\sec^{2} y}{\tan y}dy + c$

$$3\log(1+e^{x}) = -\log\tan y + \log c$$

$$\left[\because \int\frac{f'(x)}{f(x)}dx = \log f(x)\right]$$

$$\log(1+e^{x})^{3} + \log\tan y = \log c$$

$$\log\left[\left(1+e^{x}\right)^{3}\tan y\right] = \log c$$

$$(1+e^{x})^{3}\tan y = c \qquad (1)$$

தரவு : $y(0) = \frac{\pi}{4}$ (அதாவது) $x = 0$ எனில் $y = \frac{\pi}{4}$

$$(1) \Rightarrow (1+e^{0})^{3}\tan\frac{\pi}{4} = c$$

$$2^{3}(1) = c$$

$$\Rightarrow c = 8$$

தேவையான தீர்வு $(1+e^{x})^{3}\tan y = 8$

### எடுத்துக்காட்டு 4.9

தீர்க்க : $\sec^{2} x\tan y dx + \sec^{2} y\tan x dy = 0$

**தீர்வு:**

மாறிகளை பிரிக்க, நாம் பெறுவது

$$\frac{\sec^{2} x}{\tan x}dx + \frac{\sec^{2} y}{\tan y}dy = 0$$

தொகையிட, நாம் பெறுவது

$$\int\frac{\sec^{2} x}{\tan x}dx + \int\frac{\sec^{2} y}{\tan y}dy = c$$

$$\log\tan x + \log\tan y = \log c$$

$$\log(\tan x\tan y) = \log c$$

$$\tan x\;\tan y = c$$

### எடுத்துக்காட்டு 4.10

தீர்க்க : $ydx - xdy - 3x^{2}y^{2}e^{x^{3}}dx = 0$

**தீர்வு:**

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டை

$\frac{ydx - xdy}{y^{2}} - 3x^{2}e^{x^{3}}dx = 0$ என எழுதலாம்.

தொகையிட, $\int\frac{ydx - xdy}{y^{2}} - \int 3x^{2}e^{x^{3}}dx = c$

$\int d\left(\frac{x}{y}\right) - \int e^{t}dt = c$ (இங்கு $t = x^{3}$ மற்றும் $dt = 3x^{2}dx$ )

$$\frac{x}{y} - e^{t} = c$$

$$\frac{x}{y} - e^{x^{3}} = c$$

### எடுத்துக்காட்டு 4.11

தீர்க்க : $x - y\frac{dx}{dy} = a\left(x^{2} + \frac{dx}{dy}\right)$

**தீர்வு:**

$$x - y\frac{dx}{dy} = a\left(x^{2} + \frac{dx}{dy}\right)$$

$$x - y\frac{dx}{dy} = ax^{2} + a\frac{dx}{dy}$$

$$x - ax^{2} = a\frac{dx}{dy} + y\frac{dx}{dy}$$

$$x(1-ax) = (a+y)\frac{dx}{dy}$$



XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 4.indd 90 08-12-2021 18:23:38

மாறிகளை பிரிக்க, நாம் பெறுவது

$$\frac{dx}{x(1-ax)} = \frac{dy}{a+y}$$

$$\left(\frac{a}{1-ax}+\frac{1}{x}\right)dx = \frac{dy}{a+y}$$

தொகையிட, $\int\left(\frac{a}{1-ax}+\frac{1}{x}\right)dx = \int\frac{dy}{a+y}$

$$-\log(1-ax)+\log x = \log(a+y)+\log c$$

$$\log\left(\frac{x}{1-ax}\right) = \log\left(c(a+y)\right)$$

$$\left(\frac{x}{1-ax}\right) = c\,(a+y)$$

$x = (1-ax)(a+y)c$ என்பது தேவையான தீர்வாகும்.

### எடுத்துக்காட்டு 4.12

$x$ கையுறைகளை தயாரிப்பு செய்வதற்கான இறுதிநிலைச் செலவுச்சார்பு $6+10x-6x^2$. ஒரு ஜோடி கையுறைகளை உற்பத்தி செய்ய ஆகும் மொத்த செலவு ₹100 எனில், மொத்த செலவுச் சார்பு மற்றும் சராசரி செலவுச்சார்பு ஆகியவற்றை காண்க.

**தீர்வு:**

$$MC = 6+10x-6x^2$$

அதாவது, $\frac{dC}{dx} = 6+10x-6x^2$

$$dC = (6+10x-6x^2)dx$$

$$\int dC = \int(6+10x-6x^2)dx+k$$

$$C = 6x+10\frac{x^2}{2}-6\frac{x^3}{3}+k$$

$$C = 6x+5x^2-2x^3+k \quad (1)$$

கொடுக்கப்பட்டது : $x = 2$ எனில் $C = 100$

$\therefore \quad (1) \Rightarrow \quad 100 = 12+5(4)-2(8)+k$

$\Rightarrow \quad k = 84$

$\therefore \quad (1) \quad \Rightarrow C\,(x) = 6x+5x^2-2x^3+84$

சராசரி செலவுச் சார்பு: $AC = \frac{C}{x} = 6+5x-2x^2+\frac{84}{x}$

### எடுத்துக்காட்டு 4.13

ஒரு வளைவரையின் மீதுள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளி $(x,y)$-இல் வரையப்படும் செங்கோடு $(1,0)$ என்ற புள்ளி வழியேச் செல்கிறது. வளைவரை $(1,2)$ என்ற புள்ளி வழியாகச் செல்லுமாயின், இதனை வகைக்கெழு சமன்பாட்டு வடிவில் மாற்றி, வளைவரையின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

**தீர்வு:**

$P(x,y)$ என்ற ஏதேனும் ஒரு புள்ளியில் வளைவரைக்கு வரையப்பட்ட செங்கோட்டின் சாய்வு $= -\frac{dx}{dy}$

$Q$, $(1,0)$ என்க.

$\therefore$ செங்கோடு $PQ$ -ன் சாய்வு = $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

அதாவது, $\frac{y-0}{x-1} = \frac{y}{x-1}$

$$\therefore \quad -\frac{dx}{dy}=\frac{y}{x-1} \Rightarrow \frac{dx}{dy}=\frac{y}{1-x}$$

அதாவது, $(1-x)dx = ydy$

$$\int(1-x)dx = \int ydy+c$$

$$x-\frac{x^2}{2} = \frac{y^2}{2}+c \quad (1)$$

இது $(1, 2)$ வழிச் செல்கிறது.

$$1-\frac{1}{2} = \frac{4}{2}+c$$

$$c=\frac{1}{2}-2 = -\frac{3}{2}$$

$c = \frac{-3}{2}$ என $(1)$ –ல் பிரதியிட,

$$x-\frac{x^2}{2} = \frac{y^2}{2}-\frac{3}{2}$$

$$2x-x^2 = y^2-3$$

$$\Rightarrow \quad y^2 = 2x-x^2+3$$

என்பது வளைவரையின் சமன்பாடாகும்.

### எடுத்துக்காட்டு 4.14

₹2000 என்ற தொகைக்கு தொடர்ச்சி கூட்டுவட்டி கணக்கிடப்படுகிறது. வட்டிவீதம்

ஆண்டொன்றுக்கு 5% இருப்பின், அத்தொகை எத்தனை ஆண்டுகளில் ஆரம்பத் தொகையைப் போல் இருமடங்காகும்? $(\log_e 2 = 0.6931)$

**தீர்வு:**

'$t$' நேரத்தில் மூலதனம் $P$ என்க.

$$\frac{dP}{dt} = \frac{5}{100}P = 0.05P$$

$$\Rightarrow \int \frac{dP}{P} = \int 0.05\, dt + c$$

$$\log_e P = 0.05t + c$$

$$P = e^{0.05t} e^{c}$$

$$P = c_1 e^{0.05t} \qquad (1)$$

$t = 0$ எனில் $P = 2000$

$$\Rightarrow \quad c_1 = 2000$$

$$\therefore (1) \Rightarrow \quad P = 2000e^{0.05t}$$

$P = 4000$ எனும் போது $t$–ஐ காணவேண்டும்.

$$(2) \Rightarrow \quad 4000 = 2{,}000e^{0.05t}$$

$$2 = e^{0.05t}$$

$$0.05t = \log 2$$

$t = \dfrac{0.6931}{0.05} = 14$ ஆண்டுகள் (தோராயமாக).

### பயிற்சி 4.2

1. தீர்க்க: (i) $\dfrac{dy}{dx} = ae^{y}$ (ii) $\dfrac{1+x^2}{1+y} = xy\dfrac{dy}{dx}$

2. தீர்க்க : $y(1-x) - x\dfrac{dy}{dx} = 0$

3. தீர்க்க: (i) $ydx - xdy = 0$

   (ii) $\dfrac{dy}{dx} + e^{x} + ye^{x} = 0$

4. தீர்க்க: $\cos x(1+\cos y)dx - \sin y(1+\sin x)dy = 0$

5. தீர்க்க: $(1-x)dy - (1+y)dx = 0$

6. தீர்க்க: (i) $\dfrac{dy}{dx} = y\sin 2x$

   (ii) $\log\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = ax + by$

7. ஆதி வழிச்செல்லும் வளைவரையின் மீதுள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளி $P(x, y)$ யிடத்து சாய்வு $\dfrac{x-a}{y-b}$ எனில், அவ்வளைவரையைக் காண்க.

### 4.2.3 சமபடித்தான வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் (Homogeneous Differential Equations)

$f(x, y)$ மற்றும் $g(x, y)$ என்பன ஒவ்வொன்றும் $x$, $y$ -இல் அமைந்த ஒரே படியுள்ள சமபடித்தான சார்புகளெனில் $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{f(x,y)}{g(x,y)}$ என்பது ஒரு சமபடித்தான வகைக்கெழுச் சமன்பாடு ஆகும். (அல்லது) சமபடித்தான வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டை

$\dfrac{dy}{dx} = F\left(\dfrac{y}{x}\right)$ என எழுதலாம்.

**வரிசை ஒன்று உடைய சமபடித்தான வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டை தீர்க்கும் முறை (Method of solving first order Homogeneous differential equation)**

(i) $f(x, y)$ மற்றும் $g(x, y)$ என்பன ஒவ்வொன்றும் ஒரே படியுள்ள சமபடித்தான சார்புகளா எனச்சோதிக்க.

அதாவது, $\dfrac{dy}{dx} = F\left(\dfrac{y}{x}\right)$

(ii) $y = vx$ மற்றும் $\dfrac{dy}{dx} = v + x\dfrac{dv}{dx}$ எனப் பிரதியிடுக.

**குறிப்பு**

சில நேரங்களில், சமபடித்தான வகைக்கெழு சமன்பாட்டை $\dfrac{dx}{dy} = F\left(\dfrac{x}{y}\right)$ ... (1)

என்றவாறு எடுத்து எளிதாக தீர்க்கலாம்.

இந்த முறையில் $x = vy$ மற்றும் $\dfrac{dx}{dy} = v + x\dfrac{dv}{dy}$ என (1) -இல் பிரதியிட, வரிசை ஒன்று உடைய சமபடித்தான வகைக்கெழுச் சமன்பாடு மாறிகளை பிரிக்கக்கூடிய சமன்பாடாக மாறிவிடும். தொகையீடுதலுக்குப் பிறகு $v = \dfrac{x}{y}$ எனப் பிரதியிட்டு தீர்வைக் காணலாம்.



XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 4.indd 92 08-12-2021 18:23:58

(iii) சமபடித்தான வகைக்கெழுச் சமன்பாடு $v+x\dfrac{dv}{dx}=F(v)$ என உருமாற்றம் பெறும்.

(iv) மாறிகளைப் பிரிக்க, கிடைப்பது $x\dfrac{dv}{dx}=F(v)-v \Rightarrow \dfrac{dv}{F(v)-v}=\dfrac{dx}{x}$ ஆகும்.

(v) தொகையிடுதலுக்குப் பிறகு $v$ மற்றும் $x$ -ல் சமன்பாடு அமையும்.

(vi) $v$ -ஐ $\dfrac{y}{x}$ என்று மாற்றி தீர்வைக் காணலாம்.

### எடுத்துக்காட்டு 4.15

வகைக்கெழு சமன்பாட்டைத் தீர்க்க $y^2dx+(xy+x^2)dy=0$

### தீர்வு

$$y^2dx+(xy+x^2)\,dy = 0$$
$$(xy+x^2)\,dy = -y^2dx$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y^2}{xy+x^2} \quad (1)$$

இது ஒரே படியுள்ள $x$, $y$-இல் அமைந்த சமபடித்தான வகைக்கெழு சமன்பாடாகும்.

$y=vx$ மற்றும் $\dfrac{dy}{dx}=v+x\dfrac{dv}{dx}$ என பிரதியிட,

∴ (1) ஆனது

$$v+x\frac{dv}{dx} = \frac{-v^2x^2}{x\ vx+x^2}$$
$$= \frac{-v^2}{v+1}$$
$$x\frac{dv}{dx} = \frac{-v^2}{v+1}-v$$
$$= \frac{-v^2-v^2-v}{v+1}$$
$$x\frac{dv}{dx} = \frac{-\left(v+2v^2\right)}{1+v}$$

மாறிகளை பிரிக்கக் கிடைப்பது,

$$\frac{1+v}{v(1+2v)}\,dv = \frac{-dx}{x}$$
$$\frac{(1+2v)-v}{v(1+2v)}\,dv = \frac{-dx}{x}$$
$$\left(\because\ 1+v = 1+2v-v\right)$$
$$\frac{1}{v}-\frac{1}{1+2v}\,dv = \frac{-dx}{x}$$

இருபுறமும் தொகையிட, நாம் பெறுவது

$$\int\left(\frac{1}{v}-\frac{1}{1+2v}\right)dv = -\int\frac{dx}{x}$$
$$\log v-\frac{1}{2}\log(1+2v) = -\log x+\log c$$
$$\log\left(\frac{v}{\sqrt{1+2v}}\right) = \log\left(\frac{c}{x}\right)$$
$$\frac{v}{\sqrt{1+2v}} = \frac{c}{x}$$

$v = \dfrac{y}{x}$ என பிரதியிட,

$$\frac{\frac{y}{x}}{\sqrt{1+\frac{2y}{x}}} = \frac{c}{x}$$
$$\frac{y\sqrt{x}}{\sqrt{x+2y}} = c$$
$$\frac{y^2x}{x+2y} = k$$

இங்கு $k = c^2$

### எடுத்துக்காட்டு 4.16

வகைக்கெழு சமன்பாட்டைத் தீர்க்க : $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x-y}{x+y}$.

### தீர்வு:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x-y}{x+y} \quad (1)$$

இது ஒரு சமபடித்தான வகைக்கெழு சமன்பாடாகும்.

$y=vx$ மற்றும் $\dfrac{dy}{dx}=v+x\dfrac{dv}{dx}$ என பிரதியிட,

$$\therefore (1) \Rightarrow v+x\frac{dv}{dx} = \frac{x-vx}{x+vx} = \frac{1-v}{1+v}$$



XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 4.indd 93 08-12-2021 18:24:08

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{1-v}{1+v} - v$$

$$= \frac{1-2v-v^2}{1+v}$$

$$\frac{1+v}{v^2+2v-1}dv = \frac{-dx}{x}$$

இருபுறமும் 2 ஆல்பெருக்க,

$$\frac{2+2v}{v^2+2v-1}dv = -2\frac{dx}{x}$$

தொகையிட

$$\int\frac{2+2v}{v^2+2v-1}dv = -2\int\frac{dx}{x}$$

$$\log(v^2+2v-1) = -2\log x + \log c$$

$$v^2+2v-1 = \frac{c}{x^2}$$

$$x^2\ (v^2+2v-1) = c$$

$v = \dfrac{y}{x}$ என்பதால்

$$x^2\left[\frac{y^2}{x^2}+\frac{2y}{x}-1\right] = c$$

$\therefore\ y^2+2xy-x^2 = c$ என்பது தீர்வாகும்.

**குறிப்பு**

$\displaystyle\int\frac{1+v}{v^2+2v}dv$ -ஐ பகுதி பின்னமாக்குதல் முறையில் தொகையிடலாம்.

### எடுத்துக்காட்டு 4.17

$x=1,\ y=1$ எனும் போது $x^2\ dy + y\left(x+y\right)dx = 0$ என்ற வகைக்கெழு சமன்பாட்டின் சிறப்புத் தீர்வைக் காண்க.

### தீர்வு

$$x^2dy + y\left(x+y\right)dx = 0$$

$$x^2dy = -y\left(x+y\right)dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-(xy+y^2)}{x^2} \quad (1)$$

$y = vx$ மற்றும் $\dfrac{dy}{dx} = v + x\dfrac{dv}{dx}$ என (1)-இல் பிரதியிட,

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{-(x\,vx+v^2x^2)}{x^2}$$

$$= -\left(v+v^2\right)$$

$$x\frac{dv}{dx} = -v^2-v-v$$

$$= -(v^2+2v)$$

மாறிகளை பிரிக்க கிடைப்பது,

$$\frac{dv}{v^2+2v} = \frac{-dx}{x}$$

$$\frac{dv}{v\left(v+2\right)} = \frac{-dx}{x}$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\left(v+2\right)-v}{v\left(v+2\right)}\right]dv = \frac{-dx}{x}$$

$$\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{v}-\frac{1}{v+2}\right)dv = -\int\frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{2}\left[\log v - \log\left(v+2\right)\right] = -\log x + \log c$$

$$\frac{1}{2}\log\frac{v}{v+2} = \log\frac{c}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{v}{v+2} = \frac{c^2}{x^2}$$

$v = \dfrac{y}{x}$ எனப் பிரதியிட,

$$\frac{y}{x\left(\frac{y}{x}+2\right)} = \frac{k}{x^2} \quad \text{இங்கு } c^2 = k$$

$$\frac{y\ x^2}{y+2x} = k \quad (2)$$

$x=1$ மற்றும் $y=1$ எனில்,

$$\therefore (2) \Rightarrow \quad k = \frac{1}{1+2}$$

$$k = \frac{1}{3}$$

$\therefore\ 3x^2\ y = 2x+y$ என்பது தீர்வாகும்.

**எடுத்துக்காட்டு 4.18**

$x$ காலணிகள் தயாரிப்பதற்கான இறுதிநிலைச் செலவு $(3xy+y^2)\,dx+(x^2+xy)\,dy=0$ மற்றும் ஒரு ஜோடி காலணிகள் தயாரிப்பதற்கான மொத்த செலவு ₹ 12 எனில், மொத்த செலவுச் சார்பைக் காண்க.

**தீர்வு:**

இறுதிநிலைச் செலவுச் சார்பு :

$(x^2+xy)\,dy+(3xy+y^2)\,dx=0$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-(3xy+y^2)}{x^2+xy} \qquad (1)$$

$y=vx$ மற்றும் $\frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$ என (1) –ல் பிரதியிட,

$$v+x\frac{dv}{dx} = \frac{-(3x\;vx+v^2x^2)}{x^2+x\;vx}$$

$$= \frac{-(3v+v^2)}{1+v}$$

இப்பொழுது, $$x\frac{dv}{dx} = \frac{-3v-v^2}{1+v}-v$$

$$= \frac{-3v-v^2-v-v^2}{1+v}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{-4v-2v^2}{1+v}$$

$$\frac{1+v}{4v+2v^2}\,dv = \frac{-dx}{x}$$

தொகையிட,

$$\int\frac{1+v}{4v+2v^2}\,dv = -\int\frac{dx}{x}$$

இருபுறமும் 4 -ஆல் பெருக்கிட,

$$\int\frac{4+4v}{4v+2v^2}\,dv = -4\int\frac{dx}{x}$$

$$\log(4v+2v^2) = -4\log x+\log c$$

$$4v+2v^2 = \frac{c}{x^4}$$

$$x^4(4v+2v^2) = c$$

$v = \frac{y}{x}$ என பிரதியிட,

$$x^4\left(4\frac{y}{x}+2\frac{y^2}{x^2}\right) = c$$

$$x^4\left[\frac{4xy+2y^2}{x^2}\right] = c$$

$$c = 2x^2(2xy+y^2) \qquad (2)$$

ஒரு ஜோடி காலணிகளை தயாரிப்பதற்கான செலவு = ₹ 12.

$x = 2$ மற்றும் $y = 12$ எனில் $c = 8[48+144]=1536$

செலவுச் சார்பு : $x^2\,(2xy+y^2) = 768.$

**எடுத்துக்காட்டு 4.19**

$\frac{dy}{dq}=\frac{q^2+3y^2}{2qy}$ என்ற இறுதிநிலை சமன்பாட்டில் வருவாய் '$y$' மற்றும் வெளியீடு $q$ என கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. வெளியீடு 1 அலகு இருக்கும் பொழுது வருவாய் ₹ 5 எனில், மொத்த வருவாய்ச் சார்பைக் காண்க.

**தீர்வு:**

$$MR=\frac{dy}{dq} = \frac{q^2+3y^2}{2qy} \qquad (1)$$

$y=vq$ மற்றும் $\frac{dy}{dq}=v+q\frac{dv}{dq}$ என (1) -இல் பிரதியிட,

$$(1) \Rightarrow \quad v+q\frac{dv}{dq} = \frac{q^2+3v^2q^2}{2q\;vq}$$

$$= \frac{1+3v^2}{2v}$$

$$q\frac{dv}{dq} = \frac{1+3v^2}{2v}-v$$

$$= \frac{1+3v^2-2v^2}{2v}$$

$$= \frac{1+v^2}{2v}$$

$$\frac{2v}{1+v^2}\,dv = \frac{dq}{q}$$



XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 4.indd 95 08-12-2021 18:24:32

தொகையிட,

$$\int \frac{2v}{1+v^2}\,dv = \int \frac{dq}{q}$$

$$\log\,(1+v^2) = \log q + \log c$$

$$1+v^2 = cq$$

$v = \frac{y}{q}$ என பிரதியிட,

$$1+\frac{y^2}{q^2} = cq$$

$$q^2+y^2 = c\,q^3 \qquad (2)$$

வெளியீடு 1 அலகு இருக்கும் பொழுது வருவாய் ₹ 5 எனில்

$1+25=c \Rightarrow c=26$ (2) லிருந்து

$\therefore\ q^2+y^2=26q^3$ என்பது மொத்த வருவாய் சார்பு ஆகும்.

## பயிற்சி 4.3

கீழ்வரும் சமபடித்தான வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க.

1. $x\frac{dy}{dx}=x+y$  2. $(x-y)\frac{dy}{dx}=x+3y$

3. $x\frac{dy}{dx}-y=\sqrt{x^2+y^2}$

4. $\frac{dy}{dx}=\frac{3x-2y}{2x-3y}$

5. $(y^2-2xy)dx=(x^2-2xy)dy$

6. ஒரு வளைவரையில் உள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளி $(x,y)$ இடத்து அமையக்கூடிய தொடுகோட்டின் சாய்வு $(y^3-2yx^2)dx+(2xy^2-x^3)\,dy=0$ ஆகும். மேலும் இந்த வளைவரையானது $(1,2)$ புள்ளி வழிச் செல்கிறது எனில், வளைவரையின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

7. மின்சார சாதனங்களை உற்பத்தி செய்யும் நிறுவனம் வீட்டு பயன்பாட்டிற்கான மின் மாற்றிகளை (switches) தயாரிக்கின்றது. இதற்கான இறுதி நிலை வருவாய் சார்பு $(x^2+y^2)dy=xydx$ என அந்த நிறுவனம் மதிப்பீடு செய்கிறது (இங்கு $x$ என்பது அலகுகளின் எண்ணிக்கை (ஆயிரங்களில்)) எனில், மொத்த வருவாய் சார்பை காண்க.

### 4.2.4 வரிசை ஒன்றுடைய நேரிய வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் (Linear differential equations of first order)

வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டில் உள்ள சார்ந்த மாறி மற்றும் அதன் வகைக்கெழுக்களின் படி ஒன்று மற்றும் இவ்விரண்டின் பெருக்கல் பலன் இல்லாமலும் இருக்குமாயின் அச்சமன்பாடு நேரிய வகைக்கெழுச் சமன்பாடு எனப்படும்.

முதல் வரிசை நேரிய வகைக்கெழுச் சாமன்பாட்டின் பொதுவடிவம் $\frac{dy}{dx}+Py=Q$ ....(1)

இங்கு $P$ மற்றும் $Q$ ஆகியவை $x$ இன் சார்புகள் மட்டுமே. சமன்பாடு (1) ஆனது $y$ -இல் நேரியச் சமன்பாடாகும்.

இதன் தீர்வானது $ye^{\int pdx}=\int Qe^{\int pdx}dx+c$ என அமையும் இங்கு $e^{\int pdx}$ என்பது தொகையீட்டுக் காரணி (Integrating factor) எனப்படும். மேலும், இதனை தொ.கா (I.F) எனச் சுருக்கமாக குறிப்பர்.

**குறிப்பு**

வகைக்கெழுச் சமன்பாடு $\frac{dx}{dy}+Px=Q$ ($x$ இல் நேரியது) இல் $P$ மற்றும் $Q$ ஆகியவை $y$ இன் சார்புகள் மட்டுமே. இதன் தீர்வானது $xe^{\int pdy}=\int Qe^{\int pdy}dy+c$ என அமையும்.

#### எடுத்துக்காட்டு 4.20

தீர்க்க : $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=x^3$

**தீர்வு:**

$$\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y=x^3$$

இது $\frac{dy}{dx}+Py$ $=Q$ என்ற வடிவில் உள்ளது.

இங்கு $P=\frac{1}{x},\quad Q=x^3$

$$\int Pdx = \int\frac{1}{x}dx=\log x$$

$$I.F = e^{\int pdx}=e^{\log x}=x$$

தேவையான தீர்வு :

$$y(I.F) = \int Q(I.F)dx+c$$



XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 4.indd 96 08-12-2021 18:24:40

$$\begin{aligned} yx &= \int x^3.x\,dx + c \\ &= \int x^4 dx + c \\ &= \frac{x^5}{5} + c \\ \therefore\ yx &= \frac{x^5}{5} + c \end{aligned}$$

**உங்களுக்கு தெரியுமா?**

நேரிய வகைக்கெழுச் சமன்பாடானது எப்பொழுதும் முதல் வரிசையை பெற்றிருக்கும். ஆனால் எல்லா முதல் வரிசை வகைக்கெழுச் சமன்பாடும் நேரியதாக இருக்கவேண்டிய அவசியமில்லை.

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{3dy}{dx} + 2y^2 = 0$$

என்பது நேரியதாக இல்லை.

### எடுத்துக்காட்டு 4.21

தீர்க்க : $\cos^2 x \dfrac{dy}{dx} + y = \tan x$

**தீர்வு:**

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டை $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{1}{\cos^2 x} y = \dfrac{\tan x}{\cos^2 x}$ என எழுதலாம்.

அதாவது, $\dfrac{dy}{dx} + y\sec^2 x = \tan x \sec^2 x$

இது $\dfrac{dy}{dx} + Py = Q$ என்ற வடிவில் உள்ளது.

இங்கு $P = \sec^2 x, Q = \tan x \sec^2 x$

$$\begin{aligned} \int Pdx &= \int \sec^2 x\,dx = \tan x \\ I.F &= e^{\int pdx} = e^{\tan x} \end{aligned}$$

தேவையான தீர்வு :

$$\begin{aligned} y(I.F) &= \int Q(I.F)dx + c \\ ye^{\tan x} &= \int \tan x \sec^2 x\, e^{\tan x}\, dx + c \end{aligned}$$

$\tan x = t$ என்க.

$\sec^2 x dx = dt$

$$\begin{aligned} \therefore\ ye^{\tan x} &= \int te^t\, dt + c \\ &= \int td(e^t) + c \\ &= te^t - e^t + c \\ &= \tan x\, e^{\tan x} - e^{\tan x} + c \\ ye^{\tan x} &= e^{\tan x}(\tan x - 1) + c \end{aligned}$$

### எடுத்துக்காட்டு 4.22

தீர்க்க : $(x^2+1)\dfrac{dy}{dx} + 2xy = 4x^2$

**தீர்வு:**

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டை

$\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{2x}{x^2+1} y = \dfrac{4x^2}{x^2+1}$ என்றவாறு மாற்றி அமைக்கலாம்.

இது $\dfrac{dy}{dx} + Py = Q$ என்ற வடிவில் உள்ளது.

இங்கு $P = \dfrac{2x}{x^2+1}, Q = \dfrac{4x^2}{x^2+1}$

$$\int Pdx = \int \frac{2x}{x^2+1}dx = \log(x^2+1)$$

$$I.F = e^{\int pdx} = e^{\log(x^2+1)} = x^2+1$$

தேவையான தீர்வு:

$$\begin{aligned} y(I.F) &= \int Q(I.F)dx + c \\ y(x^2+1) &= \int \frac{4x^2}{x^2+1}(x^2+1)dx + c \\ y(x^2+1) &= \frac{4x^3}{3} + c \end{aligned}$$

### எடுத்துக்காட்டு 4.23

தீர்க்க : $\dfrac{dy}{dx} - 3y\cot x = \sin 2x$, இங்கு $x = \dfrac{\pi}{2}$ எனில், $y = 2$

**தீர்வு:**

$$\frac{dy}{dx} - (3\cot x).y = \sin 2x$$

இது $\dfrac{dy}{dx} + Py = Q$ என்ற வடிவில் உள்ளது.



XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 4.indd 97 08-12-2021 18:24:52

இங்கு $P=-3\cot x,\ Q=\sin 2x$

$$\int Pdx = \int -3\cot x\,dx = -3\log\sin x = -\log\sin^3 x = \log\frac{1}{\sin^3 x}$$

$$\text{I.F.} \quad = e^{\log\frac{1}{\sin^3 x}} = \frac{1}{\sin^3 x}$$

தேவையான தீர்வு : $y\,(I.F) = \int Q(I.F)dx + c$

$$y\frac{1}{\sin^3 x} = \int \sin 2x \frac{1}{\sin^3 x}\ dx + c$$

$$y\frac{1}{\sin^3 x} = \int 2\sin x\cos x \times \frac{1}{\sin^3 x}dx + c$$

$$= 2\int \frac{1}{\sin x}\times\frac{\cos x}{\sin x}\ dx + c$$

$$= 2\int \operatorname{cosec} x\cot x\,dx + c$$

$$y\frac{1}{\sin^3 x} = -2\operatorname{cosec} x + c \qquad (1)$$

$x=\frac{\pi}{2}$ மற்றும் $y=2$ எனில்,

$$(1) \Rightarrow 2\left(\frac{1}{1}\right) = -2\times 1 + c \Rightarrow c = 4$$

$$\therefore\ (1) \Rightarrow y\frac{1}{\sin^3 x} = -2\operatorname{cosec} x + 4$$

### எடுத்துக்காட்டு 4.24

ஒரு நிறுவனம் ஒன்றில் குறிப்பிட்ட $x$ டன்கள் பொருளை தயாரிப்பதற்கு ஆகும் செலவு $C$-ஐ $x\frac{dC}{dx} = \frac{3}{x} - C$ எனும் சமன்பாட்டினால் குறித்தால் $x = 1$ மற்றும் $C = 2$ எனில், $C$ மற்றும் $x$ ஆகியவற்றிற்கிடையேயான தொடர்பைக் காண்க.

**தீர்வு:**

$$x\frac{dC}{dx} = \frac{3}{x} - C$$

$$\frac{dC}{dx} = \frac{3}{x^2} - \frac{C}{x}$$

$$\frac{dC}{dx} + \frac{C}{x} = \frac{3}{x^2}$$

அதாவது, $\frac{dC}{dx} + \frac{1}{x}C = \frac{3}{x^2}$

இது $\frac{dC}{dx} + PC = Q$ என்ற வடிவில் உள்ளது.

இங்கு, $P=\frac{1}{x},\ Q=\frac{3}{x^2}$

$$\int Pdx = \int \frac{1}{x}dx = \log x$$

$$I.F = e^{\int pdx} = e^{\log x} = x$$

தீர்வு : $C(I.F) = \int Q\left(I.F\right)dx + k$, இங்கு $k$ ஒரு மாறிலி

$$Cx = \int \frac{3}{x^2}x\,dx + k$$

$$= 3\int \frac{1}{x}dx + k$$

$$Cx = 3\log x + k \qquad (1)$$

$x = 1$ மற்றும் $C = 2$ எனில், $k = 2$ ஆகும்.

$\therefore$ $C$ மற்றும் $x$ -க்கான தொடர்பு : $Cx = 3\log x + 2$

## பயிற்சி 4.4

பின்வருவனவற்றை தீர்க்க:

1. $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x$
2. $\frac{dy}{dx} + y\cos x = \sin x\cos x$
3. $x\frac{dy}{dx} + 2y = x^4$
4. $\frac{dy}{dx} + \frac{3x^2}{1+x^3}y = \frac{1+x^2}{1+x^3}$
5. $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = xe^x$
6. $\frac{dy}{dx} + y\tan x = \cos^3 x$
7. $\frac{dy}{dx} + 2y\tan x = \sin x$ மற்றும் $x = \frac{\pi}{3}$ எனில் $y = 0$ எனும் நிலையில் $y$-ஐ $x$-இன் வாயிலாக எழுதுக.
8. $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = xe^x$



XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 4.indd 98 08-12-2021 18:25:05

9. ஒரு வங்கியானது தொடர் கூட்டுவட்டிமுறையில் வட்டியைக் கணக்கிடுகிறது. அதாவது வட்டிவீதத்தை அந்தந்த நேரத்தில் அசலின் மாறுவீதத்தில் கணக்கிடுகிறது. வருடத்திற்கு 8% தொடர் கூட்டு வீதத்தில் ₹ 1,00,000 தொகையை அவ்வங்கியில் ஒருவர் முதலீடு செய்தால் 10 வருடங்களுக்கு பின்னர் அவர் எவ்வளவு தொகையைப் பெறுவார்?

## 4.3 மாறிலிகளைக் கெழுக்களாகக் கொண்ட இரண்டாம் வரிசை நேரிய வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் (Second Order first degree differential equations with constant coefficients)

### 4.3.1 மாறிலிகளைக் கெழுக்களாகக் கொண்ட இரண்டாம் வரிசை நேரிய வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் பொது வடிவம் (A general second order linear differential equation with constant coefficients)

$$a\frac{d^2y}{dx^2}+b\frac{dy}{dx}+cy=f(x)$$

$aD^2y+bDy+cy=f(x),$

இங்கு $\frac{d}{dx}=D, \frac{d^2}{dx^2}=D^2$

அதாவது, $\phi(D)y=f(x)$ (1)

இங்கு $\phi(D)=aD^2+bD+c$ ($a,b$ மற்றும் $c$ மாறிலிகள்)

சமன்பாடு (1) -ஐ தீர்க்க, முதலில் நாம் $\phi(D)y=0$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்க்க வேண்டும். இத்தீர்வானது நிரப்புச் சார்பு (C.F) எனப்படும்.

அடுத்ததாக $f(x)$ ன் மீது $\frac{1}{\phi(D)}$ செயல்படுத்தும் போது கிடைக்கும் தீர்வானது சிறப்புச் தொகை (P.I) என அழைக்கப்படுகிறது.

$$\therefore \quad PI=\frac{1}{\phi(D)}f(x)$$

பொதுத் தீர்வு : $y=$ நிரப்புச் சார்பு (C.F) + சிறப்புச் தொகை (P.I)

**வகை 1 :** $f(x)=0$

அதாவது, $\phi(D)y=0$

இதனை தீர்க்க, $\phi(D)=0$

$D$ க்கு பதிலாக $m$ -ஐ பிரதியிடுக, இச்சமன்பாட்டை துணைச் சமன்பாடு என்கிறோம். $\phi(m)=0$ என்பது ஒரு இருபடிச் சமன்பாடாகும். எனவே இதற்கு $m_1$ மற்றும் $m_2$ என்ற இரு தீர்வுகள் உள்ளன.

இவ்வகைத் தீர்வுகள் பின்வரும் நிலையில் அமையும்.

| வ. எண் | தீர்வுகளின் தன்மை | நிரப்புச் சார்பு |
|---|---|---|
| 1. | மெய் மற்றும் வெவ்வேறானவை $(m_1\neq m_2)$ | $Ae^{m_1x}+Be^{m_2x}$ |
| 2. | மெய் மற்றும் சமமானவை $m_1=m_2=m$ என்க | $(Ax+B)e^{mx}$ |
| 3. | கலப்பெண்கள் $(\alpha\pm i\beta)$ | $e^{\alpha x}(A\cos\beta x+B\sin\beta x)$ |

இங்கு $A$ மற்றும் $B$ என்பன ஏதேனும் இருமாறிலிகளாகும்.

#### எடுத்துக்காட்டு 4.25

தீர்க்க : $(D^2-3D-4)y=0$

**தீர்வு:**

$(D^2-3D-4)y=0$

துணைச் சமன்பாடு :

$m^2-3m-4=0$

$\Rightarrow (m-4)(m+1)=0$

$m=-1,4$

மூலங்கள் மெய் மற்றும் வெவ்வேறானவை.

$\therefore$ நிரப்புச் சார்பு : CF = $Ae^{-x}+Be^{4x}$

பொதுத் தீர்வு : $y=Ae^{-x}+Be^{4x}$

#### எடுத்துக்காட்டு 4.26

தீர்க்க : $9y''-12y'+4y=0$

**தீர்வு:**

$(9D^2-12D+4)y=0$

துணைச் சமன்பாடு :

$(3m-2)^2=0$



XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 4.indd 99 08-12-2021 18:25:12

$(3m-2)(3m-2)=0 \quad \Rightarrow m=\frac{2}{3},\frac{2}{3}$

மூலங்கள் மெய் மற்றும் சமம்

நிரப்புச் சார்பு : $C.F=(Ax+B)e^{\frac{2}{3}x}$

பொதுத் தீர்வு : $y = (Ax+B)e^{\frac{2}{3}x}$

**எடுத்துக்காட்டு 4.27**

தீர்க்க : $\frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}+5y=0$

**தீர்வு:**

$$\frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}+5y = 0$$

$$(D^2-4D+5)y = 0$$

துணைச் சமன்பாடு :

$$m^2-4m+5 = 0$$

$$\Rightarrow (m-2)^2-4+5 = 0$$

$$(m-2)^2 = -1$$

$$m-2 = \pm\sqrt{-1}$$

$m = 2\pm i$ , $\alpha \pm i\beta$ என்ற வடிவில் உள்ளது.

$$\therefore C.F = e^{2x}\left[A\cos x+B\sin x\right]$$

பொதுத் தீர்வு : $y=e^{2x}\left[A\cos x+B\sin x\right]$

**எடுத்துக்காட்டு 4.28**

தீர்க்க : $\frac{d^2x}{dt^2}-3\frac{dx}{dt}+2x=0$ . இங்கு $t=0$ எனில் $x=0$ மற்றும் $\frac{dx}{dt}=1$.

**தீர்வு:**

$$\frac{d^2x}{dt^2}-3\frac{dx}{dt}+2x = 0$$

$(D^2-3D+2)x = 0$ இங்கு $D=\frac{d}{dt}$ மற்றும் $D^2=\frac{d^2}{dt^2}$

துணைச் சமன்பாடு : $m^2-3m+2 = 0$

$$(m-1)(m-2) = 0$$

$$m = 1, 2$$

நிரப்புச் சார்பு : $C.F = Ae^{t}+Be^{2t}$

பொதுத் தீர்வு : $x = Ae^{t}+Be^{2t}$ (1)

$t=0$ மற்றும் $x = 0$ எனில்,

(1) $\Rightarrow$ $0 = A+B$ (2)

(1) –ல் $t$-ஐ பொறுத்து வகைக் காண,

$$\frac{dx}{dt} = Ae^{t}+2Be^{2t}$$

t=0 மற்றும் $\frac{dx}{dt} = 1$ எனில்,

$A+2B = 1$ (3)

$A+B=0$ மற்றும் $A+2B=1$–ஐ தீர்க்க, நாம் பெறுவது $A=-1, B=1$ ஆகும்.

$$\therefore (1) \Rightarrow x = -e^{t}+e^{2t} = e^{2t}-e^{t}$$

**வகை II :** $f(x)=e^{ax}$ அதாவது, $\phi(D)\,y = e^{ax}$

$$P.I = \frac{1}{\phi(D)}e^{ax}$$

$D=a$ எனும்பொழுது $\phi(D)\neq 0$ எனில் $D$ க்கு பதிலாக $a$ யை பிரதியிடவும்.

$D=a$ எனும்பொழுது $\phi(D)=0$ எனில்,

$$P.I = x\frac{1}{\phi'(D)}e^{ax}$$

$D=a$ எனும்பொழுது $\phi'(D)\neq 0$ எனில் $D$க்கு பதிலாக $a$-ஐப் பிரதியிடவும்.

$D=a$ எனும்பொழுது $\phi'(D)=0$ எனில்

$$P.I = x^2\frac{1}{\phi''(D)}e^{ax}$$

இவ்வாறாக தொடரலாம்.

**எடுத்துக்காட்டு 4.29**

தீர்க்க : $(D^2-4D-1)y=e^{-3x}$

**தீர்வு:**

$$(D^2-4D-1)y=e^{-3x}$$

துணைச் சமன்பாடு :

$$m^2-4m-1 = 0$$

$$(m-2)^2-4-1 = 0$$

$$(m-2)^2 = 5$$

$$m-2 = \pm\sqrt{5}$$



XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 4.indd 100 08-12-2021 18:25:22

$$m = 2 \pm \sqrt{5}$$

$$\text{C.F} = Ae^{(2+\sqrt{5})x} + Be^{(2-\sqrt{5})x}$$

$$\text{PI} = \frac{1}{\phi(D)} f(x)$$

$$= \frac{1}{D^2 - 4D - 1} e^{-3x}$$

$$= \frac{1}{(-3)^2 - 4(-3) - 1} e^{-3x}$$

($D$ க்கு பதிலாக –3ஐ பிரதியிட)

$$= \frac{1}{9 + 12 - 1} e^{-3x}$$

$$= \frac{e^{-3x}}{20}$$

பொதுத் தீர்வு : $y$ = C.F+P.I

$$= Ae^{(2+\sqrt{5})x} + Be^{(2-\sqrt{5})x} + \frac{e^{-3x}}{20}$$

### எடுத்துக்காட்டு 4.30

தீர்க்க: $(D^2 - 2D + 1)y = e^{2x} + e^x$

**தீர்வு:**

$$(D^2 - 2D + 1)y = e^{2x} + e^x$$

துணைச் சமன்பாடு :

$$m^2 - 2m + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (m-1)(m-1) = 0$$

$$m = 1, 1$$

$$\text{C.F} = (Ax + B)e^x$$

$$\text{PI} = \frac{1}{\phi(D)} f(x)$$

$$= \frac{1}{D^2 - 2D + 1}(e^{2x} + e^x)$$

இங்கு, $P.I_1 = \dfrac{1}{D^2 - 2D + 1} e^{2x}$

$$= \frac{1}{4 - 4 + 1} e^{2x}$$ ($D$க்கு பதிலாக 2 ஐ பிரதியிட)

$$= e^{2x}$$

மற்றும் $P.I_2 = \dfrac{1}{D^2 - 2D + 1} e^x$

$$= \frac{1}{(D-1)^2} e^x$$

D க்கு 1-ஐ பிரதியிட $(D-1)^2 = 0$

$$\therefore \quad P.I_2 = x.\frac{1}{2(D-1)} e^x$$

$D$ க்கு பதிலாக 1-ஐ பிரதியிட, 2(D–1) = 0

$$\therefore \quad P.I_2 = x^2 \frac{1}{2} e^x$$

பொதுத் தீர்வு : $y = \text{C.F} + \text{P.I}_1 + \text{P.I}_2$

$$= (Ax + B)e^x + e^{2x} + \frac{x^2}{2} e^x$$

### எடுத்துக்காட்டு 4.31

தீர்க்க: $(3D^2 + D - 14)y = 4 - 13e^{\frac{-7}{3}x}$

**தீர்வு:**

$$(3D^2 + D - 14)y = 4 - 13e^{\frac{-7}{3}x}$$

துணைச் சமன்பாடு :

$$3m^2 + m - 14 = 0$$

$$(3m + 7)(m - 2) = 0$$

$$m = \frac{-7}{3}, 2$$

$$\text{C.F} = Ae^{\frac{-7}{3}x} + Be^{2x}$$

$$\Rightarrow \text{PI} = \frac{1}{\phi(D)} f(x)$$

$$= \frac{1}{3D^2 + D - 14}\left(4 - 13e^{\frac{-7}{3}x}\right)$$

$$= \frac{1}{3D^2 + D - 14}(4) + \frac{1}{3D^2 + D - 14}\left(-13e^{\frac{-7}{3}x}\right)$$

$$= PI_1 + PI_2$$

$$\text{P.I}_1 = \frac{1}{3D^2 + D - 14} 4e^{0x}$$

$$= \frac{1}{0 + 0 - 14} 4e^{0x}$$ ($D$ -க்கு பதிலாக 0 என பிரதியிட)



XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 4.indd 101 08-12-2021 18:25:34

$$P.I_1 = \frac{-4}{14}$$

$$P.I_2 = \frac{1}{3D^2+D-14} \times (-13)e^{\frac{-7}{3}x}$$

$D$-க்கு பதிலாக $\frac{-7}{3}$ என பிரதியிட, $3D^2+D-14=0$ .

$$\therefore\ P.I_2 = x.\frac{1}{6D+1}\left(-13e^{\frac{-7}{3}x}\right)$$

$D$ -க்கு பதிலாக $\frac{-7}{3}$ என பிரதியிட,

$$\therefore\ P.I_2 = x\frac{1}{6\left(\frac{-7}{3}\right)+1}\left(-13e^{\frac{-7}{3}x}\right)$$

$$= x\frac{1}{-13}\left(-13e^{\frac{-7}{3}x}\right)$$

$$= xe^{\frac{-7}{3}x}$$

பொதுத் தீர்வு : $y = C.F.+P.I_1+P.I_2$

$$y = Ae^{\frac{-7}{3}x}+Be^{2x}-\frac{2}{7}+xe^{\frac{-7}{3}x}$$

### எடுத்துக்காட்டு 4.32

$Q_d = 29-2p-5\frac{dp}{dt}+\frac{d^2p}{dt^2}$ மற்றும் $Q_s = 5+4p$ என்பன முறையே ஒரு பொருளின் தேவை அளவு மற்றும் அளிப்பு அளவு ஆகியவற்றைக் குறிக்கின்றன. இங்கு $P$ விலையைக் குறிக்கிறது. சந்தை பரிமாற்றத்தில் சமன்நிலை விலையைக் காண்க.

**தீர்வு:**

சமன்நிலை விலையில், $Q_d = Q_s$

$$\Rightarrow\ 29-2p-5\frac{dp}{dt}+\frac{d^2p}{dt} = 5+4p$$

$$\Rightarrow\ 24-6p-5\frac{dp}{dt}+\frac{d^2p}{dt^2} = 0$$

$$\Rightarrow\ \frac{d^2p}{dt^2}-5\frac{dp}{dt}-6p = -24$$

$$(D^2-5D-6)\,p = -24$$

துணைச் சமன்பாடு :

$$m^2-5m-6 = 0$$

$$(m-6)(m+1) = 0$$

$$\Rightarrow\ m = 6, -1$$

$$C.F = Ae^{6t}+Be^{-t}$$

$$P.I = \frac{1}{\phi(D)}f(t)$$

$$= \frac{1}{D^2-5D-6}(-24)e^{0t}$$

$$= \frac{-24}{-6}$$ ($D$-க்கு பதிலாக 0வை பிரதியிட)

$$= 4$$

பொதுத் தீர்வு : $p = C.F+P.I$

$$= Ae^{6t}+Be^{-t}+4$$

### பயிற்சி 4.5

கீழ்க்காணும் வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளை தீர்க்க :

1. $\frac{d^2y}{dx^2}-6\frac{dy}{dx}+8y=0$
2. $\frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}+4y=0$
3. $(D^2+2D+3)y=0$
4. $\frac{d^2y}{dx^2}-2k\frac{dy}{dx}+k^2y=0$
5. $(D^2-2D-15)y=0$, $x = 0$ எனும்போது $\frac{dy}{dx}=0$ மற்றும் $\frac{d^2y}{dx^2}=2$
6. $(4D^2+4D-3)y=e^{2x}$
7. $\frac{d^2y}{dx^2}+16y=0$
8. $x = 0$ மற்றும் $x = \log 2$ எனும்போது $(D^2-3D+2)y=e^{3x}$ -ன் தீர்வானது பூச்சிய மாகிறது எனில், சமன்பாட்டை தீர்க்க.
9. $(D^2+D-6)y=e^{3x}+e^{-3x}$
10. $(D^2-10D+25)y=4e^{5x}+5$
11. $(4D^2+16D+15)y=4e^{\frac{-3}{2}x}$



XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 4.indd 102 08-12-2021 18:25:47

12. $\left(3D^2 + D - 14\right)y = 13e^{2x}$

13. $Q_d = 13 - 6p + 2\dfrac{dp}{dt} + \dfrac{d^2p}{dt^2}$ மற்றும் $Q_s = -3 + 2p$ என்பன முறையே ஒரு பொருளின் தேவை அளவு மற்றும் அளிப்பு அளவு ஆகியவற்றைக் குறிக்கின்றன. இங்கு $p$ விலையைக் குறிக்கிறது. சந்தை பரிமாற்றத்தில் சமன்நிலை விலையைக் காண்க.

## பயிற்சி 4.6

**சரியான விடையைத் தேர்ந்தெடுக்கவும்**

1. $\dfrac{d^4y}{dx^4} - \left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^4 + \dfrac{dy}{dx} = 3$ என்ற வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் படி ஆனது

   (a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

2. $\sqrt{\dfrac{d^2y}{dx^2}} = \sqrt{\dfrac{dy}{dx} + 5}$ என்ற வகைக்கெழுச் சமன் பாட்டின் வரிசை மற்றும் படி முறையே

   (a) 2 மற்றும் 3 (b) 3 மற்றும் 2
   (c) 2 மற்றும் 1 (d) 2 மற்றும் 2

3. $\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}} - \sqrt{\left(\dfrac{dy}{dx}\right)} - 4 = 0$ என்ற வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் வரிசை மற்றும் படி முறையே

   (a) 2 மற்றும் 6 (b) 3 மற்றும் 6
   (c) 1 மற்றும் 4 (d) 2 மற்றும் 4

4. $\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^3 + 2y^{\frac{1}{2}} = x$ என்ற வகைக்கெழுச் சமன்பாடு

   (a) வரிசை 2 மற்றும் படி 1 உடையது
   (b) வரிசை 1 மற்றும்படி 3 உடையது
   (c) வரிசை 1 மற்றும்படி 6 உடையது
   (d) வரிசை 1 மற்றும்படி 2 உடையது

5. $y = ae^x + be^{-x}$ என்ற சமன்பாட்டில் $a$ -யையும் $b$ யையும் நீக்கக் கிடைக்கும் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு

   (a) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - y = 0$ (b) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx} = 0$

   (c) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 0$ (d) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - x = 0$

6. $y = cx + c - c^3$ எனில், அதன் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு

   (a) $y = x\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{dy}{dx} - \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3$

   (b) $y + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3 = x\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{dy}{dx}$

   (c) $\dfrac{dy}{dx} + y = \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3 - x\dfrac{dy}{dx}$

   (d) $\dfrac{d^3y}{dx^3} = 0$

7. $\dfrac{dx}{dy} + Px = Q$ என்ற வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தொகையீட்டுக் காரணி

   (a) $e^{\int Pdx}$ (b) $e^{-\int Pdx}$ (c) $\int Pdy$ (d) $e^{\int Pdy}$

8. $\left(D^2 + 4\right)y = e^{2x}$ இன் நிரப்புச் சார்பு

   (a) $\left(Ax + B\right)e^{2x}$
   (b) $\left(Ax + B\right)e^{-2x}$
   (c) $A\cos 2x + B\sin 2x$
   (d) $Ae^{-2x} + Be^{2x}$

9. $y = mx + c$ –இன் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு ($m$ மற்றும் $c$ என்பன மாறத்தக்க மாறிலிகள்)

   (a) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 0$ (b) $y = x\dfrac{dy}{dx} + c$

   (c) $xdy + ydx = 0$ (d) $ydx - xdy = 0$

10. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 8\dfrac{dy}{dx} + 16y = 2e^{4x}$ என்ற வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் சிறப்புத் தொகை

    (a) $\dfrac{x^2e^{4x}}{2!}$ (b) $\dfrac{e^{4x}}{2!}$ (c) $x^2e^{4x}$ (d) $xe^{4x}$

11. $\dfrac{dx}{dy} + px = 0$ என்பதன் தீர்வானது

    (a) $x = ce^{py}$ (b) $x = ce^{-py}$
    (c) $x = py + c$ (d) $x = cy$

12. $\dfrac{dy}{dx} + Py = Q$ என்ற வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தொகையீட்டுக் காரணி $\sec^2 x$ எனில் $P =$

    (a) $2\tan x$ (b) $\sec x$ (c) $\cos^2 x$ (d) $\tan^2 x$



XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 4.indd 103 08-12-2021 18:25:59

13. $x\frac{dy}{dx} - y = x^2$ -இன் தொகையீட்டுக் காரணி

(a) $\frac{-1}{x}$ (b) $\frac{1}{x}$ (c) $\log x$ (d) $x$

14. $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ (இங்கு $P$ மற்றும் $Q$ என்பன $x$ –ஐ சார்ந்த சார்புகள்) என்ற வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தீர்வு

(a) $y = \int Qe^{\int Pdx} dx + c$

(b) $y = \int Qe^{-\int Pdx} dx + c$

(c) $ye^{\int Pdx} = \int Qe^{\int Pdx} dx + c$

(d) $ye^{\int Pdx} = \int Qe^{-\int Pdx} dx + C$

15. $y = e^{-2x}\left(A\cos x + B\sin x\right)$-ல் $A$ மற்றும் $B$ யை நீக்குவதன் மூலம் அமைக்கப்படும் வகைக் கெழுச் சமன்பாடு

(a) $y_2 - 4y_1 + 5 = 0$

(b) $y_2 + 4y - 5 = 0$

(c) $y_2 - 4y_1 - 5 = 0$

(d) $y_2 + 4y_1 + 5 = 0$

16. $f(D)y = e^{ax}$ இங்கு $f(D) = (D-a)^2$ என்ற வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் சிறப்புத்தொகை

(a) $\frac{x^2}{2}e^{ax}$ (b) $xe^{ax}$ (c) $\frac{x}{2}e^{ax}$ (d) $x^2e^{ax}$

17. $x^2 + y^2 = a^2$ என்பதன் வகைகெழுச் சமன்பாடு

(a) $xdy+ydx=0$ (b) $ydx-xdy=0$

(c) $xdx-ydx=0$ (d) $xdx+ydy=0$

18. $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 0$ என்பதன் நிரப்புச் சார்பு

(a) $A + Be^x$ (b) $(A+B)e^x$

(c) $(Ax+B)e^x$ (d) $Ae^x + B$

19. $(3D^2 + D - 14)y = 13e^{2x}$ -ன் சிறப்புத் தொகை

(a) $\frac{x}{2}e^{2x}$ (b) $xe^{2x}$ (c) $\frac{x^2}{2}e^{2x}$ (d) $13xe^{2x}$

20. $\frac{dy}{dx} = \cos x$ என்ற வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் பொதுத் தீர்வு

(a) $y = \sin x + 1$

(b) $y = \sin x - 2$

(c) $y = \cos x + c$, $c$ மாறத்தக்க மாறிலி

(d) $y = \sin x + c$, $c$ மாறத்தக்க மாறிலி

21. $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$ என்ற வடிவில் உள்ள சமபடித்தான வகைக்கெழுச் சமன்பாடு தீர்க்கப்பட பயன்படுத்தப்படும் பிரதியிடல்

(a) $y = vx$ (b) $v = yx$

(c) $x = vy$ (d) $x = v$

22. $\frac{dx}{dy} = f\left(\frac{x}{y}\right)$ என்ற வடிவில் உள்ள சமபடித்தான வகைக்கெழுச் சமன்பாடு தீர்க்கப்பட பயன்படுத்தப்படும் பிரதியிடல்,

(a) $x = vy$ (b) $y = vx$ (c) $y = v$ (d) $x = v$

23. $\frac{dy}{dx} = \frac{y(x-y)}{x(x+y)}$ என்ற வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டில் $y = vx$ மற்றும் $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$ என பிரதியீடு செய்யும் போது கிடைக்கும், மாறிகள் பிரிக்கத்தக்க வகையில் அமைந்த சமன்பாடு

(a) $\frac{2v^2}{1+v}dv = \frac{dx}{x}$ (b) $\frac{2v^2}{1+v}dv = -\frac{dx}{x}$

(c) $\frac{2v^2}{1-v}dv = \frac{dx}{x}$ (d) $\frac{1+v}{2v^2}dv = -\frac{dx}{x}$

24. பின்வருவனவற்றுள் எது சமபடித்தான வகைக் கெழு சமன்பாடாகும்?

(a) $(3x-5)\,dx = (4y-1)\,dy$

(b) $xy\,dx - (x^3 + y^3)\,dy = 0$

(c) $y^2\,dx + (x^2 - xy - y^2)\,dy = 0$

(d) $(x^2 + y)\,dx = (y^2 + x)\,dy$



XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 4.indd 104 08-12-2021 18:26:10

25. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}+\dfrac{f\left(\frac{y}{x}\right)}{f'\left(\frac{y}{x}\right)}$ என்ற சமபடித்தான வகைக் கெழுச் சமன்பாட்டின் தீர்வு

(a) $f\left(\frac{y}{x}\right)=kx$ (b) $x\,f\left(\frac{y}{x}\right)=k$

(c) $f\left(\frac{y}{x}\right)=ky$ (d) $y\,f\left(\frac{y}{x}\right)=k$

## இதர கணக்குகள்

1. $Q_d=30-5p+2\dfrac{dp}{dt}+\dfrac{d^2p}{dt^2}$ மற்றும் $Q_s=6+3p$ என்பன முறையே ஒரு பொருளின் தேவை அளவு மற்றும் அளிப்பு அளவு ஆகியவற்றைக் குறிக்கின்றன. இங்கு $p$ விலையைக் குறிக்கிறது. சந்தை பரிமாற்றத்தில் சமன்நிலை விலையைக் காண்க.

2. $y=ax^2+bx$ -ஐ பொதுத் தீர்வாக கொண்ட வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டினை அமைக்க.

3. தீர்க்க : $yx^2dx+e^{-x}dy=0$

4. தீர்க்க : $\left(x^2+y^2\right)dx+2xy\,dy=0$

5. தீர்க்க : $x\dfrac{dy}{dx}+2y=x^4$

6. ஒரு தயாரிப்பு நிறுவனத்தில், உபகரணங்களை இயக்கவும் பராமரிக்கவும் ஆகும் செலவு $C$ மற்றும் அடுத்தடுத்த இரு பழுது பார்த்தலுக் குரிய இடைவெளிக்காலம் $m$ ஆகியவற்றை $m^2\dfrac{dC}{dm}+2mC=2$ எனும் சமன்பாட்டினால் குறித்தால், $m=2$ மற்றும் $c=4$ எனில், $C$ மற்றும் $m$ ஆகியவைகளுக்கிடையேயானத் தொடர்பைக் காண்க.

7. தீர்க்க : $\left(D^2-3D+2\right)y=e^{4x}$ இங்கு $x=0$ மற்றும் $x=1$ எனில் $y=0$.

8. தீர்க்க : $\dfrac{dy}{dx}+y\cos x=2\cos x$

9. தீர்க்க $x^2y\,dx-\left(x^3+y^3\right)dy=0$

10. தீர்க்க : $\dfrac{dy}{dx}=xy+x+y+1$

## தொகுப்புரை

- ஒரு சார்பு மற்றும் அவற்றின் ஒன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட வகைக்கெழுக்களை கொண்ட சமன்பாடு வகைக்கெழுச் சமன்பாடு ஆகும். அதாவது $y=f(x)$ சார்பு மற்றும் அதன் வகைக்கெழுக்கள் $\dfrac{dy}{dx},\dfrac{d^2y}{dx^2}\cdots$ கொண்ட சமன்பாடு வகைக்கெழுச் சமன்பாடாகும்.
- ஒரு வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டில் இடம் பெற்றிருக்கும் வகைக்கெழுவின் மிக உயர்ந்த வரிசையே, அவ்வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் வரிசை எனப்படும்.
- வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் படி என்பது அதில் இடம் பெற்றுள்ள வகைக்கெழுக்களின் உச்ச வரிசையின் படியாகும். குறிப்பாக வகைச்கெழுவின் பின்னங்கள் மற்றும் படி மூலங்கள் இருப்பின் அவற்றை நீக்கியபின் படி காணப்படவேண்டும்.
- கொடுக்கப்பட்ட வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டினை நிறைவு செய்யுமாறு அமையும் சார்பு அச்சமன்பாட்டின் தீர்வு ஆகும். வகைக்கெழுச் சமனபாட்டின் தீர்விலுள்ள மாறத்தக்க மாறிலிகளின் எண்ணிக்கையானது அவ்வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் வரிசைக்குச் சமமாக இருக்க வேண்டும். அத்தீர்வினை சமன்பாட்டின் பொதுத்தீர்வு என்போம்.
- கொடுக்கப்பட்ட சார்பிலிருந்து வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டை அமைக்க அதில் இடம் பெற்றிருக்கும் மாறத்தக்க மாறிலிகளின் எண்ணிகைக்கேற்ப அதனை தொடர்ச்சியாக வகைப்படுத்தியபின் அம்மாறத்தக்க மாறிலிகளை நீக்க வேண்டும்.
- ஒரு சமன்பாட்டில் அனைத்து $x$-ல் அமையும் உறுப்புகள் மற்றும் $dx$ ஒருபுறத்திலும், அனைத்து $y$-ல் அமையும் உறுப்புகள் மற்றும் $dy$ மறுபுறத்திலும் அமையுமாறு பிரிக்கத்தக்க வகையிலிருப்பின்,



XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 4.indd 105 08-12-2021 18:26:15

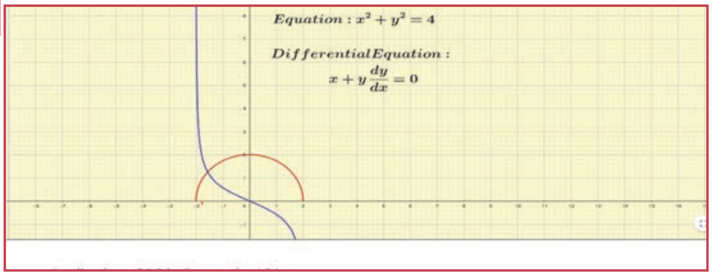
அவைகள் பிரிபடகூடிய மாறிகள் என அழைக்கப்படும். அத்தகைய சமன்பாட்டின் பொதுவடிவம் $f(x)dx = g(y)dy$ அல்லது $f(x)dx + g(y)dy = 0$ நேரடியாக தொகையிடுவதன் மூலம் நாம் தீர்வைப் பெறலாம்.

- $f(x, y)$ மற்றும் $g(x, y)$ என்பன ஒவ்வொன்றும் பூச்சிய படியுள்ள சமபடித்தான சார்புகளாக இருக்கயில், $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ அல்லது $\frac{dx}{dy} = g(x, y)$ என்பன ஒரு சமபடித்தான வகைக்கெழுச் சமன்பாடு ஆகும்.
- $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ (இங்கு $P$ மற்றும் $Q$ ஆகியவை மாறிலிகள் அல்லது $x$ -இன் சார்புகள் மட்டும்) என்ற வடிவில் உள்ள வகைக்கெழுச் சமன்பாடு முதல் வரிசை நேரிய வகைக்கெழுச் சமன்பாடு எனப்படும்.
- மாறிலிகளைக் கெழுக்களைக் கொண்ட இரண்டாம் வரிசை நேரிய வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் பொதுவடிவம் $a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = f(x)$ ஆகும்.

| கலைச்சொற்கள் (GLOSSARY) | |
|---|---|
| இரண்டாம் வரிசை நேரிய வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் | Second order linear differential equations |
| கிடை அச்சுத் தொலைவு | Abscissa |
| குத்தாயம் | Ordinate |
| சமபடித்தான சமன்பாடுகள் | Homogeneous equations |
| சாதாரண வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் | Ordinary differential equations |
| சிறப்புத் தொகை | Particular integral |
| துணைச் சமன்பாடு | Auxiliary equation |
| நிரப்புச் சார்பு | Complementary function |
| நிலையான மாறிலி | Fixed constant |
| நேரிய வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் | Linear differential equations |
| பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் | Partial differential equations |
| படி | Degree |
| பொதுத் தீர்வு | General solution |
| மாறத்தக்க மாறிலி | Arbitrary constant |
| மாறி | Variable |
| மாறிகள் பிரிக்கக் கூடியன | Variable separable |
| மாறிலி | Constant |
| வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் | Differential equations |
| வரிசை | Order |

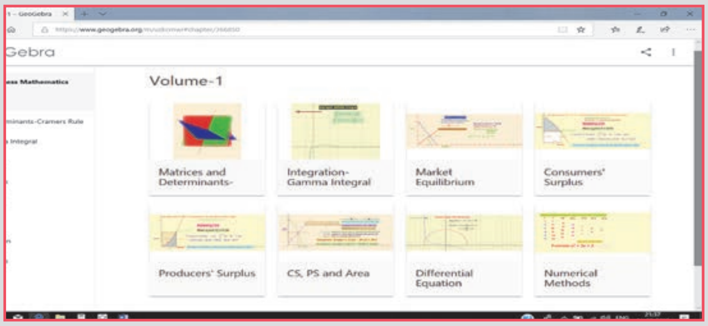
## இணையச் செயல்பாடு

**செயல்பாட்டின் இறுதியில் எதிர்பார்க்கப்படும் விளைவு**



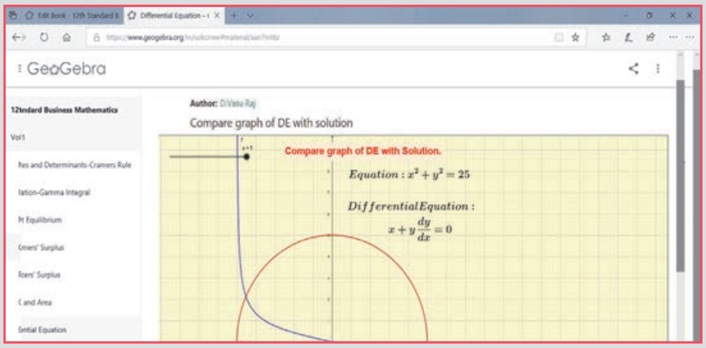

**படி 1**

கீழ்க்காணும் உரலி / விரைவுக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி இச்செயல் பட்டிற்கான இணையப் பக்கத்திற்குச் செல்க. பின்பு "12th Standard Business Mathematics and Statistic " என்னும் திரையில் "Volume–1" யை தெரிவு செய்யவும்.




**படி 2**

"Differential Equation" என்னும் திரை தோன்றும். அதில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள வரைபடத்தில் உள்ள புள்ளி $a$ வை நகர்த்தினால் வரைபடத்தில் தோன்றும் மாற்றத்தை தெரிந்துகொள்ளலாம்.




**செயல்பாட்டிற்கான உரலி : https://ggbm.at/uzkcrnwr**

**விரைவுக் குறியீடு (QR Code) :**