સ્વાધ્યાય 2.2

1. નીચે દર્શાવેલ દ્વિઘાત બહુપદીઓનાં શૂન્યો શોધો અને તેમનાં શૂન્યો અને સહગુણકો વચ્ચેનો સંબંધ ચકાસો :

જ. જો શૂન્યેતર બહુપદી $p(x) = ax^2 + bx + c$ નાં શૂન્યો α અને β હોય તો તેમનાં શૂન્યો વચ્ચેનો સંબંધ નીચે મુજબ છે.

શૂન્યોનો સરવાળો $(\alpha + \beta)$

$$= \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{-(x \text{ નો સહગુણક})}{(x^2 \text{ નો સહગુણક})}$$

શૂન્યોનો ગુણાકાર $(\alpha\beta)$

$$= \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{\text{અચળ પદ નો સહગુણક}}{x^2 \text{ નો સહગુણક}}$$

(i) $x^2 - 2x - 8$

જ. અહીં, $p(x) = x^2 - 2x - 8$ છે.

તેથી, $a = 1$, $b = -2$ તેમજ $c = -8$ છે.

આપેલી બહુપદીના અવયવ પાડતાં,

$$\begin{aligned} x^2 - 2x - 8 &= x^2 - 4x + 2x - 8 \\ &= x(x-4) + 2(x-4) \\ &= (x-4)(x+2) \end{aligned}$$

આથી, જ્યારે $x - 4 = 0$ અથવા $x + 2 = 0$ હોય, ત્યારે $x^2 - 2x - 8$ નું મૂલ્ય શૂન્ય થાય.

$x - 4 = 0$ અથવા $x + 2 = 0$

$\therefore\ x = 4$ અથવા $\therefore\ x = -2$

$\therefore\ \alpha = 4$ અને $\therefore\ \beta = -2$

શૂન્યોનો સરવાળો $(\alpha + \beta) = \frac{-b}{a} = \frac{-(x \text{ નો સહગુણક})}{(x^2 \text{ નો સહગુણક})}$

$\therefore\ 4 - 2 = \frac{-2}{1} = \frac{-2}{1}$

$\therefore\ -2 = -2$

શૂન્યોનો ગુણાકાર $(\alpha\beta) = \frac{c}{a} = \frac{\text{અચળ પદ નો સહગુણક}}{x^2 \text{ નો સહગુણક}}$

$\therefore\ 4 \times -2 = -\frac{8}{1}$

$\therefore\ -8 = -8$

(ii) $\mathbf{4s^2 - 4s + 1}$

જ. અહીં, $p(s) = 4s^2 - 4s + 1$ છે.

તેથી, $a = 4$, $b = -4$ તેમજ $c = 1$ છે.

આપેલી બહુપદીના અવયવ પાડતાં,

$$\begin{aligned} 4s^2 - 4s + 1 &= 4s^2 - 2s - 2s + 1 \\ &= 2s(2s - 1) - 1(2s - 1) \\ &= (2s - 1)(2s - 1) \end{aligned}$$

આથી, જયારે $2s - 1 = 0$ અથવા $2s - 1 = 0$ હોય, ત્યારે $4s^2 - 4s + 1$ નું મૂલ્ય શૂન્ય થાય.

$2s - 1 = 0$ અથવા $2s - 1 = 0$

$\therefore\ 2s = 1$ અથવા $\therefore\ 2s = 1$

$\therefore\ s = \frac{1}{2}$ અથવા $\therefore\ s = \frac{1}{2}$

$\therefore\ \alpha = \frac{1}{2}$ અને $\therefore\ \beta = \frac{1}{2}$

શૂન્યોનો સરવાળો $(\alpha + \beta) = \dfrac{-b}{a} = \dfrac{-(x \text{ નો સહગુણક})}{(x^2 \text{ નો સહગુણક})}$

$\therefore \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{-(-4)}{4} = \frac{4}{4}$

$\therefore\ 1 = 1$

શૂન્યોનો ગુણાકાર $(\alpha\beta) = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\text{અચળ પદ નો સહગુણક}}{x^2 \text{ નો સહગુણક}}$

$\therefore \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$\therefore \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

(iii) $\mathbf{6x^2 - 3 - 7x}$

જ. અહીં, $p(x) = 6x^2 - 7x - 3$ છે.

તેથી, $a = 6$, $b = -7$ તેમજ $c = -3$ છે.

આપેલી બહુપદીના અવયવ પાડતાં,

$$\begin{aligned} 6x^2 - 7x - 3 &= 6x^2 - 9x + 2x - 3 \\ &= 3x(2x - 3) + 1(2x - 3) \\ &= (2x - 3)(3x + 1) \end{aligned}$$

આથી, જયારે $2x - 3 = 0$ અથવા $3x + 1 = 0$ હોય, ત્યારે $6x^2 - 7x - 3$ નું મૂલ્ય શૂન્ય થાય.

$2x - 3 = 0$ અથવા $3x + 1 = 0$

$\therefore\ 2x = 3$ અથવા $\therefore\ 3x = -1$

$\therefore\ x = \frac{3}{2}$ અથવા $\therefore\ x = \frac{-1}{3}$

$\therefore\ \alpha = \frac{3}{2}$ અને $\quad \beta = \frac{-1}{3}$

શૂન્યોનો સરવાળો $(\alpha + \beta) = \quad \frac{-b}{a} = \frac{-(x \text{ નો સહગુણક})}{(x^2 \text{ નો સહગુણક})}$

$$\therefore \frac{3}{2} + \frac{-1}{3} = \quad \frac{-(-7)}{6} = \frac{7}{6}$$

$$\therefore \frac{3 \times 3}{2 \times 3} + \frac{-1 \times 2}{3 \times 2} = \quad = \frac{7}{6}$$

$$\therefore \frac{9}{6} + \frac{-2}{6} = \quad = \frac{7}{6}$$

$$\therefore \frac{9-2}{6} = \quad = \frac{7}{6}$$

$$\therefore \frac{7}{6} = \quad \frac{7}{6}$$

શૂન્યોનો ગુણાકાર $(\alpha\beta) = \quad \frac{c}{a} = \frac{\text{અચળ પદ નો સહગુણક}}{x^2 \text{ નો સહગુણક}}$

$$\therefore \frac{3}{2} \times \frac{-1}{3} = \quad \frac{-3}{6}$$

$$\therefore \frac{-1}{2} = \quad \frac{-1}{2}$$

(iv) $4u^2 + 8u$

જ. અહીં, $p(u) = 4u^2 + 8u$ છે.

તેથી, $a = 4$, $b = 8$ તેમજ $c = 0$ છે.

આપેલી બહુપદીના અવયવ પાડતાં,

$$4u^2 + 8u \quad = 4u(u+2)$$

આથી, જ્યારે $4u = 0$ અથવા $u + 2 = 0$ હોય, ત્યારે $4u^2 + 8u$ નું મૂલ્ય શૂન્ય થાય.

$4u = 0$ અથવા $\quad u + 2 = 0$

$\therefore\ u = 0$ અથવા $\quad \therefore\ u = -2$

$\therefore\ \alpha = 0$ અને $\quad \beta = -2$

શૂન્યોનો સરવાળો $(\alpha + \beta) = \quad \frac{-b}{a} = \frac{-(x \text{ નો સહગુણક})}{(x^2 \text{ નો સહગુણક})}$

$$\therefore 0 - 2 = \quad \frac{-8}{4} = -2$$

$$\therefore -2 = \quad -2$$

શૂન્યોનો ગુણાકાર $(\alpha\beta) = \quad \frac{c}{a} = \frac{\text{અચળ પદ નો સહગુણક}}{x^2 \text{ નો સહગુણક}}$

$$\therefore 0 \times -2 = \quad \frac{0}{4}$$

$$\therefore 0 = \quad 0$$

(v) $\boldsymbol{t^2 - 15}$

જ. અહીં, $p(t) = t^2 - 15$ છે.

તેથી, $a = 1$, $b = 0$ તેમજ $c = -15$ છે.

આપેલી બહુપદીના અવયવ પાડતાં,

$$t^2 - 15 = (t)^2 - \left(\sqrt{15}\right)^2$$
$$= (t - \sqrt{15})(t + \sqrt{15})$$

આથી, જ્યારે $t - \sqrt{15} = 0$ અથવા $t + \sqrt{15} = 0$ હોય, ત્યારે $t^2 - 15$ નું મૂલ્ય શૂન્ય થાય.

$t - \sqrt{15} = 0$ અથવા $t - \sqrt{15} = 0$

$\therefore\ t = \sqrt{15}$ અથવા $t = -\sqrt{15}$

$\therefore\ \alpha = \sqrt{15}$ અને $\beta = -\sqrt{15}$

શૂન્યોનો સરવાળો $(\alpha + \beta) = \dfrac{-b}{a} = \dfrac{-(x \text{ નો સહગુણક})}{(x^2 \text{ નો સહગુણક})}$

$\therefore \sqrt{15} - \sqrt{15} = \dfrac{0}{1} = 0$

$\therefore 0 = 0$

શૂન્યોનો ગુણાકાર $(\alpha\beta) = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\text{અચળ પદ નો સહગુણક}}{x^2 \text{ નો સહગુણક}}$

$\therefore \sqrt{15} \times -\sqrt{15} = \dfrac{-15}{1}$

$\therefore -15 = -15$

(vi) $\boldsymbol{3x^2 - x - 4}$

જ. અહીં, $p(x) = 3x^2 - x - 4$ છે.

તેથી, $a = 3$, $b = -1$ તેમજ $c = -4$ છે.

આપેલી બહુપદીના અવયવ પાડતાં,

$$3x^2 - x - 4 = 3x^2 - 4x - 3x - 4$$
$$= x(3x - 4) - 1(3x - 4)$$
$$= (3x - 4)(x - 1)$$

આથી, જ્યારે $3x - 4 = 0$ અથવા $x - 1 = 0$ હોય, ત્યારે $3x^2 - x - 4$ નું મૂલ્ય શૂન્ય થાય.

$3x - 4 = 0$ અથવા $x - 1 = 0$

$\therefore\ 3x = 4$ અથવા $x = 1$

$\therefore\ x = \frac{4}{3}$ અથવા $x = 1$

$\therefore\ \alpha = \frac{4}{3}$ અને $\beta = 1$

શૂન્યોનો સરવાળો $(\alpha + \beta) = \dfrac{-b}{a} = \dfrac{-(x \text{ નો સહગુણક})}{(x^2 \text{ નો સહગુણક})}$

$$\therefore \frac{4}{3} - 1 = \frac{-(-1)}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \frac{4}{3} - \frac{1 \times 3}{3} = \frac{-(-1)}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \frac{4-3}{3} = \quad = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

શૂન્યોનો ગુણાકાર $(\alpha\beta) = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\text{અચળ પદ નો સહગુણક}}{x^2 \text{ નો સહગુણક}}$

$$\therefore \frac{4}{3} \times -1 = \frac{-4}{3}$$

$$\therefore \frac{-4}{3} = \frac{-4}{3}$$

2. નીચે દર્શાવેલ સંખ્યાઓ અનુક્રમે દ્વિઘાત બહુપદીનાં શૂન્યોનો સરવાળો અને શૂન્યોનો ગુણાકાર છે તે પરથી દ્વિઘાત બહુપદી મેળવો :

(i) $\mathbf{\frac{1}{4}}$, $\mathbf{-1}$

જ. અહીં $\alpha + \beta = \frac{1}{4}$ અને $\alpha\beta = -1$ છે.

શૂન્યોનો સરવાળો $(\alpha + \beta) = \dfrac{-b}{a}$

$$\therefore \frac{1}{4} = \frac{-b}{a}$$

શૂન્યોનો ગુણાકાર $(\alpha\beta) = \dfrac{c}{a}$

$$\therefore -1 = \frac{c}{a}$$

$$\therefore -1 = \frac{-4}{4}$$

પરિણામોને સરખાવતાં,

$a = 4$, $b = -1$ તેમજ $c = -4$ મળે.

તેથી, $p(x) = 4x^2 - x - 4$ બહુપદી મળે.

(ii) $\mathbf{\sqrt{2}}$, $\mathbf{\frac{1}{3}}$

જ. અહીં $\alpha + \beta = \sqrt{2}$ અને $\alpha\beta = \frac{1}{3}$ છે.

શૂન્યોનો સરવાળો $(\alpha + \beta) = \dfrac{-b}{a}$

$$\therefore \sqrt{2} = \frac{-b}{a}$$

$$\therefore \frac{3\sqrt{2}}{3} = \frac{-b}{a}$$

શૂન્યોનો ગુણાકાર $(\alpha\beta) = \frac{c}{a}$

$\therefore \frac{1}{3} = \frac{c}{a}$

પરિણામોને સરખાવતાં,

$a = 3$, $b = -3\sqrt{2}$ તેમજ $c = 1$ મળે.

તેથી, $p(x) = 3x^2 - 3\sqrt{2}x + 1$ બહુપદી મળે.

(iii) $\mathbf{0}$, $\sqrt{\mathbf{5}}$

જ. અહીં $\alpha + \beta = 0$ અને $\alpha\beta = \sqrt{5}$ છે.

શૂન્યોનો સરવાળો $(\alpha + \beta) = \frac{-b}{a}$

$\therefore 0 = \frac{-b}{a}$

$\therefore \frac{0}{1} = \frac{-b}{a}$

શૂન્યોનો ગુણાકાર $(\alpha\beta) = \frac{c}{a}$

$\therefore \sqrt{5} = \frac{c}{a}$

$\therefore \frac{\sqrt{5}}{1} = \frac{c}{a}$

પરિણામોને સરખાવતાં,

$a = 1$, $b = 0$ તેમજ $c = \sqrt{5}$ મળે.

તેથી, $p(x) = x^2 + 0x + \sqrt{5}$ બહુપદી મળે.

(iv) $\mathbf{1}$, $\mathbf{1}$

જ. અહીં $\alpha + \beta = 1$ અને $\alpha\beta = 1$ છે.

શૂન્યોનો સરવાળો $(\alpha + \beta) = \frac{-b}{a}$

$\therefore 1 = \frac{-b}{a}$

$\therefore \frac{1}{1} = \frac{-b}{a}$

શૂન્યોનો ગુણાકાર $(\alpha\beta) = \frac{c}{a}$

$\therefore 1 = \frac{c}{a}$

$\therefore \frac{1}{1} = \frac{c}{a}$

પરિણામોને સરખાવતાં,

$a = 1$, $b = -1$ તેમજ $c = 1$ મળે.

તેથી, $p(x) = x^2 - x + 1$ બહુપદી મળે.

(v) $\frac{-1}{4}$, $\frac{1}{4}$

જ. અહીં $\alpha + \beta = \frac{-1}{4}$ અને $\alpha\beta = \frac{1}{4}$ છે.

શૂન્યોનો સરવાળો $(\alpha + \beta) = \frac{-b}{a}$

$$\therefore \frac{-1}{4} = \frac{-b}{a}$$

શૂન્યોનો ગુણાકાર $(\alpha\beta) = \frac{c}{a}$

$$\therefore \frac{1}{4} = \frac{c}{a}$$

પરિણામોને સરખાવતાં,

$a = 4$, $b = 1$ તેમજ $c = 1$ મળે.

તેથી, $p(x) = 4x^2 + x + 1$ બહુપદી મળે.

(vi) **4 , 1**

જ. અહીં $\alpha + \beta = 4$ અને $\alpha\beta = 1$ છે.

શૂન્યોનો સરવાળો $(\alpha + \beta) = \frac{-b}{a}$

$$\therefore 4 = \frac{-b}{a}$$

$$\therefore \frac{4}{1} = \frac{-b}{a}$$

શૂન્યોનો ગુણાકાર $(\alpha\beta) = \frac{c}{a}$

$$\therefore 1 = \frac{c}{a}$$

$$\therefore \frac{1}{1} = \frac{c}{a}$$

પરિણામોને સરખાવતાં,

$a = 1$, $b = -4$ તેમજ $c = 1$ મળે.

તેથી, $p(x) = x^2 - 4x + 1$ બહુપદી મળે.