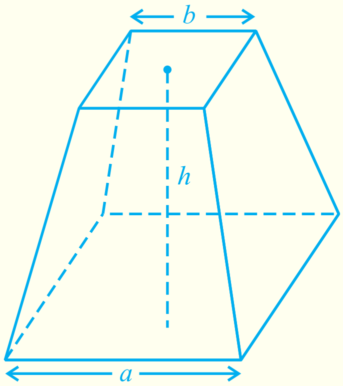
પ્રકરણ 5

યુકિલડની ભૂમિતિનો પરિચય

5.1 પ્રાસ્તાવિક

ભૂમિતિ માટેનો અંગ્રેજી શબ્દ '*Geometry*' છે. *Geometry* શબ્દ બે ગ્રીક શબ્દના સંયોજનથી બનેલો છે. '*geo*' અને '*metrein*', *Geo*નો અર્થ પૃથ્વી અને '*metrein*'નો અર્થ માપવું થાય. જમીનના માપનની જરૂરિયાતમાંથી ભૂમિતિનો ઉદ્‌ભવ થયો છે. પ્રાચીન સંસ્કૃતિમાં ગણિતની આ શાખાનો અભ્યાસ વિવિધ સ્વરૂપે થયો હતો. ઈજિપ્ત, બેબીલોનિયા, ચીન, ભારત, ગ્રીસ, ઇંકાઝ જેવી તે સમયની સંસ્કૃતિના લોકોને પડતી કેટલીક વ્યાવહારિક સમસ્યાઓનો સામનો કરવા માટે ભૂમિતિના વિકાસની જરૂરિયાત ઊભી થઇ.

ઉદાહરણ તરીકે જ્યારે નાઈલ નદી છલકાતી હતી ત્યારે આસપાસનાં ક્ષેત્રના જમીનમાલિકોની ખેતરની સાથે જોડાયેલ સરહદોનો નાશ થઈ જતો હતો. આવી પૂર હોનારત પછી સરહદોની પુનઃસ્થાપના કરવામાં આવતી હતી. આ હેતુ માટે ઈજિપ્તના નાગરિકોએ ક્ષેત્રફળના ગણતરી માટેના સરળ નિયમો તેમજ સરળ રચના કરવા માટે ભૌમિતિક તક્‌નીક વિકસાવી. તે ધાન્ય-ભંડારના ઘનફળની ગણતરી તથા પિરામિડના આડછેદ માટે તેમજ નહેર અને પિરામિડના બાંધકામ માટે પણ ભૂમિતિના જ્ઞાનનો ઉપયોગ કરતા હતા. તે કપાયેલ પિરામિડ (આડછેદ)ના ઘનફળની ગણતરી શોધવા માટે ઉચિત સૂત્રો પણ જાણતા હતા. (જુઓ આકૃતિ 5.1.) તમે જાણો છો કે પિરામિડ ઘન આકૃતિ છે. તેનો પાયો ત્રિકોણ, ચોરસ કે અન્ય બહુકોણ હોય છે અને તેની બાજુની સપાટીઓ ઉપરના એક બિંદુ પર ત્રિકોણો બનાવે છે.

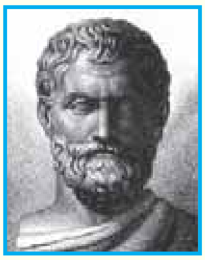


આકૃતિ 5.1
પિરામિડનો આડછેદ

ભારતીય ઉપખંડમાં હડપ્પા અને મોહેંજો-દરો વગેરેનાં ખોદકામ વખતે એ જાણવા મળ્યું કે સિંધુખીણની સંસ્કૃતિ (અંદાજે ઈ.પૂ. 3000)માં ભૂમિતિનો વ્યાપક ઉપયોગ જોવા મળ્યો હતો. તે ઉચ્ચ પ્રકારનો સંગઠિત સમાજ હતો. શહેરો યોજનાબદ્ધ અને સુવ્યવસ્થિત હતા. શહેરો ઉત્તમ રીતે વિકસિત હતા અને ખૂબ સારી રીતે નિર્માણ પામ્યા હતા. ઉદાહરણ તરીકે રસ્તાઓ એકબીજાને સમાંતર અને ગટર-વ્યવસ્થા ભૂગર્ભમાં હતી. મકાનના ઓરડાઓ જુદા જુદા આકારના હતા તે બતાવે છે કે નગરજનો માપન અને વ્યાવહારિક અંકગણિતમાં કુશળ હતા. બાંધકામમાં ઉપયોગમાં લેવાતી ઈંટો ભઠ્ઠામાં પકવવામાં આવતી હતી અને તેની લંબાઈ, પહોળાઈ અને જાડાઈનો ગુણોત્તર 4:2:1 હતો.

પ્રાચીન ભારતમાં ***સૂલ્બાસૂત્ર*** (ઈ. પૂર્વે 800-500) એ ભૌમિતિક રચનાઓ માટે મહત્ત્વપૂર્ણ ગ્રંથ હતો. વૈદિકકાળમાં ભૂમિતિનો ઉદ્‌ભવ પૂજા માટેની જરૂરી વિવિધ પ્રકારની વેદીઓ અને અગ્નિકુંડોના નિર્માણ કાર્યથી થયો હતો. પવિત્ર અગ્નિને વધુ પ્રભાવશાળી બનાવવા માટે તેના સ્થાન, આકાર અને ક્ષેત્રફળની બાબતમાં સ્પષ્ટ રીતે નક્કી થયેલ આદેશોનું પાલન થતું હતું. ગૃહસ્થ કર્મકાંડ માટે ચોરસ અને વર્તુળાકાર વેદીઓનો ઉપયોગ થતો હતો. જાહેર પૂજા સ્થળો માટે લંબચોરસ, ત્રિકોણ અને સમલંબના સંયોજનથી બનતા આકારના પ્રયોગ જરૂરી હતા. શ્રીયંત્ર (*અથર્વવેદ*માં આપેલ) એ અંદરોઅંદર ગૂંથાયેલા નવ સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણનું સંયોજન છે. આ ત્રિકોણ એવી ચોક્કસ રીતે ગોઠવાયેલ છે કે તેમાંથી 43 ઉપત્રિકોણ બને છે. જો કે વેદીઓને બનાવવા માટે શુદ્ધ ભૌમિતિક પદ્ધતિનો ઉપયોગ થયો હતો. છતાં પણ તેની પાછળના સિદ્ધાંતોની ચર્ચા કરવામાં આવેલ નથી.

આ ઉદાહરણો દર્શાવે છે કે, ભૂમિતિનો વિકાસ અને તેનો ઉપયોગ વિશ્વના દરેક સ્થાન પર થતો હતો. પરંતુ તે બહુ અવ્યવસ્થિત રીતે થઈ રહ્યું હતું. પ્રાચીન વિશ્વમાં ભૂમિતિના આ વિકાસની આ ગતિવિધિઓની એક રોચક વાત એ છે કે તેનું જ્ઞાન પેઢીઓ સુધી મૌખિક રીતે અથવા તાડના વૃક્ષના પાન પર સંદેશ લખીને અથવા કેટલીક અન્ય પદ્ધતિઓ દ્વારા આપવામાં આવતું હતું. આ ઉપરાંત આપણને એ પણ જોવા મળે છે કે બેબીલોનિયન જેવી કેટલીક સંસ્કૃતિઓમાં ભૂમિતિ ખૂબ વ્યવહારલક્ષી દૃષ્ટિકોણવાળા વિષય સુધી સીમિત રહી. તેમજ આવું જ ભારત અને રોમમાં રહ્યું. ઇજિપ્તવાસીઓ દ્વારા વિકાસ પામેલ ભૂમિતિમાં મુખ્યત્વે પરિણામોનું કથન જ સમાવિષ્ટ થતું હતું. તેમાં વિધિ(પ્રક્રિયા)ઓના કોઈ વ્યાપક નિયમ આપવામાં આવ્યા નથી. ખરેખર બેબીલોન અને ઇજિપ્તવાસીઓએ ભૂમિતિનો ઉપયોગ મોટા ભાગે વ્યાવહારિક કાર્યો માટે જ કર્યો તથા તેને એક ક્રમબદ્ધ વિજ્ઞાનના રૂપમાં વિકસિત કરવા માટે ખૂબ જ ઓછું કામ થયું. પરંતુ ગ્રીક જેવી સંસ્કૃતિઓમાં એ *તર્ક* પર ભાર આપવામાં આવતો હતો કે કેટલીક રચનાઓ કઈ રીતે થાય છે. ગ્રીસવાસીઓની રુચિ અનુમાનિત તર્કનો ઉપયોગ કરીને તેમણે સ્થાપિત કરેલાં વિધાનોની સત્યાર્થતા ચકાસવામાં હતી. (જુઓ પરિશિષ્ટ 1.)



Thales
(ઈ.પૂ. 640 – 546)
આકૃતિ 5.2

એક ગ્રીક ગણિતશાસ્ત્રી ***Thales***ને એ વાતનો શ્રેય જાય છે કે, તેઓએ સૌથી પહેલા જ્ઞાત સાબિતી આપી. આ સાબિતી એ કથનની હતી કે વર્તુળનો વ્યાસ વર્તુળને સમવિભાજિત કરે છે (બે સમાન ભાગમાં વિભાજિત). ***Thales***ના એક અતિ પ્રસિદ્ધ શિષ્ય ***Pythagoras*** (ઈ.પૂ. 572) હતા. તેમનું નામ તમે ચોક્કસ સાંભળ્યું હશે. પાયથાગોરસ અને તેના સાથીઓએ અનેક ભૌમિતિક ગુણધર્મોની શોધ કરી અને ભૂમિતિના સિદ્ધાંતનો મહદ્ અંશે વિકાસ કર્યો. આ પ્રક્રિયા

ઈ.પૂ. 300 સુધી ચાલુ રહી. આ સમયે ઇજિપ્તના એલેક્ઝાન્ડ્રિયાના એક ગણિત શિક્ષક ***Euclid***એ તે સમય સુધીજાણીતાગણિતના બધા જ જ્ઞાનને એકત્રિત કર્યું અને ***'Elements'*** નામના તેમના પ્રસિદ્ધ ગ્રંથના રૂપમાં તેને વ્યવસ્થિત કર્યું. તેમણે ***Elements***ને 13 પ્રકરણોમાં વિભાજિત કર્યું. તેમાંથી પ્રત્યેકને પુસ્તક માનવામાં આવે છે. આ પુસ્તકો સમગ્ર વિશ્વના ભૂમિતિ સંબંધિત સમજણને આવનારી પેઢીઓ સુધી પ્રભાવિત કરશે.

Euclid (ઈ.પૂ. 325 – 265)
આકૃતિ 5.3

આ પ્રકરણમાં આપણે ભૂમિતિના યુક્લિડના અભિગમની ચર્ચા કરીશું અને તેને ભૂમિતિના વર્તમાન સ્વરૂપ સાથે જોડવાનો પ્રયાસ કરીશું.

5.2 યુક્લિડની વ્યાખ્યાઓ, પ્રમેયો અને પૂર્વધારણાઓ

યુક્લિડના સમયમાં ગ્રીસના ગણિતશાસ્રીઓએ જેમાં તે રહેતા હતા તેવા વિશ્વના એક અમૂર્ત મૉડેલ (પ્રતિમાન) તરીકે ભૂમિતિને કલ્પી. આસપાસની વસ્તુઓના અવલોકન પરથી બિંદુ, રેખા, સમતલ, સપાટી વગેરેની ધારણાઓ સ્થાપિત કરવામાં આવી. અવકાશ અને તેની આસપાસના ઘન પદાર્થની અમૂર્ત ભૂમિતિની સંકલ્પના વિકસિત કરવામાં આવી. એક ઘન પદાર્થને આકાર હોય છે, માપ અને સ્થાન હોય છે તથા તેને એક સ્થાનથી બીજા સ્થાન સુધી લઈ જઈ શકાય છે. તેની સીમાઓને પૃષ્ઠ કહે છે. તે અવકાશના એક ભાગને બીજા ભાગથી અલગ કરે છે અને તેને કોઈ જાડાઈ હોતી નથી. પૃષ્ઠની સીમા એ વક્ર અથવા સીધી રેખાઓ હોય છે. આ રેખાઓને અંત્યબિંદુઓ હોય છે.

ઘન પદાર્થથી બિંદુઓ (ઘન પદાર્થ-સમતલ-રેખાઓ-બિંદુ) સુધીનાં ત્રણ ચરણનો વિચાર કરો. પ્રત્યેક ચરણમાં આપણે એક વિસ્તરણથી વંચિત થઈએ છીએ. તેને આપણે ***પરિમાણ*** (*dimension*) પણ કહીએ છીએ. આ માટે એવું કહેવાય છે કે એક ઘન પદાર્થને ત્રણ પરિમાણ, પૃષ્ઠ(સપાટી)ને બે પરિમાણ તથા રેખાને એક પરિમાણ હોય છે અને બિંદુને કોઈ પરિમાણ હોતું નથી. યુક્લિડે આ વિધાનોને સંક્ષિપ્ત રીતે વ્યાખ્યાઓના રૂપમાં રજૂ કર્યાં. તેમણે પોતાના આ સ્પષ્ટીકરણોની શરૂઆત '*Elements*' ના પુસ્તક1 માં 23 વ્યાખ્યાઓ આપીને કરી. આમાંથી કેટલીક વ્યાખ્યાઓ નીચે આપવામાં આવી છે :

1. *બિંદુ*ને કોઈ ભાગ નથી.
2. *રેખા* એ પહોળાઈ વગરની લંબાઈ છે.
3. રેખાના *અંતમાં બિંદુ*ઓ હોય છે.
4. જે પોતાના પર બિંદુઓની સાથે *સમાન* રીતે રહેલી હોય એવી રેખા એક સીધી રેખા છે.
5. *પૃષ્ઠ*ને માત્ર લંબાઈ અને પહોળાઈ હોય છે.
6. પૃષ્ઠની ધાર રેખાઓ હોય છે.
7. જે સપાટી પોતાના પરની સીધી રેખાઓની સાથે એકસમાન રીતે રહેલ હોય તેવી સપાટી એ *સમતલ* છે.

જો તમે ધ્યાનપૂર્વક આ વ્યાખ્યાઓને જોશો તો તમને લાગશે કે કેટલાંક પદો જેવાં કે ભાગ, પહોળાઈ, લંબાઈ, સરખે ભાગે વહેંચણી વગેરેને આગળ જતાં વધુ સ્પષ્ટ રીતે સમજવાની જરૂર છે. ઉદાહરણ તરીકે યુક્લિડે આપેલી બિંદુની વ્યાખ્યાનો વિચાર કરો. આ વ્યાખ્યામાં 'એક ભાગને' વ્યાખ્યાયિત કરવાની જરૂર છે. માની લો કે જે 'ક્ષેત્રફળ' રોકે તેને 'એક ભાગ' કહીએ તો આપણે ફરી 'ક્ષેત્રફળ' ને વ્યાખ્યાયિત કરવાની જરૂર રહેશે. એટલે કે એક વસ્તુને વ્યાખ્યાયિત કરવા માટે આપણે અનેક વસ્તુઓને વ્યાખ્યાયિત કરવાની જરૂર પડે છે અને કોઈ અંત વગરની વ્યાખ્યાઓની લાંબી શૃંખલા પ્રાપ્ત થઈ શકે છે. ઉપર આપેલી વ્યાખ્યાઓની તુલનામાં બિંદુની ભૌમિતિક કલ્પનાને સાહજિક રીતે સમજીશું. આ કારણથી ગણિતશાસ્ત્રીઓને કેટલાંક ભૌમિતિક પદોને અવ્યાખ્યાયિત (*undefined*) માની લેવામાં આવે એ સુવિધાજનક લાગ્યું. આ રીતે એક બિંદુની ભૌમિતિક સંકલ્પના વધુ સાહજિકપણે સમજીશું. આપણે બિંદુને એક નાના ટપકા સ્વરૂપે દર્શાવીએ છીએ. પરંતુ આ સૂક્ષ્મ ટપકાનું કંઈક ને કંઈક પરિમાણ ચોક્કસ હોય છે.

આ પ્રકારની સમસ્યા ઉપર્યુક્ત વ્યાખ્યા 2 માં પણ આવે છે. તેમાં પહોળાઈ અને લંબાઈનો ઉલ્લેખ આવે છે અને તેમાંના કોઈને પણ પહેલાં વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવ્યા નથી. આ કારણથી કોઈ પણ વિષયના અભ્યાસ માટે કેટલાંક પદોને અવ્યાખ્યાયિત રાખવામાં આવ્યાં છે. આ માટે ભૂમિતિમાં આપણે બિંદુ, રેખા અને સમતલ (યુક્લિડના શબ્દોમાં સમતલ સપાટી)ને અવ્યાખ્યાયિત પદના રૂપમાં માનીને આપવામાં આવે છે. માત્ર એ વાત જરૂરી છે કે આપણે તેને સાહજિક રીતે દર્શાવી શકીએ છીએ અથવા '*ભૌતિક નમૂના*' ની મદદથી સ્પષ્ટ કરી શકીએ છીએ.

યુક્લિડે તેની વ્યાખ્યાઓથી શરૂ કરતાં તેમાંના કેટલાક ગુણધર્મોને સાબિત કર્યા વગર સત્ય વિધાન માનવાની કલ્પના કરી. આ કલ્પનાઓ વાસ્તવમાં 'સ્પષ્ટપણે વૈશ્વિક સત્ય' હતી. તેમણે તેને બે ભાગમાં વિભાજિત કર્યાં. આ ભાગ હતાઃ સ્વયંસિદ્ધ સત્ય અને પૂર્વધારણાઓ. તેમણે **પૂર્વધારણા** શબ્દનો ઉપયોગ તેવી કલ્પનાઓ માટે કર્યો, કે જે વિશિષ્ટ રીતે ભૂમિતિથી સંબંધિત હોય બીજી તરફ એવી સામાન્ય સંકલ્પનાઓ હતી (જેને ઘણી વાર **સ્વયંસિદ્ધ સત્યો** કહે છે.) જેનો હંમેશાં ગણિતમાં પ્રયોગ કરાયો અને તેને માત્ર ભૂમિતિ સાથે જ વિશેષ સંબંધ ન હતો. સ્વયંસિદ્ધ સત્યો અને પૂર્વધારણાઓની વધુ જાણકારી માટે પરિશિષ્ટ 1 જુઓ. *યુક્લિડની કેટલીક પૂર્વધારણાઓ* નીચે આપવામાં આવી છે. આ તેના પોતાના ક્રમમાં નથી.

(1) *એક વસ્તુને સમાન હોય તેવી વસ્તુઓ એકબીજીને સમાન થાય.*

(2) *સરખામાં સરખું ઉમેરીએ તો સરવાળા સરખા રહે.*

(3) *સરખામાંથી સરખા બાદ કરીએ તો બાદબાકી (શેષફળ) સરખી રહે.*

(4) *એકબીજા પર બંધબેસતી આવતી વસ્તુઓ એકબીજીને સરખી રહે.*

(5) *આખું તેના ભાગ કરતા મોટું હોય છે.*

(6) *સરખી વસ્તુઓના બમણા એકબીજાને સમાન હોય છે.*

(7) *એક જ વસ્તુઓના અડધા એકબીજાને સમાન થાય.*

આ 'સામાન્ય સંકલ્પનાઓ' કોઈ પ્રકારનાં **માપ**(*Magnitudes*)ના સંદર્ભમાં કહેવામાં આવી છે. પ્રથમ સામાન્ય સંકલ્પનાનો

સમતલીય આકૃતિઓ માટે પ્રયોગ કરી શકાય છે. ઉદાહરણ તરીકે જો એક ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ એક લંબચોરસના ક્ષેત્રફળની બરાબર હોય અને આ લંબચોરસનું ક્ષેત્રફળ કોઈ ચોરસના ક્ષેત્રફળની બરાબર હોય, તો ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ પણ ચોરસના ક્ષેત્રફળની બરાબર હોય.

એક જ પ્રકારના માપની સરખામણી કરી શકાય છે અને તેનો સરવાળો પણ થઈ શકે છે. પરંતુ અહીં અલગ અલગ પ્રકારના માપની સરખામણી કરી શકાતી નથી. ઉદાહરણ તરીકે એક રેખાને એક લંબચોરસમાં ઉમેરી શકાતી નથી અને તે જ રીતે ખૂણાની એક પંચકોણ સાથે તુલના કરી શકાતી નથી.

ઉપર આપવામાં આવેલી ચોથી પૂર્વધારણા એવું બતાવતી હોય તેવું પ્રતિત થાય છે કે જે બે વસ્તુઓ સમાન હોય (અથવા એક જ હોય) તે એકબીજાની બરાબર હોય છે. બીજા શબ્દોમાં કોઈ પણ વસ્તુ પોતાને સમાન હોય છે. આ એકબીજાની ઉપર મૂકવાના સિદ્ધાંતની તર્કસંગતતા પ્રગટ કરે છે. પૂર્વધારણા 5 "*થી મોટું છે* (*greater than*)"ની વ્યાખ્યા આપે છે. ઉદાહરણ તરીકે જો કોઈ રાશિ B કોઈ અન્ય રાશિ A નો એક ભાગ હોય, તો A ને રાશિ B અને એક અન્ય રાશિ C ના સરવાળાના રૂપમાં લઈ શકાય છે. સાંકેતિક રૂપમાં લખતાં $A>B$ નો અર્થ એવો છે કે કોઈ રાશિ C એવી છે કે જેથી $A = B + C$ થાય.

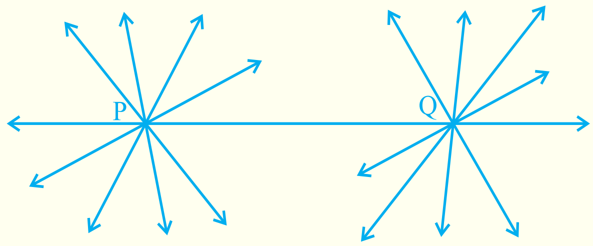
આવો હવે **યુક્લિડની પાંચ પૂર્વધારણાઓ**ની ચર્ચા કરીએ તે આ પ્રકારે છે.

પૂર્વધારણા 1 : *એક બિંદુમાંથી બીજા બિંદુ સુધી થઈને પસાર થતી એક સીધી રેખા દોરી શકાય.*

આ પૂર્વધારણા આપણને સૂચવે છે કે, બે ભિન્ન બિંદુઓમાંથી પસાર થતી ઓછામાં ઓછી એક રેખા અવશ્ય દોરી શકાય છે. પરંતુ આ પરથી એ જાણવા મળતું નથી કે આવી એકથી વધુ સીધી રેખાઓ હોય કે નહિ. પરંતુ યુક્લિડે પોતાના તમામ કાર્યમાં કંઈ સૂચિત કર્યા વગર વારંવાર કલ્પના કરી છે કે બે ભિન્ન બિંદુઓમાંથી એક અનન્ય રેખા દોરી શકાય છે. આ પરિણામને એક પૂર્વધારણાના રૂપમાં નીચે આપેલ છે :

પૂર્વધારણા 5.1 : *આપેલાં બે ભિન્ન બિંદુઓમાંથી પસાર થતી અનન્ય રેખા હોય છે.*

બિંદુ P માંથી પસાર થતી કેટલી રેખાઓ હોઈ શકે જે બિંદુ Q માંથી પણ પસાર થાય ? (જુઓ આકૃતિ 5.4.) તેવી માત્ર એક રેખા PQ છે. જે બિંદુ Q માંથી પસાર થતી હોય તેવી કેટલી રેખાઓ બિંદુ P માંથી પણ પસાર થાય છે? એવી માત્ર એક જ છે, એટલે કે રેખા PQ છે. આ માટે ઉપરનું વિધાન એક સ્વયંસિદ્ધ સત્ય છે અને તે માટે આપણે તેને એક પૂર્વધારણાના રૂપમાં માનીએ છીએ.

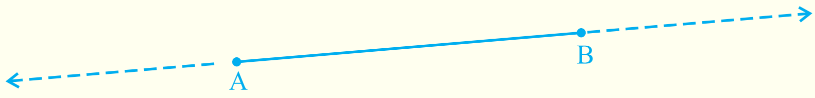


આકૃતિ 5.4

પૂર્વધારણા 2 : *સાન્ત રેખાને અનંત સુધી લંબાવી શકાય.*

આપણે નોંધીએ કે જેને આપણે આજકાલ રેખાખંડ કહીએ છીએ તેને યુક્લિડે સાન્ત રેખા કહ્યું હતું. આથી અત્યારના

પરિપ્રેક્ષ્યમાં બીજી પૂર્વધારણા એવું કહે છે કે, એક રેખાખંડને બંને તરફ લંબાવતાં એક રેખા બનાવી શકાય છે. (જુઓ આકૃતિ 5.5,)



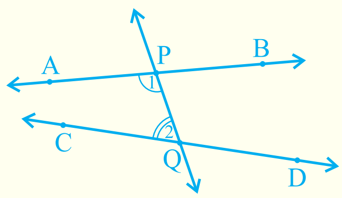
આકૃતિ 5.5

પૂર્વધારણા 3 : *કોઈ પણ બિંદુને કેન્દ્ર લઈ તથા કોઈ પણ લંબાઈની ત્રિજ્યા લઈ વર્તુળ રચી શકાય.*

પૂર્વધારણા 4 : *બધા જ કાટખૂણા એકબીજા સાથે સરખા થાય.*

પૂર્વધારણા 5 : *જો બે રેખાઓને કોઈ ત્રીજી રેખા છેદે અને આ રેખાની એક જ બાજુ તરફના બે અંતઃકોણોનો સરવાળો બે કાટખૂણા કરતાં ઓછો હોય, તો પ્રથમ બે રેખાઓને આ ખૂણાઓ તરફ અનંત સુધી લંબાવતા તે એકબીજાને છેદે છે.*

ઉદાહરણ તરીકે આકૃતિ 5.6 માં રેખા PQ, રેખાઓ AB અને CD પર એવી રીતે છેદે કે અંતઃકોણો 1 અને 2 નો સરવાળો 180° કરતા ઓછો છે. તે PQ ની ડાબી બાજુ આવેલ છે. તેથી રેખાઓ AB અને CD અંતમાં PQ ની ડાબી તરફ છેદશે.



આકૃતિ 5.6

ઉપરની પાંચ પૂર્વધારણાઓને માત્ર જોવાથી આપણને એ સ્પષ્ટ ખ્યાલ આવે છે કે, અન્ય પૂર્વધારણાઓની તુલનામાં પૂર્વધારણા 5 થોડી વધુ જટિલ છે. બીજી તરફ પૂર્વધારણા 1 થી 4 એટલી સરળ અને સ્પષ્ટ છે કે તેમને સ્વયંસિદ્ધ સત્યના રૂપમાં માની લેવામાં આવે છે. પરંતુ તેને સાબિત કરવી શક્ય નથી. આ માટે આ વિધાનો સાબિતી વગર સ્વીકારી લેવામાં આવે છે. (જુઓ પરિશિષ્ટ 1.) આ જટિલતાને કારણે પાંચમી પૂર્વધારણા પર આગળના વિભાગમાં વિશેષ ધ્યાન દેવામાં આવશે.

આજકાલ ‘પૂર્વધારણા’ અને ‘સ્વયંસિદ્ધ સત્ય’ બંને પદોનો એકબીજા માટે એક જ અર્થમાં પ્રયોગ કરવામાં આવે છે. ખરેખર પૂર્વધારણા એ ક્રિયા (verb) છે જ્યારે આપણે કહીએ છીએ કે ‘ચાલો પૂર્વધારણા કરીએ’ તો તેનો અર્થ છે કે ચાલો વિશ્વમાં નોંધાતી (જોવા મળતી) ઘટનાઓના આધારે કંઈક વિધાન કહીએ. તેની સત્યાર્થતાની ચકાસણી પછીથી કરવામાં આવે છે. જો તે સત્ય હોય તો તેને પૂર્વધારણાના રૂપમાં સ્વીકારી લેવામાં આવે છે.

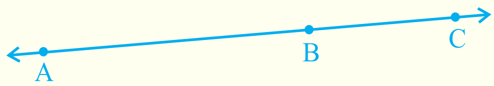
જો સ્વયંસિદ્ધ સત્યો પરથી એવું કોઈ વિધાન રચવું અસંભવ હોય જે કોઈ અન્ય સ્વયંસિદ્ધ સત્ય અથવા પહેલાં સાબિત કરેલ કોઈ વિધાનથી વિરોધાભાસી હોય તો સ્વયંસિદ્ધ સત્યોનું માળખુ સુસંગત કહેવાય છે. (જુઓ પરિશિષ્ટ 1.) આથી જો સ્વયંસિદ્ધ સત્યનું કોઈ માળખું આપેલ હોય, તો તે સુનિશ્ચિત કરવુ જરૂરી છે કે આ માળખું સુસંગત હોય.

યુક્લિડે પોતાની પૂર્વધારણા અને સ્વયંસિદ્ધ સત્યો આપ્યા પછી તેનો ઉપયોગ અન્ય પરિણામોને સાબિત કરવામાં કર્યો પછી આ પરિણામોનો ઉપયોગ કરીને તેણે અનુમાનિક તર્ક દ્વારા કેટલાંક પરિણામો સાબિત કર્યાં. જે વિધાનોને સાબિત કર્યાં, તે પ્રમેય કહેવાય છે. યુક્લિડે તેમનાં સ્વયંસિદ્ધ સત્યો, પૂર્વધારણાઓ વ્યાખ્યાઓ અને પહેલાં સાબિત કરેલાં

પ્રમેયોનો ઉપયોગ કરીને એક તર્કસંગત શ્રૃંખલામાં 465 સાધ્ય અનુમાનિત કર્યા. ભૂમિતિનાં કેટલાંક આગળનાં પ્રકરણોમાં તમે આ સ્વયંસિદ્ધ સત્યોનો ઉપયોગ કરીને કેટલાક પ્રમેયો સાબિત કરશો.

ચાલો આગળ આવનારાં ઉદાહરણોમાં જોઈએ કે યુક્લિડે કેટલાંક પરિણામો સાબિત કરવા માટે પોતાનાં સ્વયંસિદ્ધ સત્યો અને પૂર્વધારણાઓનો ઉપયોગ કેવી રીતે કર્યો.

ઉદાહરણ 1 : જો A, B અને C એક રેખા પર આવેલાં ત્રણ બિંદુઓ હોય અને B બિંદુ એ A અને C ની વચ્ચે આવેલ હોય, (જુઓ આકૃતિ 5.7.) તો સાબિત કરો કે AB + BC = AC.

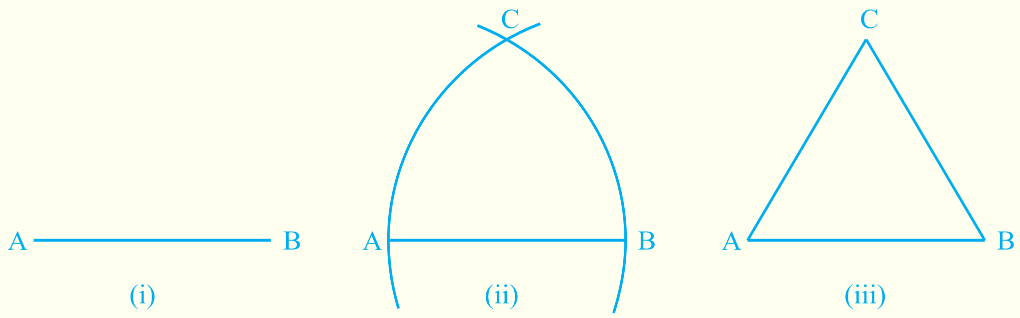


આકૃતિ 5.7

ઉકેલ : ઉપરની આકૃતિમાં AB + BC ની સાથે AC સંપાતિ છે. વળી યુક્લિડનું સ્વયંસિદ્ધ સત્ય (4) કહે છે કે વસ્તુઓ જો પરસ્પર બંધબેસતી હોય તે એકબીજાની બરાબર હોય છે. આથી તે સાબિત થાય છે કે AB + BC = AC છે. એ વાત ધ્યાનમાં રહે કે, આ ઉકેલમાં તે સ્વીકારી લેવામાં આવ્યું છે કે બે બિંદુઓમાંથી પસાર થતી એક અનન્ય રેખા હોય છે.

ઉદાહરણ 2 : સાબિત કરો કે આપેલા રેખાખંડ પર એક સમબાજુ ત્રિકોણની રચના કરી શકાય છે.

ઉકેલ : ઉપરના વિધાનમાં આપેલ લંબાઈનો રેખાખંડ AB છે. [જુઓ આકૃતિ 5.8(i).]



આકૃતિ 5.8

અહીંયાં તમારે કંઈક રચના કરવાની આવશ્યકતા છે. યુક્લિડની પૂર્વધારણા 3 નો ઉપયોગ કરીને તમે બિંદુ A ને કેન્દ્ર અને AB ને ત્રિજ્યા લઈ એક વર્તુળ રચી શકો છો. [જુઓ આકૃતિ 5.8(ii).] તે જ રીતે B ને કેન્દ્ર માનીને અને BA ત્રિજ્યા લઈને એક અન્ય વર્તુળને રચી શકાય છે. માની લો કે આ બંને વર્તુળ બિંદુ C માં છેદે છે. હવે રેખાખંડો AC અને BC દોરીને ΔABC બનાવો. [જુઓ આકૃતિ 5.8 (iii).]

આ માટે તમારે એ સાબિત કરવાનું છે કે આ ત્રિકોણ એક સમબાજુ ત્રિકોણ છે એટલે કે AB = AC = BC.

હવે, AB = AC છે. (એક વર્તુળની ત્રિજ્યા) (1)

તે જ રીતે AB = BC (એક જ વર્તુળની ત્રિજ્યા) (2)

ઉપરની બંને હકીકત અને યુક્લિડની પ્રથમ પૂર્વધારણા કે જે એક વસ્તુને સમાન હોય તેવી વસ્તુઓ એકબીજાને સમાન થાય તે પરથી તારવી શકાય કે $AB = BC = AC$ છે.

આથી, ΔABC એક સમબાજુ ત્રિકોણ છે.

એ નોંધીએ કે અહીં યુક્લિડે ક્યાંય બતાવ્યા વગર એ માની લીધું છે કે કેન્દ્રો A અને B ને લઈને બનાવેલા વર્તુળ પરસ્પર એક બિંદુમાં છેદે.

હવે આપણે એક પ્રમેય સાબિત કરીશું જે વિવિધ પરિણામોમાં અનેક વખત ઉપયોગમાં લેવાય છે.

પ્રમેય 5.1 : *બે ભિન્ન રેખાઓમાં એકથી વધુ સામાન્ય બિંદુ ન હોઈ શકે.*

સાબિતી : અહીં આપણને બે રેખાઓ l અને m આપેલ છે. આપણે એ સાબિત કરવું છે કે, l અને m માં એકથી વધુ બિંદુ સામાન્ય નથી.

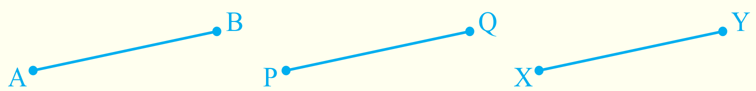
થોડી વાર માટે એવું ધારી લઈએ કે આ બે રેખાઓ બે ભિન્ન બિંદુઓ P અને Q માં એકબીજીને છેદે છે.

આ રીતે બે ભિન્ન બિંદુઓ P અને Q માંથી પસાર થતી બે રેખાઓ l અને m મળે છે. પરંતુ આ ધારણા પૂર્વધારણા 'આપેલ બે બિંદુઓમાંથી પસાર થતી એક અનન્ય રેખા હોય છે' ની વિરુદ્ધ છે. આથી આપણે જે ધારણાથી ચાલ્યા હતા કે 'બે રેખાઓ બે ભિન્ન બિંદુઓમાંથી પસાર થાય છે' તે ખોટી છે.

આનાથી આપણે શું નિષ્કર્ષ તારવી શકીએ? આપણે એ નિષ્કર્ષ તારવવા માટે પ્રેરાઈએ છીએ કે બે ભિન્ન રેખાઓમાં એકથી વધુ બિંદુ સામાન્ય ન હોય.

સ્વાધ્યાય 5.1

1. નીચે આપેલાં વિધાનોમાંથી કયાં વિધાનો સત્ય છે અને ક્યાં વિધાનો અસત્ય છે? તમારા જવાબ માટે કારણો આપો :
   (i) એક બિંદુમાંથી પસાર થતી માત્ર એક રેખા દોરી શકાય છે.
   (ii) બે ભિન્ન બિંદુઓમાંથી પસાર થતી અસંખ્ય રેખાઓ હોય છે.
   (iii) એક સાન્ત રેખાને બંને તરફ અનિશ્ચિત રીતે લંબાવી શકાય છે.
   (iv) જો બે વર્તુળ સમાન છે તો તેમની ત્રિજ્યાઓ સમાન હોય છે
   (v) આકૃતિ 5.9 માં જો $AB = PQ$ અને $PQ = XY$ છે, તો $AB = XY$ થાય.



આકૃતિ 5.9

2. નીચે આપેલાં પદોની વ્યાખ્યા આપો. શું તેના માટે કોઈ એવાં પદ છે જેને વ્યાખ્યાયિત કરવાની જરૂર છે ? એ કયા છે? અને તમે તેને કેવી રીતે વ્યાખ્યાયિત કરશો?
   (i) સમાંતર રેખાઓ (ii) લંબરેખાઓ (iii)રેખાખંડ (iv) વર્તુળની ત્રિજયા (v) ચોરસ

3. નીચે આપેલ બે પૂર્વધારણાઓનો વિચાર કરો :

(i) જો બે ભિન્ન બિંદુ A અને B આપ્યાં હોય, તો તેમની વચ્ચે હોય તેવું એક બિંદુ C મળે.

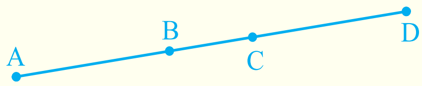
(ii) એક રેખા પર ન આવેલાં હોય તેવાં ઓછામાં ઓછા ત્રણ બિંદુઓ મળે.

શું આ પૂર્વધારણાઓમાં કોઈ અવ્યાખ્યાયિત પદ છે? શું આ પૂર્વધારણાઓ સુસંગત છે? શું આ પૂર્વધારણાઓ યુક્લિડની પૂર્વધારણામાંથી મળે છે? સ્પષ્ટ કરો.

4. જો AC = BC થાય તેવું બિંદુ A અને B ની વચ્ચે હોય, તો સાબિત કરો કે $AC = \frac{1}{2}AB$ છે. આકૃતિ દોરીને તેને સ્પષ્ટ કરો.

5. પ્રશ્ન 4 માં, બિંદુ C રેખાખંડ AB નું એક મધ્યબિંદુ કહેવાય છે. સાબિત કરો કે દરેક રેખાખંડને એક અને માત્ર એક જ મધ્યબિંદુ હોય.

6. આકૃતિ 5.10 માં જો AC = BD હોય, તો સાબિત કરો કે AB = CD છે.



આકૃતિ 5.10

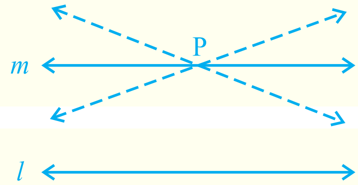
7. યુક્લિડનાં સ્વયંસિદ્ધ સત્યોની યાદીમાં આપેલ સ્વયંસિદ્ધ સત્ય 5 એક સનાતન સત્ય કેમ માનવામાં આવે છે? (યાદ રાખો કે આ પ્રશ્ન પાંચમી પૂર્વધારણા સાથે સંબંધિત નથી.)

5.3 યુક્લિડની પાંચમી પૂર્વધારણાને સમકક્ષ વિધાનો

ગણિતના ઇતિહાસમાં યુક્લિડની પાંચમી પૂર્વધારણા ખૂબ નોંધપાત્ર છે. વિભાગ 5.2 પરથી તેને ફરી યાદ કરો. આ પૂર્વધારણાના પરિણામ સ્વરૂપ જો બે રેખાઓને છેદતી રેખાની એક તરફના બંને અંતઃકોણોનો સરવાળો 180° થાય, તો બંને રેખાઓ ક્યારેય છેદી ન શકે. આ પૂર્વધારણાને સમકક્ષ અનેક વિધાનો છે. તેમાંથી એક **પ્લેફેરની પૂર્વધારણા** (*Playfair's Axiom*) છે. (તે સ્કૉટલૅન્ડના એક ગણિતશાસ્ત્રી *John Playfair* એ 1729 માં આપી હતી.) તે આ પ્રકારે છે.

દરેક રેખા l અને તેના પર ન હોય તેવા પ્રત્યેક બિંદુ P માટે એક અનન્ય રેખા m એવી હોય છે, જે P માંથી પસાર થાય છે અને l ને સમાંતર છે.

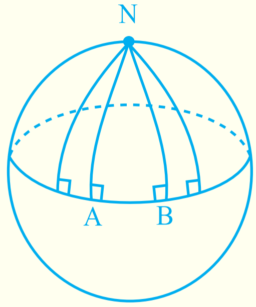
આકૃતિ 5.11 માં તમે જોઈ શકો છો કે P માંથી પસાર થતી બધી રેખાઓમાંથી માત્ર રેખા m જ l ને સમાંતર છે.



આકૃતિ 5.11

આ પરિણામને નીચે પ્રમાણેના સ્વરૂપમાં રજૂ કરી શકાય છે :

બે છેદતી ભિન્ન રેખાઓ એક જ રેખાને સમાંતર ન હોઈ શકે.



આકૃતિ 5.12

યુક્લિડને તેમનાં પ્રથમ 28 પ્રમેયો સાબિત કરવામાં પાંચમી પૂર્વધારણાની કોઈ જરૂર ન પડી. અનેક ગણિતશાસ્ત્રી અને યુક્લિડને પોતાને હવે વિશ્વાસ હતો કે પાંચમી પૂર્વધારણા હકીકતમાં એક પ્રમેય છે. તેને પ્રથમ ચાર પૂર્વધારણાઓ અને સ્વયંસિદ્ધ સત્યોની સહાયતાથી સાબિત કરી શકાય છે. પરંતુ પાંચમી પૂર્વધારણાને પ્રમેયના રૂપમાં સાબિત કરવામાં અસફળ રહ્યા. પરંતુ આ પ્રયત્નોને કારણે એક મહત્ત્વપૂર્ણ ઉપલબ્ધિ થઈ. આ ઉપલબ્ધિ સ્વરૂપે અનેક અન્ય ભૂમિતિઓની રચના થઈ. આ ભૂમિતિઓ યુક્લિડીય ભૂમિતિથી બહુ જ અલગ છે. તેને ***અયુક્લિડીય ભૂમિતિ*** *(Non-Euclidean geometry)* કહેવામાં આવે છે. આ ભૂમિતિઓની રચનાને સંકલ્પનાઓના ઇતિહાસમાં એક સીમાચિહ્ન માનવામાં આવે છે. કારણ કે ત્યાં સુધી દરેક વ્યક્તિ એ વિશ્વાસ રાખતી હતી કે યુક્લિડની ભૂમિતિ જ એક માત્ર ભૂમિતિ હતી અને સંપૂર્ણ વિશ્વ યુક્લિડમય ગોલીય છે. જે વિશ્વમાં આપણે રહીએ છીએ તેની ભૂમિતિ અયુકિલડિય છે. વાસ્તવમાં આ **ગોલીય ભૂમિતિ** *(spherical geometry)* કહેવાય છે. ગોલીય ભૂમિતિમાં રેખાઓ સીધી હોતી નથી. આ રેખાઓ **દીર્ઘ વર્તુળો**ના *(great circles)*ભાગ હોય છે. (તે એક ગોલક અને તેના કેન્દ્રમાંથી પસાર થઈને જતા સમતલોના છેદથી પ્રાપ્ત વર્તુળ હોય છે). આકૃતિ 5.12 માં વિષયવૃત્તીય રેખાઓ AN અને BN (જે એક ગોળાના દીર્ઘ વર્તુળના ભાગ છે) એક જ રેખા AB પર લંબ છે. પરંતુ તે એકબીજાને મળે છે છતાં રેખા AB ના એક જ તરફના અંતઃકોણોનો સરવાળો બે કાટકોણથી ઓછો નથી. (વાસ્તવમાં આ $90° + 90° = 180°$) છે. સાથે જ નોંધીએ કે ત્રિકોણ NAB ના ખૂણાનો સરવાળો $180°$ થી વધુ છે, કારણ કે $\angle A + \angle B = 180°$ છે. આ પ્રકારે યુકિલડીય ભૂમિતિ માત્ર એક જ સમતલમાં બનતી આકૃતિઓ માટે જ માન્ય છે. વક્ર સપાટીમાં તે નિષ્ફળ જાય છે.

હવે, એક ઉદાહરણ લઈએ.

ઉદાહરણ 3 : આપેલ વિધાન પર વિચાર કરો : એવી સીધી રેખાઓની જોડનું અસ્તિત્વ છે, જે એકબીજાથી પ્રત્યેક જગ્યાએથી સમાન અંતરે આવેલી હોય. શું આ યુક્લિડની પાંચમી પૂર્વધારણાનું એક પ્રત્યક્ષ પરિણામ છે? સ્પષ્ટ કરો.

ઉકેલ : એક રેખા l લો અને રેખા પર ન હોય તેવું એક બિંદુ P લો. યુક્લિડની પાંચમી પૂર્વધારણાને સમકક્ષ પ્લેફેરની પૂર્વધારણા પરથી. આપણે જાણીએ છીએ કે P માંથી પસાર થતી (l ને સમાંતર હોય તેવી) એક અનન્ય રેખા m છે .

હવે બિંદુનું એક રેખાથી અંતર તે બિંદુથી રેખા પર દોરેલાં લંબની લંબાઈ હોય છે. m પર આવેલ કોઈ બિંદુથી રેખા l સુધીનું અંતર અને l પર આવેલ કોઈ બિંદુથી રેખા m નું અંતર હંમેશાં સમાન થશે. આથી આ બંને રેખાઓ l અને m દરેક સ્થાન પર એકબીજાથી સમાન અંતરે છે.

નોંધ : આગળનાં કેટલાંક પ્રકરણોમાં તમે જે અભ્યાસ કરશો તે યુક્લિડની ભૂમિતિ હશે. પરંતુ તેમાં આપણા દ્વારા ઉપયોગ કરેલ પૂર્વધારણા અને પ્રમેય યુક્લિડનાં સ્વયંસિદ્ધ સત્યો અને પ્રમેયથી અલગ હોઈ શકે છે.

સ્વાધ્યાય 5.2

1. તમે યુક્લિડની પાંચમી પૂર્વધારણાને સરળતાથી સમજી શકાય તેમ કેવી રીતે લખી શકશો?

2. શું યુક્લિડની પાંચમી પૂર્વધારણા પરથી સમાંતર રેખાઓનું અસ્તિત્વ નક્કી થાય છે? સ્પષ્ટ કરો.

5.4 સારાંશ

આ પ્રકરણમાં આપણે નીચેના મુદ્દાઓનો અભ્યાસ કર્યો.

1. યુક્લિડે બિંદુ, રેખા અને સમતલને વ્યાખ્યાયિત કર્યા છે, પરંતુ ગણિતશાસ્ત્રીઓએ વ્યાખ્યાઓનો સ્વીકાર કર્યો નથી. આ માટે ભૂમિતિમાં તેને હવે અવ્યાખ્યાયિત પદોના રૂપમાં લેવામાં આવે છે.
2. સ્વયંસિદ્ધ સત્ય અને પૂર્વધારણાઓ એવી કલ્પનાઓ છે જે સ્પષ્ટ રીતે સનાતન સત્ય છે અને તેને સાબિત કરી ન શકાય.
3. પ્રમેયોની પ્રતિજ્ઞાઓને વ્યાખ્યાઓ, સ્વયંસિદ્ધ સત્યો, પહેલાં સાબિત કરેલાં પ્રમેયો અને આનુમાનિક તર્કનો ઉપયોગ કરીને સાબિત કર્યાં.
4. યુક્લિડની કેટલીક પૂર્વધારણાઓ

    (1) એક વસ્તુને સમાન હોય તેવી વસ્તુઓ એકબીજીને સમાન થાય.

    (2) સમાનમાં સમાન ઉમેરીએ તો સરવાળા સમાન રહે.

    (3) સમાનમાંથી સમાન બાદ કરીએ તો બાદબાકી સમાન રહે.

    (4) એકબીજા પર બંધબેસતી આવતી વસ્તુઓ એકબીજીને સમાન રહે.

    (5) આખું તેના ભાગ કરતાં મોટું હોય છે.

    (6) સરખી વસ્તુઓના બમણા એકબીજાને સમાન હોય છે.

    (7) એક જ વસ્તુઓના અડધાં એકબીજાને સમાન થાય.

5. યુક્લિડની પૂર્વધારણાઓ :

    પૂર્વધારણા 1 : એક બિંદુમાંથી બીજા બિંદુ સુધી એક સીધી રેખા દોરી શકાય.

    પૂર્વધારણા 2 : સાન્ત રેખાને અનંત સુધી લંબાવી શકાય.

    પૂર્વધારણા 3 : કોઈ પણ બિંદુને કેન્દ્ર લઈ તથા કોઈપણ લંબાઈની ત્રિજ્યા લઈ વર્તુળ રચી શકાય.

    પૂર્વધારણા 4 : બધા જ કાટખૂણા એકબીજાને સમાન હોય.

    પૂર્વધારણા 5 : જો બે રેખાઓને કોઈ ત્રીજી રેખા છેદે અને આ રેખાની એક જ બાજુ તરફના બે અંતઃકોણોનો સરવાળો બે કાટખૂણા કરતાં ઓછો હોય, તો પ્રથમ બે રેખાઓને આ ખૂણાઓ તરફ અનંત સુધી લંબાવતાં તેઓ એકબીજીને છેદે છે.

6. યુક્લિડની પાંચમી પૂર્વધારણાને સમકક્ષ વિધાનો.

    (i) દરેક રેખા l અને તેના પર ન હોય તેવા પ્રત્યેક બિંદુ P ને સંગત P માંથી પસાર થતી અને l ને સમાંતર હોય તેવી એક અનન્ય રેખા m મળે.

    (ii) બે ભિન્ન અને એકબીજીને છેદતી રેખાઓ એક જ રેખાને સમાંતર હોઈ શકે નહિ.

7. યુક્લિડની પાંચમી પૂર્વધારણાને સાબિત કરવા માટે પ્રથમ ચાર પૂર્વધારણાનો ઉપયોગ નિષ્ફળ ગયો પરંતુ તેને લીધે બીજી અનેક ભૂમિતિઓની શોધ થઈ તેમને અયુક્લિડિય ભૂમિતિ કહેવામાં આવે છે.