അധ്യായം 3

Y7F6K2

നേർരേഖാചലനം (MOTION IN A STRAIGHT LINE)

3.1 ആമുഖം
3.2 സ്ഥാനം, പാതദൈർഘ്യം, സ്ഥാനാന്തരം
3.3 ശരാശരി പ്രവേഗവും ശരാശരി വേഗവും
3.4 തൽക്ഷണപ്രവേഗവും തൽക്ഷണവേഗവും
3.5 ത്വരണം
3.6 സമചലനത്തിന്റെ ഗതിക സമവാക്യങ്ങൾ
3.7 ആപേക്ഷികപ്രവേഗം
സംഗ്രഹം
വിചിന്തനവിഷയങ്ങൾ
പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ
അധിക പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ
അനുബന്ധം 3.1

3.1 ആമുഖം

പ്രപഞ്ചത്തിലുള്ള എല്ലാറ്റിലും ചലനം സർവസാധാരണമാണ്. നമ്മൾ നടക്കുന്നതും ഓടുന്നതും സൈക്കിൾസവാരി നടത്തുന്നതും ചലനങ്ങളാണ്. ഉറങ്ങുമ്പോൾ പോലും വായു നമ്മുടെ ശ്വാസകോശത്തിനകത്തേക്കും പുറത്തേക്കും ചലിക്കുകയും ധമനികളിലൂടെയും സിരകളിലൂടെയും രക്തം ഒഴുകുകയും ചെയ്യുന്നു. മരങ്ങളിൽ നിന്ന് ഇലകൾ പൊഴിയുന്നതും അണക്കെട്ടിൽനിന്നു വെള്ളം താഴേക്ക് ഒഴുകുന്നതും കാണാറുണ്ടല്ലോ. ആളുകളെ ഒരിടത്തുനിന്നു മറ്റൊരിടത്തേക്ക് വഹിച്ചുകൊണ്ടുപോകുന്ന വാഹനങ്ങളും വിമാനങ്ങളും ചലനത്തിലാണ്. ഭൂമി ഓരോ ഇരുപത്തിനാലു മണിക്കൂറിലും ഒരു പ്രാവശ്യം സ്വയം ഭ്രമണം ചെയ്യുന്നു. സൂര്യനു ചുറ്റും വർഷത്തിലൊരിക്കൽ പരിക്രമണം ചെയ്യുന്നതോടൊപ്പം സൂര്യൻ ആകാശഗംഗയിലൂടെ സ്വയം ചലിക്കുകയും ആകാശഗംഗ മറ്റു ഗാലക്സികളുടെ കൂട്ടത്തിനുള്ളിൽ ചലിച്ചുകൊണ്ടിരിക്കുകയുമാണ്.

സമയത്തിനനുസരിച്ച് ഒരു വസ്തുവിനുണ്ടാകുന്ന സ്ഥാനമാറ്റമാണ് ചലനം. സമയത്തിനനുസരിച്ചു സ്ഥാനം മാറുന്നതെങ്ങനെയാണ്? ഈ അധ്യായത്തിൽ, ചലനത്തെ വിശദീകരിക്കുന്നതെങ്ങനെയാണെന്ന് നമുക്ക് പഠിക്കാം. ഇതിനായി, പ്രവേഗത്തിന്റെയും ത്വരണത്തിന്റെയും ആശയങ്ങൾ വികസിപ്പിക്കേണ്ടതുണ്ട്.

ഈ അധ്യായത്തിൽ നമ്മുടെ പഠനം വസ്തുക്കളുടെ നേർരേഖാചലനമെന്നറിയപ്പെടുന്ന നേർവരയിലൂടെയുള്ള ചലനത്തിലേക്ക് പരിമിതപ്പെടുത്തുന്നു. സമത്വരണത്തോടെയുള്ള നേർരേഖാചലനത്തിൽ, ഒരു കൂട്ടം ലളിതമായ സമവാക്യങ്ങൾ രൂപീകരിക്കാൻ കഴിയും. ചലനത്തിന്റെ ആപേക്ഷിക സ്വഭാവം മനസ്സിലാക്കാൻ ആപേക്ഷികപ്രവേഗം എന്ന ആശയവും ഇവിടെ പരിചയപ്പെടുന്നു.

നമ്മുടെ ചർച്ചകളിൽ എല്ലാം ചലനത്തിലുള്ള വസ്തുക്കളെ പോയിന്റ് വസ്തുക്കളായി പരിഗണിക്കാം. വസ്തുവിന്റെ വലുപ്പം ഒരു ഉചിതമായ കാലയളവിൽ അത് സഞ്ചരിക്കുന്ന ദൂരവുമായി താരതമ്യം ചെയ്യുമ്പോൾ വളരെ ചെറുതായിരുന്നാൽ മാത്രമേ ഈ പരിഗണന സാധുവാകുകയുള്ളൂ. നിത്യജീവിതത്തിലെ ധാരാളം സന്ദർഭങ്ങളിൽ വസ്തുക്കളുടെ വലുപ്പത്തെ അവഗണിച്ച് വലിയ പിശകു വരാതെ പോയിന്റ് വസ്തുക്കളായി പരിഗണിക്കാം.

ചലനപഠനത്തിൽ (Kinematics) ചലനത്തിനു നിദാനമായ കാരണങ്ങളെക്കുറിച്ച് പ്രതിപാദിക്കാതെ ചലനത്തെ വിവരിക്കാനുള്ള മാർഗങ്ങളെപ്പറ്റി പഠിക്കുന്നു. നിത്യജീവിതത്തിൽ നാം കാണുന്ന മിക്ക ചലനങ്ങളെയും ചലിക്കുന്ന വസ്തുവിന്റെ വലുപ്പത്തെ അവഗണിച്ച് ഓരോ ബിന്ദുക്കളുടെ ചലനമായി സങ്കൽപ്പിക്കാൻ കഴിയും.

3.2 സ്ഥാനം, പാതദൈർഘ്യം, സ്ഥാനാന്തരം (Position, Pathlength, Displacement)

ചലനമെന്നത് സമയത്തിനനുസരിച്ചുള്ള സ്ഥാനമാറ്റമാണെന്നു നിങ്ങൾക്കറിയാമല്ലോ? സ്ഥാനം വ്യക്തമാക്കാൻ ഒരു ആധാരബിന്ദുവും അത് കേന്ദ്രമായുള്ള ഒരു കൂട്ടം അക്ഷങ്ങളും ആവശ്യമാണ്. ഇതിനായി പരസ്പരം ലംബമായ X, Y, Z എന്ന് രേഖപ്പെടുത്തിയ അക്ഷങ്ങളുള്ള ഒരു നിർദേശാങ്കവ്യവസ്ഥ (rectangular co-ordinates system) വിഭാവനം ചെയ്യുന്നതാണ് ഏറ്റവും സൗകര്യപ്രദം. ഈ മൂന്ന് അക്ഷങ്ങളും കൂടിച്ചേരുന്ന ബിന്ദുവാണ് ഈ അവലംബകത്തിന്റെ മൂലബിന്ദു, O (origin). ഈ അവലംബകത്തെ ആധാരമാക്കിയുള്ള നിർദേശാങ്കങ്ങൾ (co-ordinates) (x, y, z) ഒരു വസ്തുവിന്റെ സ്ഥാനം നിർണയിക്കുന്നു. സമയം അളക്കുന്നതിനായി ഒരു ക്ലോക്കിനെ ഈ വ്യവസ്ഥയിൽ ഉൾപ്പെടുത്തുന്നു. ക്ലോക്കുൾപ്പെട്ട *x, y, z* അക്കങ്ങളുടെ ഈ വ്യവസ്ഥയാണ് അവലംബകം (frame of reference) ആയി പരിഗണിക്കുന്നത്.

ഒരു വസ്തുവിന്റെ ഒന്നോ അതിലധികമോ നിർദ്ദേശാങ്കങ്ങൾ സമയം മാറുന്നതിനനുസരിച്ച് മാറിയാൽ, ആ വസ്തു ചലനത്തിലാണ്. ഇവ മാറുന്നില്ലെങ്കിൽ വസ്തു ആ അവലംബകത്തിൽ സ്ഥിരാവസ്ഥയിലാണെന്നു പറയാം.

അവലംബകത്തിലെ ഒരു കൂട്ടം അക്ഷരങ്ങൾ തിരഞ്ഞെടുക്കുന്നത് സാഹചര്യങ്ങളെ ആശ്രയിച്ചാണ്. ഉദാഹരണമായി, ഒരു ഏകമാന ചലനം വിവരിക്കാൻ, നമുക്ക് ഒരു അക്ഷം മാത്രമേ ആവശ്യമുള്ളൂ. എന്നാൽ രണ്ടോ മൂന്നോ മാനങ്ങളുള്ള ചലനം വിവരിക്കാൻ രണ്ടോ മൂന്നോ അക്ഷങ്ങൾ ആവശ്യമായി വരുന്നു.

ഒരു വസ്തുവിന്റെ അവസ്ഥയുടെ വിവരണം അതിനുവേണ്ടി തിരഞ്ഞെടുത്തിരിക്കുന്ന അവലംബകത്തെ ആശ്രയിക്കുന്നു. ഉദാഹരണമായി, റോഡിലൂടെ ചലിച്ചുകൊണ്ടിരിക്കുന്ന കാറിന്റെ ചലനം വിവരിക്കുന്നത് നിങ്ങളുമായോ തറനിരപ്പുമായോ ബന്ധിച്ചിരിക്കുന്ന ഒരു അവലംബകത്തിന് അനുസൃതമായാണ്. പക്ഷേ, കാറിനകത്തിരിക്കുന്ന ഒരാളുമായി ബന്ധിച്ചിട്ടുള്ള അവലംബകത്തിനനുസരിച്ച്, ആ കാർ സ്ഥിരാവസ്ഥയിലാണ്.

നേർരേഖാചലനം വിവരിക്കാൻ വസ്തുവിന്റെ പാതയുമായി ചേർന്നിരിക്കുന്ന രീതിയിൽ നമുക്ക് ഒരു അക്ഷം (ഉദാഹരണം x അക്ഷം) സ്വീകരിക്കാം. പിന്നീട് ചിത്രം 3.1 ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതു പോലെ ആ വസ്തുവിന്റെ സ്ഥാനം സൗകര്യപ്രദമായി തിരഞ്ഞെടുത്ത ഒരു മൂലബിന്ദു (ഉദാഹരണം O) ആധാരമാക്കി അളക്കുമ്പോൾ അതിന്റെ വലതുവശത്തുള്ള സ്ഥാനങ്ങൾ പോസിറ്റീവായും ഇടതുവശത്തുള്ള സ്ഥാനങ്ങൾ നെഗറ്റീവായും പരിഗണിക്കും. ഈ രീതിയനുസരിച്ച് ചിത്രം 3.1 ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന P, Q എന്ന ബിന്ദുക്കളുടെ സ്ഥാനത്തിന്റെ നിർദേശാങ്കങ്ങൾ ചിത്രം 3.1 ൽ തന്നിരിക്കുന്നത് +360 m, +240 m എന്നിങ്ങനെയാണ്.

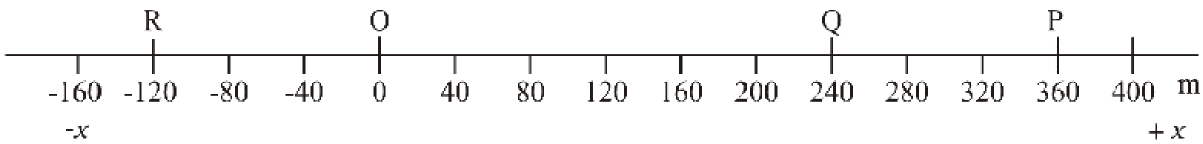
ഇതുപോലെ R എന്ന ബിന്ദുവിന്റെ സ്ഥാനനിർദേശാങ്കം എന്നത് -120 m ആകുന്നു.

പാതദൈർഘ്യം (Path length)

കാറിന്റെ നേർരേഖാചലനം പരിഗണിക്കുക. കാറിന്റെ ചലനപാത x അക്ഷമായും അത് സഞ്ചരിക്കാൻ തുടങ്ങുന്ന ബിന്ദുവിനെ മൂലബിന്ദുവായും പരിഗണിക്കാം. അതായത്, $t = 0$ ആയിരുന്നപ്പോൾ കാറിന്റെ സ്ഥാനം $x = 0$ ആയിരുന്നു (ചിത്രം3.1). P,Q,R എന്നിവ കാറിന്റെ പല ക്ഷണങ്ങളിലുള്ള സ്ഥാനങ്ങളെ പ്രതിനിധാനം ചെയ്യുന്നു. ചലനത്തിന്റെ രണ്ട് സന്ദർഭങ്ങൾ പരിഗണിക്കാം. ആദ്യത്തെ സന്ദർഭത്തിൽ, കാർ O യിൽ നിന്നു P വരെ സഞ്ചരിക്കുന്നു. അപ്പോൾ കാർ സഞ്ചരിക്കുന്ന ദൂരം OP = +360 മീറ്ററാണ്. ഈ ദൂരത്തെ കാർ സഞ്ചരിച്ച പാതദൈർഘ്യം എന്നു വിളിക്കുന്നു. രണ്ടാമത്തെ സന്ദർഭത്തിൽ കാർ O യിൽ നിന്നു P വരെ സഞ്ചരിക്കുകയും അവിടെനിന്നു Q യിലെത്തുകയും ചെയ്യുന്നു. ഈ ഘട്ടത്തിൽ സഞ്ചരിച്ച പാതദൈർഘ്യം OP + PQ = +360 മീറ്റർ + (+120 മീറ്റർ) = +480 മീറ്റർ ആകുന്നു. പാതദൈർഘ്യം പരിമാണം മാത്രമുള്ളതും ദിശയില്ലാത്തതുമായ ഒരു അദിശ അളവാണ് (അധ്യായം 4 കാണുക).

സ്ഥാനാന്തരം (Displacement)

മറ്റൊരു അളവായ സ്ഥാനാന്തരത്തെ സ്ഥാനത്തിലുള്ളമാറ്റമായി നിർവചിക്കുന്നത് ഉചിതമാണ്. x_1, x_2 എന്നത് യഥാക്രമം t_1, t_2 എന്നീ സമയങ്ങളിലുള്ള



ചിത്രം 3.1 x അക്ഷം, മൂലബിന്ദു ഇവ ഉൾപ്പെടെ വ്യത്യസ്തസമയങ്ങളിലുള്ള ഒരു കാറിന്റെ സ്ഥാനങ്ങൾ

ഒരു വസ്തുവിന്റെ സ്ഥാനങ്ങളാണെന്ന് കരുതുക. അപ്പോൾ അതിന്റെ സ്ഥാനാന്തരം Δx, അവസാനത്തെയും ആദ്യത്തെയും സ്ഥാനങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസമാണ്. അതായത്

$$\Delta x = (x_2 - x_1)$$

(ഒരു അളവിലുണ്ടായ വ്യത്യാസത്തെ ഗ്രീക്ക് ലിപിയായ (Δx) ഉപയോഗിച്ച് സൂചിപ്പിക്കുന്നു)

$x_2 > x_1$ ആയാൽ Δx പോസിറ്റീവും $x_2 < x_1$ ആയാൽ Δx നെഗറ്റീവും ആകുന്നു.

സ്ഥാനാന്തരത്തിന് പരിമാണവും ദിശയുമുണ്ട്. അങ്ങനെയുള്ള അളവുകളെ സദിശങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ചാണ് സൂചിപ്പിക്കുന്നത്. സദിശങ്ങളെക്കുറിച്ച് അടുത്ത അധ്യായത്തിൽ വിശദീകരിക്കും. ഇവിടെ പ്രതിപാദിക്കുന്നത് നേർരേഖയിലൂടെയുള്ള ഒരു വസ്തുവിന്റെ ചലനമാണ്. ഇതിനെ നേർരേഖാചലനം (rectilinear motion) എന്നു വിളിക്കുന്നു. ഏകമാനചലനത്തിൽ ഒരു വസ്തുവിന് രണ്ടു ദിശകളിൽ മാത്രമേ ചലിക്കാൻ സാധിക്കുകയുള്ളു (പിന്നോട്ടും മുന്നോട്ടും അല്ലെങ്കിൽ, മുകളിലേക്കും താഴേക്കും). ഈ രണ്ട് ദിശകളെയും +, – എന്നീ ചിഹ്നങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് എളുപ്പത്തിൽ വ്യക്തമാക്കാൻ സാധിക്കും. ഉദാഹരണമായി, കാറിന് O യിൽ നിന്നു P വരെ ചലിക്കാനുള്ള സ്ഥാനാന്തരം;

$$\Delta x = x_2 - x_1 = (+360 \text{ m}) - 0 \text{ m} = +360 \text{ m}$$

360m പരിമാണമുള്ള ഈ സ്ഥാനാന്തരത്തെ പോസിറ്റീവ് x ദിശയിൽ + ചിഹ്നം ഉപയോഗിച്ച് സൂചിപ്പിക്കുന്നു. സമാനമായി, കാറിന്റെ P യിൽനിന്നു Q ലേക്കുള്ള സ്ഥാനാന്തരം 240m – 360m = –120 m ആണ്. നെഗറ്റീവ് ചിഹ്നം സൂചിപ്പിക്കുന്നത് സ്ഥാനാന്തരത്തിന്റെ ദിശയാണ്. അതായത്, വസ്തുക്കളുടെ ഒരു ഏകമാനത്തിലുള്ള ചലനം വിശദമായി പ്രതിപാദിക്കാൻ അവ പ്രത്യേകമായി സദിശമായി അടയാളപ്പെടുത്തേണ്ടതില്ല.

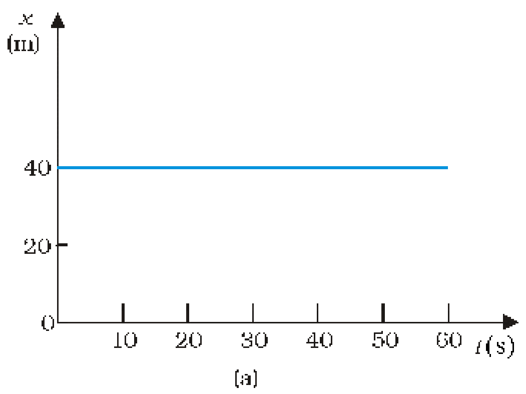
ഒരു വസ്തുവിന്റെ സ്ഥാനാന്തരത്തിന്റെ പരിമാണം അതു സഞ്ചരിച്ച പാതദൈർഘ്യത്തിനു തുല്യമാവുകയോ തുല്യമാവാതിരിക്കുകയോ ആവാം. ഉദാഹരണമായി, O യിൽ നിന്നു P വരെയുള്ള കാറിന്റെ ചലനപ്രക്രിയയിൽ പാതദൈർഘ്യവും സ്ഥാനാന്തരവും +360m ആണ്. ഈ സന്ദർഭത്തിൽ സ്ഥാനാന്തരത്തിന്റെയും (360 m) പാതദൈർഘ്യത്തിന്റെയും (360 m) പരിമാണം തുല്യമാണ്. പക്ഷേ, കാറിന്റെ O യിൽ നിന്നു P വരെയും തിരിച്ച് Q വിലേക്കുമുള്ള ചലനം പരിഗണിക്കുക. ഇവിടെ പാതദൈർഘ്യം = (+360 m) + (+120 m) = (+480 m) ആണ്. എന്നാൽ സ്ഥാനാന്തരം = (+240 m) – (0 m) = +240 m ആണ്. അതായത് സ്ഥാനാന്തരത്തിന്റെയും (240 m) പാതദൈർഘ്യത്തിന്റെയും (480 m) പരിമാണം തുല്യമല്ല.

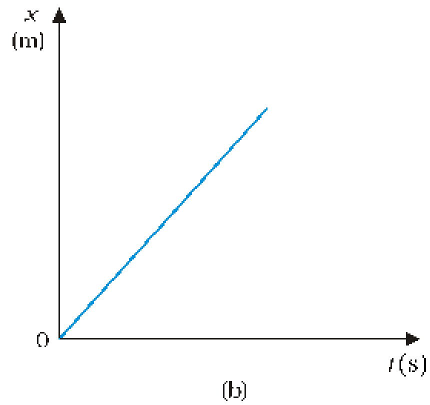
ഒരു ചലനഗതിയിൽ (course of motion) സ്ഥാനാന്തരത്തിന്റെ പരിമാണം പൂജ്യമാവാം. എന്നാൽ ഇവിടെയുള്ള പാതദൈർഘ്യം പൂജ്യമാവില്ല. ഉദാഹരണമായി, കാർ O യിൽ നിന്നു ചലനം തുടങ്ങി P യിലെത്തി, O യിലേക്ക് മടങ്ങിവന്നാൽ, അവസാനത്തെയും ആദ്യത്തെയും സ്ഥാനങ്ങൾ യോജിക്കുന്നതിനാൽ സ്ഥാനാന്തരം പൂജ്യമാകുന്നു. പക്ഷേ, ഇവിടെ ഈ യാത്രയുടെ പാതദൈർഘ്യം OP + PO = 360 m + 360 m = 720 m ആണ്.

ഒരു വസ്തുവിന്റെ ചലനത്തെ സ്ഥാന-സമയ ഗ്രാഫ് ഉപയോഗിച്ച് സൂചിപ്പിക്കാം എന്നു നിങ്ങൾ നേരത്തേ ഗ്രഹിച്ചിട്ടുണ്ടല്ലോ. അങ്ങനെയുള്ള ഒരു ഗ്രാഫ് വസ്തുവിന്റെ ചലനത്തെ സൂചിപ്പിക്കാനും വിശകലനം ചെയ്യാനുമുള്ള ശക്തമായ ഒരു ഉപാധിയാണ്. X അക്ഷത്തിലൂടെയുള്ള ഒരു നേർരേഖാചലനത്തിൽ, X നിർദേശാങ്കങ്ങൾ മാത്രമേ സമയാനുസൃതമായി മാറുകയുള്ളൂ. അപ്പോൾ നമുക്കൊരു x-t ഗ്രാഫ് ലഭിക്കുന്നു. ആദ്യം ലളിതമായി സ്ഥിരാവസ്ഥയിലുള്ള ഒരു വസ്തു പരിഗണിക്കാം. ഉദാ. x = 40 m ൽ നിശ്ചലമായി നിൽക്കുന്ന ഒരു കാർ. അതിന്റെ സ്ഥാന-സമയ ഗ്രാഫ് ചിത്രം 3.2 (a) യിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ സമയത്തിന്റെ അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമായ ഒരു നേർവരയാണ്.

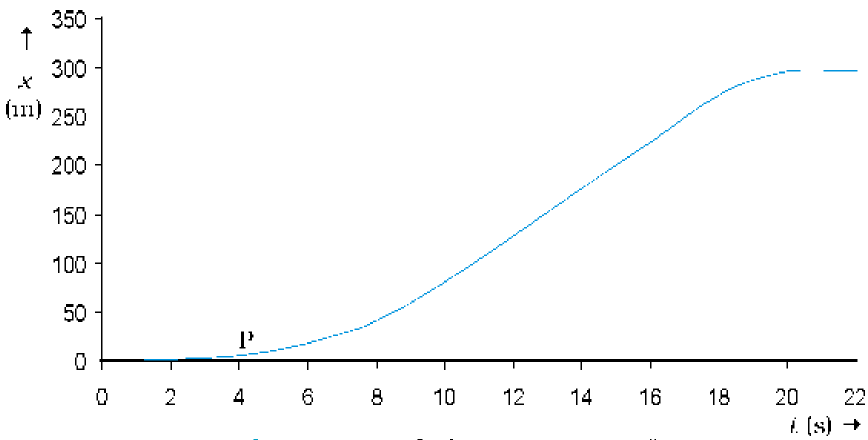
നേർരേഖയിൽ സഞ്ചരിക്കുന്ന ഒരു വസ്തു, സമയത്തിന്റെ തുല്യ ഇടവേളകളിൽ തുല്യദൂരങ്ങൾ സഞ്ചരിച്ചാൽ അതിനെ നേർരേഖയിലൂടെയുള്ള സമചലനം (uniform motion along a straight line) എന്നു പറയുന്നു. ചിത്രം 3.2 (b) അങ്ങനെയുള്ള ചലനത്തിന്റെ സ്ഥാന-സമയ ഗ്രാഫാണ്.

t = 0 സമയത്ത് മൂലബിന്ദു O യിൽ സ്ഥിരാവസ്ഥയിലായിരുന്ന ഒരു കാർ ചലിച്ചു t = 10s വരെ അതിന് വേഗം കൂടുകയും തുടർന്ന് സമവേഗത്തിൽ t = 18s വരെ സഞ്ചരിക്കുകയും പിന്നീട് ബ്രേക്ക് ചെയ്തപ്പോൾ t = 20s ൽ x = 296m വരെ സഞ്ചരിച്ച് ചലനം നിലയ്ക്കുകയും ചെയ്തുവെന്നു കരുതുക. ഈ പ്രക്രിയയുടെ സ്ഥാന-സമയഗ്രാഫാണ് ചിത്രം 3.3 ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്. ഈ ഗ്രാഫിനെ സംബന്ധിച്ച് തുടർന്നുള്ള ഭാഗങ്ങളിൽ പഠിക്കുന്നതാണ്.





ചിത്രം3.2 a) നിശ്ചലാവസ്ഥയിലുള്ള ഒരു വസ്തു, b) സമചലനത്തിലുള്ള ഒരു വസ്തു എന്നിവയുടെ സ്ഥാന സമയ ഗ്രാഫ്



ചിത്രം 3.3 ഒരു കാറിന്റെ സ്ഥാന-സമയ ഗ്രാഫ്

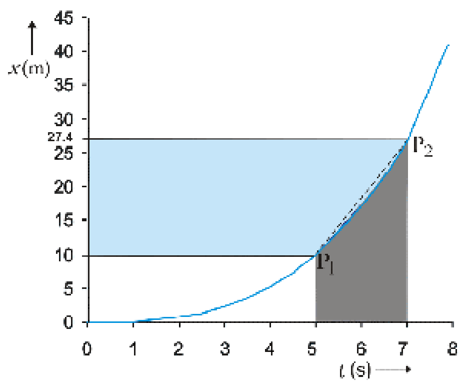
3.3 ശരാശരി പ്രവേഗവും ശരാശരി വേഗവും (Average velocity and average speed)

ഒരു വസ്തു സഞ്ചരിക്കുമ്പോൾ അതിന്റെ സ്ഥാനം സമയാനുസൃതമായി മാറുന്നു. പക്ഷേ, എത്ര വേഗത്തിൽ ഏതു ദിശയിലാണ് സ്ഥാനം സമയത്തിനനുസരിച്ച് മാറുന്നത്? ഇത് വിശദമാക്കാനാണ് ശരാശരി പ്രവേഗം എന്ന ഒരു അളവ് നിർവചിക്കുന്നത്. സ്ഥാനാന്തരം (Δx) നെ, സമയഇടവേള(Δt), കൊണ്ട് ഹരിക്കുന്നതിനെ ശരാശരി പ്രവേഗം എന്നു നിർവചിക്കുന്നു.

$$\bar{v} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad (3.1)$$

ഇവിടെ x_1, x_2 എന്നിവ യഥാക്രമം t_1, t_2 എന്നീ സമയങ്ങളിൽ ആ വസ്തുവിനുള്ള സ്ഥാനങ്ങളാണ്. ഇവിടെ പ്രവേഗത്തിന്റെ ചിഹ്നത്തിനു മുകളിലുള്ള രേഖ. ശരാശരി അളവിനെ സൂചിപ്പിക്കാൻ ഉപയോഗിക്കുന്നു. പ്രവേഗത്തിന്റെ SI യൂണിറ്റ് m/s അല്ലെങ്കിൽ ms^{-1} ആണെങ്കിലും km/hr എന്ന യൂണിറ്റാണ് സാധാരണ ഉപയോഗിക്കുന്നത്.

സ്ഥാനാന്തരം പോലെ, ശരാശരി പ്രവേഗവും ഒരു സദിശ അളവാണ്. പക്ഷേ, നേരത്തേ വിശദീകരിച്ചതുപോലെ നേർരേഖാചലനത്തിന് സദിശത്തിന്റെ ദിശാസൂചകമായിട്ട് "+" അല്ലെങ്കിൽ "-" അടയാളങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കാവുന്നതാണ്. ഈ അധ്യായത്തിൽ പ്രവേഗത്തിന് സദിശ ചിഹ്നം ഉപയോഗിക്കേണ്ട ആവശ്യമില്ല.



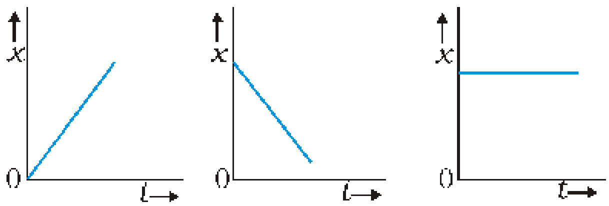
ചിത്രം. 3.4 ശരാശരി പ്രവേഗം വര P_1P_2 ന്റെ ചരിവാണ്.

ചിത്രം 3.3 ൽ തന്നിരിക്കുന്ന ഒരു കാറിന്റെ ചലനം പരിഗണിക്കുക. സ്ഥാന-സമയ ഗ്രാഫിൽ t = 0 സെക്കന്റിനും t = 8 സെക്കന്റിനും ഇടയിലുള്ള ഭാഗത്തെ ചിത്രം 3.4 ൽ വലുതാക്കി കാണിച്ചിരിക്കുന്നു. പ്ലോട്ടിൽ കാണുന്നതുപോലെ, സമയം t = 5 സെക്കന്റിനും t = 7 സെക്കന്റിനും ഇടയിലുള്ള കാറിന്റെ ശരാശരി പ്രവേഗം എന്നത്:

$$\bar{v} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{(27.4 - 10.0)\,\mathrm{m}}{(7 - 5)\,\mathrm{s}} = 8.7\ \mathrm{m\,s^{-1}}$$

ഇത് ജ്യാമിതീയമായി, ചിത്രം. 3.4 ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ ആദ്യത്തെ സ്ഥാനം P_1 നെ അവസാനത്തെ സ്ഥാനം P_2 വുമായി ബന്ധിക്കുന്ന P_1P_2 എന്ന നേർവരയുടെ ചരിവാണ്.

സ്ഥാനാന്തരത്തിന്റെ ചിഹ്നമനുസരിച്ച് ശരാശരി പ്രവേഗം പോസിറ്റീവോ നെഗറ്റീവോ ആകാം. സ്ഥാനാന്തരം പൂജ്യമായാൽ ശരാശരി പ്രവേഗവും പൂജ്യമായിരിക്കും. ചിത്രം. (3.5 a) ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നത് ഒരു വസ്തു പോസിറ്റീവ് പ്രവേഗത്തിൽ സഞ്ചരിക്കുമ്പോഴും (ചിത്രം. 3.5 b) നെഗറ്റീവ് പ്രവേഗത്തിൽ സഞ്ചരിക്കുമ്പോഴും (ചിത്രം. 3.5 c) സ്ഥിരാവസ്ഥയിൽ ആയിരിക്കുമ്പോഴു മുള്ള ഗ്രാഫുകളാണ്.



(a) (b) (c)

ചിത്രം. 3.5 ഒരു വസ്തുവിന്റെ സ്ഥാന-സമയ ഗ്രാഫ് a) പോസിറ്റീവ് പ്രവേഗത്തിൽ സഞ്ചരിക്കുന്നു. b) നെഗറ്റീവ് പ്രവേഗത്തിൽ സഞ്ചരിക്കുന്നു. c) സ്ഥിരാവസ്ഥയിൽ.

മുകളിൽ നിർവചിച്ചിരിക്കുന്ന ശരാശരി പ്രവേഗത്തിൽ വസ്തുവിന്റെ സ്ഥാനാന്തരം മാത്രമേ ഉൾപ്പെട്ടിരിക്കുന്നുള്ളൂ. സ്ഥാനാന്തരത്തിന്റെ പരിമാണം ശരിയായ പാതദൈർഘ്യത്തിൽനിന്നു വ്യത്യാസപ്പെടാം എന്നു നാം നേരത്തെ കണ്ടിരുന്നല്ലോ. ശരിയായ പാതയിലൂടെയുള്ള ചലനനിരക്ക് വിവരിക്കാനായി, നമുക്ക് മറ്റൊരു അളവായ ശരാശരി വേഗം പരിചയപ്പെടാം.

ശരാശരി വേഗത്തെ ആകെ സഞ്ചരിച്ച പാതദൈർഘ്യത്തിനെ ചലനം സംഭവിക്കുന്നതിനിടയിൽ എടുത്ത ആകെ സമയംകൊണ്ട് ഹരിക്കുന്നതായി നിർവചിക്കാം. അതായത്

$$\text{ശരാശരിവേഗത} = \frac{\text{ആകെ പാതദൈർഘ്യം}}{\text{ആകെ സമയപരിധി}} \qquad (3.2)$$

ശരാശരി വേഗത്തിന്റെ യൂണിറ്റ് ശരാശരി പ്രവേഗത്തിന്റെ അതേ യൂണിറ്റാണ് ($\mathrm{m\,s^{-1}}$). ശരാശരി വേഗം നമുക്ക് വസ്തു സഞ്ചരിക്കുന്ന ചലനദിശയെക്കുറിച്ച് ഒരു അറിവും നൽകുന്നില്ല. അതായത്, ഇത് എല്ലായ്പ്പോഴും പോസിറ്റീവാണ് (ശരാശരി പ്രവേഗം പോസിറ്റീവോ നെഗറ്റീവോ ആകാം). വസ്തുവിന്റെ ചലനം ഒരു നേർവരയിലോ ഒരേ ദിശയിലോ ആയാൽ, സ്ഥാനാന്തരം ആകെ പാതദൈർഘ്യത്തിന് തുല്യമാകും. ആ അവസ്ഥയിൽ ശരാശരി പ്രവേഗത്തിന്റെ പരിമാണം ശരാശരി വേഗത്തിന്റെ പരിമാണത്തിനു തുല്യമായിരിക്കും. ഇത് എല്ലായ്പ്പോഴും സാധ്യമാകുന്നതല്ല എന്ന് താഴെ പ്പറയുന്ന ഉദാഹരണത്തിലൂടെ കാണാൻ സാധിക്കും.

ഉദാഹരണം 3.1:

ഒരു കാർ OP എന്ന ഒരു നേർവരയിലൂടെ സഞ്ചരിക്കുന്നതാണ് ചിത്രം 3.1 ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നു. അത് O യിൽ നിന്നു P വരെ 18 സെക്കന്റിലും തിരിച്ച് P യിൽ നിന്നു Q വരെ 6 സെക്കന്റിലും സഞ്ചരിക്കുന്നു. എങ്കിൽ a) O യിൽനിന്നു P വരെയും b) O യിൽ നിന്നു P വരെയും തിരിച്ച് Q വരെയും സഞ്ചരിക്കുമ്പോഴുള്ള ശരാശരി പ്രവേഗവും ശരാശരി വേഗവും എത്രയാണ്?

ഉത്തരം (a)

$$\text{ശരാശരി പ്രവേഗം} = \frac{\text{സ്ഥാനാന്തരം}}{\text{സമയദൈർഘ്യം (ഇടവേള)}}$$

$$\bar{v} = \frac{+360\ \mathrm{m}}{18\ \mathrm{s}} = +20\ \mathrm{m\,s^{-1}}$$

$$\text{ശരാശരി വേഗത} = \frac{\text{പാതദൈർഘ്യം}}{\text{സമയദൈർഘ്യം}}$$

$$= \frac{360\ \mathrm{m}}{18\ \mathrm{s}} = 20\ \mathrm{m\,s^{-1}}$$

അതായത്, ഈ അവസരത്തിൽ ശരാശരി വേഗം ശരാശരി പ്രവേഗത്തിന്റെ പരിമാണത്തിന് തുല്യമാണ്.

b) ഇവിടെ

$$\text{ശരാശരി പ്രവേഗം} = \frac{\text{സ്ഥാനാന്തരം}}{\text{സമയദൈർഘ്യം (ഇടവേള)}}$$

$$= \frac{+240\ \text{m}}{(18+6.0)\ \text{s}} = 10\ \text{m s}^{-1}$$

$$\text{ശരാശരി വേഗം} = \frac{\text{പാതദൈർഘ്യം}}{\text{സമയദൈർഘ്യം}} = \frac{OP + PQ}{\Delta t}$$

$$= \frac{(360+120)\ \text{m}}{24\ \text{s}} = 20\ \text{m s}^{-1}$$

അതായത്, ഈ സന്ദർഭത്തിൽ ശരാശരി വേഗം ശരാശരി പ്രവേഗത്തിന്റെ പരിമാണത്തിന് തുല്യമല്ല. ഇതിനു കാരണം ഇവിടത്തെ ചലനപ്രക്രിയയിൽ ദിശക്കുമാറ്റം സംഭവിക്കുന്നതിനാൽ പാതദൈർഘ്യം സ്ഥാനാന്തരത്തിന്റെ പരിമാണത്തേക്കാൾ കൂടുതൽ ആയതാണ്. **പൊതുവായി വേഗം എന്നത് പ്രവേഗത്തിന്റെ പരിമാണത്തേക്കാൾ കൂടുതലാണെന്നാണിതു സൂചിപ്പിക്കുന്നത്.** ◀

ഉദാഹരണം 3.1 ൽ കാർ O യിൽ നിന്നു P വരെയും തിരിച്ച് O വരെയും ഒരേ സമയദൈർഘ്യത്തിൽ സഞ്ചരിച്ചാൽ, ശരാശരി വേഗം 20 ms^{-1} ആണ്. പക്ഷേ, ശരാശരി പ്രവേഗം പൂജ്യമായിരിക്കും.

3.4 തൽക്ഷണ പ്രവേഗവും വേഗവും (Instantaneous Velocity and Speed)

ശരാശരി പ്രവേഗം സൂചിപ്പിക്കുന്നത് ഒരു വസ്തു ഒരു പ്രത്യേക ഇടവേളയിൽ എത്ര വേഗത്തിൽ സഞ്ചരിക്കുന്നുവെന്നാണ്. പക്ഷേ, ആ ഇടവേളയിലെ വ്യത്യസ്തക്ഷണങ്ങളിൽ അത് എത്ര വേഗത്തിൽ സഞ്ചരിക്കും എന്നതിനെപ്പറ്റി ഒന്നുംതന്നെ ഈ പദം സൂചിപ്പിക്കുന്നില്ല. അതിനായി, നമുക്ക് തൽക്ഷണപ്രവേഗം (instantaneous velocity) അല്ലെങ്കിൽ Δt എന്ന ക്ഷണത്തിലുള്ള പ്രവേഗം നിർവചിക്കാം.

ഇടവേള, Δt, പൂജ്യത്തോട് അടുക്കുമ്പോൾ (അതായത് സമയഇടവേള വളരെ വളരെ ചെറുതായിരിക്കുമ്പോൾ), വസ്തുവിന്റെ ശരാശരി പ്രവേഗത്തെ തൽക്ഷണ പ്രവേഗം എന്നു നിർവചിക്കുന്നു. മറ്റൊരു തരത്തിൽ പറഞ്ഞാൽ,

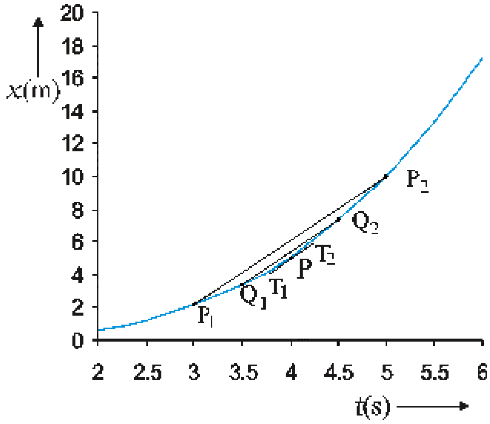
$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad [3.3a]$$

$$= \frac{dx}{dt} \qquad [3.3b]$$

ഇവിടെ $\lim_{\Delta t \to 0}$ എന്ന ചിഹ്നം സൂചിപ്പിക്കുന്നത് അതിന്റെ വലതുവശത്തുള്ള അളവിലെ സമയഇടവേള പൂജ്യത്തിനോടടുപ്പിക്കുന്ന പ്രക്രിയയാണ്. ഗണിതഭാഷയിൽ, സമവാക്യം (3.3a) വലതുഭാഗത്തുള്ള അളവ് t യ്ക്ക് അനുസരിച്ചുള്ള x ന്റെ അവകലന ഗുണാങ്കമാണ് (differential coefficient). അതിനെ $\frac{dx}{dt}$ എന്നാണ് സൂചിപ്പിക്കുന്നത് (അനുബന്ധം 3.1 കാണുക). ഇത് ആ ക്ഷണത്തിലെ സമയത്തിനനുസരിച്ചുള്ള സ്ഥാനമാറ്റത്തിന്റെ നിരക്കാണ്.

പ്രവേഗത്തിന്റെ ഒരു പ്രത്യേക ക്ഷണത്തിലുള്ള വില ഗ്രാഫുകൾ ഉപയോഗിച്ചോ സംഖ്യാപരമായോ നിർണയിക്കാൻ സമവാക്യം (3.3a) ഉപയോഗിക്കാം. ചിത്രം 3.3 ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന കാറിന്റെ ചലനത്തിൽ, t = 4 സെക്കന്റിലെ പ്രവേഗത്തിന്റെ (P എന്ന ബിന്ദു) വില ഗ്രാഫ് ഉപയോഗിച്ച് കണ്ടുപിടിക്കണമെന്ന് കരുതുക. ആ ചിത്രത്തിനെ ചിത്രം 3.6 ൽ വ്യത്യസ്ത തോതുകൾ ഉപയോഗിച്ച് കണക്കുകൂട്ടൽ ലഘുവാക്കാൻ വേണ്ടി വീണ്ടും വരച്ചിരിക്കുന്നു.

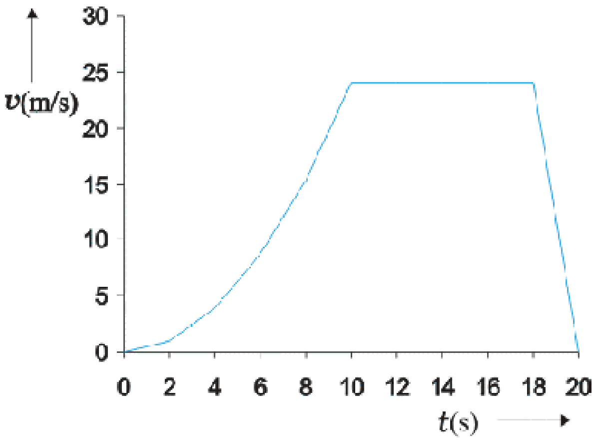
t = 4s നെ കേന്ദ്രമാക്കി, $\Delta t = 2$ സെക്കന്റ് പരിഗണിക്കുക. അപ്പോൾ, ശരാശരി പ്രവേഗത്തിന്റെ നിർവചനമനുസരിച്ച് സമയഇടവേള t = 3s മുതൽ t = 5s വരെയുള്ള ശരാശരി പ്രവേഗത്തിന്റെ വില, രേഖ P_1P_2 വിന്റെ (ചിത്രം 3.6) ചരിവാണ്. ഇനി Δt യുടെ വില 2 സെക്കന്റിൽ നിന്നു ഒരു സെക്കന്റായി കുറക്കുന്നു. അപ്പോൾ



ചിത്രം 3.6 സ്ഥാന-സമയഗ്രാഫിൽ നിന്നു പ്രവേഗം നിർണയിക്കൽ. t = 4s ലെ പ്രവേഗം ആ ക്ഷണത്തിലെ ഗ്രാഫിന്റെ തൊടുവരയുടെ ചരിവാണ്.

രേഖ P_1P_2 രേഖ Q_1Q_2 ആവുകയും അതിന്റെ ചരിവ് 3.5 സെക്കന്റ് മുതൽ 4.5 സെക്കന്റ് വരെയുള്ള ശരാശരി പ്രവേഗത്തിന്റെ വിലയായി മാറുന്നു. $\Delta t \to 0$ പരിധിയിൽ, രേഖ P_1P_2 എന്നത് P എന്ന ബിന്ദുവിലെ സ്ഥാന- സമയഗ്രാഫിന്റെ തൊടുവരയാവുകയും, t =4 സെക്കന്റിലെ പ്രവേഗം ആ ബിന്ദുവിലെ തൊടുവരയുടെ ചരിവ് ആവുകയും ചെയ്യും. ഈ പ്രക്രിയയെ ഗ്രാഫുപയോഗിച്ച് സൂചിപ്പിക്കുന്നത് എളുപ്പമല്ല. പക്ഷേ, പ്രവേഗത്തിന്റെ വില കണ്ടുപിടിക്കാൻ സംഖ്യാപരമായ രീതി അവലംബിച്ചാൽ, പരിമിതപ്പെടുത്തൽ പ്രക്രിയയുടെ (limiting process) അർഥം വ്യക്തമാകും. ചിത്രം 3.6 ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന ഗ്രാഫ്, $x = 0.08\, t^3$ ന്റേതാണ് $t = 4$ സെക്കന്റിൽ കേന്ദ്രമാക്കി, $\Delta t = 2.0$ s, 1.0 s, 0.5 s, 0.1 s, 0.01 s എന്നീ സമയ ഇടവേളകളിലുള്ള $\Delta x/\Delta t$ യുടെ വിലകൾ പട്ടിക 3.1 ൽ നൽകിയിരിക്കുന്നു. രണ്ടാമത്തെയും മൂന്നാമത്തെയും നിരകൾ $t_1 = \left(t \quad \frac{\Delta t}{2}\right)$, $t_2 = \left(t - \frac{\Delta t}{2}\right)$ എന്നീ വിലകൾ നൽകുന്നു. കൂടാതെ നാലാമത്തെയും അഞ്ചാമത്തെയും നിരകൾ x ന്റെ യോജിച്ച വിലകൾ, *i.e.* $x(t_1) = 0.08\, t_1^3$, $x(t_2) = 0.08\, t_2^3$ എന്നിവ നൽകുന്നു. ആറാമത്തെ നിര $\Delta x = x(t_2) - x(t_1)$ വ്യത്യാസത്തിന്റെ പട്ടികയും അവസാനത്തെ നിര Δx, Δt എന്നിവ തമ്മിലുള്ള അനുപാതവും. അതായത് ആദ്യത്തെ നിരയിൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന പട്ടികയിലെ Δt യ്ക്ക് യോജിച്ച ശരാശരി പ്രവേഗവും നൽകുന്നു.

പട്ടിക 3.1 ൽ നിന്നു നമ്മൾ കാണുന്നത് Δt യുടെ വിലയെ 2 സെക്കന്റിൽ നിന്നു 0.010 സെക്കന്റിലേക്കു കുറച്ചപ്പോൾ, ശരാശരി പ്രവേഗത്തിന്റെ വിലയുടെ പരിധി 3.84 ms^{-1} നോട് അടുക്കുന്നു. അത് t = 4 സെക്കന്റിൽ ഉള്ള പ്രവേഗത്തിന്റെ വിലയാണ്, അതായത്, $t = 4$ സെക്കന്റിലെ $\frac{dx}{dt}$ യുടെ വിലയാണ്. ഈ രീതിയിൽ നമുക്ക് ഓരോ ക്ഷണത്തിലെയും കാറിന്റെ പ്രവേഗം കണ്ടുപിടിക്കാം. (ചിത്രം 3.3ൽ തന്നിരിക്കുന്നതുപോലെ). ഈ സന്ദർഭത്തിലെ പ്രവേഗത്തിന്റെ സമയാനുസൃതമായ വ്യതിയാനമാണ് ചിത്രം3.7 ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്.



ചിത്രം 3.7 ചിത്രം 3.3 ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന ചലനത്തിനനുസൃതമായ ചലനത്തിന്റെ പ്രവേഗ സമയഗ്രാഫ്

തൽക്ഷണപ്രവേഗം കണ്ടുപിടിക്കാൻ ഗ്രാഫുപയോഗിച്ചുള്ള രീതി (graphical method) ഉപയോഗിക്കുന്നത് എല്ലായ്പ്പോഴും സൗകര്യപ്രദമല്ല. കാരണം ഇതിനായി ശ്രദ്ധയോടെ സ്ഥാന-സമയഗ്രാഫ് വരക്കുകയും Δt ചെറുതായി ചെറുതായി വരുമ്പോഴുള്ള ശരാശരി പ്രവേഗം കണ്ടുപിടിക്കുകയും വേണം. നമുക്ക് വ്യത്യസ്ത ക്ഷണങ്ങളിലുള്ള സ്ഥാനങ്ങളുടെ വിവരങ്ങളോ അല്ലെങ്കിൽ സമയത്തിനനുസരിച്ചുള്ള സ്ഥാനത്തിന്റെ കൃത്യമായ സമവാക്യമോ (expression) ഉണ്ടെങ്കിൽ ആ ക്ഷണങ്ങളിലെ പ്രവേഗം കണ്ടുപിടിക്കാൻ എളുപ്പമാണ്. അപ്പോൾ നാം പട്ടിക 3.1 ൽ ചെയ്തതുപോലെ, Δt യുടെ വില കുറച്ചുകൊണ്ടു വരുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന അടിസ്ഥാനവിവരങ്ങളിൽ നിന്നും $\Delta x/\Delta t$ നിർണയിക്കു

പട്ടിക 3.1 $t = 4$ s ലുള്ള $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ യുടെ പരിധിമൂല്യം (limiting value)

Δt (s)	t_1 (s)	t_2 (s)	$x(t_1)$ (m)	$x(t_2)$ (m)	Δx (m)	$\Delta x / \Delta t$ (m s^{-1})
2.0	3.0	5.0	2.16	10.0	7.84	3.92
1.0	3.5	4.5	3.43	7.29	3.86	3.86
0.5	3.75	4.25	4.21875	6.14125	1.9225	3.845
0.1	3.95	4.05	4.93039	5.31441	0.38402	3.8402
0.01	3.995	4.005	5.100824	5.139224	0.0384	3.8400

കയും അതിന്റെ വിലയുടെ പരിധി കണ്ടുപിടിക്കുകയും ചെയ്യും. അല്ലെങ്കിൽ അവകലന ഗണിതപ്രകാരമുള്ള (differential calculus) സമവാക്യം ഉപയോഗിക്കുകയും താഴെയുള്ള ഉദാഹരണത്തിൽ ചെയ്യുന്നതുപോലെ പല ക്ഷണങ്ങളിലുള്ള $\frac{dx}{dt}$ കണക്കുകൂട്ടുകയും ചെയ്യും.

ഉദാഹരണം 3.2: x എന്ന അക്ഷത്തിലൂടെ സഞ്ചരിക്കുന്ന ഒരു വസ്തുവിന്റെ സ്ഥാനം എന്നത് $x = a + bt^2$ ആണ്. അവിടെ $a = 8.5$ m, $b = 2.5$ m s^{-2} എന്നിങ്ങനെയും t യുടെ അളവ് സെക്കന്റിലും ആകുന്നു. ആ വസ്തുവിന് $t = 0$ s, $t = 2.0$ s എന്നീ സമയങ്ങളിൽ എത്ര പ്രവേഗം ഉണ്ടാകും? $t = 2.0$ s, $t = 4.0$ s എന്നീ സമയങ്ങൾക്കിടയിലുള്ള ശരാശരി പ്രവേഗം എത്ര?

ഉത്തരം : അവകലന ഗണിതത്തിന്റെ ആശയത്തിൽ പ്രവേഗം എന്നത്

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(a + bt^2\right) = 2b\,t = 5.0\,t \text{ m s}^{-1}$$

$t = 0$ s, ആയിരിക്കുമ്പോൾ $v = 0$ m s^{-1} അതുപോലെ $t = 2.0$ s, ആയിരിക്കുമ്പോൾ $v = 10$ m s^{-1}.

$$\text{ശരാശരി പ്രവേഗം} = \frac{x(4.0) - x(2.0)}{4.0 - 2.0}$$

$$= \frac{a + 16b - a - 4b}{2.0} = 6.0 \times b$$

$$= 6.0 \times 2.5 = 15 \text{ m s}^{-1}$$

ചിത്രം 3.7 ൽ നിന്ന്, $t = 0$ s മുതൽ $t = 18$ s വരെയുള്ള കാലത്തിനിടയിൽ പ്രവേഗം സ്ഥിരമാണ് എന്ന് മനസ്സിലാക്കാം. $t = 18$ s മുതൽ $t = 20$ s വരെയുള്ള കാലാവധിക്ക് മധ്യേ അത് ഏകതാനമായി കുറയുകയും കൂടാതെ $t = 0$ s മുതൽ $t = 10$ s വരെയുള്ള കാലാവധിയിൽ അത് കൂടുകയും ചെയ്യുന്നു. സമചലനത്തിന് എല്ലാ ക്ഷണത്തിലും പ്രവേഗം ശരാശരിപ്രവേഗത്തിന് തുല്യമായിരിക്കുമെന്നു ശ്രദ്ധിക്കുക.

തൽക്ഷണവേഗം അല്ലെങ്കിൽ വേഗം എന്നത് പ്രവേഗത്തിന്റെ പരിമാണമാണ്. ഉദാഹരണത്തിന്, പ്രവേഗം +24.0 m s^{-1} ആയാലും −24.0 m s^{-1} ആയാലും രണ്ട് അവസരത്തിലും വേഗം 24.0 m s^{-1} ആണ്. ശരാശരിവേഗം ഒരു നിശ്ചിതസമയ ഇടവേളയിൽ ശരാശരി പ്രവേഗത്തിന്റെ പരിമാണത്തിനു തുല്യമോ കൂടുതലോ ആയിരുന്നാലും, ഒരു ക്ഷണസമയത്തുള്ള തൽക്ഷണവേഗം ആ സമയത്തെ പ്രവേഗത്തിന്റെ പരിമാണത്തിന് തുല്യമാണെന്നത് ശ്രദ്ധിക്കേണ്ടതാണ്. ഇത് എന്തുകൊണ്ടാണ്?

3.5 ത്വരണം (Acceleration)

പൊതുവായി പറഞ്ഞാൽ ഒരു വസ്തുവിന്റെ പ്രവേഗം അതിന്റെ ചലനപുരോഗതിക്കനുസരിച്ചു മാറുന്നു. ഈ മാറ്റത്തെ എങ്ങനെ വിവരിക്കാം? അത് ദൂരത്തിനനുസരിച്ചോ സമയത്തിനനുസരിച്ചോ ഉള്ള പ്രവേഗനിരക്കിലെ വ്യത്യാസമായാണോ പ്രതിപാദിക്കേണ്ടത്? ഗലീലിയോയുടെ കാലഘട്ടത്തിൽപ്പോലും ഇത് ഒരു പ്രശ്നമായിരുന്നു. ഈ മാറ്റത്തെ ദൂരത്തിനനുസരിച്ചുള്ള പ്രവേഗമാറ്റത്തിന്റെ നിരക്ക് ആയി വിവരിക്കാൻ കഴിയുമെന്നായിരുന്നു ആദ്യ അനുമാനം. പക്ഷേ, സ്വതന്ത്രമായി വീഴുന്ന വസ്തുക്കളുടെ ചലനത്തെക്കുറിച്ചും ചരിവുതലത്തിലുള്ള വസ്തുക്കളുടെ ചലനത്തെക്കുറിച്ചുമുള്ള പഠനത്തിലൂടെ, ഗലീലിയോ പ്രവേഗത്തിന്റെ സമയത്തിനനുസരിച്ചുള്ള മാറ്റത്തിന്റെ നിരക്ക് സ്വതന്ത്രമായി വീഴുന്ന എല്ലാ വസ്തുക്കൾക്കും സ്ഥിരമായിരിക്കും എന്ന നിഗമനത്തിലെത്തിച്ചേർന്നു. എന്നാൽ പ്രവേഗമാറ്റം ദൂരത്തിനനുസരിച്ച് സ്ഥിരമല്ല. അത് വീഴ്ചയുടെ ദൂരം കൂടുന്നതിനനുസരിച്ച് കുറയുന്നു. സമയത്തിനനുസരിച്ചുള്ള പ്രവേഗമാറ്റത്തിന്റെ നിരക്കാണ് ത്വരണം എന്ന ആശയത്തിലേക്കു ഇത് നയിച്ചു.

ഒരു സമയ ഇടവേളയിലെ ശരാശരി ത്വരണം $\bar{a}$ എന്നത് പ്രവേഗമാറ്റത്തെ സമയ ഇടവേളകൊണ്ട് ഭാഗിക്കുന്നതാണെന്ന് നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നു. അതായത്

$$\bar{a} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \qquad (3.4)$$

ഇവിടെ v_2, v_1 എന്നത് t_2, t_1 എന്നീ സമയങ്ങളിലുള്ള തൽക്ഷണപ്രവേഗങ്ങൾ അല്ലെങ്കിൽ പ്രവേഗങ്ങളാണ്. ഇത് ഒരു യൂണിറ്റ് സമയത്തെ ശരാശരി പ്രവേഗമാറ്റമാണ്. ത്വരണത്തിന്റെ SI യൂണിറ്റ് m s^{-2} ആണ്.

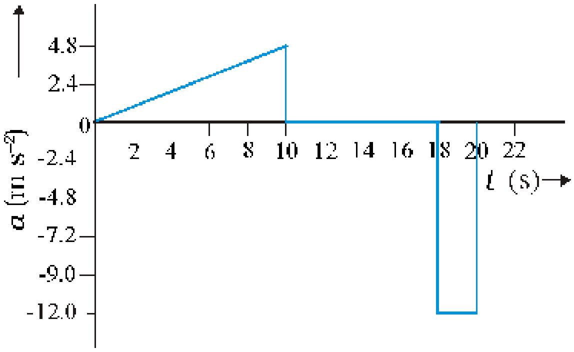
അക്ഷങ്ങളിൽ പ്രവേഗവും സമയവും വരുന്ന ഒരു ഗ്രാഫ് വരച്ചാൽ, ശരാശരി ത്വരണം എന്നത് (v_2, t_2), (v_1, t_1) എന്നീ ബന്ധപ്പെട്ട ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന നേർരേഖയുടെ ചരിവാണ്. ചിത്രം 3.7 ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന പ്രവേഗ-സമയ ഗ്രാഫിന്റെ ശരാശരി ത്വരണം എന്നത് 0 s − 10 s, 10 s − 18 s, 18 s − 20 s എന്നിങ്ങനെയുള്ള വ്യത്യസ്ത സമയപരിധികളിൽ സൂചിപ്പിച്ചാൽ:

$$0\text{ s} - 10\text{ s}, \quad \bar{a} = \frac{(24 - 0)\text{ m s}^{-1}}{(10 - 0)\text{ s}} = 2.4 \text{ m s}^{-2}$$

$$10\text{ s} - 18\text{ s}, \quad \bar{a} = \frac{(24 - 24)\text{ m s}^{-1}}{(18 - 10)\text{ s}} = 0 \text{ m s}^{-2}$$

18 s - 20 s , $\bar{a} = \frac{(0-24)\,\text{m s}^{-1}}{(20-18)\,\text{s}} = -12\ \text{m s}^{-2}$

ചിത്രം 3.8 : ചിത്രം 3.3ൽ സൂചിപ്പിച്ചിരിക്കുന്ന ചലനത്തിന്റെ, സമയത്തിനനുസൃതമായ (function of time) ത്വരണം.



തൽക്ഷണ ത്വരണത്തെ തൽക്ഷണ പ്രവേഗത്തിന്റെ അതേ രീതിയിൽ നിർവചിക്കാം:

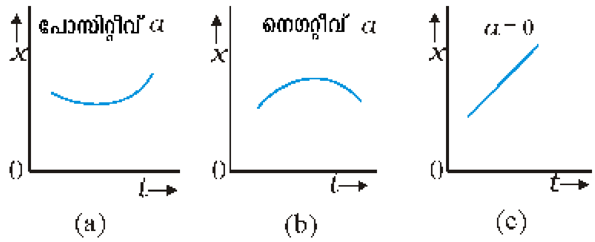
$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} \qquad (3.5)$$

ഒരു ക്ഷണസമയത്തിലുള്ള ത്വരണമെന്നത് ആ ക്ഷണത്തിലുള്ള $v - t$ ഗ്രാഫിന്റെ തൊടുവരയുടെ ചരിവാണ്. ചിത്രം 3.7 ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന $v - t$ ഗ്രാഫിന്, ഓരോ ക്ഷണത്തിലെയും ത്വരണം ലഭിക്കും. തൽഫലമായി ലഭിക്കുന്ന $a - t$ ഗ്രാഫാണ് ചിത്രം 3.8 ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്. ഇവിടെ നമുക്ക് ത്വരണം 0 s മുതൽ 10 s വരെയുള്ള സമയപരിധിക്കുള്ളിൽ അസമമാണെന്നു കാണാം. അത് 10 s നും 18 s നും ഇടയിൽ പൂജ്യവും 18 s മുതൽ 20 s വരെ–12 ms^{-2} എന്ന വിലയിൽ സ്ഥിരവുമായിരിക്കും. ത്വരണം സമമായിരിക്കുമ്പോൾ തീർച്ചയായും, അത് ആ പരിധിക്കുള്ളിലെ ശരാശരി ത്വരണത്തിനു തുല്യമായിരിക്കും.

പ്രവേഗം പരിമാണവും ദിശയുമുള്ള ഒരു അളവായതിനാൽ, പ്രവേഗമാറ്റത്തിൽ ഈ ഘടകങ്ങൾ ഒന്നു മാത്രമോ രണ്ടും കൂടിയോ ഉൾപ്പെട്ടേക്കാം. അതുകൊണ്ട് വേഗത്തിലുള്ള വ്യത്യാസം കൊണ്ടോ ദിശയിലുള്ള മാറ്റം അല്ലെങ്കിൽ രണ്ടിലുമുള്ള മാറ്റംകൊണ്ടോ ത്വരണമുണ്ടാവാം. ത്വരണത്തിന്റെ വില പ്രവേഗത്തിലേപ്പോലെ പോസിറ്റീവോ നെഗറ്റീവോ അല്ലെങ്കിൽ പൂജ്യമോ ആവാം. പോസിറ്റീവ്, നെഗറ്റീവ്, പൂജ്യം എന്നിങ്ങനെ ത്വരണമുള്ള ചലനങ്ങളുടെ സ്ഥാന-സമയഗ്രാഫുകൾ യഥാക്രമം ചിത്രം 3.9 (a), (b), (c) എന്നിവയിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നു. പോസിറ്റീവ് ത്വരണത്തിന് മുകളിലേക്കും, നെഗറ്റീവ് ത്വരണത്തിന് താഴേക്കു വളഞ്ഞും, പൂജ്യം ത്വരണത്തിന് ഒരു നേർരേഖയായും ഇത് കാണപ്പെടുന്നു. ചിത്രം3.3 ൽ ഈ മൂന്ന് സാഹചര്യങ്ങളുമായി ബന്ധപ്പെട്ട ഭാഗങ്ങൾ തിരിച്ചറിയുക.

ത്വരണത്തിന് സമയത്തിനനുസരിച്ച് മാറാൻ കഴിയുമെങ്കിലും, ഈ അധ്യായത്തിൽ നമ്മുടെ പഠനം സ്ഥിരമായ ത്വരണത്തിലുള്ള ചലനത്തിൽ മാത്രമായി പരിമിതപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്നു. ഈ അവസ്ഥയിൽ ശരാശരി ത്വരണം ആ കാലയളവിൽ ഉടനീളമുള്ള ത്വരണത്തിന്റെ സ്ഥിരമായ വിലയ്ക്കു തുല്യമാണ്. ഒരു വസ്തുവിന്റെ പ്രവേഗം $t = 0$ യിൽ v_0 യും സമയം t ആകുമ്പോൾ v യും ആണെങ്കിൽ ലഭിക്കുന്നത്

$$\bar{a} = \frac{v - v_0}{t - 0} \text{ or, } v = v_0 + a\,t \qquad (3.6)$$



ചിത്രം 3.9 : ത്വരണത്തിന്റെ വില a) പോസിറ്റീവ് b) നെഗറ്റീവ് c) പൂജ്യം എന്നിങ്ങനെയാകുമ്പോഴുള്ള ചലനത്തിന്റെ സ്ഥാന-സമയ ഗ്രാഫുകൾ.

ലളിതമായ ചില സാഹചര്യങ്ങൾക്ക് പ്രവേഗ-സമയ ഗ്രാഫ് എങ്ങനെയിരിക്കും എന്ന് നോക്കാം.

താഴെ പറയുന്ന സാഹചര്യങ്ങളിൽ സ്ഥിരത്വരണത്തിലുള്ള ചലനത്തിന്റെ പ്രവേഗ-സമയ ഗ്രാഫാണ് ചിത്രം 3.10 ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്.

a) ഒരു വസ്തു പോസിറ്റീവ് ദിശയിൽ പോസിറ്റീവ് ത്വരണത്തിൽ സഞ്ചരിക്കുന്നു; ഉദാഹരണമായി ചിത്രം 3.3 ലെ $t = 0$s നും $t = 10$s നും ഇടയിലുള്ള കാറിന്റെ ചലനം.

b) ഒരു വസ്തു നെഗറ്റീവ് ത്വരണത്തിൽ പോസിറ്റീവ് ദിശയിൽ സഞ്ചരിക്കുന്നു, ഉദാഹരണമായി ചിത്രം 3.3 ലെ $t = 18$s നും $t = 20$s നും ഇടയിലുള്ള കാറിന്റെ ചലനം.

c) ഒരു വസ്തു നെഗറ്റീവ് ത്വരണത്തിൽ നെഗറ്റീവ് ദിശയിൽ സഞ്ചരിക്കുന്നു. ഉദാഹരണമായി ചിത്രം 3.1 ൽ ഉള്ളതുപോലെ നെഗറ്റീവ് x ദിശയിൽ വേഗം

കൂടുന്ന രീതിയിൽ O യിൽ നിന്നുള്ള ഒരു കാറിന്റെ ചലനം.

d) ഒരു വസ്തു പോസിറ്റീവ് ദിശയിൽ സമയം t_1 വരെ സഞ്ചരിക്കുന്നു. എന്നിട്ട് തിരിച്ച് അത്ര തന്നെ നെഗറ്റീവ് ത്വരണത്തിൽ സഞ്ചരിക്കുന്നു. ഉദാഹരണമായി ചിത്രം 3.1 ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ ഒരു ബിന്ദു O യിൽനിന്നു മറ്റൊരു ബിന്ദു Q വരെ വേഗം കുറയുന്ന തരത്തിൽ സമയം t_1 ആകുന്നതു വരെയും പിന്നീട് അതേ നെഗറ്റീവ് ത്വരണത്തിൽ തിരിച്ചുമുള്ള ചലനം.

ഏതൊരു ചലിക്കുന്ന വസ്തുവിന്റെയും പ്രവേഗസമയ ഗ്രാഫിനുള്ളിലെ പരപ്പളവ്, തന്നിരിക്കുന്ന ഒരു സമയ ഇടവേളയിലെ സ്ഥാനാന്തരത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു എന്നതാണ് ഈ ഗ്രാഫിന്റെ രസകരമായ ഒരു പ്രത്യേകത. ഈ പ്രസ്താവനയുടെ പൊതുവായ തെളിവിന് അവകലനഗണിതം ആവശ്യമാണ്. എന്നിരുന്നാലും, "u" എന്ന സ്ഥിരപ്രവേഗത്തിൽ ചലിക്കുന്ന ഏതൊരു വസ്

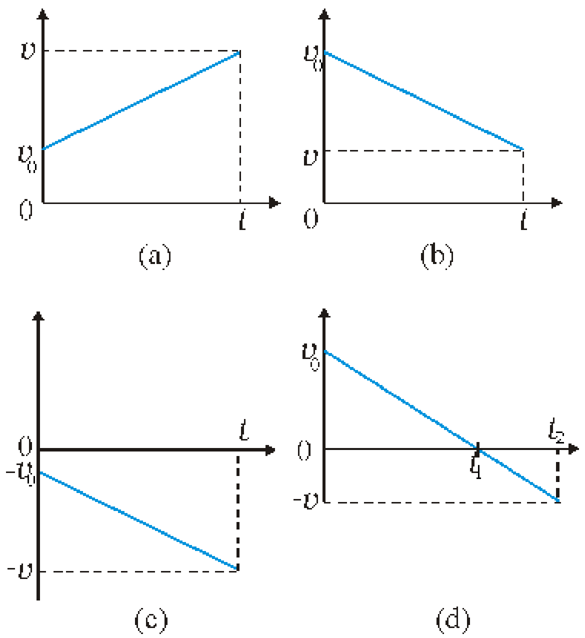
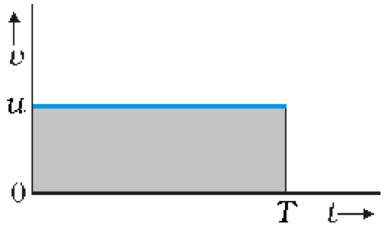


Fig. 3.10 *സമത്വരണത്തിലുള്ള ഒരു വസ്തുവിന്റെ പ്രവേഗ-സമയഗ്രാഫ് (a) പോസിറ്റീവ് ദിശയിൽ പോസിറ്റീവ് ത്വരണത്തോടു കൂടിയുള്ള ചലനം. (b) പോസിറ്റീവ് ദിശയിൽ നെഗറ്റീവ് ത്വരണത്തോടു കൂടിയുള്ള ചലനം (c) നെഗറ്റീവ് ദിശയിൽ നെഗറ്റീവ് ത്വരണത്തോടു കൂടിയ ചലനം (d) t_1 സമയത്തിൽ ദിശാമാറ്റം വരുന്ന നെഗറ്റീവ് ത്വരണത്തോടുകൂടിയുള്ള ചലനം. ഇതിലെ O വിന്റെ t_1ന്റെ ഇടയിൽ ചലനം പോസിറ്റീവ് x ദിശയിലും t_1ന്റെയും t_2ന്റെയും ഇടയിൽ വിപരീത ദിശയിലുമാണ്.*

തുവിനും ഇത് ശരിയാണെന്ന് കാണാം. അതിന്റെ പ്രവേഗ-സമയഗ്രാഫ് ചിത്രം 3.11 ൽ താഴെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെയാണ്.



ചിത്രം 3.11 v-t ഗ്രാഫിലെ ഷെയ്ഡ് ചെയ്ത ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ് തന്നിരിക്കുന്ന ഒരു സമയ ഇടവേളയിലെ സ്ഥാനാന്തരത്തിനു തുല്യമാണ്.

ഈ v-t ഗ്രാഫ് സമയത്തിന്റെ അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമായ ഒരു നേർരേഖയാണ്. ഇതിന്റെ t =0, t = T എന്നിവക്കിടയിലുള്ള പരപ്പളവ് എന്നത് u ഉയരവും T പാദവുമുള്ള ദീർഘചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവാണ്. അതുകൊണ്ട് പരപ്പളവ് = u × T = uT എന്നത് ഈ സമയപരിധിക്കുള്ളിലെ സ്ഥാനാന്തരമാണ്. ഇവിടെ പരപ്പളവ് ദൂരത്തിനു തുല്യമായി വരുന്നത് എങ്ങനെയാണെന്നു ചിന്തിക്കൂ! രണ്ട് നിർദേശാങ്ക അക്ഷങ്ങളിലെയും അളവുകളുടെ മാനങ്ങൾ രേഖപ്പെടുത്തുമ്പോൾ, നിങ്ങൾക്ക് ഇത്തരത്തിൽ എത്തിച്ചേരാം.

ഈ അധ്യായത്തിൽ വിവിധ ചിത്രങ്ങളിലായി കാണിച്ചിരിക്കുന്ന x-t, v-t, a-t ഗ്രാഫുകളിലെ പല ബിന്ദുക്കളിലും ഭംഗുര (sharpkinks) മാകുന്നത് അവിടെ ആ ഫലനങ്ങൾ അവകലനയോഗ്യമല്ലാത്തതിനാലാണ് എന്നു ശ്രദ്ധിക്കുക. ഏതെങ്കിലും യഥാർഥ സാഹചര്യത്തിൽ ആ ഫലനങ്ങൾ എല്ലാ ബിന്ദുക്കളിലും അവകലനയോഗ്യമായാൽ ഗ്രാഫുകൾ അഭംഗുരമാകുന്നു.

ഭൗതികമായി ഇത് അർഥമാക്കുന്നത് ത്വരണത്തിനും പ്രവേഗത്തിനും ഒരു ക്ഷണത്തിൽ പെട്ടെന്നു മാറാൻ കഴിയില്ലെന്നും മാറ്റങ്ങൾ എപ്പോഴും തുടർച്ചയായി സംഭവിക്കുന്നതാണെന്നുമാണ്.

3.6 സമത്വരണ ചലനത്തിന്റെ ചലന സമവാക്യങ്ങൾ (Kinematic equations for uniformly accelerated motion)

സമത്വരണമുള്ള ചലനത്തിൽ സ്ഥാനാന്തരം (x), എടുത്തസമയം (t), പ്രാരംഭപ്രവേഗം (v_0), അന്ത്യപ്രവേഗം (v),ത്വരണം (a) എന്നിവയെ ബന്ധപ്പെടുത്തുന്ന ചില ലളിതമായ സമവാക്യങ്ങൾ നമുക്കു രൂപീകരിക്കാം. മുൻപു ലഭിച്ച സമവാക്യം (3.6) എന്നത് 'a' എന്ന സമത്വരണ

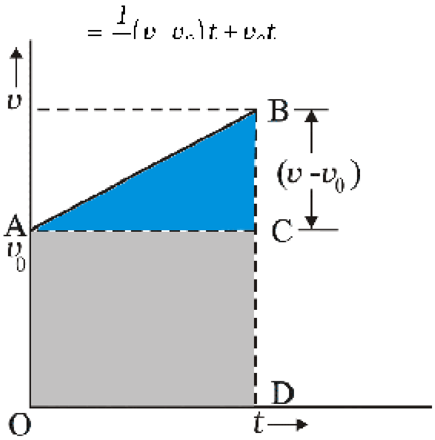
ത്തിൽ സഞ്ചരിക്കുന്ന ഒരു വസ്തുവിന്റെ അന്ത്യപ്രവേഗം V യും പ്രാരംഭപ്രവേഗം v_0 യും, തമ്മിലുള്ള ഒരു ബന്ധത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

$$v = v_0 + at \qquad (3.6)$$

ഈ ബന്ധമാണ് ഗ്രാഫുപയോഗിച്ച് ചിത്രം 3.12ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്.

ഈ ഗ്രാഫിന്റെ ഉള്ളിലുള്ള ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എന്നത്:

പൂജ്യത്തിനും t ക്കും ഇടയിലുള്ള പരപ്പളവ് = ത്രികോണം ABC യുടെ പരപ്പളവ് + ചതുരം OACD യുടെ പരപ്പളവ് ആയിരിക്കും.



ചിത്രം 3.12 സമത്വരണത്തിലുള്ള ഒരു വസ്തുവിന്റെ v-t ഗ്രാഫിന്റെ ഉള്ളിലുള്ള പരപ്പളവ്

നേരത്തെ വിശദീകരിച്ചിട്ടുള്ളതുപോലെ v-t ഗ്രാഫിന്റെ ഉള്ളിലുള്ള പരപ്പളവ് സ്ഥാനാന്തരത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. അതുകൊണ്ട്, ഒരു വസ്തുവിന്റെ സ്ഥാനാന്തരം X എന്നത് :

$$x = \frac{1}{2}(v - v_0)t + v_0 t \qquad (3.7)$$

പക്ഷേ, $v - v_0 = at$

അതിനാൽ, $x = \frac{1}{2}a\,t^2 + v_0 t$

അല്ലെങ്കിൽ, $x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ (3.8)

മറ്റൊരു രീതിയിൽ സമവാക്യം (3.7) നെ എഴുതുന്നത് എങ്ങനെയെന്നാൽ,

$$x = \frac{v + v_0}{2}t = \bar{v}\,t \qquad (3.9a)$$

ആയിരിക്കും.

ഇവിടെ,

$$\bar{v} = \frac{v + v_0}{2}$$ (സ്ഥിരമായ ത്വരണത്തിനു മാത്രം).

(3.9 b)

സമവാക്യങ്ങൾ (3.9 a), (3.9 b) എന്നിവ അർഥമാക്കുന്നത് ആ വസ്തുവിന് ആദ്യപ്രവേഗത്തിന്റെയും അന്ത്യപ്രവേഗത്തിന്റെയും ഗണിതശരാശരിക്കു തുല്യമായ ശരാശരി പ്രവേഗത്തോടെ സ്ഥാനാന്തരം ഉണ്ടാകുന്നു എന്നാണ്.

സമവാക്യം (3.6), ൽ നിന്നു $t = (v - v_0)/a$. എന്നു ലഭിക്കുന്നു. ഇത് സമവാക്യം (3.9a) ൽ നൽകുമ്പോൾ നമുക്ക്

$$x = \bar{v}\,t = \left(\frac{v + v_0}{2}\right)\left(\frac{v - v_0}{a}\right) = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$$

$$v^2 = v_0^2 + 2ax \qquad (3.10)$$

എന്ന സമവാക്യം കിട്ടുന്നു.

സമവാക്യം (3.6) ൽ നിന്നു t യുടെ വില സമവാക്യം (3.8) ൽ നൽകിയാലും ഈ സമവാക്യം ലഭിക്കുന്നതാണ്. അങ്ങനെ, v_0, v, a, t, x എന്നീ അഞ്ച് അളവുകളെ ബന്ധിപ്പിക്കുന്ന മൂന്നു പ്രധാനപ്പെട്ട സമവാക്യങ്ങൾ ലഭിക്കുന്നു.

$$v = v_0 + at$$

$$x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$v^2 = v_0^2 + 2ax \qquad (3.11a)$$

ഇവയാണ് സ്ഥിരമായ ത്വരണത്തിലുള്ള നേർരേഖാ ചലനത്തിന്റെ ഗതിക സമവാക്യങ്ങൾ.

(3.11 a) എന്ന സമവാക്യങ്ങളുടെ കൂട്ടം $t = 0$ യിൽ വസ്തുവിന്റെ സ്ഥാനം $x = 0$ ആണെന്ന സങ്കൽപ്പത്തിൽ നിന്നാണ്. നമുക്ക് കൂടുതൽ പൊതുവായ ഒരു സമവാക്യം ലഭിക്കുന്നത് $t = 0$ യിൽ സ്ഥാനത്തിന്റെ നിർദേശാങ്കം പൂജ്യമല്ല എന്ന് എടുക്കുമ്പോഴാണ് പ്രാരംഭസ്ഥാനം x_0 എന്നു പറയുകയും സമവാക്യം (3.11 a) നെ പരിഷ്കരിക്കുകയും x നു പകരം $(x - x_0)$ ചെയ്താൽ:

$$v = v_0 + at$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \qquad (3.11b)$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0) \qquad (3.11c)$$

▶ **ഉദാഹരണം 3.3**

അവകലനരീതി ഉപയോഗിച്ച് സ്ഥിര ത്വരണത്തോടുകൂടിയ ചലനസമവാക്യങ്ങൾ രൂപീകരിക്കുക.

ഉത്തരം

ത്വരണത്തിന്റെ നിർവചനമനുസരിച്ച്,

$$a = \frac{dv}{dt}$$

$$dv = a\,dt$$

രണ്ടു വശങ്ങളും സമാകലനം ചെയ്താൽ

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t a\ dt$$

$$= a\int_0^t dt \quad (a \text{ സ്ഥിരമാണ്})$$

$$v - v_0 = at$$

$$v = v_0 + at$$

കൂടാതെ, $v = \frac{dx}{dt}$

$$dx = v\,dt$$

രണ്ടു വശങ്ങളെയും സമാകലനം ചെയ്താൽ

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t v\ dt$$

$$= \int_0^t (v_0 + at)\ dt$$

$$x - x_0 = v_0\ t + \frac{1}{2}a\ t^2$$

$$x = x_0 + v_0\ t + \frac{1}{2}a\ t^2$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$$

or, $v\,dv = a\,dx$ എന്നെഴുതാം.

രണ്ടു വശത്തും സമാകലനം നടത്തിയാൽ,

$$\int_{v_0}^{v} v\,dv = \int_{x_0}^{x} a\,dx$$

$$\frac{v^2 - v_0^2}{2} = a(x - x_0)$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

എന്നു ലഭിക്കുന്നു.

ഈ രീതിയുടെ മെച്ചം ഇതിനെ അസമത്വരണമുള്ള ചലനത്തിനും ഉപയോഗിക്കാമെന്നതാണ്.

ഇപ്പോൾ നമുക്ക് ഈ സമവാക്യങ്ങളെ പല പ്രധാനപ്പെട്ട സാഹചര്യങ്ങളിലും ഉപയോഗിക്കാം. ◀

▶ **ഉദാഹരണം 3.4**

ഒരു പന്ത് 20 m s^{-1} പ്രവേഗത്തിൽ ഒരു ബഹുനില കെട്ടിടത്തിന്റെ മുകളിൽ നിന്നു ലംബമായി എറിയുന്നു. ആ പന്ത് എറിഞ്ഞ ബിന്ദു വരെ തറനിരപ്പിൽനിന്നുള്ള ഉയരം 25.0 m ആണ്. a) ആ പന്ത് എത്ര ഉയരത്തിൽ സഞ്ചരിക്കും? b) തറയിലെത്താൻ അത് എത്ര സമയമെടുക്കും? $g = 10$ m s^{-2} എന്ന് എടുക്കുക.

ഉത്തരം

ചിത്രം 3.13 ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ, y അക്ഷത്തിനെ മുകളിലേക്കുള്ള ലംബമായും അതിന്റെ വില തറനിരപ്പിൽ പൂജ്യമായും എടുക്കാം.

അപ്പോൾ $v_o = +20$ m s^{-1},

$a = -g = -10$ m s^{-2},

$v = 0$ m s^{-1}

പന്ത് എറിഞ്ഞ ബിന്ദുവിൽനിന്നു y വരെ ഉയർന്നു എന്നിരിക്കട്ടെ, എന്നാൽ സമവാക്യം

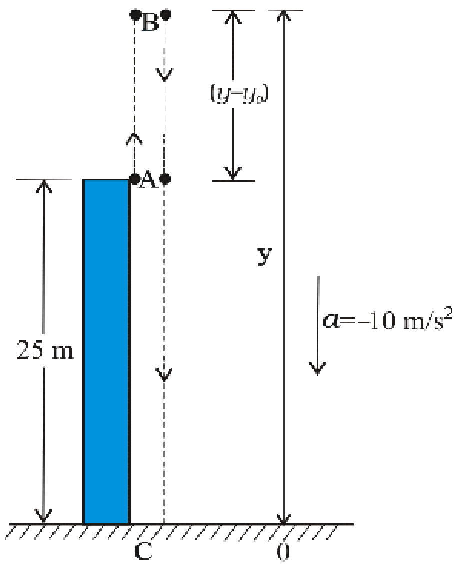
$$v^2 = v_0^2 + 2\ a\ (y - y_0)$$

ഉപയോഗിച്ച് നമുക്ക് ലഭിക്കുന്നത്

$$0 - (20)^2 \quad 2(-10)(y - y_0)$$

ഉത്തരം കണ്ടെത്തുമ്പോൾ $(y - y_0) = 20$ m എന്നു ലഭിക്കും.

(b) പ്രശ്നത്തിന്റെ ഈ ഭാഗത്തിന് രണ്ടു രീതിയിൽ ഉത്തരം കണ്ടുപിടിക്കാം.



ചിത്രം 3.13

ആദ്യത്തെ രീതി :

ആദ്യത്തെ രീതിയിൽ, പാതയെ രണ്ടു ഭാഗങ്ങളായി തിരിക്കാം. മുകളിലേക്കുള്ള ചലനം (A യിൽനിന്നു B വരെ), താഴേക്കുള്ള ചലനം (B യിൽ നിന്നും C വരെ). ഇവയുമായി ബന്ധപ്പെട്ട സമയങ്ങൾ t_1, t_2 എന്നിവ യഥാക്രമം കണ്ടുപിടിക്കുക. B യിലെ പ്രവേഗം പൂജ്യമായതുകൊണ്ട്:

$$v = v_o + at$$

$$0 = 20 \quad 10t_1$$

അല്ലെങ്കിൽ, $t_1 = 2$ s എന്നുലഭിക്കും.

ഇതാണ് A യിൽനിന്നു B വരെ പോകാനുള്ള സമയം. B യിൽനിന്നു അല്ലെങ്കിൽ ഏറ്റവും ഉയരത്തിലുള്ള ബിന്ദുവിൽനിന്നു, പന്ത് സ്വതന്ത്രമായി ഗുരുത്വാകർഷണ ത്വരണത്തിൽ നെഗറ്റീവ് y ദിശയിൽ വീഴുന്നു. നാം ഉപയോഗിക്കുന്ന സമവാക്യം,

$$y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \text{ ആണ്.}$$

$y_0 = 45$ m, $y = 0$, $v_o = 0$, $a = g = 10 ms^2$ എന്നു നൽകിയാൽ

$$0 = 45 + (½)(-10)\, t_2^2$$

ഉത്തരം കണ്ടെത്തുമ്പോൾ $t_2 = 3$ s എന്നുലഭിക്കും. അതിനാൽ, താഴെയെത്തുന്നതിനു മുൻപു വരെ പന്ത് സഞ്ചരിക്കാനെടുത്ത സമയം $= t_1 + t_2 = 2\text{ s} + 3\text{ s} = 5\text{ s}$.

രണ്ടാമത്തെ രീതി : മൂലബിന്ദുവിനെ ആധാരമാക്കി പന്തിന്റെ ആദ്യവും അവസാനവുമായ സ്ഥാനത്തിന്റെ നിർദേശാങ്കങ്ങൾ രേഖപ്പെടുത്തിയും അത് ആകെ സഞ്ചരിക്കാനെടുത്ത സമയം കണ്ടുപിടിക്കാം.

$$y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$ എന്ന സമവാക്യം ഉപയോഗിച്ച്,

ഇപ്പോൾ $y_0 = 25$ m $\quad y = 0$ m

$v_o = 20$ m s^{-1}, $\quad a = -10$m s^{-2}, $\quad t = ?$

$$0 = 25 + 20\,t + (½)\,(-10)\,t^2$$

$$5t^2 - 20t - 25 = 0$$

ഈ വർഗസംഖ്യയുള്ള സമവാക്യത്തെ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുമ്പോൾ

$t = 5$s എന്നു ലഭിക്കും.

ചലനം സ്ഥിരമായ ത്വരണത്തിൽ നടക്കുന്നതിനാൽ ചലനപാതക്ക് പ്രാധാന്യമില്ല. അതുകൊണ്ട് രണ്ടാമത്തെ രീതിയാണ് ഉചിതമെന്ന് ശ്രദ്ധിക്കുക. ◀

▶ ഉദാഹരണം 3.5

(free fall) നിർബാധപതനത്തിലുള്ള ഒരു വസ്തുവിന്റെ ചലനത്തെക്കുറിച്ച് വിശദീകരിക്കുക. വായുവിന്റെ രോധം അവഗണിക്കുക.

ഉത്തരം

ഭൂമിയുടെ ഉപരിതലത്തിനടുത്തു നിന്നു വിട്ടയക്കുന്ന ഏതൊരു വസ്തുവിനും ഗുരുത്വാകർഷണബലത്തിനാൽ താഴേക്ക് ത്വരണമുണ്ടാകുന്നു. ഭൂഗുരുത്വത്വരണത്തിന്റെ പരിമാണം 'g' എന്ന അക്ഷരം കൊണ്ട് സൂചിപ്പിക്കുന്നു. വായുവിന്റെ ഘർഷണം അവഗണിച്ചാൽ, ആ വസ്തു **നിർബാധപതനത്തിലാണെന്നു** പറയാം. A വസ്തു വീഴുന്ന പൊക്കം ഭൂമിയുടെ ആരവുമായി താരതമ്യപ്പെടുത്തുമ്പോൾ ചെറുതായാൽ g യെ സ്ഥിരമായി എടുക്കാൻ കഴിയും. g എന്നത് 9.8 ms^{-2} ആണ്. നിർബാധപതനം എന്നത് സമത്വരണമുള്ള ഒരു ചലനാവസ്ഥയാണ്.

മുകളിലേക്കുള്ള ദിശ പോസിറ്റീവായി തിരഞ്ഞെടുത്തതുകൊണ്ട് ചലനം y ദിശയിൽ അഥവാ കൂടുതൽ ശരിയായി - y ദിശയിൽ ആയിരിക്കും. ഭൂഗുരുത്വത്വരണം എപ്പോഴും താഴേക്ക് ആയതിനാൽ, അത് നെഗറ്റീവ് ദിശയിലായിരിക്കും. നമുക്കു ലഭിച്ചത്,

$$a = -g = -9.8 \text{ m s}^2$$

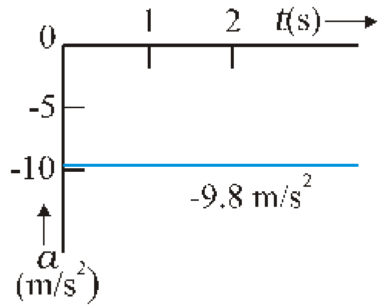
ആ വസ്തുവിനെ നിശ്ചലാവസ്ഥയിൽ $y = 0$ യിൽ നിന്നു വിട്ടയക്കുന്നു. അതിനാൽ $v_o = 0$. അപ്പോൾ ചലനസമവാക്യങ്ങൾ ;

$$v = 0 - g\,t = -9.8\,t \text{ m s}^1$$

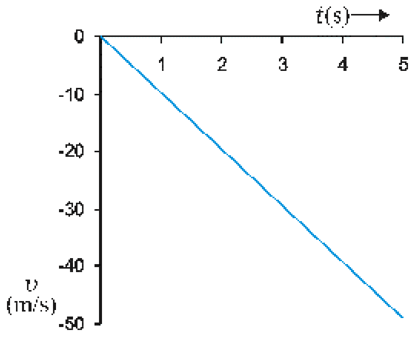
$$y = 0 - ½\,g\,t^2 = -4.9\,t^2 \text{ m}$$

$$v^2 = 0 - 2\,g\,y = -19.6\,y \text{ m}^2 \text{ s}^2$$ എന്നിങ്ങനെ മാറുന്നു.

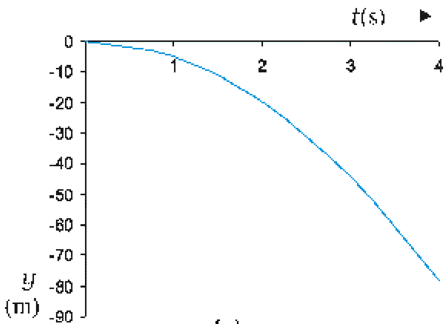
ഈ സമവാക്യങ്ങൾ പ്രവേഗവും സമയത്തിന് അനുസൃതമായി വസ്തു സഞ്ചരിച്ച ദൂരവും നൽകുന്നു. ത്വരണം, പ്രവേഗം, ദൂരം, സമയം എന്നിവയുടെ വ്യതിയാനവും സമയവുമായുള്ള ഗ്രാഫുകൾ ചിത്രം 3.14 (a), (b), (c) എന്നിവയിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നു.



(a)



(b)



(c)

ചിത്രം 3.14 : നിർബാധപതനത്തിലുള്ള ഒരു വസ്തുവിന്റെ ചലനം a) സമയത്തിനനുസരിച്ച് ത്വരണത്തിനുള്ള വ്യതിയാനം. b) സമയത്തിനനുസരിച്ച് പ്രവേഗത്തിനുള്ള വ്യതിയാനം. c) സമയത്തിനനുസരിച്ച് ദൂരത്തിനുള്ള വ്യതിയാനം.

ഉദാഹരണം 3.6

ഗലീലിയോയുടെ ഒറ്റ സംഖ്യാ നിയമം: "നിശ്ചലാവസ്ഥയിൽ നിന്നും താഴേക്കു പതിക്കുന്ന ഒരു വസ്തു തുല്യസമയ ഇടവേളകളിൽ സഞ്ചരിച്ച ദൂരം അന്യോന്യം ഒരേ അനുപാതത്തിൽ ഒന്നിൽ തുടങ്ങി ഒറ്റ അക്കങ്ങളായി നിലകൊള്ളുന്നു. (1:3:5:7.....എന്നിങ്ങനെ) എന്ന് തെളിയിക്കുക.

ഉത്തരം

നമുക്ക് സ്വതന്ത്രവീഴ്ചയിലുള്ള ഒരു വസ്തുവിന്റെ ചലനത്തിന്റെ സമയഇടവേളയെ ധാരാളം തുല്യ ഇടവേളകൾ, T ആയി വിഭജിക്കുകയും തുടർച്ചയായ ഇടവേളകളിൽ സഞ്ചരിച്ച ദൂരങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കുകയും ചെയ്യാം. പ്രാരംഭ പ്രവേഗം പൂജ്യമായതുകൊണ്ട്

$$y \quad -\frac{1}{2}gt^2$$ എന്ന്.

സമവാക്യമുപയോഗിച്ച് പട്ടിക 3.2 ൽ രണ്ടാമത്തെ നിരയിൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന പോലെ വ്യത്യസ്ത സമയ ഇടവേളകൾ $0, \tau, 2\tau, 3\tau$... കഴിയുമ്പോഴുള്ള വസ്തുവിന്റെ സ്ഥാനം കണ്ടുപിടിക്കാൻ കഴിയും. y_0 എന്നത് , ആദ്യത്തെ സമയ ഇടവേളക്കുശേഷമുള്ള സ്ഥാനത്തിന്റെ നിർദേശാങ്കമാണെന്നെടുത്താൽ മൂന്നാമത്തെ നിരയിൽ y_0 യുടെ യൂണിറ്റിൽ സ്ഥാനങ്ങൾ ലഭിക്കും. നാലാമത്തെ നിര തുടർച്ചയായി സഞ്ചരിച്ച ദൂരങ്ങൾ നൽകുന്നു. ഈ ദൂരങ്ങൾ 1:3:5:7:9:11..... എന്നിങ്ങനെ 3.2 പട്ടികയിലെ അവസാനത്തെ നിരയിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ, ഒരു ലളിതമായ അനുപാതത്തിലാണെന്നു കാണാം. ഈ നിയമം ആവിഷ്കരിച്ചത് ഗലീലിയോ ഗലീലിയാണ് (1564 -1642). അദ്ദേഹമാണ് ആദ്യമായി സ്വതന്ത്രവീഴ്ചയെക്കുറിച്ചുള്ള പാരിമാണിക പഠനങ്ങൾ നടത്തിയത്.

ഉദാഹരണം 3.7 വാഹനങ്ങളുടെ വിരാമദൂരങ്ങൾ (Stopping distances): ചലിച്ചുകൊണ്ടിരിക്കുന്ന ഒരു വാഹനം ബ്രേക്കു ചെയ്യുമ്പോൾ, അതിന്റെ സഞ്ചാരം നിലക്കുന്നതിന് തൊട്ടുമുമ്പ് സഞ്ചരിക്കുന്ന ദൂരത്തെ വിരാമദൂരം എന്നു പറയുന്നു. റോഡ് സുരക്ഷയുടെ ഒരു പ്രധാനപ്പെട്ട ഘടകമാണിത്. ഇത് ആദ്യപ്രവേഗത്തെയോ(v_0) ബ്രേക്കു ചെയ്യാനുള്ള കഴിവിനെയോ അല്ലെങ്കിൽ അതു സൃഷ്ടിക്കുന്ന മന്ദനത്തെയോ (-a), ആശ്രയിക്കുന്നു. v_0, a ഇവ ഉൾപ്പെടുന്നതരത്തിൽ ഒരു വാഹനത്തിന്റെ വിരാമദൂരം കാണാനുള്ള സമവാക്യം രൂപീകരിക്കുക.

പട്ടിക 3.2

t	y	y_0 യുടെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ $y_0 = (-1/2) g\tau^2$	തുടർച്ചയായ ഇടവേളകളിൽ സഞ്ചരിച്ച ദൂരങ്ങൾ	സഞ്ചരിച്ച ദൂരങ്ങളുടെ അനുപാതം
0	0	0		
τ	$-(1/2)\ g\ \tau^2$	y_0	y_0	1
$2\ \tau$	$-4(1/2)\ g\ \tau^2$	$4\ y_0$	$3\ y_0$	3
$3\ \tau$	$-9(1/2)\ g\ \tau^2$	$9\ y_0$	$5\ y_0$	5
$4\ \tau$	$-16(1/2)\ g\ \tau^2$	$16\ y_0$	$7\ y_0$	7
$5\ \tau$	$-25(1/2)\ g\ \tau^2$	$25\ y_0$	$9\ y_0$	9
$6\ \tau$	$-36(1/2)\ g\ \tau^2$	$36\ y_0$	$11\ y_0$	11

ഉത്തരം: വാഹനം നിൽക്കുന്നതിനു മുൻപ് അത് സഞ്ചരിച്ച ദൂരം d_s എന്നിരിക്കട്ടെ. ചലനസമവാക്യം $v^2 = v_o^2 + 2\,ax$ ഉപയോഗിച്ച് $v = 0$ എന്ന കാര്യം ശ്രദ്ധിക്കുക. നമുക്ക് വിരാമദൂരം കണ്ടെത്താം.

$$d_s = \frac{-v_o^2}{2a}$$

അതായത് വിരാമദൂരം ആദ്യപ്രവേഗത്തിന്റെ വർഗത്തിന് ആനുപാതികമാണ്. ആദ്യപ്രവേഗം ഇരട്ടിയാകുമ്പോൾ വിരാമദൂരം 4 മടങ്ങാകുന്നു (ഒരേ മന്ദീകരണത്തിന്).

ഒരു പ്രത്യേകനിർമിതിയുള്ള കാറിന്റെ 11, 15, 20, 25 ms^{-1} എന്നീ പ്രവേഗങ്ങൾക്ക് ആനുപാതികമായ വിരാമദൂരങ്ങൾ 10 m, 20 m, 34 m, 50 m എന്നിങ്ങനെയാണ്. ഈ ബന്ധം മുകളിൽ പറഞ്ഞ സൂത്രവാക്യത്തിനനുസൃതമാണെന്നു കാണാം.

വിരാമദൂരം സ്കൂൾ മേഖലകളിലും മറ്റും വേഗപരിധി നിർണയിക്കാനുള്ള പ്രധാന ഘടകമായി പരിഗണിക്കപ്പെടുന്നു. ◀

▶ **ഉദാഹരണം 3.8**

പ്രതികരണസമയം (Reaction time)

പെട്ടെന്നുള്ള പ്രതികരണം ആവശ്യമായി വരുന്ന ചില സാഹചര്യങ്ങളിൽ, നാം പ്രതികരിക്കാൻ അൽപം സമയം എടുക്കാറുണ്ട്. ഒരു വ്യക്തി നിരീക്ഷിക്കാനും ചിന്തിക്കാനും പിന്നീട് പ്രവർത്തിക്കാനുമെടുക്കുന്ന സമയമാണ് പ്രതികരണസമയം. ഉദാഹരണമായി, ഒരാൾ വാഹനം ഓടിക്കുമ്പോൾ ഒരു കുട്ടിയെ പെട്ടെന്ന് റോഡിൽ കാണുന്നുവെന്നിരിക്കട്ടെ. അപ്പോൾ അയാൾ ശക്തമായി ബ്രേക്ക് പ്രയോഗിക്കുന്നതിനുമുൻപ് എടുത്ത സമയമാണ് പ്രതികരണസമയം. പ്രതികരണസമയം സാഹചര്യത്തിന്റെ സങ്കീർണതയെയും വ്യക്തിയെയും ആശ്രയിക്കുന്നു.

ഒരു ചെറിയ പരീക്ഷണംകൊണ്ട് നിങ്ങൾക്ക് നിങ്ങളുടെ പ്രതികരണസമയം അളക്കാം. ഒരു റൂളർ എടുത്ത് നിങ്ങളുടെ കൂട്ടുകാരനോട് അത് നിങ്ങളുടെ തള്ളവിരലിന്റെയും ചൂണ്ടുവിരലിന്റെയും ഇടയിലൂടെ ലംബമായി താഴേക്ക് ഇടാൻ പറയുക. (ചിത്രം 3.15) നിങ്ങൾ അത് പിടിച്ച് കഴിയുമ്പോൾ, ആ വടി സഞ്ചരിച്ച ദൂരം d കണ്ടുപിടിക്കുക. ഒരു തവണ d യുടെ വില 21.0 സെ.മീ ആണെങ്കിൽ പ്രതികരണസമയം നിർണയിക്കുക.

ചിത്രം 3.15 *പ്രതികരണസമയം നിർണയിക്കൽ*

ഉത്തരം

റൂളർ നിർബാധമായി താഴേക്ക് വീഴുന്നു. അതുകൊണ്ട്, $v_o = 0$, കൂടാതെ $a = -g = -9.8\ m\ s^{-2}$ സഞ്ചരിച്ച ദൂരം d, പ്രതികരണസമയം t_r എന്നിവ തമ്മിൽ ബന്ധപ്പെട്ടിരിക്കുന്നത്.

$$d = -\frac{1}{2} g t_r^2$$

അഥവാ, $$t_r = \sqrt{\frac{2d}{g}}\ s$$

തന്നിട്ടുള്ളത്, $d = 21.0$ cm

അപ്പോൾ പ്രതികരണസമയം $t_r = \sqrt{\frac{2 \times 0.21}{9.8}}\ s = 0.2\ s.$

◀

3.7 ആപേക്ഷികപ്രവേഗം (Relative velocity)

ട്രെയിനിൽ യാത്രചെയ്യുമ്പോൾ നിങ്ങൾ സഞ്ചരിക്കുന്ന അതേ ദിശയിൽ മറ്റൊരു ട്രെയിൻ നിങ്ങളെ മറികടന്ന് പോയ അനുഭവം ഉണ്ടായിരിക്കുമല്ലോ. നിങ്ങളെ കടന്നുപോകണമെങ്കിൽ ആ ട്രെയിനിന്റെ വേഗം നിങ്ങളുടേതിനേക്കാൾ കൂടുതലായിരിക്കണം. പുറത്തു നിൽക്കുന്ന ഒരാൾ ഈ രണ്ടു ട്രെയിനുകളേയും നോക്കിനിൽക്കുമ്പോൾ തോന്നുന്ന വേഗത്തേക്കാൾ കുറവായിരിക്കും നിങ്ങൾക്ക് നിങ്ങളെ മറികടന്നു പോകുന്ന ട്രെയിനിന് ഉള്ളതായി തോന്നുന്നത്. രണ്ടു ട്രെയിനുകൾക്കും തറനിരപ്പുമായി നോക്കുമ്പോൾ ഒരേ പ്രവേഗമാണെങ്കിൽ മറ്റേ ട്രെയിൻ ചലിക്കുന്നതേയില്ല എന്നു തോന്നാം. ഇങ്ങനെയുള്ള നിരീക്ഷണങ്ങൾ മനസ്സിലാക്കാൻ നമ്മൾ ആപേക്ഷികപ്രവേഗം എന്ന ആശയം പരിചയപ്പെടുത്തുന്നു.

ശരാശരി പ്രവേഗങ്ങൾ യഥാക്രമം v_A, v_B ഉള്ള രണ്ടു വസ്തുക്കൾ (A, B എന്നിവ) ഏകമാനത്തിൽ x

അക്ഷത്തിലൂടെ സഞ്ചരിക്കുന്നതായി പരിഗണിക്കുക (മറിച്ച് പ്രതിപാദിച്ചില്ലെങ്കിൽ) ഈ അധ്യായത്തിൽ പറയുന്ന പ്രവേഗങ്ങൾ എല്ലാം അളക്കുന്നത് തറനിരപ്പുമായി ബന്ധപ്പെട്ടാണ്) $x_A(0)$, $x_B(0)$ എന്നിവ യഥാക്രമം A, B എന്നിവയുടെ t = 0 സമയത്തുള്ള സ്ഥാനങ്ങളാണെങ്കിൽ അവയുടെ t സമയത്തെ സ്ഥാനങ്ങൾ യഥാക്രമം $x_A(t)$, $x_B(t)$ എന്നിവയാണ്. അതായത്,

$$x_A(t) = x_A(0) + v_A t \quad (3.12a)$$
$$x_B(t) = x_B(0) + v_B t \quad (3.12b)$$

അപ്പോൾ, വസ്തു A യിൽനിന്നു B യിലേക്കുള്ള സ്ഥാനാന്തരം

$$x_{BA}(t) = x_B(t) - x_A(t)$$
$$= [x_B(0) - x_A(0)] + (v_B - v_A)t. \quad (3.13)$$

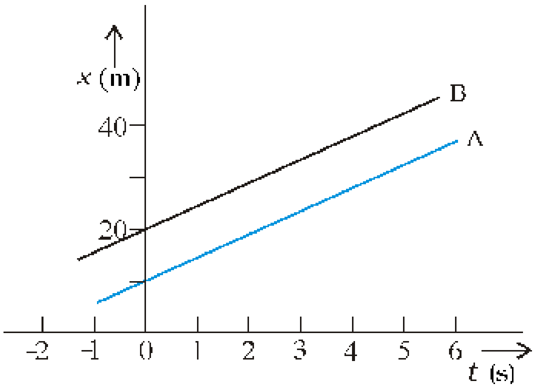
സമവാക്യം (3.13) നെ എളുപ്പത്തിൽ വ്യാഖ്യാനിക്കാൻ സാധിക്കും. വസ്തു A യിൽനിന്നു നോക്കുമ്പോൾ, B ക്ക് $v_B - v_A$ പ്രവേഗമുണ്ട്. കാരണം, A യിൽ നിന്നു B യിലേക്കുള്ള സ്ഥാനാന്തരം സമയത്തിന്റെ ഓരോ യൂണിറ്റിലും സ്ഥിരമായി മാറുന്നത് $(v_B - v_A)$ എന്ന അളവിലാണ്. B എന്ന വസ്തുവിന്റെ A എന്ന വസ്തുവിന് ആപേക്ഷികമായ പ്രവേഗം എന്നത് $v_B - v_A$ ആണ്. അതായത്,

$$v_{BA} = v_B - v_A \quad (3.14a)$$

സമാനമായി A എന്ന വസ്തുവിന് B എന്ന വസ്തുവിന് ആപേക്ഷികമായ പ്രവേഗം

$$v_{AB} = v_A - v_B \quad (3.14b)$$

ആയിരിക്കും.



ചിത്രം 3.16 തുല്യ പ്രവേഗമുള്ള രണ്ടു വസ്തുക്കളുടെ സ്ഥാന– സമയ ഗ്രാഫുകൾ

ഇതുകാണിക്കുന്നത്: $v_{BA} = - v_{AB}$ എന്നാണ്. (3.14c)

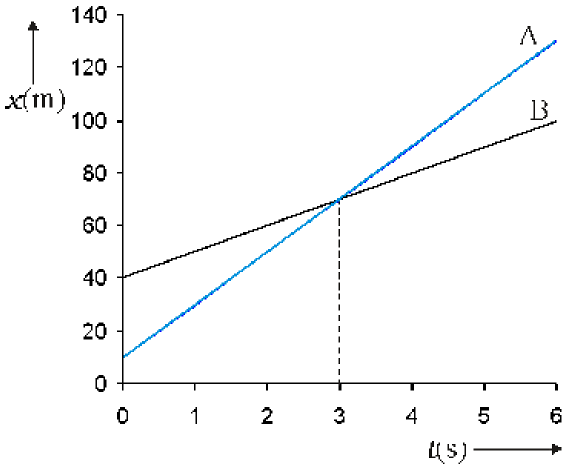
ഇപ്പോൾ നമുക്ക് ചില പ്രത്യേകസാഹചര്യങ്ങൾ പരിഗണിക്കാം:

(a) $v_B = v_A$ ആയാൽ $v_B - v_A = 0$ ആകുന്നു. അപ്പോൾ, സമവാക്യം(3.13) ൽ നിന്നു $x_B(t) - x_A(t) = x_B(0) - x_A(0)$ ആയിരിക്കും. അതുകൊണ്ട്, രണ്ടു വസ്തുക്കളും സ്ഥിരമായ ദൂരത്തിൽ $(x_B(0) - x_A(0))$ അകന്നിരിക്കുകയും അവയുടെ സ്ഥാന–സമയ ഗ്രാഫുകൾ ചിത്രം (3.16) ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ പരസ്പരം സമാന്തരമായ നേർരേഖകളായിരിക്കുകയും ചെയ്യും. ഈ സാഹചര്യത്തിൽ ആപേക്ഷിക പ്രവേഗം v_{AB} അല്ലെങ്കിൽ v_{BA} പൂജ്യമായിരിക്കും.

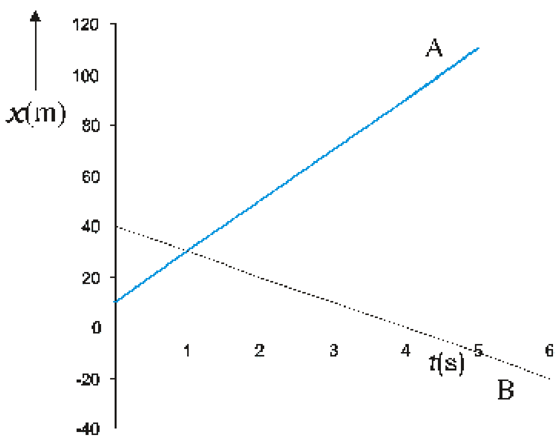
(b) $v_A > v_B$ ആണെങ്കിൽ $v_B - v_A$ നെഗറ്റീവായിരിക്കും. ഒരു ഗ്രാഫ് മറ്റേതിനേക്കാൾ കുത്തനെയുള്ളതായിരിക്കുകയും രണ്ടു ഗ്രാഫുകളും പൊതുവായ ഒരു ബിന്ദുവിൽ കൂടിച്ചേരുകയും ചെയ്യുന്നു. ഉദാഹരണമായി, $v_A = 20\ m\ s^{-1}$, $x_A(0) = 10\ m$. $v_B = 10\ m\ s^{-1}$, $x_B(0) = 40\ m$; എന്നിങ്ങനെയാണെന്നിരിക്കട്ടെ. അപ്പോൾ അവ കൂട്ടിമുട്ടുന്ന സമയം $t = 3\ s$ (ചിത്രം 3.17) ആയിരിക്കും. ഈ ക്ഷണത്തിൽ അവ രണ്ടിന്റെയും സ്ഥാനം $x_A(t) = x_B(t) = 70 m$ ആണ്. അതായത്, ഈ സമയത്ത് A എന്ന വസ്തുവിനെ B എന്ന വസ്തു മറികടക്കുന്നു. ഈ അവസരത്തിൽ,

$$v_{BA} = 10 ms^{-1} - 20 ms^{-1} = -10 ms^{-1} = -v_{AB}.$$

(c) v_A യ്ക്കും v_B യ്ക്കും വിപരീത ചിഹ്നങ്ങളാണെന്നു കരുതുക. ഉദാഹരണമായി, മുകളിൽ പറഞ്ഞ ഉദാഹരണത്തിൽ A എന്ന വസ്തു $x_A(0) = 10\ m$ എന്ന സ്ഥാനത്തുനിന്നു തുടങ്ങി $20\ m\ s^{-1}$ ൽ സഞ്ചരിക്കുന്നു. ഒപ്പം B എന്ന വസ്തു $x_B(0) = 40\ m$ എന്ന സ്ഥാനത്തുനിന്നു തുടങ്ങി $-10\ m\ s^{-1}$ ൽ സഞ്ചരിക്കുന്നു. അവ രണ്ടും ചിത്രം (3.18) ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ $t = 1 s$ ൽ കൂട്ടിമുട്ടുന്നു. B യുടെ A യെ അപേക്ഷിച്ചുള്ള പ്രവേഗം $v_{BA} = [-10-(20)]\ m\ s^{-1} = -30\ m\ s^{-1} = -v_{AB}$ ആകുന്നു. ഈ സാഹചര്യത്തിൽ v_{BA} അല്ലെങ്കിൽ v_{AB} ($= 30\ m\ s^{-1}$) യുടെ പരിമാണം A യുടെ അല്ലെങ്കിൽ B യുടെ പ്രവേഗത്തിന്റെ പരിമാണത്തേക്കാൾ കൂടുതലായിരിക്കും. നമ്മൾ പരിഗണിച്ച വസ്തുക്കൾ ട്രെയിനുകളാണെങ്കിൽ, രണ്ടിലേതെങ്കിലും ട്രെയിനിലിരിക്കുന്ന ഒരാൾക്ക് മറ്റേ ട്രെയിൻ വേഗത്തിൽ സഞ്ചരിക്കുന്നതായി തോന്നുന്നു. v_A യും v_B യും തൽക്ഷണപ്രവേഗങ്ങളായിരുന്നാലും സമവാക്യം (3.14) സാധുവായിരിക്കും.



ചിത്രം (3.17) തുല്യമല്ലാത്ത പ്രവേഗമുള്ള രണ്ടു വസ്തുക്കളുടെ സ്ഥാന-സമയ ഗ്രാഫുകളും അവ കണ്ടുമുട്ടുന്ന സമയവും കാണിച്ചിരിക്കുന്നു.



ചിത്രം (3.18) രണ്ടു വസ്തുക്കളുടെ വിപരീതദിശയിലെ പ്രവേഗങ്ങളുടെ സ്ഥാന-സമയ ഗ്രാഫും അവ കുറുകെ കടക്കുന്ന സമയവും കാണിച്ചിരിക്കുന്നു.

ഉദാഹരണം 3.9

രണ്ടു സമാന്തര റെയിൽവേ ട്രാക്കുകൾ വടക്കു തെക്കു ദിശകളിലുണ്ട്. A എന്ന ട്രെയിൻ വടക്കോട്ട് 54 km h^{-1} വേഗത്തിലും B എന്ന ട്രെയിൻ തെക്കോട്ട് 90 km h^{-1} വേഗത്തിലും ചലിക്കുന്നു. എങ്കിൽ,

a) A യെ അപേക്ഷിച്ച് B യുടെ പ്രവേഗം?

b) B യെ അപേക്ഷിച്ചുള്ള തറയുടെ പ്രവേഗം?

c) ഒരു കുരങ്ങ് A എന്ന ട്രെയിനിന്റെ മുകൾഭാഗത്ത് കൂടി അതിന്റെ ചലനത്തിനെതിരായി (ട്രെയിൻ A യെ അപേക്ഷിച്ച് 18 km h^{-1} പ്രവേഗത്തിൽ) സഞ്ചരിക്കുമ്പോൾ തറയിൽ നിൽക്കുന്ന ഒരാൾ നിരീക്ഷിക്കുന്ന, കുരങ്ങന്റെ പ്രവേഗം എത്രയാണ്?

ഉത്തരം

പോസിറ്റീവ് x അക്ഷത്തെ തെക്കുനിന്നു വടക്കോട്ടുള്ള ദിശയായി സ്വീകരിക്കുക. അപ്പോൾ,

$$v_A = +54 \text{ km h}^{-1} = 15 \text{ m s}^{-1}$$
$$v_B = -90 \text{ km h}^{-1} = -25 \text{ m s}^{-1}$$

A യെ അപേക്ഷിച്ച് B യുടെ ആപേക്ഷികപ്രവേഗം $v_B - v_A = -40 \text{ m s}^{-1}$ ആകുന്നു. അതായത്, B എന്ന ട്രെയിൻ 40 m s^{-1} പ്രവേഗത്തിൽ വടക്കുനിന്നും തെക്കോട്ടു സഞ്ചരിക്കുന്നതായി A എന്ന ട്രെയിനിലെ നിരീക്ഷകന് തോന്നുന്നു. B യെ അപേക്ഷിച്ച് തറയുടെ ആപേക്ഷിക പ്രവേഗം, $= 0 - v_B = 25 \text{ m s}^{-1}$ ആകുന്നു.

തറയെ അപേക്ഷിച്ച് (c) യിൽ കുരങ്ങന്റെ പ്രവേഗം v_M ആണെന്ന് കരുതുക. A യെ അപേക്ഷിച്ച് കുരങ്ങന്റെ ആപേക്ഷിക പ്രവേഗം.

$v_{MA} = v_M - v_A = -18 \text{ km h}^{-1} = -5 \text{ m s}^{-1}$. അതുകൊണ്ട് $v_M = (15 - 5) \text{ m s}^{-1} = 10 \text{ m s}^{-1}$.

സംഗ്രഹം

1. ഒരു വസ്തു ചലനാവസ്ഥയിലാണെന്നു പറയുന്നത് അതിന്റെ സ്ഥാനം സമയത്തിനനുസരിച്ച് മാറുമ്പോഴാണ്. ഒരു വസ്തുവിന്റെ സ്ഥാനം സൗകര്യപ്രദമായി സ്വീകരിച്ച ഒരു മൂലബിന്ദുവിനെ ആധാരമാക്കി വ്യക്തമാക്കാൻ കഴിയും. നേർരേഖാചലനത്തിന്, മൂലബിന്ദുവിന്റെ വലതുവശത്തേക്കുള്ള സ്ഥാനങ്ങൾ പോസിറ്റീവും ഇടതുവശത്തേക്കുള്ളത് നെഗറ്റീവുമായി കരുതുക.

2. പാതദൈർഘ്യം എന്നത് ഒരു വസ്തു സഞ്ചരിച്ച ആകെ പാതയുടെ നീളമാണ്.

3. സ്ഥാനത്തിലുള്ള മാറ്റമാണ് സ്ഥാനാന്തരം: $\Delta x = x_2 - x_1$. ഒരേ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾക്കിടയിലുള്ള സ്ഥാനാന്തരത്തിന്റെ പരിമാണത്തിനു തുല്യമോ കൂടുതലോ ആയിരിക്കും അവിടത്തെ പാതദൈർഘ്യം.

4. ഒരു വസ്തു നേർരേഖയിൽ സമചലനത്തിലാണ് എന്നു പറയണമെങ്കിൽ അതിന്റെ സ്ഥാനാന്തരം തുല്യസമയ ഇടവേളകളിൽ തുല്യമായിരിക്കണം. അല്ലെങ്കിൽ, ചലനത്തെ അസമചലനം എന്നു പറയുന്നു.

5. ശരാശരിപ്രവേഗമെന്നത് സ്ഥാനാന്തരത്തെ അതു സംഭവിക്കുന്ന സമയ ഇടവേളകൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ കിട്ടുന്നതാണ്.

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

ഒരു x-t ഗ്രാഫിൽ, ഒരു സമയ ഇടവേളയിലെ ശരാശരിപ്രവേഗം എന്നത് ആ സമയ ഇടവേളയിലെ ആദ്യസ്ഥാനത്തെയും അന്ത്യസ്ഥാനത്തെയും ബന്ധിപ്പിക്കുന്ന നേർരേഖയുടെ ചരിവാണ്.

6. ശരാശരി വേഗത എന്നത് ആകെ സഞ്ചരിച്ച പാതദൈർഘ്യവും അതുമായി ബന്ധപ്പെട്ട സമയ ഇടവേളയും തമ്മിലുള്ള അനുപാതമാണ്. ഒരു വസ്തുവിന്റെ ശരാശരി വേഗത, തന്നിരിക്കുന്ന ഒരു സമയ ഇടവേളയിലെ ശരാശരിപ്രവേഗത്തിന്റെ പരിമാണത്തിന് തുല്യമോ അതിനേക്കാൾ കൂടുതലോ ആയിരിക്കും.

7. Δt എന്ന സമയ ഇടവേള വളരെ ചെറുതാകുമ്പോഴുള്ള ശരാശരി പ്രവേഗത്തിന്റെ പരിധിയെ തൽക്ഷണ പ്രവേഗം അഥവാ പ്രവേഗം എന്ന് നിർവചിക്കാം.

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

ഒരു പ്രത്യേക നിമിഷത്തിലെ പ്രവേഗം എന്നത് സ്ഥാന- സമയഗ്രാഫിലെ ആ നിമിഷത്തിലുള്ള തൊടുവരയുടെ ചരിവിനു തുല്യമാണ്.

8. പ്രവേഗ വ്യത്യാസത്തെ ആ വ്യത്യാസമുണ്ടാകാൻ എടുത്ത സമയ ഇടവേളകൊണ്ട് ഭാഗിക്കുന്നതാണ് ശരാശരി ത്വരണം.

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

9. തൽക്ഷണ ത്വരണം നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നത് സമയ ഇടവേള Δt പൂജ്യത്തോടടുക്കുമ്പോൾ ഉള്ള ശരാശരി ത്വരണത്തിന്റെ പരിധിയായാണ്.

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

ഒരു വസ്തുവിന്റെ, ഒരു പ്രത്യേക സമയത്തെ ത്വരണമെന്നത് ആ ക്ഷണത്തിലെ പ്രവേഗ - സമയ ഗ്രാഫിന്റെ ചരിവാണ്. സമചലനത്തിന്റെ ത്വരണം പൂജ്യമാണ്, ഒപ്പം x-t ഗ്രാഫ് സമയത്തിന്റെ അക്ഷത്തിലേക്ക് ചരിവുള്ള ഒരു നേർരേഖയാണ്. കൂടാതെ v-t ഗ്രാഫ് സമയത്തിന്റെ അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമായ ഒരു നേർരേഖയാണ്. സമത്വരണമുള്ള ചലനത്തിന്, x-t ഗ്രാഫ് ഒരു പരാബോളയും v-t ഗ്രാഫ് സമയത്തിന്റെ അക്ഷത്തിലേക്ക് ചരിവുള്ള ഒരു നേർരേഖയുമായിരിക്കും.

10. t_1 , t_2 എന്നീ സമയങ്ങൾക്കിടയിലുള്ള പ്രവേഗ - സമയ ഗ്രാഫിനു താഴെയുള്ള ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എന്നത് ആ വസ്തുവിന്റെ ആ സമയ ഇടവേളക്കിടയിലുള്ള സ്ഥാനാന്തരത്തിനു തുല്യമാണ്.

11. സമത്വരണത്തിൽ നേർരേഖാചലനത്തിലുള്ള വസ്തുക്കളുടെ സ്ഥാനാന്തരം x, എടുത്ത സമയം t, പ്രാരംഭപ്രവേഗം v_0, അന്തിമ പ്രവേഗം v, ത്വരണം a എന്നീ അഞ്ച് അളവുകൾ ഒരു കൂട്ടം ലളിതമായ സമവാക്യങ്ങളാൽ ബന്ധപ്പെട്ടുകിടക്കുന്നു. ഇതിനെ ചലനസമവാക്യങ്ങളെന്നു വിളിക്കുന്നു.

$$v \quad v_0 + at$$

$$x = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$v^2 = v_0^2 + 2ax$$

ഒരു വസ്തുവിന്റെ സ്ഥാനം t=0 യിൽ പൂജ്യമാണ്. എന്നാൽ വസ്തു അതിന്റെ ചലനം ആരംഭിക്കുന്നത് $x = x_0$ യിൽ നിന്നായിരിക്കും, മുകളിലുള്ള സമവാക്യത്തിൽ x നു പകരം $x - x_0$ എന്ന് എഴുതേണ്ടിവരും.

ഭൗതിക അളവുകൾ	പ്രതീകം	ഡൈമൻഷണൽ സമവാക്യം	ഏകകം	പരാമർശം
പാതദൈർഘ്യം		[L]	മീറ്റർ	
സ്ഥാനാന്തരം	Δx	[L]	മീറ്റർ	ഏകമാനത്തിൽ ഇതിന്റെ ചിഹ്നം ദിശയെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു.
പ്രവേഗം		$[LT^{-1}]$	മീറ്റർ/ സെക്കന്റ്	
എ) ശരാശരി	$\bar{v}$			$= \frac{\Delta x}{\Delta t}$
ബി) തൽക്ഷണം	v			$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$ ഏകമാനത്തിൽ ഇതിന്റെ ചിഹ്നം ദിശയെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു.
വേഗം		$[LT^{-1}]$	മീറ്റർ/ സെക്കന്റ്	
എ) ശരാശരി				$= \frac{\text{പാതദൈർഘ്യം}}{\text{ഇടവേള}}$
ബി) തൽക്ഷണം				$= \frac{dx}{dt}$
ത്വരണം		$[LT^{-2}]$	മീറ്റർ/ സെക്കന്റ്²	
എ) ശരാശരി	$\bar{a}$			$= \frac{\Delta v}{\Delta t}$
ബി) തൽക്ഷണം	a			$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$ ഏകമാനത്തിൽ ഇതിന്റെ ചിഹ്നം ദിശയെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

വിചിന്തന വിഷയങ്ങൾ

1. രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾക്കിടയിൽ ഒരു വസ്തു സഞ്ചരിച്ച പാതദൈർഘ്യം പൊതുവായി, സ്ഥാനാന്തരത്തിന്റെ പരിമാണത്തിന് തുല്യമായിരിക്കില്ല. സ്ഥാനാന്തരം അഗ്രബിന്ദുക്കളെ മാത്രം ആശ്രയിക്കുന്നു. പാതദൈർഘ്യം (പേരു സൂചിപ്പിക്കുന്നതുപോലെ) സഞ്ചാരപാതയെ ആശ്രയിക്കും. ഏകമാനത്തിൽ ചലനഗതിയിൽ ആ വസ്തു അതിന്റെ ദിശ മാറ്റുന്നില്ല എങ്കിൽ മാത്രമാണ് ഈ രണ്ട് അളവുകളും സമമാകുന്നത്. മറ്റുള്ള എല്ലാ അവസരങ്ങളിലും പാതദൈർഘ്യം സ്ഥാനാന്തരത്തിന്റെ പരിമാണത്തേക്കാൾ കൂടുതലായിരിക്കും.

2. മുകളിലെ (പ്രസ്താവന 1 ന്റെ) വീക്ഷണത്തിൽ, ഒരു വസ്തുവിന്റെ ശരാശരി വേഗം തന്നിരിക്കുന്ന ഒരു സമയ ഇടവേളയിൽ ശരാശരി പ്രവേഗത്തിന്റെ പരിമാണത്തിനു തുല്യമോ അതിലും കൂടുതലോ ആയിരിക്കും. അവ രണ്ടും തുല്യമാകണമെങ്കിൽ പാതദൈർഘ്യം സ്ഥാനാന്തരത്തിന്റെ പരിമാണത്തിനു തുല്യമാകണം.

3. ഒരു അക്ഷത്തിന്റെ മൂലബിന്ദുവും പോസിറ്റീവ് ദിശയും സൗകര്യം പോലെ യഥേഷ്ടം തിരഞ്ഞെടുക്കാവുന്നതാണ്. സ്ഥാനാന്തരം, പ്രവേഗം, ത്വരണം എന്നിവ പോലെയുള്ള അളവുകൾക്ക് ചിഹ്നം നിശ്ചയിക്കുന്നതിനു മുമ്പ് ഈ തിരഞ്ഞെടുപ്പിനെക്കുറിച്ച് വ്യക്തമാക്കണം.

4. ഒരു വസ്തുവിന് വേഗം കൂടുകയാണെങ്കിൽ ത്വരണം പ്രവേഗദിശയിലാണ്. അതിന്റെ വേഗം കുറയുകയാണെങ്കിൽ ത്വരണം പ്രവേഗത്തിന്റെ എതിർദിശയിലാണ്. ഈ പ്രസ്താവന മൂലബിന്ദുവിന്റെയോ അക്ഷത്തിന്റെയോ തിരഞ്ഞെടുപ്പിനെ ആശ്രയിക്കുന്നില്ല.

5. ത്വരണത്തിൻെറ ചിഹ്നം ആ വസ്തുവിന്റെ വേഗം കൂടുകയാണോ കുറയുകയാണോ എന്നതിനേക്കുറിച്ച് ഉൾക്കാഴ്ച തരില്ല. ത്വരണത്തിന്റെ ചിഹ്നം (മൂന്നാമത്തെ പ്രസ്താവനയിലേതുപോലെ) അക്ഷത്തിന്റെ പോസിറ്റീവ് ദിശ തിരഞ്ഞെടുക്കുന്നതിനെ ആശ്രയിക്കുന്നു. ഉദാഹരണമായി, മുകളിലേക്ക് ലംബമായുള്ള ദിശയാണ് അക്ഷത്തിന്റെ പോസിറ്റീവ് ദിശയായി എടുക്കുന്നതെങ്കിൽ, ഭൂഗുരുത്വത്വരണം നെഗറ്റീവാണ്. ഒരു വസ്തു ഗുരുത്വാകർഷണത്താൽ വീഴുമ്പോൾ ഈ ത്വരണം നെഗറ്റീവാണെങ്കിൽ കൂടിയും, അതിന്റെ വേഗം കൂടുന്നു. മുകളിലേക്ക് എറിയപ്പെടുന്ന ഒരു വസ്തുവിന്, ഇതേ നെഗറ്റീവ് ത്വരണത്തിന്റെ (ഗുരുത്വാകർഷണം മൂലമുള്ള) ഫലമായി വേഗം കുറയുന്നു.

6. ഒരു വസ്തുവിന് ഒരു ക്ഷണത്തിൽ പ്രവേഗം പൂജ്യമായാൽ ആ ക്ഷണത്തിൽ അതിന് ത്വരണം പൂജ്യമാണെന്ന് അർഥമാക്കേണ്ടതില്ല. ഒരു വസ്തു നൈമിഷികമായി നിശ്ചലാവസ്ഥയിലാണെങ്കിൽ പോലും അതിന് ത്വരണമുണ്ടാകാം. ഉദാഹരണമായി, മുകളിലേക്കെറിഞ്ഞ ഒരു വസ്തുവിന് ഏറ്റവും മുകളിലുള്ള ബിന്ദുവിൽ പ്രവേഗം പൂജ്യമായിരിക്കും, പക്ഷേ ആ ക്ഷണത്തിലും അതിന്റെ ത്വരണം ഗുരുത്വത്വരണമായിത്തന്നെ തുടരും.

7. ചലന (kinematic) സമവാക്യങ്ങളിൽ, [സമവാക്യം (3.11)] വ്യത്യസ്ത അളവുകൾ ബീജിയമാണ് (algebraic). അതായത്, അവ പോസിറ്റീവോ നെഗറ്റീവോ ആകാം. ആ സമവാക്യങ്ങൾ എല്ലാ സാഹചര്യത്തിലും പ്രയോഗിക്കാവുന്നതാണ്. (സമ ത്വരണമുള്ളതും ഏകദിശയിലുള്ളതും ആണെങ്കിൽ സമവാക്യത്തിൽ ചേർക്കണം എന്നു മാത്രം.

8. തൽക്ഷണപ്രവേഗത്തിന്റെയും ത്വരണത്തിന്റെയും നിർവചനങ്ങൾ [സമവാക്യം (3.3), (3.5)] എല്ലാം കൃത്യവും എപ്പോഴും ശരിയുമായിരിക്കും. എന്നാൽ സമവാക്യം (3.11)] ചലനഗതിയിൽ ത്വരണത്തിന്റെ പരിമാണവും ദിശയും സ്ഥിരമായി ഇരിക്കുന്ന അവസ്ഥയിൽ മാത്രമേ ശരിയാവുകയുള്ളൂ.

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ

3.1 താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ചലനത്തിന്റെ ഏതൊക്കെ ഉദാഹരണങ്ങളിൽ, ഒരു വസ്തുവിനെ ഏകദേശം ഒരു പോയിന്റ് വസ്തുവായി പരിഗണിക്കാം?

a) രണ്ടു സ്റ്റേഷനുകൾക്കിടയിൽ തുടർച്ചയില്ലാതെ ചലിക്കുന്ന ഒരു റെയിൽവേകോച്ച് (carriage).

b) ഒരു വൃത്താകാരമായ പാതയിലൂടെ സൈക്കിൾ ചവിട്ടുന്ന ഒരാളുടെ തലയിലിരിക്കുന്ന ഒരു കുരങ്ങൻ.

c) ഭ്രമണം ചെയ്യുന്നതും നിലത്തു പതിക്കുമ്പോൾ പെട്ടെന്നു ഗതിമാറുന്നതുമായ ഒരു ക്രിക്കറ്റ് പന്ത്.

d) ഒരു മേശയുടെ അഗ്രത്തു നിന്നു തെന്നിവീഴുന്ന ഒരു ബീക്കർ.

3.2 A, B എന്നീ രണ്ടു കുട്ടികൾ അവരുടെ സ്കൂളിൽ (O) യിൽ നിന്നു യഥാക്രമം P, Q എന്നിങ്ങനെയുള്ള അവരുടെ വീടുകളിലേക്കു തിരിച്ചുപോകുന്നതിന്റെ സ്ഥാന-സമയ (x-t) ഗ്രാഫുകളാണ് ചിത്രം 3.19 ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്. താഴെ ബ്രാക്കറ്റിൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്നതിൽ ശരിയായ രേഖപ്പെടുത്തൽ തിരഞ്ഞെടുക്കുക.

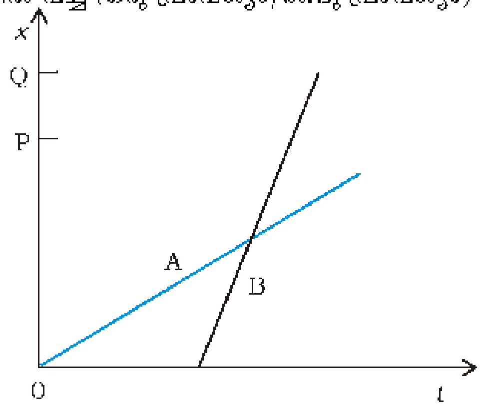
a) (A/B) യേക്കാൾ സ്കൂളിനടുത്തു താമസിക്കുന്നുത് (B/A) ആണ്.

b) (A/B) യേക്കാൾ മുമ്പേ സ്കൂളിൽനിന്നു പുറപ്പെടുന്നത് (B/A) ആണ്.

c) (A/B) യേക്കാൾ വേഗത്തിൽ നടക്കുന്നത് (B/A) ആണ്.

d) A യും B യും (ഒരേ/വ്യത്യസ്ത) സമയത്തുവീട്ടിലെത്തുന്നു.

e) (A/B) (B/A) യെ റോഡിൽ വച്ച് (ഒരു പ്രാവശ്യം/രണ്ടു പ്രാവശ്യം) മറികടക്കുന്നു.



ചിത്രം 3.19

3.3 ഒരു സ്ത്രീ രാവിലെ 9 മണിക്ക് വീട്ടിൽ നിന്നു പുറപ്പെടുകയും നേരെയുള്ള ഒരു റോഡിൽ 2.5 കി.മീ അകലെയുള്ള ഓഫീസ് വരെ 5 കി.മീ/മണിക്കൂർ വേഗത്തിൽ നടക്കുകയും, ഓഫീസിൽ വൈകുന്നേരം 5 മണി വരെ ഉണ്ടായിരിക്കുകയും ചെയ്യും. അവർ ഒരു ഓട്ടോയിൽ 25 കി.മീ/മണിക്കൂർ വേഗത്തിൽ വീട്ടിലേക്ക് തിരിച്ചുപോകുന്നു. അനുയോജ്യമായ രീതിയിലുള്ള സ്കെയിലുകൾ ഉപയോഗിച്ച് അവരുടെ ചലനത്തിന്റെ x-t ഗ്രാഫ് വരക്കുക.

3.4 ഒരു മദ്യപാനി ഇടുങ്ങിയ പാതയിലൂടെ 5 ചുവട് മുമ്പോട്ടും 3 ചുവട് പിറകോട്ടും നടക്കുന്നു. പിന്നീട് വീണ്ടും 5 ചുവട് മുമ്പോട്ടും 3 ചുവട് പിറകോട്ടും നടക്കുന്നു. ഈ ചലനം തുടരുന്നതിന് ഓരോ ചുവടും 1 മീറ്റർ നീളമുള്ളത് 1 സെക്കന്റ് വേണ്ടിവരുന്നതുമാണ്. അയാളുടെ ചലനത്തിന്റെ x-t ഗ്രാഫ് വരയ്ക്കുക. ഗ്രാഫിൽ നിന്നും അല്ലാതെയും ആ മദ്യപാനി 13 മീറ്റർ അകലെയുള്ള ഒരു കുഴിയിൽ വീഴാൻ അയാൾ ചലനം തുടങ്ങി എത്ര സമയത്തിനുശേഷം അയാൾ 13മീ. അകലെയുള്ള കുഴിയിൽ വീഴുമെന്ന് ഗ്രാഫ് മുഖേനയും അല്ലാതെയും കണക്കാക്കുക.

3.5 500 km h^{-1} വേഗത്തിൽ സഞ്ചരിക്കുന്ന ജെറ്റ് വിമാനം അതിന്റെ ജ്വലനവസ്തുക്കൾ, ജെറ്റ് വിമാനവുമായി 1500 km h^{-1} ആപേക്ഷിക വേഗതയിൽ പുറന്തള്ളുന്നു. പുറംതള്ളുന്ന ജ്വലന വസ്തുക്കളുടെ വേഗം തറയിൽ നിൽക്കുന്ന ഒരു നിരീക്ഷകന് ആപേക്ഷികമായി എത്രയാണ്?

3.6. നേരെയുള്ള ഒരു ഹൈവേയിലൂടെ ഒരു കാർ 126 km h^{-1} വേഗത്തിൽ സഞ്ചരിക്കുകയും 200 m ദൂരമെത്തുമ്പോഴേക്കും നിൽക്കുകയും ചെയ്യുന്നു. ആ കാറിന്റെ മന്ദീകരണം (സമമാണെന്നു പരിഗണിച്ചാൽ) എത്ര? കാർ നിൽക്കാൻ എടുത്ത സമയമെത്ര?

3.7. 400 m നീളമുള്ള രണ്ടു ട്രെയിനുകൾ A യും B യും സമാന്തര ട്രാക്കുകളിലൂടെ 72km h^{-1} സമവേഗത്തിൽ ഒരേ ദിശയിൽ സഞ്ചരിക്കുന്നു. A, B യ്ക്കു മുന്നിലാണ് B യുടെ എൻജിൻ പൈലറ്റ് A യെ മറികടക്കാൻ തീരുമാനിക്കുകയും 1ms^{-2} ത്വരണമുണ്ടാക്കുകയും ചെയ്യുന്നു. 50 s കഴിയുമ്പോൾ, B യുടെ ഗാർഡ് A യുടെ എൻജിൻ പൈലറ്റിനെ കടന്നു പോയി എങ്കിൽ അവർ തമ്മിലുള്ള ശരിയായ അകലം തുടക്കത്തിൽ എത്രയായിരുന്നു?

3.8. ഒരു രണ്ടുവരിപ്പാതയിൽ, A എന്ന കാർ 36 km h^{-1} വേഗത്തിൽ സഞ്ചരിക്കുന്നു. രണ്ടു കാറുകൾ B യും C യും വിപരീതദിശകളിൽനിന്നു 54 km h^{-1} വേഗത്തിൽ A എന്ന കാറിനടുത്തേക്കു വരുന്നു. ദൂരം AB=AC=1 km ആകുന്ന വേളയിൽ B, C യേക്കാൾ മുമ്പേ A യെ മറികടന്നു പോകുവാൻ തീരുമാനിക്കുന്നു. അപകടം കൂടാതെ A യെ മറികടക്കുവാൻ B യ്ക്ക് ലഭിക്കേണ്ട ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ ത്വരണം എത്ര?

3.9 A, B എന്ന രണ്ടു പട്ടണങ്ങൾ തുടർച്ചയായ ബസ് ഗതാഗതം വഴി ബന്ധിപ്പിച്ചിരിക്കുന്നു. ഇരു ദിശയിലേക്കും ഓരോ T മിനിറ്റിലും ഒരു ബസ് വീതം പുറപ്പെടും. A- യിൽനിന്ന് B യിലേക്ക് 20 km h^{-1} ൽ സൈക്കിൾ ചവിട്ടുന്ന ഒരാൾ കാണുന്നത്, ഒരു ബസ് എല്ലാ 18 മിനിറ്റിലും അയാൾ സഞ്ചരിക്കുന്ന അതേ ദിശയിലും ഒപ്പം ഓരോ 6 മിനിറ്റിലും എതിർദിശയിലും അയാളെ കടന്നുപോകുന്നു എന്നാണ്. ബസ്ഗതാഗതത്തിന്റെ ആവൃത്തികാലം T എത്രയാണ്? കൂടാതെ ഏതു വേഗത്തിൽ (സമമാണെന്നു സങ്കൽപ്പിച്ച്) റോഡിലൂടെ ബസുകൾ സഞ്ചരിച്ചുക്കൊണ്ടിരിക്കുന്നു?

3.10. ഒരു കളിക്കാരൻ ഒരു പന്ത് മുകളിലേക്ക് 29.4 m/s പ്രാരംഭവേഗത്തിൽ എറിയുന്നു.

a) മുകളിലേക്കുള്ള പന്തിന്റെ ചലനത്തിൽ അതിന്റെ ത്വരണത്തിന്റെ ദിശ ഏതാണ്?

b) അതിന്റെ ചലനപ്രക്രിയയിൽ ഏറ്റവും ഉയരത്തിലുള്ള ബിന്ദുവിൽ പന്തിനുള്ള പ്രവേഗവും ത്വരണവും എത്ര ?

c) $x = 0$ m, $t = 0$ s എന്നിവ പന്തിന്റെ ഏറ്റവും ഉയരത്തിലുള്ള ബിന്ദുവിന്റെ സ്ഥാനമായും സമയമായും താഴേക്ക് ലംബമായുള്ള ദിശ അക്ഷത്തിന്റെ പോസിറ്റീവ് ദിശയായും തിരഞ്ഞെടുക്കുക. പന്തിന്റെ മുകളിലേക്കും താഴേക്കുമുള്ള ചലനത്തിൽ അതിന്റെ സ്ഥാനത്തിന്റെ ചിഹ്നം, പ്രവേഗം, ത്വരണം എന്നിവ നൽകുക.

d) ഈ പന്ത് എത്ര ഉയരം വരെ സഞ്ചരിക്കും? കൂടാതെ എത്ര സമയത്തിനുശേഷമാണ് പന്ത് കളിക്കാരന്റെ കൈകളിൽ തിരിച്ചെത്തുന്നത്? ($g = 9.8 \text{ m/s}^2$ എന്നെടുക്കുക. വായുവിന്റെ രോധം അവഗണിക്കുക).

3.11. താഴെക്കൊടുത്തിരിക്കുന്ന പ്രസ്താവനകൾ ശ്രദ്ധിച്ചു വായിച്ച ശേഷം അവ ശരിയോ തെറ്റോ എന്നു കാരണങ്ങളും ഉദാഹരണങ്ങളും സഹിതം പ്രസ്താവിക്കുക.

ഒരു ഏകമാനചലനത്തിലുള്ള വസ്തു;

a) ഒരു ക്ഷണത്തിലെ വേഗം പൂജ്യത്തോടു കൂടിയതും അതേ ക്ഷണത്തിൽ ത്വരണം പൂജ്യമല്ലാത്തതും.

b) വേഗം പൂജ്യമായതും പ്രവേഗം പൂജ്യമല്ലാത്തതും

c) വേഗം സ്ഥിരമായതും ത്വരണം പൂജ്യമായതും.

d) ത്വരണത്തിന്റെ വില പോസിറ്റീവും വേഗം വർധിച്ചുകൊണ്ടിരിക്കുന്നതും.

3.12. ഒരു പന്ത് 90 മീറ്റർ ഉയരത്തിൽനിന്നു തറയിലേക്ക് ഇടുന്നു. തറയുമായുള്ള ഓരോ കൂട്ടിമുട്ടലിലും പന്തിന്റെ പത്തിലൊന്ന് വേഗം നഷ്ടപ്പെടുന്നു. അതിന്റെ ചലനത്തിന്റെ $t = 0$ മുതൽ $t = 12$ s വരെയുള്ള വേഗ -സമയ ഗ്രാഫ് വരക്കുക.

3.13. താഴെക്കൊടുത്തവ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം ഉദാഹരണസഹിതം വ്യക്തമാക്കി വിവരിക്കുക.

a) ഒരു ഇടവേളയിലുള്ള സ്ഥാനാന്തരത്തിന്റെ പരിമാണവും (ചിലപ്പോൾ ദൂരം എന്നു വിളിക്കുന്നു), അതേ ഇടവേളയിലുള്ള വസ്തു താണ്ടുന്ന പാതയുടെ ആകെ നീളവും.

b) ഒരു സമയ ഇടവേളയിലെ ശരാശരി പ്രവേഗത്തിന്റെ പരിമാണവും, അതേ ഇടവേളയിലെ ശരാശരി വേഗം (ഒരു വസ്തുവിന്റെ ഒരു ഇടവേളയിലെ ശരാശരി വേഗം ആകെ പാതദൈർഘ്യത്തെ ആ ഇടവേളകൊണ്ട് ഭാഗിക്കുമ്പോൾ കിട്ടുന്നതായി നിർവചിക്കാം). a യിലും b യിലും രണ്ടാമത്തെ അളവ് ആദ്യത്തെ അളവിനേക്കാൾ ഒന്നുകിൽ കൂടുതലോ അല്ലെങ്കിൽ തുല്യമോ ആയിരിക്കും. എപ്പോഴാണ് സമചിഹ്നം സാധുവാകുന്നത്? (ലളിതമായി, ഏകമാന ചലനം മാത്രം പരിഗണിക്കുക).

3.14. ഒരാൾ അയാളുടെ വീട്ടിൽനിന്നു 2.5 km അകലെയുള്ള ചന്തയിലേക്ക് നേരെയുള്ള റോഡിലൂടെ 5 km h^{-1} വേഗത്തിൽ നടക്കുന്നു? ചന്തയിൽ നിന്ന് അപ്പോൾത്തന്നെ അയാൾ തിരിച്ച് 7.5 km h^{-1} വേഗത്തിൽ വീട്ടിലേക്കു നടക്കുകയും ചെയ്തു. എന്താണ്

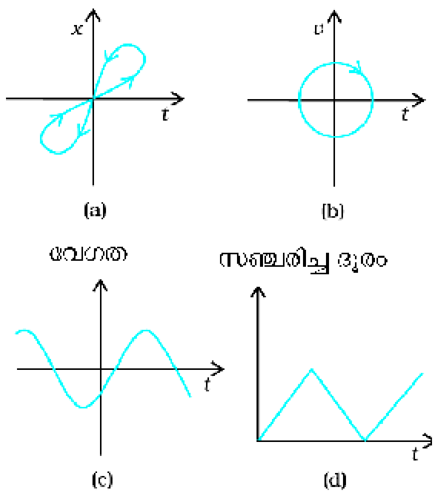
എ) അയാളുടെ ശരാശരി പ്രവേഗത്തിന്റെ പരിമാണം?

ബി) താഴെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന ഇടവേളയിലെ അയാളുടെ ശരാശരി വേഗം?

i) 0 മുതൽ 30 മിനിറ്റ്, ii) 0 മുതൽ 50 മിനിറ്റ് iii) 0 മുതൽ 40 മിനിറ്റ് എന്നിങ്ങനെയുള്ള ഇടവേളകളിൽ എത്ര ആയിരിക്കും? (കുറിപ്പ്: ഈ അഭ്യാസത്തിൽനിന്ന് ശരാശരി വേഗത്തെ ശരാശരി പ്രവേഗത്തിന്റെ പരിമാണമായല്ല, ആകെ പാതദൈർഘ്യത്തിനെ സമയ ഇടവേളകൊണ്ട് ഹരിക്കുന്നതാണെന്ന നിർവചനമാണ് നല്ലതെന്ന് നിങ്ങൾക്ക് എങ്ങനെ തിരിച്ചറിയാം? നടന്നു ക്ഷീണിച്ച ആ മനുഷ്യനോട് വീട്ടിലെത്തുമ്പോൾ യാത്രയിൽ ശരാശരി വേഗം പൂജ്യമായിരുന്നു എന്നു പറയാൻ നാം താൽപ്പര്യപ്പെടില്ല.)

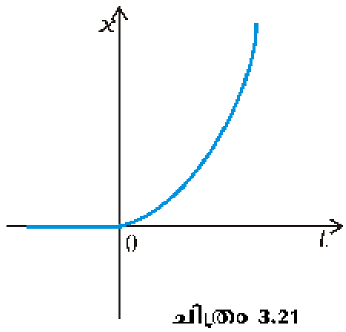
3.15 അഭ്യാസങ്ങൾ 3.13 ലും 3.14 ലും നമ്മൾ ശ്രദ്ധയോടെ ശരാശരി വേഗത്തേയും ശരാശരി പ്രവേഗത്തിന്റെയും പരിമാണത്തെ വേർതിരിച്ചറിഞ്ഞിട്ടുണ്ട്. അങ്ങനെയൊരു വിവേചനം തൽക്ഷണ വേഗവും പ്രവേഗത്തിന്റെ പരിണാമവും പരിഗണിക്കുമ്പോൾ ആവശ്യമില്ല. തൽക്ഷണവേഗം എല്ലായ്പ്പോഴും തൽക്ഷണപ്രവേഗത്തിന്റെ പരിമാണത്തിനു തുല്യമാണ്. എന്തുകൊണ്ട്?

3.16 (a) മുതൽ (d) വരെ ഗ്രാഫുകൾ (ചിത്രം 3.20) ശ്രദ്ധയോടെ വീക്ഷിക്കുക. ഇതിൽ ഏതൊക്കെ ഗ്രാഫുകളാണ് ഒരു വസ്തുവിന്റെ ഏകമാനചലനം സൂചിപ്പിക്കാൻ സാധ്യതയില്ലാത്തത് എന്നു കാരണങ്ങൾ സഹിതം പ്രസ്താവിക്കുക.



ചിത്രം 3.20

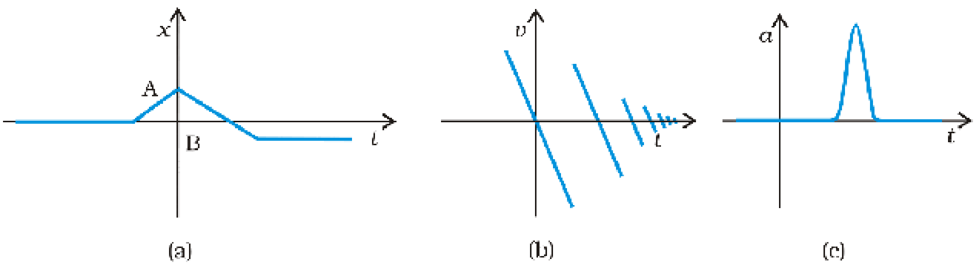
3.17. ഒരു വസ്തുവിന്റെ ഏകമാനചലനത്തിന്റെ x-t ഗ്രാഫാണ് ചിത്രം 3.21 ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്. ഈ ഗ്രാഫിൽനിന്ന് ആ വസ്തു $t < 0$ ൽ നേർവരയിൽ സഞ്ചരിക്കുമെന്നും $t > 0$ പരാബോളയായിരിക്കുമെന്നും പറയാൻ കഴിയുമോ? പറയുന്നത് ശരിയാവുമോ? അങ്ങനെയല്ലെങ്കിൽ, ഈ ഗ്രാഫിന് യോജിച്ച ഭൗതികസന്ദർഭം നിർദേശിക്കുക.



ചിത്രം 3.21

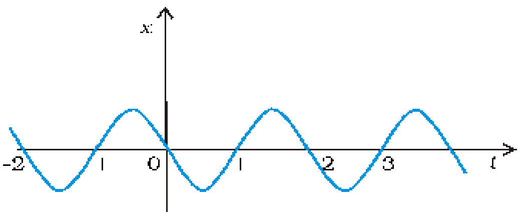
3.18. ഒരു ഹൈവേയിലൂടെ 30 km h^{-1} വേഗത്തിൽ സഞ്ചരിക്കുന്ന ഒരു പോലീസ്‌വാൻ അതേ ദിശയിൽ 192 km h^{-1} വേഗത്തിൽ അകന്നു പോകുന്ന ഒരു കള്ളന്റെ കാറിലേക്ക് വെടിവയ്ക്കുന്നു. ബുള്ളറ്റിന്റെ മസ്സിൽ വേഗം 150 ms^{-1} ആയാൽ, ആ ബുള്ളറ്റ് കള്ളന്റെ കാറിൽ ഇടിക്കുന്ന വേഗം എത്ര? (കുറിപ്പ് :കള്ളന്റെ കാറിന് കേടു വരുത്താൻ തക്കതായ വേഗം നിർണ്ണയിക്കുക).

3.19. ചിത്രം 3.22 ൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഗ്രാഫുകളിൽ ഓരോ ഗ്രാഫിനും യോജിച്ച ഒരു ഭൗതികസാഹചര്യം നിർദേശിക്കുക.



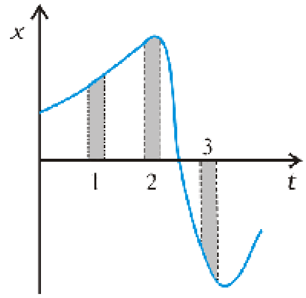
ചിത്രം 3.22

3.20. ഒരു ഏകമാന സരള ഹാർമോണിക ചലനത്തിലുള്ള (One dimensional simple harmonic motion) ഒരു വസ്തുവിന്റെ x-t ഗ്രാഫാണ് ചിത്രം 3.23 ൽ നൽകിയിരിക്കുന്നത്. (ഈ ചലനത്തെക്കുറിച്ച് നിങ്ങൾ അധ്യായം 14 ൽ കൂടുതൽ വിശദമായി പഠിക്കും). സ്ഥാനം, പ്രവേഗം, ത്വരണം എന്നിവയുടെ പരിവർത്തിതങ്ങളുടെ (Variables) ചിഹ്നങ്ങൾ $t = 0.3$ സെക്കന്റ്, 1.2 സെക്കന്റ്, -1.2 സെക്കന്റ് എന്നീ സമയങ്ങളിൽ ഏതായിരിക്കും?

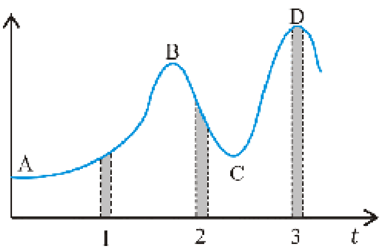


ചിത്രം 3.23

3.21 ഒരു വസ്തുവിന്റെ ഏകമാനചലനത്തിന്റെ x-t ഗ്രാഫാണ് ചിത്രം 3.24 ൽ നൽകിയിരിക്കുന്നത്. മൂന്നു വ്യത്യസ്തമായ തുല്യസമയ ഇടവേളകളാണ് കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്. ഏത് ഇടവേളയിലാണ് ശരാശരി വേഗം ഏറ്റവും കൂടുതൽ? ഏതിലാണ് ഏറ്റവും കുറവ് ? ഓരോ ഇടവേളയിലേയും ശരാശരി പ്രവേഗത്തിന്റെ ചിഹ്നം നൽകുക.



3.22 സ്ഥിരമായ ദിശയിൽ ചലിച്ചുകൊണ്ടിരിക്കുന്ന ഒരു വസ്തുവിന്റെ വേഗ-സമയ ഗ്രാഫാണ് ചിത്രം 3.25 ൽ നൽകിയിരിക്കുന്നത്. മൂന്നു തുല്യ ഇടവേളകളാണ് കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്. ഏത് ഇടവേളയിലാണ് ശരാശരി ത്വരണത്തിന്റെ പരിമാണം ഏറ്റവും കൂടുതലാവുന്നത്? ഏത് ഇടവേളയിലാണ് ശരാശരി വേഗം ഏറ്റവും കൂടുതലാവുന്നത്? പോസിറ്റീവ് ദിശ സ്ഥിരമായ ദിശയായി സ്വീകരിച്ചുകൊണ്ട്, മൂന്ന് ഇടവേളകളിലെയും v, a എന്നിവയുടെ ചിഹ്നങ്ങൾ നൽകുക. A,B,C. D എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലെ ത്വരണങ്ങൾ ഏതൊക്കെ?



ചിത്രം 3.25

കൂടുതൽ പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ

3.23. ഒരു മൂന്നു ചക്രമുള്ള വണ്ടിക്ക്, നിശ്ചലാവസ്ഥയിൽ നിന്നു 10 s സമയം വരെ 1 ms^{-2} ത്വരണമുണ്ടാവുകയും പിന്നീട് അത് സമപ്രവേഗത്തിൽ ചലിക്കുകയും ചെയ്യുന്നു. ആ വാഹനം n-ാമത് സെക്കന്റിൽ താണ്ടിയ ദൂരവും n ഉം (n = 1,2,3.............) തമ്മിലുള്ള ഗ്രാഫ് വരയ്ക്കുക. ത്വരിത ചലനമുണ്ടാകുമ്പോഴുള്ള ഗ്രാഫ് എങ്ങനെയായിരിക്കും എന്നാണ് നിങ്ങൾ പ്രതീക്ഷിക്കുന്നത്? ഒരു നേർരേഖയോ അല്ലെങ്കിൽ ഒരു പരാബോളയോ?

3.24. നിശ്ചലമായ ഒരു ലിഫ്റ്റിൽ (മുകൾഭാഗം തുറന്നത്) നിൽക്കുന്ന ഒരു ആൺകുട്ടി ഒരു പന്ത് അവന് പ്രദാനം ചെയ്യുവാൻ കഴിയുന്ന പരമാവധി വേഗതയായ 49 ms^{-1} എന്ന പ്രാരംഭ വേഗത്തിൽ മുകളിലേക്ക് എറിയുന്നു. ആ പന്ത് തിരിച്ച് അവന്റെ കൈകളിലെത്താൻ എത്ര സമയമെടുക്കും? ആ ലിഫ്റ്റ് മുകളിലേക്ക് 5 ms^{-1} സമവേഗത്തിൽ ചലിക്കുമ്പോൾ ആ കുട്ടി വീണ്ടും അവന് സാധ്യമായ പരമാവധി വേഗത്തിൽ പന്ത് മുകളിലേക്ക് എറിഞ്ഞാൽ എത്രസമയം കൊണ്ട് പന്ത് അവന്റെ കൈകളിൽ തിരിച്ചെത്തും?

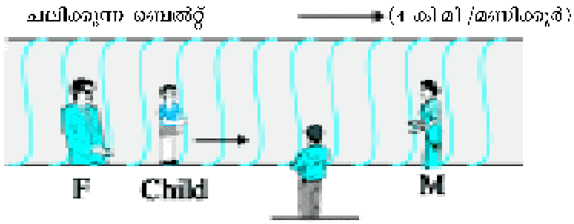
3.25. തിരശ്ചീനമായി ചലിക്കുന്ന നീളമുള്ള ഒരു ബെൽറ്റിൽ (ചിത്രം 3.26) ഒരു കുട്ടി അങ്ങോട്ടും ഇങ്ങോട്ടും 9 kmh^{-1} വേഗത്തിൽ (ബെൽറ്റിനെ അപേക്ഷിച്ച്) ബെൽറ്റിലൂടെ അച്ഛനും അമ്മയ്ക്കും ഇടയിൽ ഓടുന്നു. അച്ഛനും അമ്മയും പരസ്പരം 50m അകലത്തിലാണ്. ആ ബെൽറ്റ് 4 kmh^{-1} വേഗത്തിൽ ചലിക്കുന്നു. പുറത്തുള്ള നിശ്ചലമായ ഒരു പ്ലാറ്റ്ഫോമിൽ നിൽക്കുന്ന ഒരു നിരീക്ഷകന്;

a) ബെൽറ്റിന്റെ ചലനദിശയിൽ ഓടുന്ന കുട്ടിയുടെ വേഗം?

b) ബെൽറ്റിന്റെ ചലനദിശയുടെ വിപരീതദിശയിൽ ഓടുന്ന കുട്ടിയുടെ വേഗം?

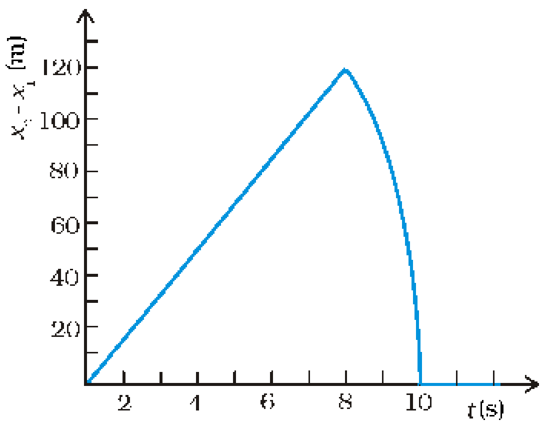
c) (a) യിലും (b) യിലും കുട്ടി എടുക്കുന്ന സമയം എത്രയായിരിക്കും?

മാതാപിതാക്കളിലൊരാൾ ഈ ചലനം കാണുന്നെങ്കിൽ ഏത് ഉത്തരമാണ് വ്യത്യാസപ്പെടുന്നത്?



ചിത്രം 3.26
നിശ്ചലാവസ്ഥയിലുള്ള നിരീക്ഷകൻ

3.26 200 മീറ്റർ പൊക്കമുള്ള കുത്തനെയുള്ള ഒരു പാറയുടെ മുകളിൽ നിന്ന് യഥാക്രമം 15 ms^{-1}, 30 ms^{-1} പ്രാരംഭവേഗത്തോടെ രണ്ടു കല്ലുകൾ ഒരേസമയം മുകളിലേക്ക് എറിയുന്നു. ചിത്രം 3.27 ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന ഗ്രാഫ് രണ്ടാമത്തെ കല്ലിന്റെ ഒന്നാമത്തേതിനെ ആശ്രയിച്ചുള്ള ആപേക്ഷികസ്ഥാന-സമയ ഗ്രാഫാണെന്ന് കാണിക്കുക. വായുവിന്റെ രോധം അവഗണിക്കുക. ഒപ്പം കല്ലുകൾ താഴെ ഇടിച്ചശേഷം തിരിച്ചടിക്കുകയില്ലെന്ന് വിചാരിക്കുക. g = 10 ms^{-2} എന്നെടുക്കുക. ഗ്രാഫിന്റെ രേഖീയമായതും ഒപ്പം വളഞ്ഞതുമായ ഭാഗങ്ങളുടെ സമവാക്യങ്ങൾ എഴുതുക.



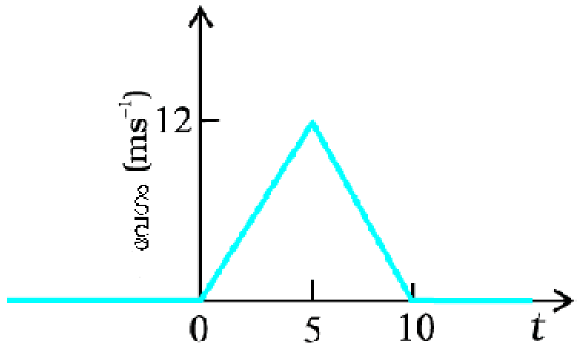
ചിത്രം 3.27

3.27. ഒരു നിശ്ചിത ദിശയിൽ ചലിച്ചുകൊണ്ടിരിക്കുന്ന ഒരു വസ്തുവിന്റെ വേഗ - സമയ ഗ്രാഫാണ് ചിത്രം 3.28 ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്. ആ വസ്തു സഞ്ചരിച്ച ദൂരം നിർണയിക്കുക.

a) t = 0 s മുതൽ 10 s വരെ

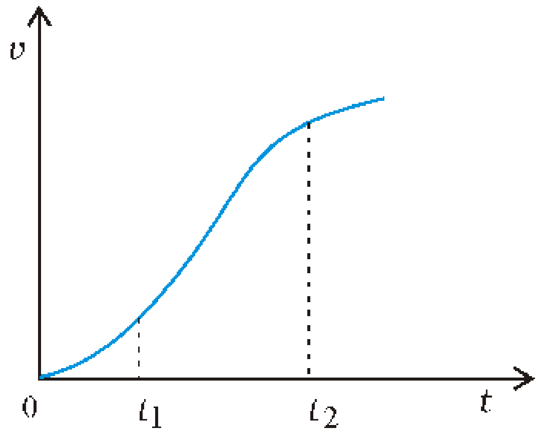
b) t = 2 s മുതൽ 6 s വരെ, ആ വസ്തു സഞ്ചരിച്ച ദൂരം നിർണയിക്കുക.

(a) യിലെയും (b) യിലെയും ഇടവേളകളിലുള്ള ശരാശരി വേഗം എന്താണ്?



ചിത്രം 3.28

3.28. ഒരു വസ്തുവിന്റെ ഏകമാനചലനത്തിന്റെ പ്രവേഗ - സമയ ഗ്രാഫാണ് ചിത്രം 3.29 ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്. ആ വസ്തുവിന്റെ t_1 മുതൽ t_2 വരെയുള്ള ഇടവേളകളിലുള്ള ചലനത്തെ വിവരിക്കാൻ താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നതിൽ ശരിയായ സൂത്രവാക്യങ്ങൾ ഏതൊക്കെയാണ്?



ചിത്രം 3.29

(a) $x(t_2) = x(t_1) + v(t_1)(t_2 - t_1) + (½)\, a\, (t_2 - t_1)^2$

(b) $v(t_2) = v(t_1) + a\,(t_2 - t_1)$

(c) $v_{\text{ശരാശരി}} = (x(t_2) - x(t_1))/(t_2 - t_1)$

(d) $a_{\text{ശരാശരി}} = (v(t_2) - v(t_1))/(t_2 - t_1)$

(e) $x(t_2) = x(t_1) + v_{\text{ശരാശരി}}(t_2 - t_1) + (½)\, a_{\text{ശരാശരി}}\, (t_2 - t_1)^2$

(f) $x(t_2) - x(t_1)$ = v-t ഗ്രാഫിന്റെ t അക്ഷത്തിനും കുത്തുകളുള്ള ഭാഗങ്ങൾക്കും ഇടയിലുള്ള പരപ്പളവ്.

അനുബന്ധം 3.1 : കാൽക്കുലസിന്റെ അടിസ്ഥാനതത്വങ്ങൾ (Elements of Calculus)

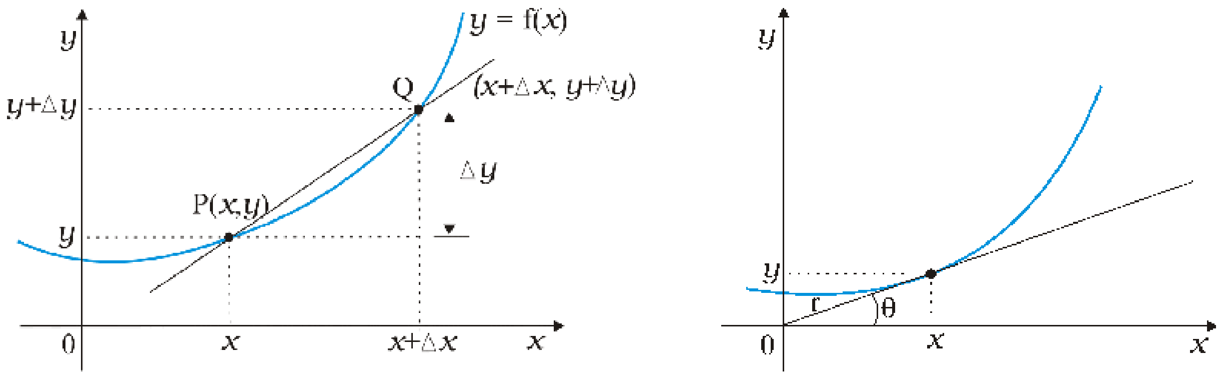
അവകലനഗണിതം (Differential Calculus)

അവകലനഗുണാങ്കം (Differential coefficient) അല്ലെങ്കിൽ ആനുമാനികം (derivative) എന്ന ആശയം ഉപയോഗിച്ച് നമുക്ക് വളരെ എളുപ്പത്തിൽ പ്രവേഗത്തെയും ത്വരണത്തെയും നിർവചിക്കാൻ സാധിക്കും. നിങ്ങൾ കണക്കിൽ ആനുമാനികങ്ങളെക്കുറിച്ച് പഠിക്കുമെങ്കിലും, നാം ഈ ആശയം ചുരുക്കി ഈ അനുബന്ധത്തിലൂടെ പരിചയപ്പെടുന്നു. ചലനത്തിൽ ഉൾപ്പെട്ടിരിക്കുന്ന ഭൗതിക അളവുകളെപ്പറ്റിയുള്ള വിവരണം എളുപ്പമാക്കാൻ വേണ്ടിയാണിത്.

നമുക്ക് ഒരു അളവ് y ഉണ്ടെന്നിരിക്കട്ടെ. അതിന്റെ വില x എന്ന ഒറ്റ അസ്വതന്ത്ര ഘടകത്തെ മാത്രം ആശ്രയിക്കുന്നു, ഒരു സമവാക്യരൂപത്തിൽ x ന്റെ ചില പ്രത്യേക ഫലനങ്ങളായി ആവിഷ്കരിക്കുന്നു.

അതായത്, $y = f(x)$ (1)

ചിത്രം3.3 (a) യിൽ കാണുന്നതു പോലെ ഈ ബന്ധം ചിത്രീകരിക്കാൻ y= f(x) എന്ന ഫലനത്തിലെ y, x എന്നിവ കാർട്ടീഷ്യൻ നിർദേശാങ്കങ്ങളായി കരുതി ഒരു ഗ്രാഫ് വരക്കാം.



(a) (b)

ചിത്രം. 3.30

$y = f(x)$ എന്ന വക്രരേഖയിലെ (x, y) എന്നീ നിർദേശാങ്കങ്ങളുള്ള P എന്ന ഒരു ബിന്ദുവും $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ ഉള്ള Q എന്ന ബിന്ദുവും പരിഗണിക്കുക. P, Q ഇവയെ കൂട്ടിച്ചേർക്കുന്ന രേഖയുടെ ചരിവ് എന്താണ്?

$$\tan\theta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(y + \Delta y) - y}{\Delta x} \quad (2)$$

ഇപ്പോൾ Q എന്ന ബിന്ദു വക്രരേഖയിലൂടെ P എന്ന ബിന്ദുവിലേക്ക് സഞ്ചരിക്കുന്നതായി സങ്കൽപ്പിക്കുക. ഈ പ്രക്രിയയിൽ, Δy യും Δx ഉം കുറഞ്ഞ് വന്ന് പൂജ്യത്തിനടുത്തെത്തുമെങ്കിലും, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ പൂജ്യമാവണമെന്നില്ല. $\Delta y \to 0$, $\Delta x \to 0$ ആയാൽ PQ എന്ന രേഖക്ക് എന്തു സംഭവിക്കും? ചിത്രം 3.20 (b) യിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ ഈ രേഖ ആ വക്രരേഖയിലെ P എന്ന ബിന്ദുവിലെ സ്പർശരേഖയായി മാറുന്നത് നിങ്ങൾക്ക് കാണാൻ കഴിയും. $\tan\theta$ യുടെ വില P യിലെ സ്പർശരേഖയുടെ ചരിവിന്റെ വിലയുടെ അടുത്തേക്ക് (m എന്നു സൂചിപ്പിക്കാം) എത്തുന്നു.

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(y + \Delta y) - y}{\Delta x} \quad (3)$$

$\Delta y/\Delta x$ എന്ന അനുപാതത്തിലെ Δx പൂജ്യത്തിനടുത്തെത്തുമ്പോളുള്ള പരിധിയെ y യുടെ x നനുസരിച്ചുള്ള

ആനുമാനികം (derivative) എന്നു വിളിക്കുന്നു. ഇതിനെ dy/dx എന്നാണ് സൂചിപ്പിക്കുന്നത്. $y = f(x)$ എന്ന വക്രരേഖയിലെ (x, y) എന്ന ബിന്ദുവിലെ സ്പർശരേഖയുടെ ചരിവാണ് ഇതു സൂചിപ്പിക്കുന്നത്. $y = f(x)$ കൂടാതെ $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$ എന്നിങ്ങനെ ആയതുകൊണ്ട് ആനുമാനികത്തിന്റെ നിർവചനം ഇങ്ങനെ എഴുതാം.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right]$$

താഴെ തന്നിരിക്കുന്നത് ഫലനങ്ങളുടെ ആനുമാനികങ്ങളുടെ പ്രാഥമിക സൂത്രവാക്യങ്ങളാണ്. ഇതിൽ u(x), v(x) എന്നിവ x ന്റെ ഫലനങ്ങളാണ്. a, b എന്നിവ സ്ഥിരാങ്കങ്ങളെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. കുറച്ച് സാധാരണ ഫലനങ്ങളുടെ ആനുമാനികങ്ങളും കൂടെ ലിസ്റ്റ് ചെയ്തിട്ടുണ്ട്.

$$\frac{d(au)}{dx} = a\frac{du}{dx} \quad ; \quad \frac{du}{dt} = \frac{du}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d(uv)}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} \quad ; \quad \frac{d(u/v)}{dx} = \frac{1}{v}\frac{du}{dx} - \frac{u}{v^2}\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{du}{dv} = \frac{du/dx}{dv/dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x \quad ; \quad \frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x \quad ; \quad \frac{d}{dx}(\cot x) = -\operatorname{cosec}^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \tan x \ \ \sec x \quad ; \quad \frac{d}{dx}(\operatorname{cosec}^2 x) = \ \ \cot x \ \operatorname{cosec} x$$

$$\frac{d}{dx}(u)^n = n\,u^{n-1}\frac{du}{dx} \quad ; \quad \frac{d}{du}(\ln u) = \frac{1}{u}$$

$$\frac{d}{du}(e^u) \ \ e^u$$

ആനുമാനികങ്ങളുടെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ തൽക്ഷണപ്രവേഗവും ത്വരണവും ഇങ്ങനെ നിർവചിക്കാം.

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2}$$

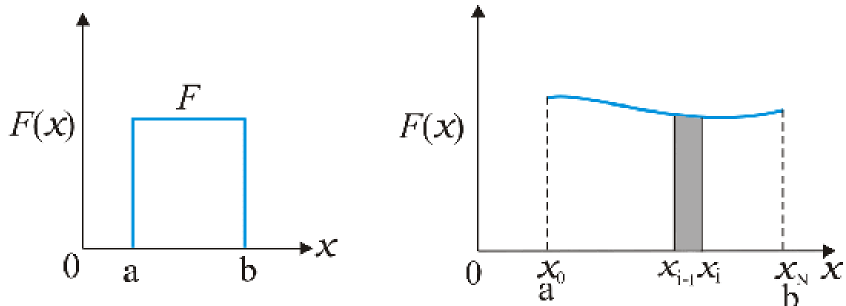
സമാകലന കാൽക്കുലസ് (Integral Calculus)

പരപ്പളവ് എന്ന ആശയം നിങ്ങൾക്കെല്ലാം സുപരിചിതമാണല്ലോ. ലളിതമായ ജ്യാമിതീയചിത്രങ്ങളുടെ പരപ്പളവിനുള്ള സൂത്രവാക്യങ്ങളും നിങ്ങൾക്കറിയാം. ഉദാഹരണമായി, ഒരു ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എന്നത് നീളം, വീതി എന്നിവയുടെ ഗുണനഫലവും ത്രികോണത്തിന്റേത് പാദത്തിന്റെയും ഉയരത്തിന്റെയും ഗുണനഫലത്തിന്റെ പകുതിയുമാണ്. പക്ഷേ, നമ്മൾ ക്രമരഹിതമായ ഒരു ആകൃതിയുടെ പരപ്പളവ് കാണുന്ന പ്രശ്നം എങ്ങനെ പരിഹരിക്കും? അങ്ങനെയുള്ള പ്രശ്നങ്ങൾക്ക് ഗണിതപരമായ സമാകലനം (integration) എന്ന ആശയം ആവശ്യമാണ്.

പ്രത്യക്ഷമായ ഒരു ഉദാഹരണമെടുക്കാം. ഒരു വസ്തുവിന്റെ x അക്ഷത്തിലൂടെ, x = a യിൽ നിന്ന് x = b വരെ,

ഉള്ള ചലനത്തിൽ $f(x)$ എന്ന അസ്ഥിരമായ ഒരു ബലം പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്നുവെന്ന് അനുമാനിക്കാം. ഈ ബലം ആ ചലനത്തിലുടനീളം ആ വസ്തുവിന്മേൽ ചെയ്യുന്ന പ്രവൃത്തി (W) എത്രയാണെന്ന് എന്നു കണ്ടുപിടിക്കുകയെന്നതാണ് ഇവിടെയുള്ള പ്രശ്നം.

ചിത്രം 3.31 ൽ F(x) ന്റെ വില x-നനുസരിച്ച് എങ്ങനെ വ്യത്യാസപ്പെടുന്നു എന്നു കാണിച്ചിരിക്കുന്നു. ബലം സ്ഥിരമായിരുന്നെങ്കിൽ, പ്രവൃത്തി എന്നത് ലളിതമായി ചിത്രം 3.31(1) ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന F(b-a) എന്ന പരപ്പളവാണ്.



(i) (ii)

പക്ഷേ, പൊതുവായുള്ള സാഹചര്യത്തിൽ ബലം അസ്ഥിരമാണ്.

ഈ വക്രരേഖക്കുള്ളിലുള്ള പരപ്പളവ് കണ്ടുപിടിക്കാൻ [ചിത്രം 3.31 (ii)], നമുക്ക് താഴെ പറയുന്ന മാർഗം സ്വീകരിക്കാം. x അക്ഷത്തിലെ a യിൽ നിന്നു b വരെയുള്ള ഇടവേളയെ ധാരാളം (N) ചെറിയ ഇടവേളകളായി വിഭജിക്കുക. x_0(=a) യിൽനിന്ന് x_1 വരെ; x_1 ൽനിന്ന് x_2 വരെ; x_2 ൽനിന്ന് x_3 വരെ; x_{N-1} ൽ നിന്ന് x_N(=b) വരെ. ഈ വക്രരേഖക്കുള്ളിലെ പരപ്പളവ് അതുകൊണ്ട് N ദീർഘഖണ്ഡങ്ങളാകുന്നു. ഓരോ ദീർഘഖണ്ഡത്തിലും $f(x)$ന്റെ വ്യത്യാസം നിസ്സാരമായതുകൊണ്ട് അവയോരോന്നും ഏകദേശം ദീർഘചതുരങ്ങളായിരിക്കും. അതിനാൽ [ചിത്രം 3.31 (ii)] ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന i-ാമത്തെ ഖണ്ഡത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എന്നത് ഏകദേശം:

$$\Delta A_i = F(x_i)(x_i - x_{i-1}) = F(x_i)\Delta x$$

ഇവിടെ Δx എന്നത് എല്ലാ ഖണ്ഡങ്ങൾക്കും ഒരേപോലെ നാം എടുത്ത വീതിയാണ്. മുകളിലത്തെ സമവാക്യത്തിൽ $F(x_{i-1})$ എന്നാണോ അതോ $F(x_i)$ യുടെയും $F(x_i-1)$ ന്റെയും ശരാശരി ആയിട്ടാണോ എടുക്കേണ്ടത് x_i-1 എന്നും സംശയിക്കാം. N എന്നത് വളരെ വളരെ വലുതാക്കിയാൽ ($N\to\infty$), ഇത് ശരിക്കും ബാധിക്കുകയില്ല. അപ്പോൾ ആ ഖണ്ഡം വളരെ ചെറുതാവുകയും $F(x_i)$ യും $F(x_{i-1})$ യും തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം പൂജ്യത്തിന്റെയത്രയും ചെറുതാവുകയും ചെയ്യും. ഈ വക്രരേഖയുടെ ഉള്ളിലുള്ള മുഴുവൻ പരപ്പളവ് എന്നത് ഇപ്പോൾ

$$A = \sum_{i=1}^{N} \Delta A_i = \sum_{i=1}^{N} F(x_i)\Delta x$$

$N\to\infty$ ൽ ഈ തുകയുടെ പരിധിയെയാണ് $F(x)$ ന്റെ x = a മുതൽ x=b വരെയുള്ള സമാകലനം എന്നു പറയുന്നത്. ഇതിന് നൽകുന്ന ഒരു പ്രത്യേക ചിഹ്നം താഴെക്കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

$$A = \int_a^b F(x)dx$$

ഈ സമാകലനചിഹ്നം $\int$ വലിച്ചു നീട്ടപ്പെട്ട ഒരു S പോലെ തോന്നിപ്പിക്കുന്നു. അടിസ്ഥാനമായി ഇത് വളരെയധികം ഘടകങ്ങളുടെ തുകയുടെ പരിധിയാണെന്ന് നാം ഓർക്കുക.

വളരെ ശ്രദ്ധേയമായ വസ്തുത, സമാകലനം എന്നത് ഒരർഥത്തിൽ, അവകലനത്തിന്റെ പ്രതിഫലനമാണ്. നമുക്ക്

$f(x)$) ന്റെ അവകലനമായ g(x) എന്ന ഒരു ഫലനം ഉണ്ടെന്നിരിക്കട്ടെ, i.e. $f(x) \quad \frac{dg(x)}{dx}$ ഈ ഫലനം g(x), $f(x)$ ന്റെ ക്ലിപ്തമല്ലാത്ത, അപരിമിതമായ ((indefinite)) സമാകലനം എന്നറിയപ്പെടുന്നു.

ഗണിതശാസ്ത്രത്തിലെ ഒരു അടിസ്ഥാനസിദ്ധാന്തം പറയുന്നത്;

$$g(x) = \int f(x)dx$$ എന്നു സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

ഒരു സമാകലനത്തിൽ താഴത്തെയും മുകളിലത്തെയും പരിധിയുണ്ടെങ്കിൽ അതിനെ ക്ലിപ്തമായ സമാകലനം എന്നു പറയുന്നു. ഇത് ഒരു ക്ലിപ്തമല്ലാത്ത സമാകലനത്തിന് ഒരു പരിധിയുമില്ല; അത് ഒരു ഫലനം ആണ്.

ഗണിതശാസ്ത്രത്തിലെ ഒരു അടിസ്ഥാനസിദ്ധാന്തം ഇങ്ങനെ എഴുതാം.

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad g(x)\Big|_a^b \equiv g(b) \quad g(a)$$

ഉദാഹരണമായി, F(x) = x^2 എന്നിരിക്കട്ടെ. നമ്മൾ x=1 മുതൽ x=2 വരെയുള്ള ക്ലിപ്ത സമാകലനം നിർണയിക്കാനാഗ്രഹിക്കുന്നു. അവകലനം x^2 ആയി വരുന്ന g(x) എന്ന ഫലനം $x^3/3$ ആണ്. അതുകൊണ്ട്

$$\int_1^2 x^2\,dx \quad \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 \quad \frac{8}{3} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{7}{3}$$

വ്യക്തമായി ക്ലിപ്തസമാകലനങ്ങളുടെ മൂല്യം നിർണയിക്കാൻ, നമുക്ക് ബന്ധപ്പെട്ട ക്ലിപ്തമല്ലാത്ത സമാകലനങ്ങൾ അറിയേണ്ട ആവശ്യമുണ്ട്. കുറച്ചു സാധാരണമായ ക്ലിപ്തമല്ലാത്ത സമാകലനങ്ങളാണിത്.

$$\int x^n \mathrm{d}x = \frac{x^{n \; 1}}{n+1} \qquad (n \neq -1)$$

$$\int (\frac{1}{x})\mathrm{d}x = \ln x \qquad (x > 0)$$

$$\int \sin x \; \mathrm{d}x = -\cos x \qquad \int \cos x \; \mathrm{d}x = \sin x$$

$$\int e^x \mathrm{d}x = e^x$$

അവകലന കാൽക്കുലസിന്റെയും സമാകലന കാൽക്കുലസിന്റെയും ഈ ഉപക്രമം കൃത്യതയുള്ളതല്ല. നിങ്ങൾക്ക് ഗണിതത്തിന്റെ അടിസ്ഥാന ആശയം പകർന്നുതരുകയാണിതിന്റെ ഉദ്ദേശ്യം.