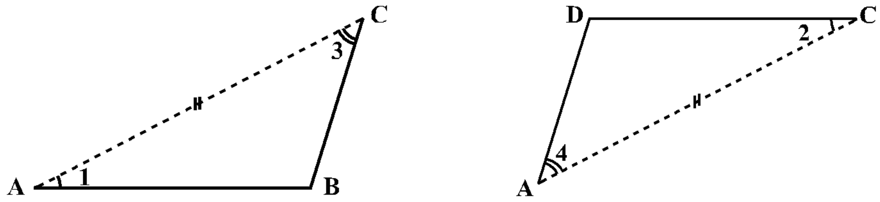


చిత్రం 4.25

దీనివలన మనకు తెలియునది $\angle B$ మరియు $\angle D$ లు సమానంగా వుంటాయి.

ఇదేవిధంగా మీరు $m\angle A = m\angle C$ అని పొందవచ్చు.

పర్యాయంగా $\angle 1 = \angle 2$ మరియు $\angle 3 = \angle 4$ అందువలన $m\angle A = \angle 1 + \angle 4 = \angle 2 + \angle C$

ఉదాహరణం 4 : చిత్రం 4.26లో BEST ఒక సమాంతర చతుర్భుజం x, y మరియు z విలువలను కనుగొనండి.

సాధన : S, B కి ఎదురు (అభిముఖం)గా ఉంది.

అందువలన, $x = 100°$ ....(అభిముఖ కోణపు ధర్మం)

$y = 100°$ ....(x యొక్క అనురూప కోణం)

$z = 80°$ ....($\because \angle y$ మరియు $\angle z$ లు సరళయుగ్మం)

ఇప్పుడు మన దృష్టిని సమాంతర చతుర్భుజపు పార్శ్వ కోణాల వైపుకు త్రిప్పినప్పుడు,

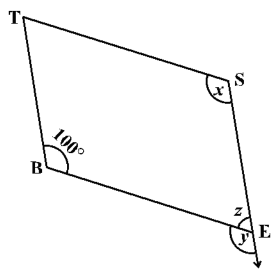
సమాంతర చతుర్భుజం ABCD లో (చిత్రం 4.27)

$\angle A$ మరియు $\angle D$ లు సరళ కోణ పూరకాలు

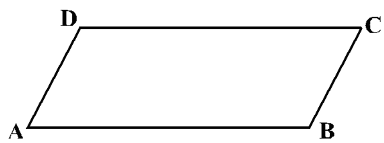
ఎందుకనగా $\overline{DC} \parallel \overline{AB}$ మరియు $\overline{DA}$ ఖండన (తిర్యగ్రేఖ) ఈ రెండు కోణాలు అంతరాభిముఖ కోణాలయ్యాయి.

$\angle A$ మరియు $\angle B$ లు కూడా సరళ కోణ పూరకాలయ్యాయి. ఎందుకో చెప్పగలరా? AD || BC మరియు BA తిర్యగ్రేఖ దీనివలన $\angle A$ మరియు $\angle B$ లు అంతరాభిముఖ కోణాలు.

చిత్రం నుండి ఇంకా రెండు జతల సరళకోణ పూరక కోణాలను గుర్తించండి.



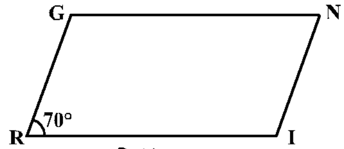
చిత్రం 4.26



చిత్రం 4.27

ధర్మం : "సమాంతర చతుర్భుజపు పార్శ్వ కోణాలు సరళకోణ పూరకాలుగా ఉంటాయి.

ఉదాహరణం 5 : సమాంతర చతుర్భుజం RINGలో (చిత్రం.4.28). $m\angle R = 70°$ మిగిలిన కోణాలన్నింటిని కనుగొనండి.



చిత్రం 4.28

సాధన : $m\angle R = 70°$

అందువలన $m\angle N = 70°$

ఎందుకనగా, $\angle R$ మరియు $\angle N$ లు సమాంతర చతుర్భుజపు ఎదురెదురు కోణాలు

$\angle R$ మరియు $\angle I$ లు సరళకోణ పూరకాలైనందున,

$m\angle I = 180° - 70° = 110°$

మరియు $m\angle G = 110°$ ఎందుకనగా $\angle G$ లు $\angle I$ కి అభిముఖ కోణం

అందువలన $m\angle R = m\angle N = 70°$ మరియు $m\angle I = m\angle G = 110°$

ఆలోచించండి, చర్చించండి, రాయండి.

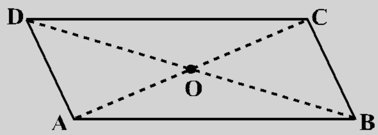
$m\angle R = m\angle N = 70°$ అని చూపిన తరువాత $m\angle I$ మరియు $m\angle G$ లను వేరే ఏదైనా విధానంతో కనుగొనవచ్చా?

4.4.6. సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క కర్ణములు :

సామాన్యంగా సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క కర్ణములు సమానంగా వుండవు. (దీనిని మీ వెనుకటి కార్యాచరణాలలో గమనించారా?) అయినా కూడా సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క కర్ణములు ఒక ఆసక్తికరమైన ధర్మం కలిగియుంది.

చేసి చూడండి.

కాగితంతో కత్తరించి తయారుచేసిన సమాంతర చతుర్భుజం తీసుకోండి. అది ABCD అయివుండనీయండి. దాని $\overline{AC}$ మరియు $\overline{BD}$ కర్ణములు 0 బిందువులో ఖండించనీయండి (చిత్రం 4.29)



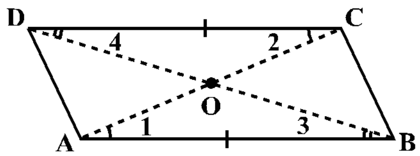
చిత్రం 4.29

C బిందువు A బిందువుపైన వుండునట్లు కాగితం మడచండి. $\overline{AC}$ యొక్క మధ్యబిందువును కనుగొనండి. అది 'O' బిందువు అయిందా?

ఈ అంశం $\overline{DB}$ కర్ణం $\overline{AC}$ కర్ణాన్ని 'O' బిందువులో ఖండిస్తుందని చూపుతుందా? మీ స్నేహితులతో దీనిని చర్చించండి. పై కార్యాచరణాన్ని పునరావర్తనం చేయండి. $\overline{DB}$ మధ్య బిందువును కనుగొనడానికి ప్రయత్నించండి.

ధర్మం/లక్షణం : "సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క కర్ణములు పరస్పరం ఖండించుకొంటాయి." (అది కర్ణములు కలిసే బిందువులోనే ఉంటుంది!).

ఈ ధర్మాన్ని చర్చించి, సమర్థించడం చాలా కష్టమేమి కాదు చిత్రం 4.30లో కో.భు.కో నిర్ధారక లక్షణాన్ని అన్వయించి చూడటం చాలా సులభం



చిత్రం 4.30

$\Delta AOB \cong \Delta COD$ (ఇక్కడ కో.భు.కో. ను ఎలా ఉపయోగించబడింది.)

దీనివలన AO = CO మరియు BO = DO అని తెలుస్తున్నది.

ఉదాహరణం 6 : చిత్రం 4.31లో HELP ఒక సమాంతర చతుర్భుజం. (కొలతలు సెం.మీ.లలో ఉన్నాయి) దత్తాంశం OE = 4 మరియు HL, PE కంటే 5 ఎక్కువగా వుంది.

OH యొక్క పొడవు కనుగొనండి.

సాధన : OE = 4

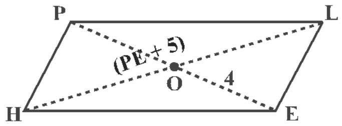
$\therefore$ OP = 4 (ఎందుకు?)

అయితే, PE = 8 (ఎందుకు?)

అందువలన HL = 8 + 5 = 13

అదేవిధంగా $OH = \frac{1}{2} \times 13$

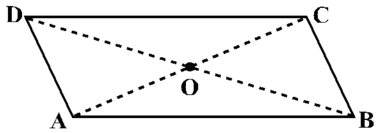
= 6.5 సెం.మీ..



చిత్రం 4.31

అభ్యాసం 4.3

1. సమాంతర చతుర్భుజం ABCD ఇవ్వబడినది.



కింది వ్యాఖ్యానాలను సంబంధించిన వ్యాఖ్య లేదా ధర్మాన్ని ఉపయోగించి, పూర్తిచేయండి.

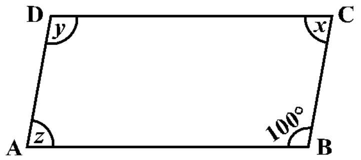
(i) AD = ...

(ii) $\angle DCB$ = ...

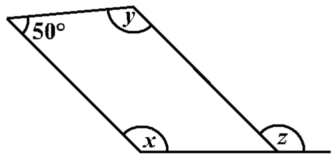
(iii) OC = ...

(iv) $m\angle DAB + m\angle CDA$ = ...

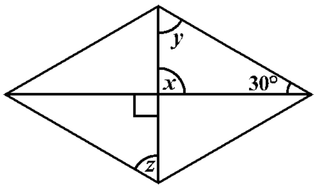
2. కింద ఇచ్చిన సమాంతర చతుర్భుజాలలో, అవ్యక్త పదాలైన x, y, z ల విలువలను కనుగొనండి.



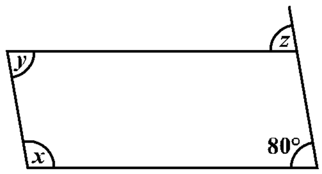
(i)



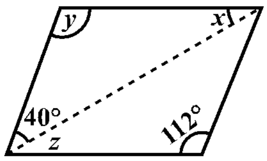
(ii)



(iii)



(iv)



(v)

3. ABCD చతుర్భుజంలో కిందివిధంగా అయినప్పుడు అది సమాంతర చతుర్భుజం అవుతుందా?

   (i) $\angle D + \angle B = 180°$

   (ii) AB = DC = 8 cm, AD = 4 cm మరియు BC = 4.4 cm

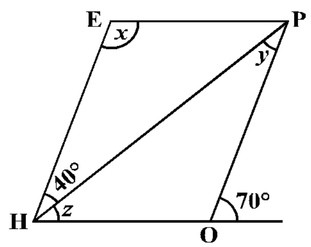
   (iii) $\angle A = 70°$ మరియు $\angle C = 65°$

4. రెండు ఎదురెదురు కోణములు సమానంగానున్న సమాంతర చతుర్భుజం కాని ఒక చతుర్భుజం యొక్క చిత్తు చిత్రం గీయండి.

5. ఒక సమాంతర చతుర్భుజంలో రెండు పార్శ్వ కోణాల కొలతలు 3:2 నిష్పత్తిలో ఉన్నాయి. సమాంతరచతుర్భుజం యొక్క ప్రతి కోణమును కనుగొనండి.

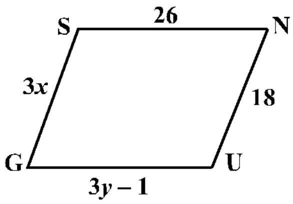
6. ఒక సమాంతర చతుర్భుజంలో రెండు పార్శ్వకోణములు సమానంగా ఉన్నాయి. సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క ప్రతి కోణపు కొలతలను కనుగొనండి.

7. ప్రక్కలో ఇచ్చిన చిత్రం సమాంతర చతుర్భుజం HOPE x, y, మరియు z కోణాల కొలతలను కనుగొనండి, వాటిని కనుగొనడానికి ఉపయోగించిన ధర్మాలను తెల్పండి.

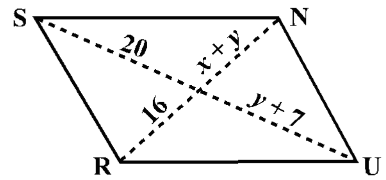


8. కింద ఇచ్చిన GUNS మరియు RUNS చిత్రాలు సమాంతర చతుర్భుజాలు x మరియు y లను కనుగొనండి. (కొలతలు సెం.మీ.లలో ఉన్నాయి)

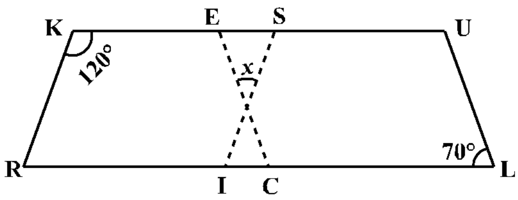
(i)



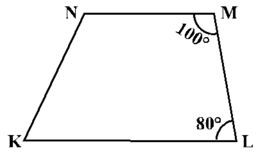
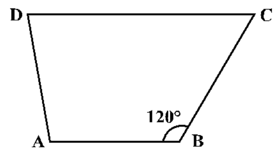
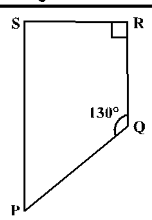
(ii)



9.



పై చిత్రంలో RISK మరియు CLUE సమాంతర చతుర్భుజాలు x విలువ కనుగొనండి.

10. కింద ఇచ్చిన చిత్రం ట్రెపీజియమ్ ఎలా అవుతుంది? వివరించండి. ఏ ఒక జత భుజాలు సమాంతరంగా ఉన్నాయి? (చిత్రం 4.32).	 చిత్రం 4.32
11. చిత్రం 4.33 లో, $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ అయితే, $m\angle C$ విలువ కనుగొనండి.	 చిత్రం 4.33
12. చిత్రం 4.34లో, $\overline{SP} \parallel \overline{RQ}$ అయితే, $\angle P$ మరియు $\angle S$ ల కొలతలను కనుగొనండి. ($m\angle R$ విలువ కనుగొన్న తరువాత $m\angle P$ కనుగొనడానికి ఒకదానికంటే ఎక్కువ విధానాలు ఉన్నాయా?)	 చిత్రం 4.34

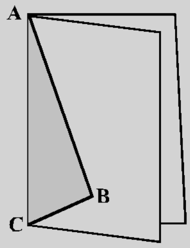
4.5 కొన్ని విశేష సమాంతర చతుర్భుజాలు

4.5.1. వజ్రాకృతి

గాలిపటంయొక్క (సమాంతర చతుర్భుజంగా లేనిది) ఒక విశేష పరిస్థితి కారణంగా మనం వజ్రాకృతిని పొందుతాం (ఒక సమాంతర చతుర్భుజం)

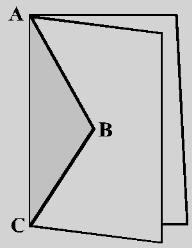
చేసి చూడండి.

కాగితం కత్తరించడం వలన తయారుచేసిన గాలిపటాలను జ్ఞాపకం చేసుకోండి.



గాలిపటం కత్తరించడం

ABC పొడవునా కత్తరించినప్పుడు మీకు 'గాలిపటం' లభిస్తుంది. ఇక్కడ AB మరియు BC లు విభిన్న కొలతలు కలిగియున్నాయి.

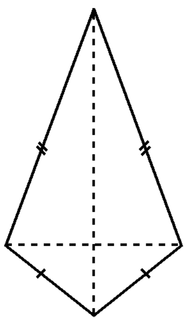


రాంబస్(వజ్రాకృతి) కత్తరించడం

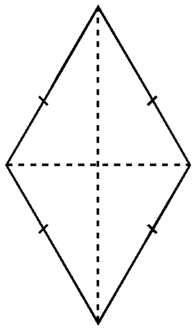
AB = BC ఉండునట్లు రేఖాఖండాలను గీచి, కత్తరించినప్పుడు ''వజ్రాకృతి'' అను విశేష గాలిపటం లభిస్తుంది.

వజ్రాకృతిలో భుజాలన్నియు సమానమైన పొడవులు కలిగియుండుటను గమనించండి. అది గాలిపటం విషయంలో మాత్రం కాదు.

వజ్రాకృతియొక్క భుజాలన్నియు సమానంగాగల చతుర్భుజం అయింది.



గాలిపటం



రాంబస్(వజ్రాకృతి)

వజ్రాకృతిలో ఎదురెదురు భుజాలు సమానంగా ఉండటం వలన అది సమాంతర చతుర్భుజం అందువలన ''ఒక వజ్రాకృతి సమాంతర చతుర్భుజం మరియు గాలిపటం యొక్క లక్షణాలన్నీ కలిగియుంటుంది. వాటిని పట్టీచేయడానికి ప్రయత్నించండి. తరువాత మీరు ఈ లక్షణాలను ఇదే అధ్యాయంలో ఇంతకు ముందు పొందిన అభిప్రాయాలతో సరిచూడండి. వజ్రాకృతిలో కర్ణాలకు సంబంధించిన లక్షణమే చాలా ఉపయోగకరం.

లక్షణం : 'వజ్రాకృతి యొక్క కర్ణములు పరస్పరం లంబార్ధకాలుగా ఉంటాయి'.

చేసి చూడండి.

వజ్రాకృతిని కాగితంలో కత్తరించి తీసుకోండి. దానిని మడచడం ద్వారా కర్ణముల ఖండన బిందువు ప్రతి కర్ణపు మధ్య బిందువు అనుదానిని పరీక్షించండి. మూల మట్టం ఉపయోగించి, దాని కర్ణములు లంబకోణంలో కలుస్తాయని కూడా గమనించవచ్చు.

ఈ లక్షణాన్ని నిజమని తార్కికంగా సమర్థించబడింది.

ABCD ఒక వజ్రాకృతి (చిత్రం 4.35). అందువలననే అది సమాంతర చతుర్భుజం కూడా అయింది.

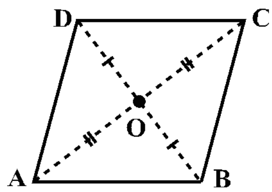
కర్ణములు పర్వరం ఛేదించడం వలన,

$OA = OC$ మరియు $OB = OD$ అవుతుంది.

ఇప్పుడు $m\angle AOD = m\angle COD = 90^\circ$ అని చూపాలి

త్రిభుజాల సర్వసమానత్వ నిర్ధారక ధర్మం వలన

$\Delta AOD \cong \Delta COD$



చిత్రం 4.35

అందువలన $m\angle AOD = m\angle COD$

$\angle AOD$ మరియు $\angle COD$ లు సరళ యుగ్మాలు

$\therefore\ m\angle AOD = m\angle COD = 90^\circ$

ఎందుకనగా $AO = CO$ ఎందుకు?
$AD = CD$ ఎందుకు?
$OD = OD$ ఉభయ సామాన్యం

ఉదాహరణం 7 : RICE ఒక వజ్రాకృతి (చిత్రం 4.36) x, y, z లను కనుగొనండి. మీ జవాబులను సమర్థించండి.

సాధన : $x = OE$

$= OI$ ...(కర్ణములు ఖండించుకుంటున్నాయి)

$= 5$

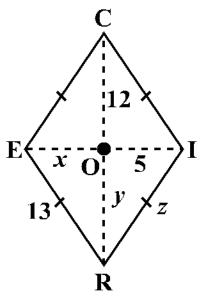
$y = OR$

$= OC$ (కర్ణములు ఖండించుకుంటున్నాయి)

$= 12$

z = వజ్రాకృతి భుజం

$= 13$ (భుజాలన్నియు సమానం)



చిత్రం 4.36

4.5.2. దీర్ఘ చతురస్రం

కోణాలన్నింటి కొలతలు సమానంగానున్న సమాంతర చతుర్భుజాన్ని "దీర్ఘ చతురస్రం" అంటారు. ఈ వ్యాఖ్యయొక్క సంపూర్ణ అర్థం ఏమిటి? మీ స్నేహితులతో చర్చించండి.

దీర్ఘ చతురస్రం సమాన కోణాలుగా ఉండటానికి ప్రతి కోణపు కొలత ఎంత ఉండాలి?

దీర్ఘ చతురస్రం యొక్క ప్రతికోణపు కొలత = x°

అలాగయితే, $4x^\circ = 360^\circ$.....(ఎందుకు)

అందువలన $x^\circ = 90^\circ$

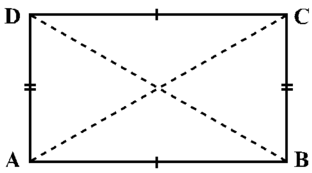
చిత్రం 4.37

అనగా, దీర్ఘ చతురస్రం యొక్క ప్రతికోణం లంబకోణం అవుతుంది. అందువలన, దీర్ఘ చతురస్రం ప్రతికోణం లంబకోణంగానున్న సమాంతర చతుర్భుజం

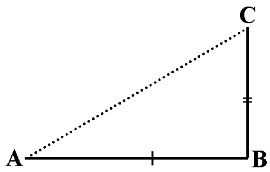
దీర్ఘచతురస్రం సమాంతర చతుర్భుజం అయినందువలన ఎదురెదురు భుజాలు సమానంగా ఉండి, దాని కర్ణములు ఖండించుకుంటాయి.

దీర్ఘ చతురస్రంలో కర్ణములు విభిన్న పొడవులో ఉండవచ్చు (దీనిని పరీక్షించండి); అయితే, ఆశ్చర్యమేమనగా, దీర్ఘచతురస్రం (ఒక విశేష సందర్భమైన కారణం) సమానమైన కర్ణములు కలిగియుంటుంది.

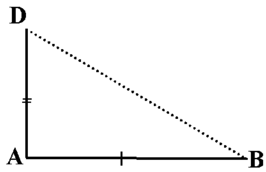
ధర్మం : "దీర్ఘ చతురస్రం కర్ణములు సమానంగాఉంటాయి.



చిత్రం 4.38



చిత్రం 4.39



చిత్రం 4.40

దీనిని సమర్థించడం చాలా సులభం ABCD ఒక దీర్ఘచతురస్రం అయినచో, (చిత్రం 4.38), ΔABCD మరియు ΔABD త్రిభుజాలను ప్రత్యేకంగా గమనించినప్పుడు, [(చిత్రం 4.39) మరియు (చిత్రం 4.40) వరుసగా]

$\Delta ABC \cong \Delta ABD$ అని చెప్పవచ్చు.

ఇదెలా అనగా, $AB = AB$ ......(ఉభయ సామాన్యం)

$BC = AD$ ......(ఎందుకు?)

$m\angle B = m\angle A = 90°$ ......(ఎందుకు?)

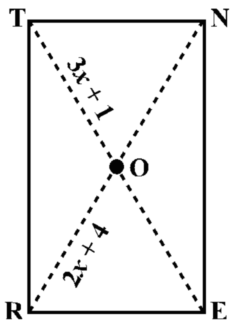
ఇది త్రిభుజాల సర్వసమాన్వపు భు.కో.భు. నిర్ధారక లక్షణం ఆధారంగా

$$\Delta ABC \cong \Delta ABD$$

అనగా, $AC = BD$

"దీర్ఘ చతురస్రంలో కర్ణములు సమానంగా ఉండటంతోపాటు పరస్పరం ఖండించుకుంటాయి (ఎందుకు?)

ఉదాహరణం 8 : చిత్రం 4.41లో RENT ఒక దీర్ఘ చతురస్రం దాని కర్ణములు 'O' బిందువులో ఖండిస్తాయి. $OR = 2x + 4$ మరియు $OT = 3x + 1$ అయితే, x విలువ కనుగొనండి.



చిత్రం 4.41

సాధన : $\overline{OT}$ భుజం $\overline{TE}$ లో అర్ధం ఉంటుంది.

$\overline{OR}$ భుజం $\overline{RN}$ లో అర్ధం ఉంటుంది.

దీర్ఘచతురస్రంలో కర్ణములు సమానం (ఎందుకు?)

అనగా, కర్ణంలోని అర్ధాలు కూడా సమానంగా ఉంటాయి.

అందువలన, $3x + 1 = 2x + 4$

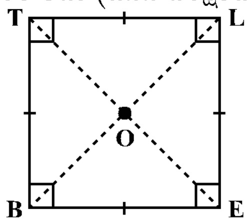
లేదా $x = 3$

4.5.3. చతురస్రం (SQUARE)

భుజాలన్నియు సమానంగాగల దీర్ఘచతురస్రమే 'చతురస్రం'. చతురస్రం దీర్ఘచతురస్రం యొక్క లక్షణాలన్నియు కల్గియుండి, వాటితోపాటు అన్ని భుజాలు సమానంగా ఉంటాయనే అవసరం విశేష లక్షణం కలగియుంది.

చతురస్రం దీర్ఘచతురస్రంలాగనే సమానమైన కర్ణములు కలిగియుంటుంది.

దీర్ఘచతురస్రంలో కర్ణములు లంబంగా ఉండవలసిన అవసరం లేదు (దీనిని పరీక్షించండి).



చతురస్రంలోని కర్ణములు,

(i) పరస్పరం ఖండించుకుంటాయి ..... (చతురస్రం ఒక సమాంతర చతుర్భుజం)

(ii) సమానంగా ఉంటాయి ..... (చతురస్రం ఒక దీర్ఘచతురస్రం) మరియు

(iii) పరస్పరం లంబంగా ఉంటాయి.

అందువలన ఈ కింది లక్షణాలు పొందవచ్చు.

BELT ఒక చతురస్రం BE = EL = LT = TB.

$\angle B = \angle E = \angle L = \angle T$ ఇవి లంబ కోణాలు

BL = ET మరియు $\overline{BL} \perp \overline{ET}$

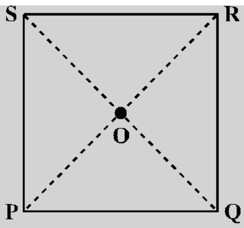
OB = OL మరియుOE = OT

ధర్మం : ''చతురస్రంలో కర్ణములు పరస్పరం లంబంగా ఖండించుకుంటాయి.''

చేసి చూడండి.

ఒక చతురస్రాకార కాగితం తీసుకోండి. (చిత్రం 4.2)అది PQRS అయివుండాలి. దానిని కర్ణముల మీద మడచండి. రెండు కర్ణాల మధ్య బిందువు ఒకటే అయిందా?

'O' బిందువులో కోణం 90° కు సమానంగా ఉందా అని మూలమట్టం సహాయంతో పరీక్షించండి.



చిత్రం 4.42

ఇలా పైన చెప్పిన లక్షణం సమర్థించబడుతుంది.

ఈ లక్షణాన్ని సమంజసమైన తార్కికంగా చర్చల ద్వారా సమర్థించవచ్చు.

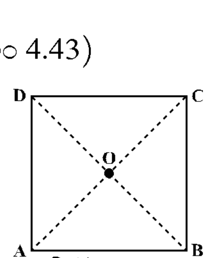
ABCD చతురస్రంలో కర్ణములు 'O' బిందువులో ఖండిస్తాయి. (చిత్రం 4.43)

OA = OC....(ఎందుకనగా చతురస్రం ఒక సమాంతర చతుర్భుజం)

త్రిభుజాల సర్వ సమానత్వ నిర్ధారక లక్షణం భు.భు.భు.(SSS) నుండి

$\Delta AOD \cong \Delta COD$ అని చెప్పవచ్చు. (ఎలా?)

అనగా, $m\angle AOD = m\angle COD$

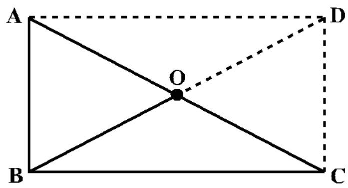


చిత్రం 4.43

అయితే, ఈ కోణములు సరళ యుగ్మాలు అయినంచువలన ప్రతికోణం 90° కు సమానంగా ఉంటుంది.

అభ్యాసం 4.4

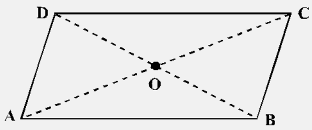
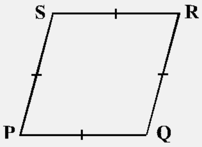
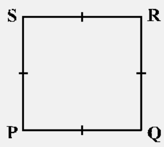
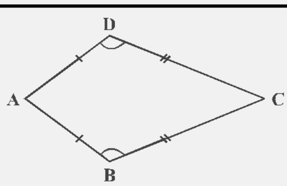
1. కింద ఇచ్చిన వ్యాఖ్యానాలు ఒప్పో, తప్పో తెల్పండి.
   (a) అన్ని దీర్ఘచతురస్రాలు చతురస్రాలు.
   (b) అన్ని వజ్రాకృతులు సమాంతర చతుర్భుజాలు.
   (c) చతురస్రాలన్నియు వజ్రాకృతులు మరియు దీర్ఘ చతుస్రాలవుతాయి.
   (d) చతురస్రాలన్నియు సమాంతర చతుర్భుజాలు కావు.
   (e) గాలిపటాలన్నియు వజ్రాకృతులుగా ఉంటాయి.
   (f) వజ్రాకృతులన్నియు గాలిపటాలుగా ఉంటాయి.
   (g) సమాంతర చతుర్భుజాలన్నియు ట్రెపీజియమ్‌లు అవుతాయి.
   (h) చతురస్రాలన్నియు ట్రెపీజియమ్‌లవుతాయి.
2. కిందివిధంగా అంశాలను కల్గియున్న చతుర్భుజాలను గుర్తించండి.
   (a) సమానమైన నాలుగు భుజాలు (b) నాలుగు లంబకోణములు
3. చతురస్రం ఈ కిందివాటికి ఎలా అవుతుందో వివరించండి.
   (i) చతుర్భుజం (ii) సమాంతర చతుర్భుజం
   (iii) వజ్రాకృతి (iv) దీర్ఘచతురస్రం
4. కింది చతుర్భుజాలను పేర్కొనండి.
   (a) కర్ణములు పరస్పరం ఖండించుకుంటాయి.
   (b) కర్ణములు పరస్పరం లంబార్ధకాలుగా ఉంటాయి.
   (c) కర్ణములు సమానంగా ఉంటాయి.
5. దీర్ఘచతురస్రం ఒక బహిర్వక్ర చతుర్భుజం కావడానికి కారణం వివరించండి.
6. ABC అనునది ఒక లంబకోణ త్రిభుజమైయుండి, 'O' బిందువు లంబకోణానికి అభిముఖ భుజంయొక్క మధ్య బిందువు. 'O' బిందువు A,B మరియు C బిందువుల నుండి సమాన దూరంలో ఉంది. ఎందుకు? వివరించండి. (మీకు సహాయ పడటానికి చుక్కల గీతలను గీయబడినది).



ఆలోచించండి, చర్చించండి, రాయండి.

1. ఒక బేల్దారి పలకలను (కాంక్రీటు)తో తయారుచేశాడు. అతనికి అదొక దీర్ఘ చతురస్రాకారంలో ఉండాలి. అతడు ఏఏ విధానాలతో అది దీర్ఘచతురస్రమని ధృవీకరించుకోవచ్చు?
2. చతురస్రాన్ని భుజాలన్నియు సమానంగాగల దీర్ఘచతురస్రమని వ్యాఖ్యానించబడింది. దానిని సమానకోణాలు కలిగిన వజ్రాకృతియని వ్యాఖ్యానించవచ్చా? ఈ ఆలోచనను ఆవిష్కరించండి.
3. ఒక ట్రెపీజియమ్ తన కోణాలన్నింటిని సమానంగా ఉండునట్లు పొందగలదా? అది తన భుజాలన్నియు సమానంగా వుండునట్లు పొందవచ్చా? వివరించండి.

సారాంశం

చతుర్భుజం		లక్షణాలు/ధర్మాలు
సమాంతర చతుర్భుజం: ఎదురెదురు భుజాలు సమాంతరంగాగల చతుర్భుజం.		1. ఎదురెదురు భుజాలు సమానం 2. ఎదురెదురు కోణాలు సమానం 3. కర్ణములు పరస్పరం ఖండించు కుటాయి.
వజ్రాకృతి: భుజాలన్నియు సమానంగాగల చతుర్భుజం		1. సమాంతర చతుర్భుజపు అన్ని ధర్మాలు. 2. కర్ణాలు పరస్పరం లంబంగా ఉంటాయి.
దీర్ఘచతురస్రం : భుజాలన్నియు సమానంగాగల సమాంతర చతుర్భుజం		1. సమాంతర చతుర్భుజంలోని అన్ని ధర్మాలు 2. ప్రతికోణం 90° కు సమానం 3. కర్ణములు సమానం.
చతురస్రం: భుజాలన్నియు సమానంగాగల దీర్ఘచతురస్రం		సమాంతర చతుర్భుజం వజ్రాకృతి మరియు దీర్ఘ చతురస్రాల అని ధర్మాలు
గాలిపటం : రెండే రెండు జతల అనుక్రమ భుజాలు సమానంగాగల చతుర్భుజం		1. కర్ణములు, పరస్పరం లంబంగా వుంటాయి. 2. ఒక కర్ణం మాత్రమే మరొక కర్ణమును ఖండిస్తుంది. 3. (చిత్రంలో) $m\angle B = m\angle D$ మరియు $m\angle A \neq m\angle C$

♦♦♦♦

అధ్యాయం

వర్గాలు మరియు వర్గమూలాలు

5

5.1 పీఠిక

మాకు తెలిసినట్లుగా చతురస్ర వైశాల్యం = భుజం × భుజం (ఇక్కడ 'భుజం' అనగా భుజం యొక్క పొడవు), కింది పట్టికను అభ్యసించండి.

చతురస్ర భుజం (సెం.మీ.)	చతురస్ర వైశాల్యం (సెం.మీ)
1	$1 \times 1 = 1 = 1^2$
2	$2 \times 2 = 4 = 2^2$
3	$3 \times 3 = 9 = 3^2$
5	$5 \times 5 = 25 = 5^2$
8	$8 \times 8 = 64 = 8^2$
a	$a \times a = a^2$

4, 9, 25, 64 మరియు ఇలాంటి ఇతర సంఖ్యల ప్రత్యేకత ఏమిటి?

4ను ఈ విధంగా వ్యక్తపరచవచ్చు $2 \times 2 = 2^2$, 9ను ఈ విధంగా వ్యక్తపరచవచ్చు, $3 \times 3 = 3^2$. ఒక సంఖ్యను అదే సంఖ్యతో గుణించి, ఈ విధమైన సంఖ్యలను పొందవచ్చు.

1, 4, 9, 16, 25 ...... ఈ విధమైన సంఖ్యలను వర్గసంఖ్యలు అంటారు.

సామాన్యంగా చెప్పాలంటే, m మరియు n లు రెండు సహజ సంఖ్యలైవుండి, m ను n^2 అని రాయగలగాలంటే m ఒక వర్గ సంఖ్య అవుతుంది.

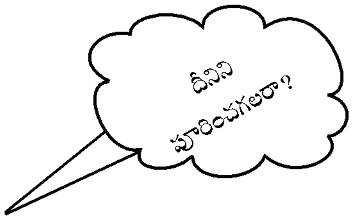
32 ఒక వర్గ సంఖ్యా?

మనకు తెలిసినట్లుగా $5^2 = 25$ మరియు $6^2 = 36$. ఒకవేళ 32 వర్గ సంఖ్య అయినచో, అది 5 మరియు 6ల మధ్యగల సహజ సంఖ్యయొక్క వర్గం అయివుండాలి. అయితే, 5 మరియు 6ల మధ్య ఎటువంటి సహజ సంఖ్య ఉండదు.

అందువలన 32 ఒక వర్గసంఖ్య కాదు.

కింది సంఖ్యలు మరియు వాటి వర్గాలను పరిగణించండి.

సంఖ్య	వర్గం
1	$1 \times 1 = 1$
2	$2 \times 2 = 4$
3	$3 \times 3 = 9$
4	$4 \times 4 = 16$
5	$5 \times 5 = 25$
6	-------------
7	-------------
8	-------------
9	-------------
10	-------------



మనం పై పట్టికనుండి మనం 1 మరియు 100 ల మధ్యగల వర్గ సంఖ్యలను పట్టీ చేయవచ్చా? 100 వరకుగల ఏదైనా సహజ వర్గ సంఖ్యలు వదిలివేయబడ్డాయా?

మీకు తెలిసేదేమనగా, మిగిలిన సంఖ్యలు వర్గసంఖ్యలు కావు. 1, 4, 9, 16 .... ఈ సంఖ్యలు వర్గసంఖ్యలు. ఇలాంటి సంఖ్యలను పూర్ణవర్గాలు అని కూడా అంటారు.

వీటిని ప్రయత్నించండి.

ఈ సంఖ్యల మధ్యగల వర్గ సంఖ్యలను రాయండి.

(i) 30 మరియు 40 (ii) 50 మరియు 60

5.2 వర్గ సంఖ్యల లక్షణాలు / ధర్మాలు

కింది పట్టికలో 1 నుండి 20 వరకుగల సంఖ్యల వర్గాలు ఇవ్వబడినవి

సంఖ్య	వర్గం	సంఖ్య	వర్గం
1	1	11	121
2	4	12	144
3	9	13	169
4	16	14	196
5	25	15	225
6	36	16	256
7	49	17	289
8	64	18	324
9	81	19	361
10	100	20	400

పై పట్టికలోగల వర్గ సంఖ్యలను అభ్యసించండి. ఆ వర్గ సంఖ్యలలో అంత్యంలోగల (అనగా ఒకట్ల స్థానంలోగల) అంకెలేవి? ఆ వర్గ సంఖ్యలన్నింటి ఒకట్ల స్థానంలో 0, 1, 4, 5, 6 లేదా 9 ఉన్నాయి. ఏవైనా వర్గ సంఖ్యలు 2, 3, 7, లేదా 8ని ఒకట్ల స్థానంలో పొందిలేవు.

ఒక సంఖ్యయొక్క ఒకట్ల స్థానంలో 0, 1, 4, 5, 6 లేదా 9 ఉన్నచో, ఆ సంఖ్య ఖచ్చితంగా వర్గమవుతుందని మనం చెప్పవచ్చా? వీటి గురించి ఆలోచించండి.

వీటిని ప్రయత్నించండి.

1. కింది సంఖ్యలు పూర్ణవర్గాలని చెప్పవచ్చా? మనకు ఎలా తెలుస్తుంది?
   (i) 1057 (ii) 23453 (iii) 7928
   (iv) 222222 (v) 1069 (vi) 2061

   ఒకట్ల స్థానంలోగల అంకెలను చూసి, అవి వర్గ సంఖ్యలు కావు అని చెప్పదగు ఐదు సంఖ్యలు రాయండి.
2. ఒకట్ల స్థానంలోగల అంకెలను చూసి, అవి వర్గ సంఖ్యలా లేదా కాదా అనుటను నిర్ణయించడానికి సాధ్యం కాని ఐదు సంఖ్యలు రాయండి.

కింది పట్టికలోగల కొన్ని సంఖ్యలు మరియు వాటి వర్గాలను నేర్చుకోండి. అవి రెండింటిలోగల ఒకట్ల స్థానాలను చూడండి.

పట్టిక 1

సంఖ్య	వర్గం	సంఖ్య	వర్గం	సంఖ్య	వర్గం
1	1	11	121	21	441
2	4	12	144	22	484
3	9	13	169	23	529
4	16	14	196	24	576
5	25	15	225	25	625
6	36	16	256	30	900
7	49	17	289	35	1225
8	64	18	324	40	1600
9	81	19	361	45	2025
10	100	20	400	50	2500

కింది వర్గ సంఖ్యలు ఒకట్ల స్థానంలో 1 ని కల్గి ఉంటాయి.

వర్గం	సంఖ్య
1	1
81	9
121	11
361	19
441	21

వీటిని ప్రయత్నించండి.

123^2, 77^2, 82^2, 161^2, 109^2 వీటిలో సంఖ్యల ఒకట్ల స్థానంలో 1 ఉండేది?

ఒకట్ల స్థానంలో 1 ని కల్గియున్న తరువాతి రెండు వర్గ సంఖ్యలు మరియు వాటికి సంబంధించిన సంఖ్యలు రాయండి.

మీకిప్పుడు తెలిసేదేమిటనగా ఒకట్ల స్థానంలో 1 లేదా 9 కల్గియున్న సంఖ్యల వర్గాల ఒకట్ల స్థానంలో 1 ఉంటుంది.

ఇప్పుడు ఒకట్ల స్థానంలో 6ను కల్గియున్న వర్గ సంఖ్యలను పరిగణించండి.

వర్గం	సంఖ్య
16	4
36	6
196	14
256	16

వీటిని ప్రయత్నించండి.

కింది ఏ సంఖ్యలు ఒకట్ల స్థానంలో 6ను కల్గియుంటాయి.

(i) 19^2 (ii) 24^2 (iii) 26^2
(iv) 36^2 (v) 34^2

ఒక సంఖ్యలోని వర్గపు ఒకట్లస్థానంలో 6 ఉన్నచో, ఆ సంఖ్యలోని ఒకట్ల స్థానంలో 4 లేదా 6 ఉంటుంది. అని మనకు తెలుస్తున్నది.

1వ పట్టిక చూడండి. ఇదే విధమైన ఇంకా చాలా నియమాలను మీరు కనుగొనగలరా?

వీటిని ప్రయత్నించండి.

కింది సంఖ్యల వర్గాలలో ఒకట్ల స్థానంలోగల అంకెలేవి?

(i) 1234 (ii) 26387 (iii) 52698
(iv) 99880 (v) 21222 (vi) 9106

- కింది సంఖ్యలు మరియు వాటి వర్గాలను పరిగణించండి.

ఇవి ఒక సున్నా కలిగియున్నాయి.

$$10^2 = 100$$
$$20^2 = 400$$
$$80^2 = 6400$$

ఇవి రెండు సున్నాలు కలిగియున్నాయి.

ఇవి రెండు సున్నాలు కలిగియున్నాయి.

$$100^2 = 10000$$
$$200^2 = 40000$$
$$700^2 = 490000$$
$$900^2 = 810000$$

ఇవి నాలుగు సున్నాలు కలిగియున్నాయి.

ఒక సంఖ్య 3 సున్నాలు కలిగియున్నచో, దాని వర్గంలో ఎన్ని సున్నాలుంటాయి?

ఒక సంఖ్యయొక్క అంత్యంలోనున్న సున్నాల సంఖ్య మరియు వాటి వర్గాల అంత్యంలోగల సున్నాల సంఖ్య గురించి ఏమి తీర్మానించగలరు?

వర్గ సంఖ్యయొక్క అంత్యంలోగల సున్నాలు ఎల్లప్పుడూ సరి సంఖ్యలోనే ఉంటాయని చెప్పవచ్చు.

- 1వ పట్టికలోగల సంఖ్యలు మరియు వాటి వర్గాలను గమనించండి.

సరి సంఖ్యలు మరియు బేసి సంఖ్యల వర్గాల గురించి మీరు ఏమి చెప్పాలనుకుంటున్నారు?

వీటిని ప్రయత్నించండి.

1. కింది ఏ సంఖ్యల వర్గాలు బేసి సంఖ్య / సరిసంఖ్యలుగా ఉంటాయి? ఎందుకు?
   (i) 727 (ii) 158
   (iii) 269 (iv) 1980
2. కింది సంఖ్యల వర్గాలలోని సున్నాల సంఖ్య తెల్పండి.
   (i) 60 (ii) 400

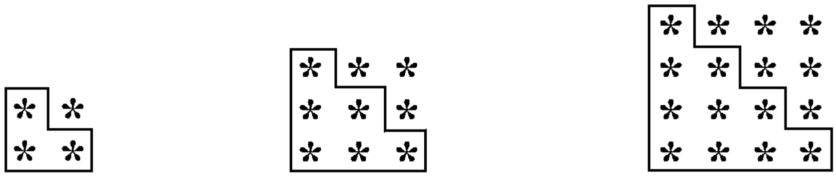
5.3 ఇంకా కొన్ని ఆసక్తికరమైన నమూనాలు

1. త్రిభుజాకార సంఖ్యల సంకలనం

మీకు త్రిభుజాకార / ముక్కోణపు సంఖ్యలు గుర్తున్నాయా? (త్రిభుజాకారంలో అమర్చదగు సంఖ్యల చుక్కల నమూనాలు)?

```
                                    *
                          *         **
                 *        **        ***
         *       **       ***       ****
*        **      ***      ****      *****
1        3       6        10        15
```

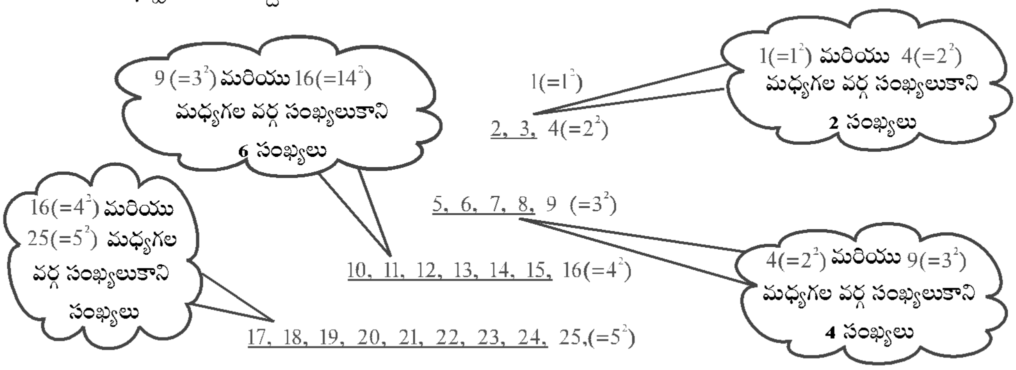
ఏవైనా రెండు వరుస క్రమ త్రిభుజాకార సంఖ్యలను కూడినప్పుడు, ఒక వర్గ సంఖ్యను పొందుతాం. ఉదాహరణకు,



$1 + 3 = 4 = 2^2$ $\qquad$ $3 + 6 = 9 = 3^2$ $\qquad$ $6 + 10 = 16 = 4^2$

2. వర్గ సంఖ్యల మధ్యగల సంఖ్యలు

రెండు వరుస క్రమ వర్గ సంఖ్యల మధ్య కొన్ని ఆసక్తికరమైన నమూనాను మనం కనుగొనవచ్చా అని ఇప్పుడు చూద్దాం.



1^2 (=1) మరియు 2^2 (=4)ల మధ్యగల రెండు (అనగా 2×1) పూర్ణ సంఖ్యలు కాని సంఖ్యలు 2, 3

2^2 (=4) మరియు 3^2 (=9)ల మధ్యగల నాలుగు (అనగా 2×2) పూర్ణ సంఖ్యలుకాని సంఖ్యలు 5, 6, 7, 8

ఇప్పుడు $\qquad 3^2 = 9, \quad 4^2 = 16$

అందువలన $\qquad 4^2 - 3^2 = 16 - 9 = 7$

9 ($=3^2$) మరియు 16 ($=4^2$) ల మధ్యగల సంఖ్యలు 10, 11, 12, 13, 14, 15 అనగా మొత్తం 6 పూర్ణ సంఖ్యలుకాని సంఖ్యలున్నాయి దీనివలన మనకు తెలిసేదేమిటనగా, రెండు వర్గ సంఖ్యల వ్యత్యాసం కంటే 1 తక్కువ ఉండుట అదేవిధంగా $4^2 = 16$ మరియు $5^2 = 25$

అందువలన $\qquad 5^2 - 4^2 = 9$

16 ($=4^2$) మరియు 25 ($=5^2$)ల మధ్యగల సంఖ్యలు 17 18, ...24 అనగా మొత్తం ఎనిమిది పూర్ణసంఖ్యలు కాని సంఖ్యలున్నాయి. ఇవి కూడా రెండు వర్గ సంఖ్యల వ్యత్యాసం కంటే 1 తక్కువ ఉండునది.

ఇప్పుడు 6^2 మరియు 7^2 ల మధ్య ఎన్ని సంఖ్యలు ఉన్నాయో తెలుసుకోవచ్చా?

n ఏదైనా సహజ సంఖ్య అయినచో

$$(n+1)^2 - n^2 = (n^2 + 2n + 1) - n^2 = 2n + 1$$

n^2 మరియు $(n + 1)^2$ ల మధ్య $2n$ అంత సంఖ్యలుంటాయి. అనగా రెండు వర్గ సంఖ్యల వ్యత్యాసం కంటే 1 తక్కువ ఉంటుంది.

దీనివలన, సాధారణంగా n మరియు $(n + 1)$ ల వర్గాల మధ్య $2n$ అంత పూర్ణ సంఖ్యలు కాని సంఖ్యలుంటాయి.

$n = 5$, $n = 6$ ఇంకా ఇతర ఉదాహరణలతో సరిచూడండి.

వీటిని ప్రయత్నించండి.

1. (i) 9^2 మరియు 10^2 (ii) 11^2 మరియు 12^2 వీటి మధ్యగల సహజ సంఖ్యలెన్ని?
2. కింది జంట సంఖ్యల మధ్యగల పూర్ణసంఖ్యలు కాని సంఖ్యలెన్ని?
   (i) 100^2 మరియు 101 (ii) 90^2 మరియు 91^2
   (iii) 1000^2 మరియు 1001^2

3. బేసి సంఖ్యల సంకలనం

కింది వాటిని పరిగణించండి.

1 [ఒక బేసి సంఖ్య]	$= 1 = 1^2$
1 + 3 [మొదటి రెండు బేసి సంఖ్యల మొత్తం]	$= 4 = 2^2$
1 + 3 + 5 [మొదటి మూడు బేసి సంఖ్యల మొత్తం]	$= 9 = 3^2$
1 + 3 + 5 + 7 [.............]	$= 16 = 4^2$
1 + 3 + 5 + 7 + 9 [................]	$= 25 = 5^2$
1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 [...............]	$= 36 = 6^2$

అందువలన సామాన్యంగా చెప్పాలంటే, మొదటి n బేసి సంఖ్యల మొత్తం n^2 కు సమానంగా ఉంటుంది.

దీనినే మరొక విధానంలో చెప్పాలంటే ఒక సంఖ్య వర్గ సంఖ్య అయినచో అది 1 నుండి ప్రారంభమైన వరుస క్రమ బేసిసంఖ్యల మొత్తంగా ఉంటుంది.

పూర్ణ సంఖ్యలు కాని సంఖ్యలైన 2, 3, 5, 6 .... వీటిని 1 తో ప్రారంభించి వరుస క్రమ సహజ బేసిసంఖ్యల మొత్తాలుగా వ్యక్తపరచడం సాధ్యమా?

ఇలాంటి సంఖ్యలను ఈ విధంగా వ్యక్తపరచడానికి సాధ్యంకాదని తెలుస్తున్నది.

25 సంఖ్యను పరిగణించండి. 1, 3, 5, 7, 9 .... వీటిని వరుస క్రమంలో తీసేద్దాం.

(i) $25 - 1 = 24$ (ii) $24 - 3 = 21$ (iii) $21 - 5 = 16$

(iv) $16 - 7 = 9$ (v) $9 - 9 = 0$

దీని అర్థం $25 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9$ అనగా, 25 ఒక పూర్ణ వర్గమని తెలుస్తుంది.

38 సంఖ్యను తీసుకొని, పై విధంగా చేసినప్పుడు

(i) $38 - 1 = 37$ (ii) $37 - 3 = 34$ (iii) $34 - 5 = 29$

(iv) $29 - 7 = 22$ (v) $22 - 9 = 13$ (vi) $13 - 11 = 2$

(vii) $2 - 13 = -11$

వీటిని ప్రయత్నించండి

కింది సంఖ్యలు పూర్ణవర్గాలో లేదా కాదో తెల్పండి.

(i) 12 (ii) 55 (iii) 81

(iv) 49 (v) 69

దీనివలన మనకు తెలిసేదేమిటనగా 38 ని 1తో ప్రారంభించి, వరుస క్రమ బేసి సంఖ్యల మొత్తంగా వ్యక్తపరచడానికి సాధ్యపడదు. అనగా 38 పూర్ణ వర్గం కాదు.

అందువలన ఒక సహజ సంఖ్యను 1తో ప్రారంభించి, వరుస క్రమ బేసిసంఖ్యల మొత్తాన్ని వ్యక్తపరచడానికి సాధ్యం కాకపోతే అది పూర్ణవర్గం కాదు.

మనం, ఒక సంఖ్య పూర్ణ వర్గం అయినదో లేదా కాదో అని తెలుసుకోవడానికి ఈ ఫలితాన్ని ఉపయోగించవచ్చు.

4. వరుస క్రమ సహజ సంఖ్యల మొత్తం

కింది అంశాలను పరిగణించండి.

మొదటి సంఖ్య $\frac{3^2 - 1}{2}$

రెండవ సంఖ్య $\frac{3^2 + 1}{2}$

$3^2 = 9 = 4 + 5$

$5^2 = 25 = 12 + 13$

$7^2 = 49 = 24 + 25$

$9^2 = 81 = 40 + 41$

$11^2 = 121 = 60 + 61$

$15^2 = 225 = 112 + 113$

వావ్! మనం ఏదైనా బేసి సంఖ్యయొక్క వర్గాన్ని రెండు వరుస క్రమ ధన పూర్ణసంఖ్యల మొత్తంగా వ్యక్తపరచవచ్చు

వీటిని ప్రయత్నించండి.

1. కింది వాటిని రెండు వరుస క్రమ పూర్ణసంఖ్యల మొత్తంగా వ్యక్తపరచండి.
   (i) 21^2 (ii) 13^2 (iii) 11^2 (iv) 19^2
2. పై నియమానికి విరుద్ధ వ్యాఖ్యానం నిజమా. అనగా, ఏవైనా రెండు వరుస క్రమ ధన పూర్ణసంఖ్యల మొత్తం పూర్ణవర్గమా? ఉదాహరణతో పాటు తెల్పండి.

5. రెండు వరుస క్రమ సరి మరియు బేసి సహజ సంఖ్యల గుణలబ్ధం

$$11 \times 13 = 143 = 12^2 - 1$$

అదేవిధంగా $11 \times 13 = (12-1) \times (12 + 1)$

అందువలన $11 \times 13 = (12 - 1) \times (12 + 1) = 12^2 - 1$

అలాగే $13 \times 15 = (14 - 1) \times (14 + 1) = 14^2 - 1$

$29 \times 31 = (30 - 1) \times (30 + 1) = 30^2 - 1$

$44 \times 46 = (45 - 1) \times (45 + 1) = 45^2 - 1$

అందువలన సామాన్యంగా చెప్పాలంటే $(a + 1) \times (a - 1) = a^2 - 1$

6. ఇంకా కొన్ని వర్గసంఖ్యల మాదరీలు

1, 11, 111, ... మొదలగు సంఖ్యల వర్గాలను వీక్షించండి. అవి సుందరమైన నమూనా / మాదరీలో కనబడుతాయి.

1^2	1
11^2	1 2 1
111^2	1 2 3 2 1
1111^2	1 2 3 4 3 2 1
11111^2	1 2 3 4 5 4 3 2 1
11111111^2	1 2 3 4 5 6 7 8 7 6 5 4 3 2 1

మరొక ఆసక్తికరమైన మాదరి

$7^2 = 49$

$67^2 = 4489$

$667^2 = 444889$

$6667^2 = 4444889$

$66667^2 = 4444488889$

$666667^2 = 444444888889$

వీటిని ప్రయత్నించండి.

పై మాదరీని ఉపయోగించుకొని వీటి వర్గాలను రాయండి.

(i) 111111^2 (ii) 1111111^2

ఈ విధమైన మాదరి ఎలా వస్తుందో కనుగొనడం ఒకరకమైన వినోదం అవుతుంది. ఇలాంటి ప్రశ్నలకు జవాబు లభించడానికి కొన్ని సంవత్సరాలు కావలసిననూ వాటి గురించి ఆలోచించడం ఆసక్తికరం.

వీటిని ప్రయత్నించండి.

పై మాదరిని ఉపయోగించుకొని, కింది సంఖ్యల వర్గాలను కనుగొనవచ్చా?

(i) 6666667^2 (ii) 66666667^2

అభ్యాసం 5.1

1. కింది సంఖ్య వర్గాలు ఒకట్ల స్థానంలోగల అంకెలేవి?

   (i) 81 (ii) 272 (iii) 799 (iv) 3853
   (v) 1234 (vi) 26387 (vii) 52698 (viii) 99880
   (ix) 12796 (x) 55555

2. కింది సంఖ్యలు స్పష్టంగా పూర్ణవర్గాలు కావు. కారణాలివ్వండి.

   (i) 1057 (ii) 23453 (iii) 7928 (iv) 222222
   (v) 64000 (vi) 89722 (vii) 222000 (viii) 505050

3. కింది ఏ సంఖ్యల వర్గాలు బేసి సంఖ్యలు?

   (i) 431 (ii) 2826 (iii) 7779 (iv) 82004

4. కింది మాదరిని గమనించి వదిలిన అంకెలను నింపండి. .

$$11^2 = 121$$
$$101^2 = 10201$$
$$1001^2 = 1002001$$
$$100001^2 = 1\ldots\ldots\ldots\ldots2\ldots\ldots\ldots\ldots1$$
$$10000001^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

5. కింది మాదరిని గమనించి, ఖాళీగానున్న స్థలాలను సరైన సంఖ్యలతో నింపండి.

$$11^2 = 121$$
$$101^2 = 10201$$
$$10101^2 = 102030201$$
$$1010101^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots^2 = 10203040504030201$$

6. ఇచ్చిన మాదరీని ఉపయోగించుకొని వదిలిన సంఖ్యలను నింపండి.

$1^2 + 2^2 + 2^2 = 3^2$
$2^2 + 3^2 + 6^2 = 7^2$
$3^2 + 4^2 + 12^2 = 13^2$
$4^2 + 5^2 + _^2 = 21^2$
$5^2 + _^2 + 30^2 = 31^2$
$6^2 + 7^2 + _^2 = _^2$

మాదరీని కనుగొనడానికి

మూడవ సంఖ్య ఒకటి మరియు రెండవ సంఖ్యలకు సంబంధించినది. ఎలా? నాల్గవ సంఖ్య మూడవ సంఖ్యకు సంబంధిచినది. ఎలా?

7. సంఖ్యలను కూడకుండా, మొత్తాన్ని కనుగొనండి.
   (i) 1 + 3 + 5 + 7 + 9
   (ii) 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19
   (iii) 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21 + 23

8. (i) 49 ని 7 బేసి సంఖ్యల మొత్తంగా వ్యక్తపరచండి.
   (ii) 121 ను 11 బేసి సంఖ్యల మొత్తంగా వ్యక్తపరచండి.

9. కింది సంఖ్యల వర్గాల మధ్య ఎన్ని సంఖ్యలున్నాయి?
   (i) 12 మరియు 13 (ii) 25 మరియు 26
   (iii) 99 మరియు 100

5.4 సంఖ్యల వర్గాలను కనుగొనడం

3, 4, 5, 6, 7 .... మొదలగు చిన్న సంఖ్యల వర్గాలను సులభంగా కనుగొనవచ్చు. అయితే, 23 యొక్క వర్గాన్ని మనం త్వరగా కనుగొనవచ్చా.

దీని జవాబు అంత సులభం కాదు. మనం 23ను 23తో గుణించాలి.

23 × 23 ఈ విధంగా గుణించకుండా మరొక విధానంలో వర్గాన్ని కనుగొనవచ్చు

మనం తెలుసుకున్నట్లుగా $23 = 20 + 3$

అందువలన $23^2 = (20 + 3)^2 = 20(20 + 3) + 3\,(20 + 3)$

$= 20^2 + 20 \times 3 + 3 \times 20 + 3^2$

$= 400 + 60 + 60 + 9$

$= 529$

ఉదాహరణం 1 : గుణకారం చేయకుండా ఈ కింది సంఖ్యలను కనుగొనండి.

(i) 39 (ii) 42

సాధన : (i) $39^2 = (30 + 9)^2$

$= 30\ (30 + 9) + 9\ (30 + 9)$

$= 30^2 + 30 \times 9 + 9 \times 30 + 9^2$

$= 900 + 270 + 270 + 81$

$= 1521$

(ii) $42^2 = (40 + 2)^2$

$= 40\ (40 + 2) + 2\ (40 + 2)$

$= 40^2 + 40 \times 2 + 2 \times 40 + 2^2$

$= 1600 + 80 + 80 + 4$

$= 1764$

5.4.1 వర్గాలలోగల ఇతర మాదరీలు

కింది మాదరీని పరిగణించండి

$25^2 = 625 = (2 \times 3)$ వందలు + 25

$35^2 = 1225 = (3 \times 4)$ వందలు + 25

$75^2 = 5625 = (7 \times 8)$ వందలు + 25

$125^2 = 15625 = (12 \times 13)$ వందలు + 25

ఇప్పుడు మీరు 95 యొక్క వర్గాన్ని కనుగొనగలరా?

ఒకట్లస్థానంలో 5 గల ఒక సంఖ్యను పరిగణించండి. అనగా, $a5$

$(a5)^2 = (10a + 5)^2$

$= 10a(10a+5)+5(10a+5)$

$= 100a^2 + 50a + 50a + 25$

$= 100a\ (a+1) + 25$

$= a\ (a + 1)$ వంద + 25

వీటిని ప్రయత్నించండి.

1. ఒకట్ల స్థానంలో 5 అంకెగల కింది సంఖ్యల వర్గాలను కనుగొనండి.

(i) 15 (ii) 95 (iii) 105 (iv) 205

5.4.2 పైథాగరస్ త్రిపాదులు

కింది వాటిని పరిగణించండి.

$$3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$$

3, 4 మరియు 5, ఇలాంటి సంఖ్యల గుంపును పైథాగరస్ త్రిపదులు అంటారు. 6, 8, 10 ఇవి కూడా పైథాగరస్ త్రిపాదులు. ఎందుకనగా

$$6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 = 10^2$$

$5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2$. సంఖ్యలైన 5, 12, 13 ఇదేవిధమ్మైన ఇంకా చాలా రకాల త్రిపాదులను మీరు కనుగొనగలరా?

ఏదైనా సహజ సంఖ్య $m > 1$ ఉన్నచో

$(2m)^2 + (m^2 - 1)^2 = (m^2 + 1)^2$. అందువలన $2m$, $m^2 - 1$ మరియు $(m^2 + 1)$ లు పైథాగరస్ త్రిపాదులను రూపిస్తాయి.

దీనిని ఉపయోగించుకొని, ఇంకా ఎక్కువ పైథాగరస్ త్రిపాదులను కనుగొనడానికి ప్రయత్నించండి.

ఉదాహరణం 2 : చిన్న సంఖ్య 8 ని కల్గియున్న పైథాగరస్ త్రిపాదులను రాయండి.

సాధన : పైన చెప్పిన $2m$, $m^2 - 1$, $m^2 + 1$ విధానంలో మనం పైథాగరస్ త్రిపాదులను పొందవచ్చు.

మొదట $m^2 - 1 = 8$

అప్పుడు $m^2 = 8 + 1 = 9$

అందువలన $m = 3$

అందువలన $2m = 6$ మరియు $m^2 + 1 = 10$

ఇప్పుడు లభించు త్రిపాదులు అనగా 6, 8, 10. అయితే, వీటిలో చిన్నసంఖ్య 8 కాలేదు. అందువలన మరొకసారి ప్రయత్నిద్దాం. $2m = 8$

అప్పుడు $m = 4$

$m^2 - 1 = 16 - 1 = 15$

మరియు $m^2 + 1 = 16 + 1 = 17$

త్రిపాదులు 8, 15, 17 అవుతాయి. ఇందులో 8 చిన్న సంఖ్య

ఉదాహరణం 3 : ఒక సంఖ్య 12 గల పైథాగరస్ త్రిపాదులను కనుగొనండి.

సాధన : $m^2 - 1 = 12$ అని తీసుకున్నప్పుడు

అప్పుడు $m^2 = 12 + 1 = 13$

అప్పుడు m విలువ ఒక పూర్ణసంఖ్య కాదు.

అందువలన $m^2 + 1 = 12$ గా తీసుకొన్నప్పుడు

తిరిగి $m^2 = 11$ దీనిలో కూడా m విలువ పూర్ణసంఖ్య కాదు

అందువలన $2m = 12$ గా తీసుకుందాం

అప్పుడు $m = 6$

అదేవిధంగా $m^2 - 1 = 36 - 1 = 35$ మరియు $m^2 + 1 = 36 + 1 = 37$

అందువలన 12, 35, 37 లు మనకు కావలసిన త్రిపాదులు

సూచన : పైథాగరస్ త్రిపాదులన్నింటిని ఈ సామాన్య రూపం నుండి పొందడానికి సాధ్యం కాకపోవచ్చు. ఉదాహరణకు 5, 12, 13 లు కూడా 12 సంఖ్యను కలిగియున్న త్రిపాదులు.

అభ్యాసం 5.2

1. కింది సంఖ్యల వర్గాలను కనుగొనండి.
   (i) 32 (ii) 35 (iii) 86
   (iv) 93 (v) 71 (vi) 46
2. కింది సంఖ్యలతో కూడిన పైథాగరస్ త్రిపాదులను రాయండి.
   (i) 6 (ii) 14 (iii) 16 (iv) 18

5.5. వర్గమూలాలు

కింది సందర్భాలను అధ్యయనం చేయండి.

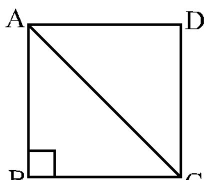
(a) ఒక చతురస్ర వైశాల్యం 144 చ.సెం. మీ. ఉన్నచో, దాని భుజం పొడవెంత?

మనకు తెలిసినట్లుగా చతురస్ర వైశాల్యం = భుజం^{2}

భుజం పొడవు 'a' అనుకొన్నప్పుడు $144 = a^2$

ఆ భుజంపొడవు కనుగొనడానికి, ఏ సంఖ్యయొక్క వర్గం 144 అయిందో మొదట కనుగొనవలసిన అవసరం ఉంది.

(b) చిత్రం 5.1లో భుజం పొడవు 8 సెం.మీ. గల చతురస్రంలోని కర్ణం పొడవును కనుగొనండి, దీనిని మనం పైథాగరస్ సిద్ధాంతాన్ని ఉపయోగించుకొని, సాధించవచ్చా?



చిత్రం 5.1

మనకు తెలిసినట్లుగా $AB^2 + BC^2 = AC^2$

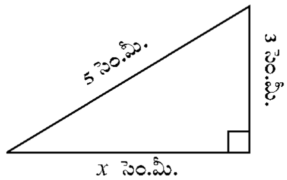
అనగా $8^2 + 8^2 = AC^2$

లేదా $64 + 64 = AC^2$

$128 = AC^2$

తిరిగి AC యొక్క కొలత పొందడానికి సంఖ్యయొక్క వర్గం 128 అయిందో ఆలోచించాలి

(c) లంబకోణ త్రిభుజంలో కర్ణం మరియు ఒక భుజం వరుసగా 5 సెం.మీ. మరియు 3 సెం.మీ. ఉన్నాయి (చిత్రం 5.2) మీరు మూడవ భుజం పొడవును కనుగొనగలరా?



చిత్రం 5.2

మూడవ భుజం పొడవు x అనుకోండి

పైథాగరస్ సిద్ధాంతం ప్రకారం

$$5^2 = x^2 + 3^2$$
$$25 = x^2 + 9$$
$$25 - 9 = x^2$$
$$16 = x^2$$

x విలువ కనుగొనడానికి ఏ సంఖ్యయొక్క వర్గం 16 అయిందోకనుగొనాలి. పై సందర్భాలన్నింటిలో మనం వర్గం తెలిసిన సంఖ్యను కనుగొనాలి. ఈ విధంగా వర్గం తెలిసిన సంఖ్య కనుగొనడమే వర్గమూలం కనుగొనడం అవుతుంది.

5.5..1 వర్గమూలం కనుగొనడం

సంకలన క్రియయొక్క విలోమం వ్యవకలన క్రియ అవుతుంది మరియు గుణకార క్రియయొక్క విలోమం భాగహారం అవుతుంది. అదేవిధంగా వర్గమూలం కనుగొనడం వర్గాన్ని కనుగొను విధానపు విలోమం అవుతుంది.

మనకు తెలిసినట్లుగా

$1^2 = 1$, అందువలన 1 యొక్క వర్గమూలం 1

$2^2 = 4$, అందువలన 4 యొక్క వర్గమూలం 2

$3^2 = 9$, అందువలన 9 యొక్క వర్గమూలం 3

> దీనివలన $9^2 = 81$ మరియు $(-9)^2 = 81$ 81 యొక్క వర్గమూలాలు 9 మరియు 9 అని మనం చెప్పుతాం.

వీటిని ప్రయత్నించండి.

(i) $11^2 = 121$, అయినప్పుడు 121 యొక్క వర్గమూలం ఎంత?

(ii) $14^2 = 196$, అయినప్పుడు 196 యొక్క వర్గమూలం ఎంత?

ఆలోచించండి, చర్చించండి, రాయండి

$(-1)^2 = 1$. 1 యొక్క వర్గమూలం −1 అవుతుందా?

$(-2)^2 = 4$. 4 యొక్క వర్గమూలం −2 అవుతుందా?

$(-9)^2 = 81$. 81 యొక్క వర్గమూలం −9 అవుతుందా?

పై ఉదాహరణల నుండి ఒక పూర్ణవర్గ సంఖ్య రెండు వర్గమూలాలు కల్గియుంటుంది అని చెప్పవచ్చు. ఈ అధ్యాయంలో మనం సహజ సంఖ్యల ధనాత్మక వర్గమూలాలను మాత్రమే తీసుకుంటాం.

ఒక సంఖ్య యొక్క ధనాత్మక వర్గమూలాన్ని $\sqrt{\ }$ చిహ్నంతో గుర్తిస్తారు.

ఉదాహరణకు $\sqrt{4} = 2$ (−2 కాదు); $\sqrt{9} = 3$ (−3 కాదు) మొదలగునవి

వ్యాఖ్యానం	తీర్మానం
$1^2 = 1$	$\sqrt{1} = 1$
$2^2 = 4$	$\sqrt{4} = 2$
$3^2 = 9$	$\sqrt{9} = 3$
$4^2 = 16$	$\sqrt{16} = 4$
$5^2 = 25$	$\sqrt{25} = 5$

వ్యాఖ్యానం	తీర్మానం
$6^2 = 36$	$\sqrt{36} = 6$
$7^2 = 49$	$\sqrt{49} = 7$
$8^2 = 64$	$\sqrt{64} = 8$
$9^2 = 81$	$\sqrt{81} = 9$
$10^2 = 100$	$\sqrt{100} = 10$

5.5.2 పునరావర్తిత వ్యవకలనం ద్వారా వర్గమూలం కనుగొనడం

మొదట n బేసి సహజ సంఖ్యల మొత్తం n^2 అవుతుంది అని మీకు జ్ఞాపకముందా? అనగా, ప్రతి వర్గసంఖ్యను 1తో ప్రారంభించి వరుసక్రమ బేసి సహజ సంఖ్యల మొత్తంగా వ్యక్తపరచవచ్చు.

$\sqrt{81}$ ను పరిగణించండి. అప్పుడు,

(i) $81 - 1 = 80$ (ii) $80 - 3 = 77$ (iii) $77 - 5 = 72$

(iv) $72 - 7 = 65$ (v) $65 - 9 = 56$ (vi) $56 - 11 = 45$

(vii) $45 - 13 = 32$ (viii) $32 - 15 = 17$ (ix) $17 - 17 = 0$

వీటిని ప్రయత్నించండి.

పునరావర్తిత వ్యవకలనం ద్వారా 1 తో ప్రారంభించి బేసి సంఖ్యలను తీసివేయడం వలన కింది సంఖ్యలు పూర్ణవర్గాలయ్యాయా లేదా కాదు అని పరీక్షించండి. ఇచ్చిన సంఖ్య పూర్ణవర్గ సంఖ్య అయినచో, వర్గమూలం కనుగొనండి.

(i) 121 (ii) 55 (iii) 36

(iv) 49 (v) 90

81లో 1తో ప్రారంభించి వరుస క్రమ బేసి సంఖ్యలను తీసివేస్తూ వెళ్ళినప్పుడు 9వ దశలో 0ను పొందడమైంది.

అందువలన $\sqrt{81} = 9$

729 యొక్క వర్గమూలాన్ని ఈ విధానం ద్వారా కనుగొనవచ్చా? అవును. అయితే, అది ఎక్కువ సమయం తీసుకుంటుంది. దానికొరకు మనం వేరొక సరళ విధానం ద్వారా కనుగొనడానికి ప్రయత్నిద్దాం.

5.5.3 ప్రధాన కారణాంక విధానంలో వర్గమూలం కనుగొనడం

కింది సంఖ్యలు మరియు వాటి వర్గాల ప్రధాన కారణాంకాలుగా పరిగణించండి.

సంఖ్యయొక్క ప్రధాన కారణాంకాలు	వీటి వర్గాల ప్రధాన కారణాంకాలు
$6 = 2 \times 3$	$36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$
$8 = 2 \times 2 \times 2$	$64 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$
$12 = 2 \times 2 \times 3$	$144 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$
$15 = 3 \times 5$	$225 = 3 \times 3 \times 5 \times 5$

6 యొక్క ప్రధాన కారణాంకాలలో 2 ఎన్నిసార్లు ఉంది? ఒకసారి ఉంది. 36 యొక్క ప్రధాన కారణాంకాలలో 2 ఎన్నిసార్లు ఉంది? రెండు సార్లు ఉంది. అదేవిధంగా 6 మరియు 36లో 3 ఎన్నిసార్లు ఉందో గమనించండి. అదేవిధంగా 8 మరియు 64లో 2 ఎన్ని సార్లు ఉందో గమనించండి.

$$\begin{array}{r|l} 2 & 324 \\ \hline 2 & 162 \\ \hline 3 & 81 \\ \hline 3 & 27 \\ \hline 3 & 9 \\ \hline & 3 \end{array}$$

దీనివలన మీకు తెలిసేదేమనగా, సంఖ్యలోని ప్రతి ప్రధాన కారణాంకం ఎన్నిసార్లు ఉంటుందో, దాని రెండింతలసార్లు ఆ సంఖ్య యొక్క వర్గపు ప్రధాన కారణాంకాలలో ఉంటుంది. ఇప్పుడు 324 యొక్క వర్గమూలాన్ని ఈ విధానం ద్వారా కనుగొందాం. 324 యొక్క ప్రధాన కారణాంకాలు

$$324 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 256 \\ \hline 2 & 128 \\ \hline 2 & 64 \\ \hline 2 & 32 \\ \hline 2 & 16 \\ \hline 2 & 8 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline & 2 \end{array}$$

ప్రధాన కారణాంకాలను జత చేసినప్పుడు

$$324 = \underline{2 \times 2} \times \underline{3 \times 3} \times \underline{3 \times 3}$$

$$= 2^2 \times 3^2 \times 3^2$$

$$= (2 \times 3 \times 3)^2$$

అందువలన $\sqrt{324} = 2 \times 3 \times 3 = 18$

అదేవిధంగా 256 యొక్క వర్గమూలాన్ని కనుగొనగలరా? 256 యొక్క ప్రధానకారణాంకం

$$256 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$$

ప్రధాన కారణాంకాలను జత చేసినప్పుడు

$$256 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2}$$

$$= (2 \times 2 \times 2 \times 2)^2$$

అందువలన $\sqrt{256} = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$

48 పూర్ణవర్గ సంఖ్యా?

$$48 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times 3$$

ఇక్కడ కారణాంకాలన్నీ జతకాలేదు. అందువలన 48 ఒక పూర్ణవర్గం కాదు

48 యొక్క గుణిజాలలో కనిష్టమైన పూర్ణవర్గ సంఖ్యను కనుగొందాం.

48 ని కనిష్ఠ ఏ సంఖ్యతో గుణించినప్పుడు అది. పూర్ణవర్గమవుతుందో అనే దాన్ని ఎలా కనుగొనడం? 48 యొక్క ప్రధాన కారణాంకాలు జతలుగా చేసి నప్పుడు 3 మాత్రమే జతను పొందలేదని మనకు తెలుస్తుంది. అందువలన మనం దానిని జతచేయడానికి 3 తో గుణించవలసి ఉంటుంది.

2	6400
2	3200
2	1600
2	800
2	400
2	200
2	100
2	50
5	25
	5

అప్పుడు $48 \times 3 = 144$ ఒక పూర్ణవర్గం అవుతుంది.

48ను పూర్ణవర్గంగా చేయడానికి కనిష్ఠం ఏ సంఖ్యతో భాగించాలో చెప్పగలరా?

కారణాంకం 3 జతకాలేదు. అందువలన 48ను 3తో భాగించినప్పుడు

$48 \div 3 = 16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$ మరియు 16 ఒక పూర్ణవర్గం

ఉదాహరణం 4 : 6400 యొక్క వర్గమూలం కనుగొనండి.

సాధన : $6400 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{5 \times 5}$

అందువలన $\sqrt{6400} = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5$

$= 80$

2	90
3	45
3	15
	5

ఉదాహరణం 5 : 90 పూర్ణవర్గమా?

సాధన : $90 = 2 \times 3 \times 3 \times 5$

ప్రధాన కారణాంకాలైన 2 మరియు 5 జతపొందలేదు అందువలన 90 పూర్ణవర్గం కాదు.

90 కి చివరిలో ఒకే సున్నా ఉండటం వలన కూడా అది పూర్ణవర్గం కాదు అని చెప్పవచ్చు.

ఉదాహరణం 6 : 2352 పూర్ణవర్గమా? లేనట్లయితే దాని గుణిజాలలో కనిష్ఠ పూర్ణవర్గ సంఖ్యను కనుగొనండి మరియు దాని వర్గమూలం కనుగొనండి.

2	2352
2	1176
2	588
2	294
3	147
7	49
	7

సాధన : $2352 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times 3 \times \underline{7 \times 7}$

ప్రధాన కారణాంకం 3 జతపొందలేదు అందువలన 2352 పూర్ణవర్గం కాదు.

3 జతను పొందినప్పుడు దత్తసంఖ్య పూర్ణవర్గం అవుతుంది. అందువలన 2352 ను 3తో గుణించండి.

$$2352 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{3 \times 3} \times \underline{7 \times 7}$$

ఇప్పుడు ప్రధాన కారణాంకాలన్నియు జత అయ్యాయి అందువలన $2352 \times 3 = 7056$ అది పూర్ణవర్గం. ఇదే మనకు కావలసిన కనిష్ట పూర్ణవర్గమని గమనించండి.

మరియు $\sqrt{7056} = 2 \times 2 \times 3 \times 7 = 84$

ఉదాహరణం 7 : 9408 ను కనిష్ఠం ఏ సంఖ్యతో భాగించినచో సంఖ్యయొక్క భాగలబ్ధం ఒక పూర్ణవర్గం అవుతుంది? ఆ భాగలబ్ధవి వర్గమూలం కనుగొనండి.

సాధన : మనకు తెలిసినట్లుగా $9408 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times 3 \times \underline{7 \times 7}$
మనం 9408ను 3తో భాగించినప్పుడు.

$9408 \div 3 = 3136 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 7 \times 7$ ఇది పూర్ణవర్గం (ఎందుకం?)

అందువలన, కావలసిన కనిష్ఠ సంఖ్య 3.

మరియు $\sqrt{3136} = 2 \times 2 \times 2 \times 7 = 56$

2	6, 9, 15
3	3, 9, 15
3	1, 3, 5
5	1, 1, 5
	1, 1, 1

ఉదాహరణం 8 : 6, 9 మరియు 15తో భాగింపబడు కనిష్ఠ వర్గ సంఖ్యను కనుగొనండి.

సాధన : దీనిని రెండు దశలలో సాధించవచ్చు. మొదటి మూడు సంఖ్యల చాలా చిన్న సామాన్య గుణిజం (క.సా.గు) ను కనుగొనాలి. ఇప్పుడు కావలసిన వర్గ సంఖ్యను కనుగొనాలి 6, 9 మరియు 15 ల క.సా.గు.

$2 \times 3 \times 3 \times 5 = 90$ అవుతుంది.

90 యొక్క ప్రధాన కారణాంకం

$$90 = 2 \times 3 \times 3 \times 5$$

వీటిలో 2 మరియు 5 జతకాలేదు. అందువలన 90 పూర్ణవర్గం కాదు 90 ను పూర్ణవర్గంగా చేయడానికి 90 యొక్క కారణాంకాలన్నింటిని జతలుగా చేయాలి. అందువలన 2 మరియు 5 సంఖ్యలను జతలుగా చేయాలి.

అందువలన 90 ను 2×5 తో గుణించాలి. అనగా 10. అప్పుడు మనకు కావలసిన వర్గసంఖ్య $90 \times 10 = 900$ అవుతుంది.

అభ్యాసం 5.3

1. కింది సంఖ్యల వర్గమూలాల ఒకట్ల స్థానంలో ఉండవలసిన అంకెలేవి?
   (i) 9801 (ii) 99856
   (iii) 998001 (iv) 657666025
2. ఏ విధమైన లెక్క చేయకుండా ఈ కింది వాటిలో ఏవి పూర్ణవర్గాలు కావు అని తెల్పండి.
   (i) 153 (ii) 257
   (iii) 408 (iv) 441
3. పునరావర్తిత వ్యవకలన విధానం ద్వారా 100 మరియు 169 యొక్క వర్గమూలాలను కనుగొనండి.
4. ప్రధాన కారణాంక విధానంలో ఈ కింది సంఖ్యల వర్గమూలాలను కనుగొనండి.
   (i) 729 (ii) 400 (iii) 1764
   (iv) 4096 (v) 7744 (vi) 9604
   (vii) 5929 (viii) 9216 (ix) 529
   (x) 8100
5. కింది సంఖ్యలను పూర్ణ వర్గ సంఖ్యంగా చేయడానికి కనిష్ఠం ఏ పూర్ణసంఖ్యతో గుణించాలో కనుగొనండి. అలాగే పొందిన వర్గ సంఖ్యయొక్క వర్గమూలాన్ని కూడా కనుగొనండి.
   (i) 252 (ii) 180 (iii) 1008
   (iv) 2028 (v) 1458 (vi) 768
6. కింది ప్రతి సంఖ్యను పూర్ణవర్గ సంఖ్యగా చేయడానికి కనిష్ఠం ఏ పూర్ణసంఖ్యతో భాగించాలో కనుగొనండి. తరువాత పొందిన వర్గ సంఖ్యయొక్క వర్గమూలాన్ని కనుగొనండి.
   (i) 252 (ii) 2925 (iii) 396
   (iv) 2645 (v) 2800 (vi) 1620
7. ఒక పాఠశాలలోని 8వ తరగతి విద్యార్థులు ప్రధానమంత్రి గారి జాతీయ పరిహార నిధికి మొత్తం ₹ 2401 విరాళం ఇచ్చారు. ఆ తరగతిలో ఉన్నవారు మొత్తం విద్యార్థుల సంఖ్యయంత రూపాయిలను ప్రతి విద్యార్థి కూడా విరాళం చేశాడు. అలాగయితే ఆ తరగతిలోనున్న విద్యార్థుల సంఖ్యను కనుగొనండి.
8. ఒక ఉద్యానవనంలో 2025 మొక్కలను ఎన్ని అడ్డవరుసలు ఉన్నాయో అన్ని మొక్కలను ప్రతి అడ్డ వరుసలో ఉండునట్లు నాటాలి. అలాగయితే, అడ్డవరుసల సంఖ్య మరియు ప్రతి అడ్డవరుసలోగల మొక్కల సంఖ్య కనుగొనండి.

9. 4, 9, మరియు 10 తో భాగింపబడు కనిష్ఠ వర్గ సంఖ్యను కనుగొనండి.

10. 8, 15 మరియు 20తో భాగింపబడు కనిష్ఠ వర్గ సంఖ్యను కనుగొనండి.

5.5.4 భాగహార విధానంతో వర్గమూలం కనుగొనడం.

సంఖ్యలు చాలావరకు పెద్దగా ఉన్నప్పుడు ప్రధానకారణాంక విధానంతో వర్గమూలం కనుగొనడం చాలా కష్టం. అందువలన మనం ధీర్ఘ భాగహార విధానాన్ని ఉపయోగిస్తాం.

దానికొరకు వర్గమూలాలలో ఎన్ని అంకెలుంటాయో అనునది మనం నిర్ధారించాలి. కింది పట్టిక చూడండి.

సంఖ్య	వర్గం	
10	100	3 – అంకెల కనిష్ఠ వర్గ సంఖ్య
31	961	3 – అంకెల కనిష్ఠ వర్గ సంఖ్య
32	1024	4 – అంకెల కనిష్ట వర్గ సంఖ్య
99	9801	4 – అంకెల కనిష్ఠ వర్గ సంఖ్య

అందువలన 3 లేదా 4 అంకెలుగల పూర్ణవర్గాల వర్గ మూలాలలోగల అంకెల సంఖ్య గురించి మనం ఏమి చెప్పవచ్చు? పూర్ణ వర్గ సంఖ్యలో 3 లేదా 4 అంకెలు ఉన్నచో, వాటి వర్గ మూలంలో 2 అంకెలుంటాయి.

ఒక పూర్ణవర్గ సంఖ్యలో 5 లేదా 6 అంకెలు ఉన్నచో, వాటి వర్గమూలంలో ఎన్ని అంకెలుంటాయో మీరు చెప్పగలరా?

3 అంకెల కనిష్ఠ పూర్ణవర్గ సంఖ్య 100, ఇది 10 యొక్క వర్గం మరియు గరిష్ఠ పూర్ణవర్గ సంఖ్య 961, ఇది 31 యొక్క వర్గం. 4 అంకెల కనిష్ఠ పూర్ణ వర్గం 1024, 32 యొక్క వర్గం అవుతుంది. గరిష్ఠ పూర్ణవర్గం 9801, ఇది 99 యొక్క వర్గం అవుతుంది.

ఆలోచించండి, చర్చించండి, రాయండి

ఒక పూర్ణ వర్గ సంఖ్యలో n - అంకెలుండి, n సరిసంఖ్య అయినచో, దాని వర్గమూలం $\frac{n}{2}$ అంకెలు కలిగియుంటుంది. n బేసి సంఖ్య అయినచో $\frac{n+1}{2}$ అంకెలు కలిగియుంటుంది అని మనం చెప్పవచ్చా?

ఒక సంఖ్యయొక్క వర్గమూలంలోగల అంకెల సంఖ్యను తెలుసుకోవడం మంచిది.

- 529 యొక్క వర్గమూలాన్ని కనుగొనడానికి కింది దశలు పరిగణించండి. వాటి వర్గమూలంలోగల అంకెల సంఖ్యను మీరు అందాజువేయగలరా?

1వ దశ : ఒకట్ల స్థానం నుండి ప్రారంభించి, ఎడమవైపుకు ప్రయాణించి రెండ్రెండు అంకెల గుంపు చేసి, అంకెల జతల మీద ఒక అడ్డగీత వేయండి. అంకెల సంఖ్య బేసి సంఖ్యలో ఉన్నచో ఒకే అంకె చివరలో మిగులుతుంది. దానికి కూడా అడ్డగీతవేయాలి

అందువలన $\overline{5}\,\overline{29}$

2వ దశ : ఎడమ తుదిలోగల గుంపు సంఖ్యకు (5) సమానం లేదా దానికంటే తక్కువగాగల గరిష్ఠ వర్గంవున్న సంఖ్యను ఆలోచించండి. ($2^2 < 5 < 3^2$) ఇక్కడ ఆ సంఖ్య 2. ఇప్పుడు 5 ను 2తో భాగించి, కుడివైపు చూపినట్లుగా భాగలబ్ధం 2ను పైన రాసి, శేషం 1ని పొందండి.

```
     2
  ┌──────
2 │ ‾5  ‾‾29
  │-4
──┼──────
  │ 1
```

```
     2
  ┌──────
2 │ ‾5  ‾‾29
  │-4
──┼──────
  │ 1 29
```

3వ దశ : తరువాతి అడ్డగీత గీచిన గుంపును కింద శేషానికి కుడి భాగంలో తీసుకోండి. (ఇక్కడ 29ను కింద తీసుకోవాలి) అందువలన ఇప్పుడు క్రొత్త విభాజ్యం 129 అయింది.

```
      2
   ┌──────
 2 │ ‾5  ‾‾29
   │-4
───┼──────
4- │ 1 29
```

4వ దశ : విభాజకం 2ను రెట్టింపు చేయాలి. దాని కుడివైపు తరువాతి అంకెకొరకు ఖాళీ స్థలం వదలాలి

```
      23
   ┌──────
 2 │ ‾5  ‾‾29
   │-4
───┼──────
43 │ 1 29
   │-1 29
───┼──────
   │    0
```

5వ దశ : విభాజకం స్థానంలోగల ఖాళీస్థలాన్ని కిందివిధంగా నింపి, కొనసాగాలి ఈ విధంగా నింపబడే అంకె భాగలబ్ధపు తరువాతి సంఖ్య అవుతుంది. అంతేగాక దానితో భాగలబ్ధాన్ని గుణించినప్పుడు క్రొత్త విభాజ్యానికి సమానం లేదా తక్కువగా ఉండాలి. ఈ విధమైన గరిష్ఠ అంకెతో ఖాళీ స్థలాన్ని నింపాలి

ఇక్కడ $42 \times 2 = 84$

$43 \times 3 = 129$ అవుతుంది. అందువలన 3ను క్రొత్త అంకెగా ఎన్నుకోవాలి. శేషం పొందాలి.

6వ దశ : దీనినుండి శేషం 0 అవుతుంది మరియు ఇచ్చిన సంఖ్యలో ఇంకా అంకెలు మిగులవు. అందువలన $\sqrt{529} = 23$

- ఇప్పుడు $\sqrt{4096}$ పరిగణించండి.

```
     6
  ┌──────
6 │ ‾‾40  ‾‾96
  │-36
──┼──────
  │ 4
```

1వ దశ : ఒకట్ల స్థానం నుండి ప్రారంభించి రెండ్రెండు అంకెల గుంపు చేసి, ప్రతి అంకెల జతల మీద ఒక అడ్డగీత వేయండి $\left(\overline{40}\,\overline{96}\right)$

$$\begin{array}{r|l} & \;\;6 \\ \hline 6 & \overline{40}\;\overline{96} \\ & -36 \\ \hline & \;\;496 \end{array}$$

2వ దశ : ఎడమ తుదిలోగల గుంపుయొక్క సంఖ్యకు సమాన లేదా దానికంటే తక్కువగానున్న గరిష్ట వర్గంగల సంఖ్యను కనుగొనండి ($6^2 < 40 < 7^2$) ఈ సంఖ్య (6) విభాజకమవుతుంది. ఎడమతుదిలోగల గుంపు సంఖ్య (40) విభాజ్యం అవుతుంది. ఈ విభాజ్యాన్ని విభాజకంతో భాగించి, శేషాన్ని పొందండి. ఈ ఉదాహరణలో శేషం 4.

$$\begin{array}{r|l} & \;\;6 \\ \hline 6 & \overline{40}\;\overline{96} \\ & -36 \\ \hline 12_ & \;\;496 \end{array}$$

3వ దశ : తరువాత గీతగీచిన గుంపును (అనగా 96) కింద శేషానికి కుడివైపుకు తీసుకోవాలి.

ఇప్పుడు క్రొత్త విభాజ్యం 496 అయింది.

4వ దశ : విభాజకాన్ని రెట్టింపు చేయాలి దాని కుడివైపు తరువాత అంకెకొరకు ఖాళీ స్థలం వదిలి రాయాలి.

$$\begin{array}{r|l} & \;\;6\;4 \\ \hline 6 & \overline{40}\;\overline{96} \\ & -36 \\ \hline 12\underline{4} & \;\;496 \\ & -496 \\ \hline & \;\;\;0 \end{array}$$

5వ దశ : ఆ ఖాళీ స్థలం మరియు భాగలబ్ధపు తరువాత అంకెను ఒకే పెద్ద అంకెతో నింపాలి. తరువాతి అంకె ఎలావుండాలంటే, ఖాళీ స్థలంలో నింపిన తరువాత లభించు సంఖ్యకు, భాగలబ్ధంలోగల తరువాత అంకెతో గుణించినప్పుడు క్రొత్త విభాజ్యానికి సమానం లేదా దానికంటే తక్కువ ఉండాలి.

ఇక్కడ $124 \times 4 = 496$ అవుతుంది

అందువలన భాగలబ్ధపు క్రొత్త అంకె 4

6వ దశ : దీనివలన శేషం 0 వస్తుంది. తరువాతి గుంపు ఉండదు.

అందువలన $\sqrt{4096} = 64$

సంఖ్యను అందాజువేయడం

పూర్ణవర్గ సంఖ్య యొక్క వర్గమూలంలోగల అంకెల సంఖ్య తెలుసుకోవడానికి మనం అడ్డగీతను ఉపయోగిస్తాం.

$\sqrt{5\;\overline{29}} = 23$ మరియు $\sqrt{\overline{40}\;\overline{96}} = 64$

529 మరియు 4096, ఈ రెండు సంఖ్యలలో రెండు అడ్డగీతలున్నాయి. వాటి వర్గమూలాలలోగల అంకెల సంఖ్య 2 అవుతుంది. అదేవిధంగా 14400 యొక్క వర్గమూలంలోగల అంకెల సంఖ్యను మీరు చెప్పగలరా?

ఈ సంఖ్య మీద అడ్డగీతలు వేద్దాం $\overline{1}\;\overline{44}\;\overline{00}$ ఇక్కడ 3 అడ్డగీతలు ఉండటం వలన వర్గమూలంలో 3 అంకెలు ఉంటాయి.

వీటిని ప్రయత్నించండి.

వర్గమూలాలను కనుగొనకుండానే, కింది సంఖ్యల వర్గమూలాలలో ఎన్ని అంకెలుంటాయో కనుగొనండి.

(i) 25600 (ii) 100000000

(iii) 36864

ఉదాహరణం 9 : (i) 729 (ii) 1296 వీటి వర్గమూలాలను కనుగొనండి.

సాధన : (i)

	27
6	$\overline{7}\ \overline{29}$
	−4
47	329
	−329
	0

(ii)

	36
6	$\overline{12}\ \overline{29}$
	−9
66	3 96
	−3 96
	0

అందువలన $\sqrt{729} = 27$ అందువలన $\sqrt{1296} = 36$

ఉదాహరణం 10 : 5609ను పూర్ణవర్గముగా చేయడానికి ఈ సంఖ్యలో తీసేయవలసిన కనిష్ఠ సంఖ్యను కనుగొని, పూర్ణవర్గ సంఖ్యయొక్క వర్గమూలమును కనుగొనండి.

సాధన : $\sqrt{5607}$ ను దీర్ఘ భాగహార విధానంతో కనుగొనడానికి ప్రయత్నిద్దాం మన శేషం 131ను పొందుతాం.

	74
7	$\overline{56}\ \overline{07}$
	−49
144	707
	−576
	131

74^2, 5607 కంటే 131 తక్కువ అయిందని దీనివలన తెలుస్తుంది.

దీని అర్థం ఏమనగా, ఇచ్చిన సంఖ్యలో శేషాన్ని తీసివేసినప్పుడు అది పూర్ణవర్గం అవుతుంది.

అందువలన మనకు కావలసిన పూర్ణవర్గం 5607 − 131 = 5476 మరియు $\sqrt{5476} = 74$

ఉదాహరణం 11 : 4 అంకెల గరిష్ఠ పూర్ణవర్గాన్ని కనుగొనండి

సాధన : 4 అంకెల గరిష్ఠ సంఖ్య = 9999

	99
9	$\overline{99}\ \overline{99}$
	−81
189	1899
	−1701
	198

$\sqrt{9999}$ ను దీర్ఘ భాగహార విధానంలో కనుగొందాం. శేషం 198 అయింది.

99^2, 9999 కంటే 198 తక్కువ అయిందని తెలుస్తుంది. దీని అర్థం ఏమనగా, ఇచ్చిన సంఖ్యలో శేషాన్ని తీసివేసినప్పుడు మనం పూర్ణవర్గాన్ని పొందుతాం.

అందువలన మనకు కావలసిన పూర్ణవర్గం 9999 − 198 = 9801 మరియు $\sqrt{9801} = 99$

ఉదాహరణం 12 : 1300ను పూర్ణవర్గం సంఖ్యగా చేయడానికి దానికి కావలసిన కనిష్ఠ సంఖ్యను కనుగొనండి. పూర్ణ వర్గపు వర్గమూలాన్ని కనుగొనండి.

సాధన : $\sqrt{1300}$ ను మనం దీర్ఘ భాగహార విధానంలో కనుగొందాం. శేషం 4 వస్తుంది.

$$\begin{array}{r|l} & 3 \\ \hline 3 & \overline{13}\,\overline{00} \\ & -9 \\ \hline 66 & 400 \\ & -396 \\ \hline & 4 \end{array}$$

$36^2 < 1300$ అని తెలుస్తున్నది తరువాత పూర్ణ వర్గ సంఖ్య

$37^2 = 1369$ దీనివలన 1300 కు ఇవ్వవలసిన సంఖ్య

$$37^2 - 1300 = 1369 - 1300 = 69$$

5.6 దశాంశ సంఖ్యల వర్గమూలాలు

$\sqrt{17.64}$ ను పరిగణించండి

$$\begin{array}{r|l} & 4 \\ \hline 4 & \overline{17}.\overline{64} \\ & -16 \\ \hline & 1 \end{array}$$

1వ దశ : దశాంశ సంఖ్యల వర్గమూలాన్ని కనుగొనేటప్పుడు పూర్ణసంఖ్యాభాగం మీద ఎప్పటిలాగా అడ్డగీతలు వేస్తాం మరియు దశాంశ భాగంలో (64) ప్రారంభ దశాంశ స్థానం నుండి ప్రతి అంకెల జతకు అడ్డగీత వేయాలి

మనకు $\overline{17}.\overline{64}$ లభిస్తుంది.

$$\begin{array}{r|l} & 4 \\ \hline 4 & \overline{17}.\overline{64} \\ & -16 \\ \hline 8_ & 1\,64 \end{array}$$

2వ దశ : ఇప్పుడు ఇదేవిధంగా కొనసాగండి. సంఖ్య 17 మీద ఎడమవైపు అడ్డగీత ఉంది మరియు $4^2 < 17 < 5^2$ ఈ సంఖ్యను విభాజకం మరియు ఎడమవైపు అడ్డగీత కింద ఉన్న సంఖ్యను విభాజ్యంగా తీసుకోండి. అనగా 17 భాగించండి మరియు శేషం పొందండి.

$$\begin{array}{r|l} & 4 \\ \hline 4 & \overline{17}.\overline{64} \\ & -16 \\ \hline 82 & 1\,64 \end{array}$$

3వ దశ : శేషం 1 వస్తుంది. శేషానికి కుడివైపు తరువాత అడ్డగీత కింద ఉన్న సంఖ్య (64)ను రాయండి. అప్పుడు 164 అవుతుంది.

4వ దశ : విభాజకాన్ని రెట్టింపు చేసి, కుడివైపు ఖాళీ స్థలం వదిలి రాయండి. 64 దశాంశ భాగంలోనున్న సంఖ్య. అందువలన భాగలబ్ధం స్థానంలో బిందువు ఉంచాలి.

5వ దశ : $82 \times 2 = 164$ అని తెలిసింది.

అందువలన క్రొత్త అంకె 2 అవుతుంది. భాగించి, శేషం పొందండి.

$$\begin{array}{r|l} & 4.2 \\ \hline 4 & \overline{17}.\overline{64} \\ & -16 \\ \hline 82 & 164 \\ & -164 \\ \hline & 0 \end{array}$$

6వ దశ : శేషం 0 అవుతుంది మరియు ఇంకా అడ్డగీత మిగుల లేదు. అందువలన $\sqrt{17.64} = 4.2$

ఉదాహరణం 13 : 12.25 యొక్క వర్గమూలం కనుగొనండి.

సాధన :

```
      3.5
   ┌──────
 3 │ 12.25
   │ -9
───┼──────
65 │  325
   │ -325
───┼──────
   │   0
```

అందువలన $\sqrt{12.25} = 3.5$

అడ్డగీత వేయు విధానం

176.341 ను పరిగణించండి. పూర్ణ సంఖ్యా భాగం మరియు దశాంశ భాగానికి అడ్డగీతలు వేయండి. దశాంశ భాగానికి వేయు అడ్డగీత, పూర్ణసంఖ్యా భాగానికి వేయు అడ్డగీత కంటే ఏ విధంగా వేరె అయింది? 176ను గమనించండి. దశాంశానికి దగ్గరగాగల ఒకట్ల స్థానం నుండి మనం ప్రారంభిస్తాం. ఎడమవైపు ప్రయాణిస్తాం మొదటి అడ్డగీత 76 మీద మరియు రెండవ అడ్డగీత 1 మీద వస్తుంది. 341 లో మనం దశాంశం నుండి ప్రారంభించి, కుడివైపు ప్రయాణిస్తాం. మొదటి అడ్డగీత 34 మీద మరియు 1 తరువాత 0 ఉంచి, ఆ రెండింటి మీద రెండవ అడ్డగీత వేయాలి మరియు. $\overline{34}\ \overline{10}$ గా చేయాలి

ఉదాహరణం 14 : ఒక చతురస్రాకార స్థలం వైశాల్యం 2304 చ.మీ. ఉంది ఆ చతురస్రాకారపు స్థలం యొక్క భుజాన్ని కనుగొనండి.

```
      48
   ┌──────
 4 │ 2304
   │ -16
───┼──────
88 │  704
   │ -704
───┼──────
   │   0
```

సాధన : చతురస్రాకారపు స్థలం వైశాల్యం = 2304 చ.మీ.

అందువలన చతురస్రాకారపు స్థలం భుజం = $\sqrt{2304}$ మీ.

$\sqrt{2304} = 48$మీ.

అందువలన, చతురస్రాకారపు స్థలం భుజం 48 మీ. అవుతుంది.

ఉదాహరణం 15 : ఒక పాఠశాలలో 2401 మంది విద్యార్థులున్నారు. ఆ విద్యార్థులు అడ్డవరుస మరియు నిలువు వరుసలలో నిలబెట్టాలని వ్యాయామ ఉపాధ్యాయుడు అనుకొన్నాడు అడ్డవరుసల సంఖ్య, నిలువు వరుసల సంఖ్య సమానంగా ఉండునట్లు నిలబెట్టాల్సివుంది. అలాగయితే, అడ్డవరుసల సంఖ్య కనుగొనండి.

సాధన : అడ్డవరుసల సంఖ్య x అనుకోండి

అందువలన నిలువు వరుసల సంఖ్య $= x$

అప్పుడు విద్యార్థుల సంఖ్య $= x \times x = x^2$

దీనివలన $x^2 = 2401,\ x = \sqrt{2401} = 49$

అడ్డవరుసల సంఖ్య $= 49$

```
      49
   ┌──────
 4 │ 2401
   │ -16
───┼──────
89 │  801
   │ -801
───┼──────
   │   0
```

5.7 వర్గమూలాన్ని అందాజువేయడం

కింది సందర్భాలను పరిగణించండి

1. దేవేశి దగ్గర 125 చ.సెం.మీ. వైశాల్యంగల చతురస్రాకారపు బట్ట ఉంది. దీనిని ఆమె 15 సెం.మీ. భుజంగల చేతి వస్త్రం చేయవచ్చు. దీనిని తెలుసుకోవడానికి ఇష్టపడింది. అది సాధ్యం కానిచో ఈ బట్టలో గరిష్ఠంగా ఎన్ని భుజాలుగల చేతివస్త్రం (హ్యాండ్ కర్చీఫ్) చేయవచ్చు.

2. మీనా మరియు శోభా ఒక ఆట ఆడినారు. ఒకరు సంఖ్యను చెప్పారు. మరొకరు దాని వర్గ మూలం చెప్పారు. మీనా మొదట ప్రారంభించింది. ఆమె 25 చెప్పినప్పుడు శోభా త్వరగా 5 అని జవాబిచ్చింది. అప్పుడు శోభా 81 చెప్పింది. మీనా 9 అని జవాబిచ్చింది. ఆదేవిధంగా కొనసాగింది. ఒకదశలో మీనా సంఖ్య 250ను చెప్పింది. శోభా దానికి జవాబివ్వలేదు. అప్పుడు మీనా ఒక సంఖ్యయొక్క వర్గం 250 కు సమీపం గల సంఖ్యనైనా చెప్పు అని శోభాకు చెప్పింది.

ఈ సందర్భాలన్నింటిలో మనం వర్గమూలాన్ని అందాజు వేయవలసిన అవసరం ఉంది.

మనకు తెలిసినట్లుగా $100 < 250 < 400$ మరియు $\sqrt{100} = 10$, $\sqrt{400} = 20$

అందువలన $10 < \sqrt{250} < 20$

అయితే, మనం వర్గసంఖ్యకు ఇంకా దగ్గర లేము.

$15^2 = 225$ మరియు $16^2 = 256$ అని మనకు తెలుసు

అందువలన $15 < \sqrt{250} < 16$ మరియు 250 సంఖ్య 225 కంటే 256 కు చాలా సమీపంలో ఉంది.

అందువలన $\sqrt{250}$ సుమారుగా 16 అవుతుంది.

వీటిని ప్రయత్నించండి.

1. కింది విలువలను సమీపంలో పూర్ణ సంఖ్యలను అందాజు చేయండి.

   (i) $\sqrt{80}$ (ii) $\sqrt{1000}$

   (iii) $\sqrt{350}$ (iv) $\sqrt{500}$

అభ్యాసం 5.3

1. కింది సంఖ్యల వర్గమూలాలను భాగహార విధానంలో కనుగొనండి.

   (i) 2304 (ii) 4489 (iii) 3481

   (iv) 529 (v) 3249 (vi) 1369

   (vii) 5776 (viii) 7921 (ix) 576

   (x) 1024 (xi) 3136 (xii) 900

2. కింది ప్రతి సంఖ్యయొక్క వర్గమూలంలోగల అంకెల సంఖ్యను కనుగొనండి (ఏ విధమైన లెక్క చేయకుండా)

   (i) 64 (ii) 144 (iii) 4489

   (iv) 27225 (v) 390625

3. కింది దశాంశ సంఖ్యల వర్గమూలాలను కనుగొనండి.

   (i) 2.56 (ii) 7.29 (iii) 51.84

   (iv) 42.25 (v) 31.36

4. కింది ప్రతి సంఖ్యను ఒక పూర్ణవర్గ సంఖ్యగా చేయడానికి వాటినుండి తీసివేయవలసిన కనిష్ఠ సంఖ్యను కనుగొనండి. ఆ విధంగా పొందిన పూర్ణవర్గపు వర్గమూలాలను కనుగొనండి.

   (i) 402 (ii) 1989 (iii) 3250

   (iv) 825 (v) 4000

5. కింది ప్రతి సంఖ్యను ఒక పూర్ణవర్గ సంఖ్యగా చేయడానికి వాటిని ఇవ్వవలసిన కనిష్ఠ సంఖ్యను కనుగొనండి. ఆవిధంగా పొందిన పూర్ణవర్గపు వర్గమూలాలను కనుగొనండి.

   (i) 525 (ii) 1750 (iii) 252

   (iv) 1825 (v) 6412

6. ఒక చతురస్ర వైశాల్యం 441 చ.మీ. ఉన్నచో బుజం పొడవును కనుగొనండి..

7. ABC లంబకోణ త్రిభుజంలో $\underline{|B} = 90^\circ$

   (a) AB = 6 సెం.మీ., BC = 8 సెం.మీ. ఉన్నచో AC కనుగొనండి.

   (b) AC = 13 సెం.మీ., BC = 5 సెం.మీ. AB కనుగొనండి.

8. ఒక తోటమాలి దగ్గర 1000 మొక్కలున్నాయి. వాటిని అడ్డవరుసలు మరియు నిలువు వరుసలు సమానంగా ఉండునట్లు నాటాలనుకొన్నాడు. ఈ విధంగా చేయడానికి అతనికి ఇంకా కనిష్టంగా ఎన్ని మొక్కలు కావాలి

9. ఒక పాఠశాలలో 500 మంది పిల్లలున్నారు. వారు కవాతుచేయడానికి అడ్డ వరుసల సంఖ్యకు నిలువ వరుసల సంఖ్య సమానంగా ఉండునట్లు నిలబడాల్సి ఉంది. అలాగే నిలబడిన తరువాత ఎంత మంది పిల్లలు ఈ వ్యవస్థకు బయట మిగులుతారు?

సారాంశం

1. m మరియు n లు రెండు సహజ సంఖ్యలైవుండి, m ను n^2 అని రాయవలసినచో m ఒక వర్గ సంఖ్య అవుతుంది.
2. వర్గ సంఖ్యలన్నియు ఒకట్ల స్థానంలో 0, 1, 4, 5, 6 లేదా 9 ఉంటాయి.
3. వర్గ సంఖ్యల అంత్యంలో సున్నాలు సరిసంఖ్యలో ఉంటాయి.
4. వర్గ మూలం కనుగొనడం, వర్గం కనుగొను విధానానికి విలోమం అవుతుంది.
5. ఒక పూర్ణవర్గ సంఖ్యకు రెండు పూర్ణసంఖ్య వర్గ మూలాలుంటాయి ధనాత్మక వర్గమూలాన్ని $\sqrt{\ }$ చిహ్నంతో గుర్తించబడుతుంది. ఉదాహరణకు $3^2 = 9$ దీనినుండి $\sqrt{9} = 3$.

♦♦♦♦

బీజీయ సమాసాలు మరియు సర్వ సమీకరణాలు

అధ్యాయం

6

6.1 బీజీయ సమాసాలు అనగానేమి

మనం ఇదివరకే వెనుకటి తరగతులలో బీజీయ సమాసాల గురించి తెలుసుకుని ఉన్నాము. బీజీయ సమాసాలకు ఉదాహరణ

$x + 3, 2y - 5, 3x^2, 4xy + 7$ మొదలగునవి

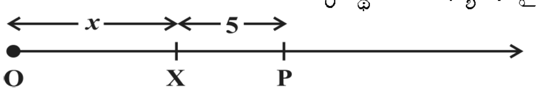
చరరాశులు, స్థిరరాశులను ఉపయోగించి బీజీయ సమాసాలు రాయడం తెలుసుకొన్నందున మీరు మరిన్ని సమాసాలను రాయవచ్చు. బీజీయ సమాసము $2y - 5$ ని చరరాశి y మరియు స్థిర రాశులు 2 మరియు 5లు ఉపయోగించి రాయబడింది. x, y చరరాశులు, 4 మరియు 7 లు స్థిరరాశులు గల రెండు పదాలతో $4xy + 7$ ను రాయబడింది.

$2y - 5$ అను బీజీయ సమాసంలో y విలువ ఏమైనా అయివుండవచ్చు. అది $5, -3, 0, \frac{5}{2}, \frac{-7}{3}$....... ఇలాంటి అసంఖ్యాక విలువలలో ఏదైనా అయి ఉండవచ్చు. చరరాశి y కి ఇచ్చిన విలువల ఆధారంగా బీజీయ సమాసం విలువ మారుతుంది.

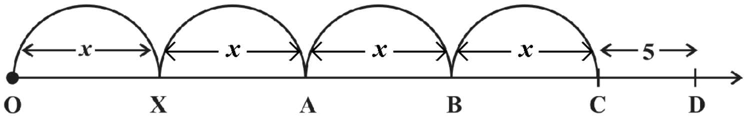
$y = 2$ అయినప్పుడు $2y - 5 = 2(2) - 5 = -1$; $y = 0$ అయినప్పుడు $2y - 5 = 2 \times 0 - 5 = -5$. ఇదేవిధంగా y యొక్క వేర్వేరు విలువలకు బీజీయ సమాసం $2y - 5$ యొక్క విలువను కనుగొనండి.

బీజీయ సమాసం మరియు సంఖ్యారేఖ :

బీజీయ సమాసం $x + 5$ ను పరిగణించండి. చరరాశి x యొక్క స్థానం సంఖ్యారేఖ పై X గా గుర్తించండి.



X బిందువు సంఖ్యారేఖపై ఎక్కడ గుర్తించినా, దీని కుడివైపు 5 ప్రమాణాల దూరంలో P బిందువు $x + 5$ యొక్క విలువను సూచిస్తుంది. ఇదే విధంగా $x - 4$ అనునది X యొక్క ఎడమవైపు 4 ప్రమాణాల దూరంలో ఉంటుంది. $4x$ మరియు $4x + 5$ స్థానం ఎక్కై ఉండవచ్చు?



ఇక్కడ $4x$ యొక్క స్థానము C బిందువు అవుతుంది. మూల బిందువు నుండి C బిందువుకుగల అంతరం మూల బిందువు నుండి X బిందువుకుగల అంతరం యొక్క నాలుగింతలు. $4x + 5$ యొక్క స్థానం D అవుతుంది. C బిందువు నుండి కుడివైపుకు 5 ప్రమాణాల దూరంలో ఉంటుంది.

వీటిని ప్రయత్నించండి.

(1) ఒక చరరాశిగల బీజీయ సమాసాలకు 5 ఉదాహరణలు రెండు చరరాశులుగల బీజీయ సమాసాలకు 5 ఉదాహరణలు రాయండి.

(2) $x, x-4, 2x+1, 3x-2$ లను సంఖ్యారేఖ పై చూపండి.

6.2 బీజీయ పదాలు, కారణాంకాలు మరియు సహగుణకాలు

బీజీయ సమాసం $4x + 5$ ను తీసుకోండి ఈ బీజీయ సమాసం $4x$ మరియు 5 అను రెండు పదాలతో ఏర్పడింది. బీజీయ పదాల మొత్తము బీజీయ సమాసాన్ని నిర్మించవచ్చు. కారణాంకాల గుణలబ్ధం నుండి బీజీయ పదాలు ఏర్పడ్డాయి. $4x$ అను పదము 4 మరియు x అను వీటి రెండు కారణాంకాల గుణలబ్ధం 5 అను అపదం కేవలం ఒక కారణాంకం 5తో ఏర్పడింది.

వీటిని ప్రయత్నించండి.

$x^2y^2 - 10x^2y + 5xy^2 - 20$. బీజీయ సమాసంలో ప్రతి పదం యొక్క సంఖ్యా సహగుణకాలను గుర్తించండి.

$7xy - 5x$ బీజీయ సమాసం $7xy$ మరియు $-5x$ అను పదాలను కలిగి ఉన్నది. $7xy$ అనుపదం 7, x మరియు y అను కారణాంకాల గుణలబ్ధం. ఒక పదంలోని సంఖ్యా కారణాంకాలను **సంఖ్యాసహగుణకం** లేదా సరళంగా **సహగుణకం** అంటారు. బీజీయపదం $7xy$ లో సంఖ్యా సహగుణకం 7 మరియు $-5x$ లో సంఖ్యాసహగుణకం -5.

6.3 ఏకపదులు, ద్విపదులు మరియు బహుపదులు :

సమాసంలో ఒకే ఒక పదముంటే **'ఏకపది'** అని, రెండు పదాలుంటే **'ద్విపది'** అని మూడు పదాలుంటే త్రిపది అని అంటారు. అది ఇలా కొనసాగుతుంది. సామాన్యంగా **శూన్యంకాని సహగుణకం కల్గియున్న, ఋణాత్మకంకాని, పూర్ణసంఖ్య ఘాతసూచిక కల్గియున్న చరరాశులతో కూడిన ఒకటి లేదా ఎక్కువ పదాలతో ఏర్పడిన బీజీయ సమాసాన్ని బహుపది అంటారు.** ఒక బహుపది లేదా ఒకటి కంటే ఎక్కువ ఎన్నిపదాలనైనా కలిగి ఉండవచ్చు.

ఏకపదులకు ఉదాహరణ : $4x^2, 3xy, -7z, 5xy^2, 10y, -9, 82mnp$. మొదలగునవి.

ద్విపదులకు ఉదాహరణ : $a + b,\ 4l + 5m,\ a + 4, 5 -3xy, z^2 - 4y^2$. మొదలగునవి.

త్రిపదులకు ఉదాహరణ: $a + b + c, 2x + 3y - 5, x^2y - xy^2 + y^2$. మొదలగునవి.

బహుపదులకు ఉదాహరణ: $a + b + c + d,$ 3xy, 7xyz – 10, $2x + 3y + 7z$. మొదలగునవి.

వీటిని ప్రయత్నించండి.

(1) కింది బహు పదులను ఏకపది, ద్విపది, త్రిపదులుగా వర్గీకరించండి.
$-z+5,\ x+y+z,\ y+z+100,\ ab-ac,\ 17$

(2) నిర్మించండి.

(a) x చరరాశి మాత్రమే కలిగి ఉన్న 3 ద్విపదులు

(b) x మరియు y లు చరరాశులుగాగల 3 ద్విపదులు

(c) x మరియు y లు చరరాశులుగాగల 3 ఏకపదులు

(d) 4 లేదా ఎక్కువ పదాలతో కూడిన 2 బహుళపదులు

6.4 సజాతి మరియు విజాతి పదాలు :

కింది పదాలను గమనించండి.

$7x,\ 14x,\ -13x,\ 5x^2,\ 7y,\ 7xy,\ -9y^2,\ -9x^2,\ -5yx$ వీటిలో :

(i) $7x, 14x, -13x$ లు సజాతి పదాలు.

(ii) $5x^2$ మరియు $-9x^2$ లు సజాతి పదాలు.

(iii) $7xy$ మరియు $-5yx$ లు సజాతి పదాలు.

$7x$ మరియు $7y$ ఎందుకు సజాతి పదాలు కాదు?

$7x$ మరియు $7xy$ లు ఎందుకు సజాతి పదాలు కాదు?

$7x$ మరియు $5x^2$ ఎందుకు సజాతి పదాలు కాదు?

వీటిని ప్రయత్నించండి.

(1) కింది వాటికి రెండేసి సజాతి పదాలను రాయండి.

(i) $7xy$ (ii) $4mn^2$ (iii) $2l$

6.5 బీజీయ సమాసాల సంకలనం మరియు వ్యవకలనం :

వెనుకటి తరగతులలో మనం బీజీయ సమాసాలను కూడటం మరియు తీసివేయడం గురించి నేర్చుకున్నాము. ఉదాహరణకు, $7x^2 - 4x + 5$ మరియు $9x - 10$ లను కిందివిధంగా సంకలనం చేస్తాం.

$$\begin{array}{r} 7x^2 - 4x + 5 \\ +\quad\quad 9x - 10 \\ \hline 7x^2 + 5x - 5 \end{array}$$

ఇక్కడ మనం సంకలనం చేయవలసిన ప్రతి బీజీయ సమాసాన్ని ప్రత్యేక అడ్డ వరుసలలో రాశాము అనుటను గమనించండి.ఈ విధంగా చేయునప్పుడు సజాతి పదాలు ఒకదాని క్రింద ఒకటిగా ఉండేటట్లు రాసి వాటిని కూడాము కావున $5 + (-10) = 5 - 10 = -5$. ఇదేవిధంగా $-4x + 9x = (-4 + 9)x = 5x$. మనం మరికొన్ని ఉదాహరణలను చూద్దాం.

ఉదాహరణం 1 : $7xy + 5yz - 3zx$, $4yz + 9zx - 4y$, $-3xz + 5x - 2xy$ లను కూడండి.

సాధన : మూడు బీజీయ సమాసాల సజాతి పదాలను ఒకదాని కింద ఒకటిగా వచ్చేటట్లు ప్రత్యేక అడ్డ వరుసలలో రాసినప్పుడు,

$$\begin{array}{rrrrr} 7xy & +5yz & -3zx & & \\ + & 4yz & +9zx & & -4y \\ +-2xy & & -3zx & +5x & \\ \hline 5xy & +9yz & +3zx & +5x & -4y \end{array}$$

(xz మరియు zx లు ఒకటే అయ్యాయి)

ఇలా బీజీయ సమాసాల మొత్తము $5xy + 9yz + 3zx + 5x - 4y$. రెండవ బీజీయ సమాసంలో $-4y$ మరియు మూడవ బీజీయ సమాసంలో $5x$ ఎటువంటి సజాతి పదాలు లేనందువలన వాటిని అలాగే నిలుపుకోవడమైనది.

ఉదాహరణం 2 : $5x^2 - 4y^2 + 6y - 3$ని $7x^2 - 4xy + 8y^2 + 5x - 3y$ నుండి తీసివేయండి.

సాధన :

$$\begin{array}{llllll} 7x^2 & -4xy & +8y^2 & +5x & -3y & \\ 5x^2 & & -4y^2 & & +6y & -3 \\ (-) & & (+) & & (-) & (+) \\ \hline 2x^2 & -4xy & +12y^2 & +5x & -9y & +3 \end{array}$$

ఒక సంఖ్యను తీసివేయడం మరియు దాని, సంకలన విలోమాన్ని కూడటం. రెండూ ఒకటే అనునది గమనించాలి. అందవలన –3ను తీసివేయడం +3ను కూడటం రెండూ ఒకటే. అదేవిధంగా $6y$ ను తీసివేయడం $-6y$ ని కలపడం ఒకటే అవుతుంది $-4y^2$ ను తీసివేయడం $4y^2$ ను కూడడానికి సమానం మరియు ఇదే విధంగా కొనసాగుతుంది. రెండవ వరుసలో ప్రతి పదం కింద మూడవ వరుసలో మారిన గుర్తులను రాయడం మనం ఏ మూల క్రియ చేయాలి అనుటకు సహాయ పడుతుంది.

అభ్యాసం 6.1

1. కింది ప్రతి బీజీయ సమాసంలో బీజపదాలు మరియు వాటి సంఖ్యా సహగుణకాలను గుర్తించండి.

   (i) $5xyz^2 - 3zy$ (ii) $1 + x + x^2$ (iii) $4x^2y^2 - 4x^2y^2z^2 + z^2$

   (iv) $3 - pq + qr - rp$ (v) $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} - xy$ (vi) $0.3a - 0.6ab + 0.5b$

2. కింది బహుపదులను ఏకపది, ద్విపది, త్రిపదులుగా వర్గీకరించండి ఈ మూడు గుంపులకు చేరని బహుపదులు ఏవి?

$x + y$, 1000, $x + x^2 + x^3 + x^4$, $7 + y + 5x$, $2y - 3y^2$, $2y - 3y^2 + 4y^3$, $5x - 4y + 3xy$, $4z - 15z^2$, $ab + bc + cd + da$, pqr, $p^2q + pq^2$, $2p + 2q$

3. కింది వాటిని కూడండి.

(i) $ab - bc$, $bc - ca$, $ca - ab$

(ii) $a - b + ab$, $b - c + bc$, $c - a + ac$

(iii) $2p^2q^2 - 3pq + 4$, $5 + 7pq - 3p^2q^2$

(iv) $l^2 + m^2$, $m^2 + n^2$, $n^2 + l^2$, $2lm + 2mn + 2nl$

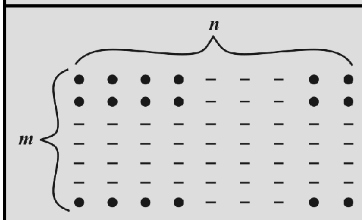
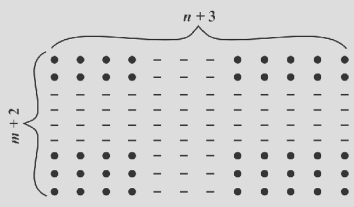
4. (a) $4a - 7ab + 3b + 12$ ని $12a - 9ab + 5b - 3$ నుండి తీసివేయండి.

(b) $3xy + 5yz - 7zx$ ని $5xy - 2yz - 2zx + 10xyz$ నుండి తీసివేయండి.

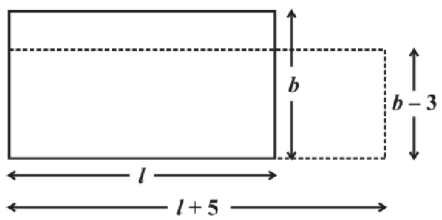
(c) $4p^2q - 3pq + 5pq^2 - 8p + 7q - 10$ను $18 - 3p - 11q + 5pq - 2pq^2 + 5p^2q$ నుండి తీసివేయండి.

6.6 బీజీయ సమాసాల గుణకారం; పరిచయం :

(i) కింది చుక్కల మాదరిని (అమరిక) చూడండి.

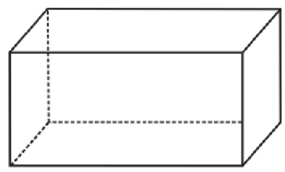
చుక్కల అమరిక / మాదరి	మొత్తం చుక్కల సంఖ్య	వివరణ
	4×9	-
	5×7	-
	$m \times n$	చుక్కల సంఖ్యను కనుగొనడానికి మనం అడ్డ వరుసల సంఖ్యను తెలిపెడి బీజీయ సమాసాన్ని, నిలువు వరుస సంఖ్యను తెలిపెడి బీజీయ సమాసంతో గుణించాలి.
	$(m + 2) \times (n + 3)$	ఇందులో అడ్డవరుసలోని సంఖ్యకు 2 వరుసలు కలుపబడినవి $m+2$. మరియు నిలువు వరుసలోని సంఖ్యలో 3 వరుసలు కలుపబడినవి అనగా $n+3$.

(ii) మీరిప్పుడు ఇదేవిధమైన రెండు బీజీయ సమాసాలను గుణించు వేరే సందర్భాలను ఆలోచించవచ్చా? అమీనా లేచి నిలబడి, 'మనం దీర్ఘ చతురస్రం వైశాల్యం గురించి ఆలోచించవచ్చు' దీర్ఘ చతురస్రం వైశాల్యం $l \times b$, ఇక్కడ l – పొడవు, b–వెడల్పు. దీర్ఘ చతురస్రం పొడవును 5 యూనిట్లు పెంచినచో $(l + 5)$ యూనిట్లు మరియు వెడల్పును 3 యూనిట్లు తగ్గించి $(b - 3)$ యూనిట్లు. అప్పుడు దాని వైశాల్యం $(l + 5) \times (b - 3)$ చదరపు యూనిట్లు



దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యాన్ని కనుగొనడానికి మనం $l \times b$ లేదా $(l + 5)\times(b - 3)$ లాంటి బీజీయ సమాసాలను గుణించాలి.

(iii) ఘనపరిమాణం గురించి ఆలోచించగలరా? దీర్ఘఘనం యొక్క ఘన పరిమాణాన్ని దాని పొడవు, వెడల్పు, ఎత్తుల గుణలబ్ధం అవుతుంది.



(iv) మనం వస్తువులను ఖరీదు చేసేటప్పుడు గుణకారాలను చేస్తామని సరితా సూచించింది.

ఉదాహరణకు ;

ఒక డజను అరటి పండ్ల వెల $= ₹\ p$

పాఠశాల పిక్నిక్‌కొరకు కావలసిన అరటిపండ్లు $= z$ డజన్‌లు

అప్పుడు మనం చెల్లించాల్సిన డబ్బు $= ₹\ p \times z$

ఒకవేళ అరటి పండ్ల వెలను ₹ 2 తక్కువై పండ్లు 4 డజన్‌లు తక్కువ కావాలంటే అప్పుడు,

ప్రతి డజన్ అరటిపళ్ళ వెల $= ₹\,(p - 2)$

మరియు కావలసిన అరటిపండ్లు $= (z - 4)$ డజన్‌లు

అందువలన మనం చెల్లించాల్సిన డబ్బు $= ₹\,(p - 2) \times (z - 4)$

వీటిని ప్రయత్నించండి.

- బీజీయ సమాసముల గుణాకారం చేయవలసిన ఇదే విధమైన వేర్వేరు రెండు సందర్భాల గురించి ఆలోచించగలరా?

  (సూచన : * వడి మరియు సమయం గురించి ఆలోచించండి.

  * బారువడ్డీ రేటు మరియు అసలుకు అనుగుణంగా బారువడ్డీ చెల్లించు సందర్భం ఆలోచించండి.)

పై ఉదాహరణలన్నింటిలో రెండు లేదా అంతకన్నా ఎక్కువ పరిమాణాలను గుణకారం చేయాలి. ఒకవేళ ఈ పరిమాణాలు బీజీయ సమాసాలు అయితే బీజీయ సమాసాల లబ్ధం కనుగొనాలి. అనగా మనం బీజీయ సమాసాల గుణలబ్ధం పొందడం తెలుసుకొని ఉండాలి దానిని మనం క్రమబద్ధంగా చేద్దాం. మనం ముందుగా రెండు ఏకపదుల గుణలబ్ధాన్ని చూద్దాం.

6.7 ఏక పదులతో ఏకపదులను గుణించడం

6.7.1 రెండు ఏక పదులను గుణించుట

మనమిదివరకే $4 \times x = x + x + x + x = 4x$ అనుటను చూశాం. అదేవిధంగా $4 \times (3x) = 3x + 3x + 3x + 3x = 12x$.

ఇప్పుడు కింది గుణలబ్ధాలను అవలోకించండి.

(i) $x \times 3y = x \times 3 \times y = 3 \times x \times y = 3xy$

(ii) $5x \times 3y = 5 \times x \times 3 \times y$

$= 5 \times 3 \times x \times y = 15xy$

(iii) $5x \times (-3y) = 5 \times x \times (-3) \times y$

$= 5 \times (-3) \times x \times y = -15xy$

ఏకపదుల మూడు గుణలబ్ధాలు $3xy$, $15xy$, $-15xy$ ఏకపదులు అవుతాయని గుర్తించండి.

మరికొన్ని ఉపయుక్త ఉదాహరణలు కింది విధంగా ఉన్నాయి.

(iv) $5x \times 4x^2 = (5 \times 4) \times (x \times x^2)$

$= 20 \times x^3 = 20x^3$

గమనించండి : $5 \times 4 = 20$ అంటే, గుణలబ్ధం యొక్క సంఖ్యా సహగుణకం = మొదటి ఏకపది సంఖ్యాసహగుణకం × రెండవ ఏకపది సంఖ్యా సహగుణకం;
మరియు $x \times x^2 = x^3$. అంటే, గుణలబ్ధం యొక్క బీజగణిత కారణాంకము = మొదటి ఏకపది యొక్క బీజగణిత కారణాంకము × రెండవ ఏకపది యొక్క బీజగణిత కారణాంకము

(v) $5x \times (-4xyz) = 5 \times (-4) \times (x \times xyz) = -20 \times (x \times x \times yz) = -20x^2yz.$

రెండు ఏకపదుల గుణలబ్ధాలలోగల చరరాశుల భాగపు వివిధ చరరాశుల ఘాతాలను వ్యక్తపరచునప్పుడు ఘాతాంకాలు మరియు ఘాతాల నియమాలను ఉపయోగిస్తాం.

6.7.2 మూడు లేక అంతకంటే ఎక్కువ ఏకపదులు గుణించుట.

కింది ఉదాహరణలను అవలోకనం చేయండి.

(i) $2x \times 5y \times 7z = (2x \times 5y) \times 7z = 10xy \times 7z = 70xyz$

(ii) $4xy \times 5x^2y^2 \times 6x^3y^3 = (4xy \times 5x^2y^2) \times 6x^3y^3 = 20x^3 y^3 \times 6x^3 y^3$

$= 120x^3y^3 \times x^3y^3 = 120\ (x^3 \times x^3) \times (y^3 \times y^3) = 120x^6 \times y^6 = 120x^6y^6.$

ఇక్కడ మనము మొదట రెండు ఏకపదులను గుణించి వచ్చిన గుణలబ్ధానికి మూడవ ఏకపదితో గుణించాలని స్పష్టంగా తెలుస్తుంది. ఈ విధానాన్ని మనం ఎన్ని ఏకపదుల గుణలబ్ధానికి అయినమా విస్తరించవచ్చు.

మనం మరొక పద్ధతిలో కూడా గుణలబ్ధాన్ని కనుగొనవచ్చు.

$$4xy \times 5x^2y^2 \times 6x^3y^3 = (4 \times 5 \times 6) \times (x \times x^2 \times x^3) \times (y \times y^2 \times y^3)$$
$$= 120\, x^6y^6$$

వీటిని ప్రయత్నించండి.

$4x \times 5y \times 7z$ గుణలబ్ధాన్ని కనుగొనండి.

మొదట $4x \times 5y$ కనుగొన్న తర్వాత $7z$ తో గుణించండి. లేదా మొదట $5y \times 7z$ కనుగొని, తర్వాత $4x$తో గుణించండి. జవాబు ఒకటేనా? మీరు ఏమి గమనిస్తారు? పదాలు గుణాకారం చేయునప్పుడు వాటి క్రమము ముఖ్యమౌతుందా?

ఉదాహరణం 3 : కింది ఇవ్వబడిన పొడవు మరియు వెడల్పుల దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యం యొక్క పట్టికను పూర్తిచేయండి.

సాధన :

పొడవు	వెడల్పు	వైశాల్యం
$3x$	$5y$	$3x \times 5y = 15xy$
$9y$	$4y^2$	....
$4ab$	$5bc$	....
21^2m	$31m^2$	....

ఉదాహరణం 4 : కింది ఇవ్వబడిన పొడవు, వెడల్పు మరియు ఎత్తులను కల్గిన ప్రతియొక్క దీర్ఘచతురస్రాకార పెట్టె యొక్క ఘనపరిమాణాన్ని కనుగొనండి.

	పొడవు	వెడల్పు	ఎత్తు
(i)	$2ax$	$3by$	$5cz$
(ii)	m^2n	n^2p	p^2m
(iii)	$2q$	$4q^2$	$8q^3$

సాధన : ఘనపరిమాణం = పొడవు × వెడల్పు × ఎత్తు

అందువలన, (i) ఘనపరిమాణం $= (2ax) \times (3by) \times (5cz)$

$$= 2 \times 3 \times 5 \times (ax) \times (by) \times (cz)$$
$$= 30abcxyz$$

(ii) ఘనపరిమాణం $= m^2n \times n^2p \times p^2m$

$$= (m^2 \times m) \times (n \times n^2) \times (p \times p^2)$$
$$= m^3n^3p^3$$

(iii) ఘనపరిమాణం $= 2q \times 4q^2 \times 8q^3$

$$= 2 \times 4 \times 8 \times q \times q^2 \times q^3$$
$$= 64q^6$$

అభ్యాస 6.2

1. కింది ఏకపదుల జతల గుణలబ్ధాన్ని కనుగొనండి.
   (i) $4, 7p$ (ii) $-4p, 7p$ (iii) $-4p, 7pq$
   (iv) $4p^3, -3p$ (v) $4p, 0$
2. కింది ఏకపదుల జతలను వరుసగా పొడవు మరియు వెడల్పులుగా కల్గిన దీర్ఘచతురస్రాల వైశాల్యాన్ని కనుగొనండి.
   (p, q); $(10m, 5n)$; $(20x^2, 5y^2)$; $(4x, 3x^2)$; $(3mn, 4np)$.
3. కింది గుణలబ్ధాల పట్టికను పూర్తి చేయండి.

మొదటి ఏకపది→ / రెండవ ఏకపది ↓	$2x$	$-5y$	$3x^2$	$-4xy$	$7x^2y$	$-9x^2y^2$
$2x$	$4x^2$	...	...	...	...	...
$-5y$	...	...	$-15x^2y$	...	...	...
$3x^2$	...	...	...	...	...	...
$-4xy$	...	...	...	...	...	...
$7x^2y$	...	...	...	...	...	...
$-9x^2y^2$	...	...	...	...	...	...

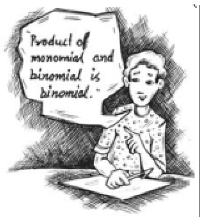
4. కింది పొడవు, వెడల్పు మరియు ఎత్తులను కల్గిన దీర్ఘ చతురస్రకారపు పెట్టెల ఘన పరిమాణం కనుగొనండి.
   (i) $5a, 3a^2, 7a^4$ (ii) $2p, 4q, 8r$
   (iii) $xy, 2x^2y, 2xy^2$ (iv) $a, 2b, 3c$.
5. కింది వాటి గుణలబ్ధాలు కనుగొనండి.
   (i) xy, yz, zx (ii) $a, -a^2, a^3$
   (iii) $2, 4y, 8y^2, 16y^3$ (iv) $a, 2b, 3c, 6abc$
   (v) $m, -mn, mnp$

6.8 బహు పదితో ఏకపదిని గుణించడం

6.8.1 ద్విపదితో ఏకపదిని గుణించడం.

మనం ఏకపది $3x$ ను ద్విపది $5y + 2$ తో గుణిద్దాం. అంటే $3x \times (5y + 2) = ?$ $3x$ మరియు $(5y + 2)$లు సంఖ్యలను సూచిస్తాయి అని గుర్తుతెచ్చుకోండి. అందువలన విభాజక న్యాయాన్ని ఉపయోగించండి, $3x \times (5y + 2) = (3x \times 5y) + (3x \times 2)$

$$= 15xy + 6x.$$



మనం సాధారణంగా లెక్కలలో విభాజక న్యాయాన్ని ఉపయోగిస్తాం.

ఉదాహరణకు : $7 \times 106 = 7 \times (100 + 6)$

$= 7 \times 100 + 7 \times 6$ (విభాగ న్యాయం ప్రకారం)

$= 700 + 42$

$= 742$

మరియు $7 \times 38 = 7 \times (40 - 2)$

$= 7 \times 40 - 7 \times 2$ (విభాగ న్యాయం ప్రకారం)

$= 280 - 14$

$= 266$

అదేవిధంగా, $(-3x) \times (-5y + 2) = (-3x) \times (-5y) + (-3x) \times (2)$

$= 15xy - 6x$

మరియు $5xy \times (y^2 + 3) = (5xy \times y^2) + (5xy \times 3)$

$= 5xy^3 + 15xy.$

ద్విపది × ఏకపది గురించి ఏమి చెప్పవచ్చు? ఉదాహరణకు, $(5y + 2) \times 3x = ?$

మనము స్థిత్యంతర నియమాన్ని ఎలా ఉపయోగిస్తాం $7 \times 3 = 3 \times 7$

సాధారణంగా, $a \times b = b \times a$

అదేవిధంగా ఇదివరకే చూసిన విధంగా $(5y + 2) \times 3x = 3x \times (5y + 2)$

$= 15xy + 6x.$

వీటిని ప్రయత్నించండి.

గుణలబ్ధం కనుగొనండి.

(i) $2x\,(3x + 5xy)$ (ii) $a^2\,(2ab - 5c)$

6.8.2 త్రిపదితో ఏకపదిని గుణించడం

$3p \times (4p^2 + 5p + 7)$ ను పరిగణించండి. ఈ మొదటి ఉదాహరణల వలె మనము విభాగ న్యాయమును ఉపయోగిద్దాం.

$3p \times (4p^2 + 5p + 7) = (3p \times 4p^2) + (3p \times 5p) + (3p \times 7)$

$= 12p^3 + 15p^2 + 21p$

ఏకపదితో ద్విపది ప్రతియొక్క పదాన్ని గుణించి గుణలబ్ధాలను కూడాలి.

విభాగ నియమం ఉపయోగించి పదంవారుగా గుణలబ్ధాలు చేయవచ్చని గమనించండి.

వీటిని ప్రయత్నించండి.

గుణలబ్ధం కనుగొనండి.

$(4p^2 + 5p + 7) \times 3p$

ఉదాహరణం 5 : బీజీయ సమాసాలను సూక్ష్మీకరించండి మరియు సూచించన విధంగా వాటి విలువలను కనుగొనండి.

(i) $x = 1$ అయినప్పుడు $x(x-3)+2$

(ii) $y = -2$ అయినప్పుడు $3y(2y-7)-3(y-4)-63$

సాధన : (i) $x(x-3)+2 = x^2-3x+2$

$x = 1$ అయితే $x^2-3x+2 = (1)^2-3(1)+2$

$= 1-3+2$

$= 3-3$

$= 0$

(ii) $3y(2y-7)-3(y-4)-63 = 6y^2-21y-3y+12-63$

$= 6y^2-24y-51$

$y = -2$ అయితే, $6y^2-24y-51 = 6(-2)^2-24(-2)-51$

$= 6\times 4+24\times 2-51$

$= 24+48-51$

$= 72-51$

$= 21$

ఉదాహరణం 6 : కూడండి:

(i) $5m(3-m)$ మరియు $6m^2-13m$

(ii) $4y(3y^2+5y-7)$ మరియు $2(y^3-4y^2+5)$

సాధన : (i) మొదటి బీజీయ సమాసాన్ని సూక్ష్మీకరించినప్పుడు,

$5m(3-m) = (5m\times 3)-(5m\times m) = 15m-5m^2$

దానికి రెండవ బీజీయ సమాసాన్ని కూడినప్పుడు,

$15m-5m^2+6m^2-13m = m^2+2m$

(ii) మొదటి బీజీయ సమాసాన్ని సూక్ష్మీకరించినప్పుడు,

$4y(3y^2+5y-7) = (4y\times 3y^2)+(4y\times 5y)+[(4y\times(-7)]$

$= 12y^3+20y^2-28y$

రెండవ బీజీయ సమాసాన్ని సూక్ష్మీకరించినప్పుడు;

$2(y^3-4y^2+5) = 2y^3+2\times(-4y^2)+2\times 5$

$= 2y^3-8y^2+10$

ఇప్పుడు రెండు బీజీయ సమాసాలను కూడినప్పుడు

$$\begin{array}{rrrrr} & 12y^3 & +\ 20y^2 & -28y & \\ + & 2y^3 & -\ 8y^2 & & +10 \\ \hline & 14y^3 & +\ 12y^2 & -28y & +10 \end{array}$$

ఉదాహరణం 7 : $3pq(p-q)$ ను $2pq(p+q)$ నుండి తీసివేయండి.

సాధన : ఇప్పుడు, $3pq(p-q) = 3p^2q - 3pq^2$ మరియు $2pq(p+q) = 2p^2q + 2pq^2$

తీసివేసినప్పుడు

$$\begin{array}{rr} 2p^2q & +\ 2pq^2 \\ 3p^2q & -\ 3pq^2 \\ (-) & (+) \\ \hline -p^2q & +\ 5pq^2 \end{array}$$

అభ్యాసం 6.3

1. కింది బీజీయ సమాసాల జతలను గుణించండి.

   (i) $4p,\ q+r$ (ii) $ab,\ a-b$ (iii) $a+b,\ 7a^2b^2$

   (iv) $a^2-9,\ 4a$ (v) $pq+qr+rp,\ 0$

2. పట్టికను పూర్తిచేయండి.

	మొదటి బీజీయ సమాసం	రెండవ బీజీయ సమాసం	గుణలబ్ధం
(i)	a	$b+c+d$	...
(ii)	$x+y-5$	$5xy$	...
(iii)	p	$6p^2-7p+5$	...
(iv)	$4p^2q^2$	p^2-q^2	...
(v)	$a+b+c$	abc	...

3. గుణలబ్ధం కనుగొనండి.

   (i) $(a^2) \times (2a^{22}) \times (4a^{26})$ (ii) $\left(\frac{2}{3}xy\right) \times \left(\frac{-9}{10}x^2y^2\right)$

   (iii) $\left(\frac{-10}{3}pq^3\right) \times \left(\frac{6}{5}p^3q\right)$ (iv) $x \times x^2 \times x^3 \times x^4$

4. (a) $3x(4x-5)+3$ బీజీయ సమాసాన్ని సూక్ష్మీకరించండి. x కు కింద ఇచ్చిన విలువలకు వాటి విలువలు కనుగొనండి. (i) $x = 3$ (ii) $x = \frac{1}{2}$

   (b) $a(a^2+a+1)+5$.

   aకి కింది ఇవ్వబడిన విలువలకు బీజీయ సమాసాలను సూక్ష్మీకరించి, వాటి విలువ కనుగొనండి.

   (i) $a = 0$, (ii) $a = 1$ (iii) $a = -1$.

5. (a) $p(p-q)$, $q(q-r)$ మరియు $r(r-p)$ లను కూడండి.

   (b) $2x(z-x-y)$ మరియు $2y(z-y-x)$ లను కూడండి.

   (c) $3l(l-4m+5n)$ను $4l(10n-3m+2l)$ నుండి తీసివేయండి.

   (d) $3a(a+b+c)-2b(a-b+c)$ ను $4c(-a+b+c)$ నుండి తీసివేయండి.

6.9 బహుపదితో బహుపదిని గుణించడం

6.9.1 ద్విపదితో ద్విపదిని గుణించడం

మనను ఒక ద్విపది $(2a + 3b)$ ని మరొక ద్విపది $(3a + 4b)$ తో గుణిద్దాం. దీనిని ఈ వెనుకటి గుణకార విభాగ న్యాయాన్ని ఉపయోగించి, దశలు దశలుగా సాధించవచ్చు.

$$(3a + 4b) \times (2a + 3b) = 3a \times (2a + 3b) + 4b \times (2a + 3b)$$

ఒక ద్విపది యొక్క ప్రతి పదాన్ని మరొక ద్విపది యొక్క ప్రతి పదంతో గుణించడాన్ని గమనించండి.

$$= (3a \times 2a) + (3a \times 3b) + (4b \times 2a) + (4b \times 3b)$$
$$= 6a^2 + 9ab + 8ba + 12b^2$$
$$= 6a^2 + 17ab + 12b^2 \qquad (ba = ab)$$

మనం ఇక్కడ పదాల గుణకారం చేయడం వల్ల గుణలబ్ధంలో $2 \times 2 = 4$ పదాలను పొందవచ్చు అయితే ఇక్కడ రెండు సజాతి పదాలు ఉన్నప్పుడు వాటిని కలపడం వల్ల మొత్తం మూడు పదాలను పొందుతాం. బహుపదుల గుణకారంలో మనం సజాతి పదాలను గమనించాలి. ఒకవేళ ఉంటే వాటిని కలపాలి.

ఉదాహరణం 8 : గుణించండి

(i) $(x - 4)$ మరియు $(2x + 3)$ (ii) $(x - y)$ మరియు $(3x + 5y)$.

సాధన : (i) $(x - 4) \times (2x + 3) = x \times (2x + 3) - 4 \times (2x + 3)$

$$= (x \times 2x) + (x \times 3) - (4 \times 2x) - (4 \times 3)$$
$$= 2x^2 + 3x - 8x - 12$$
$$= 2x^2 - 5x - 12$$ (సజాతి పదాలు కూడబడినవి)

(ii) $(x - y) \times (3x + 5y) = x \times (3x + 5y) - y \times (3x + 5y)$

$$= (x \times 3x) + (x \times 5y) - (y \times 3x) - (y \times 5y)$$
$$= 3x^2 + 5xy - 3yx - 5y^2$$
$$= 3x^2 + 2xy - 5y^2$$ (సజాతి పదాలు కూడబడినవి)

ఉదాహరణం 9 : గుణించండి

(i) $(a + 7)$ మరియు $(b - 5)$ (ii) $(a^2 + 2b^2)$ మరియు $(5a - 3b)$

సాధన : (i) $(a + 7) \times (b - 5) = a \times (b - 5) + 7 \times (b - 5)$

$$= ab - 5a + 7b - 35$$

ఇక్కడ సజాతి పదాలు ఏవీ లేవని గమనించండి

(ii) $(a^2 + 2b^2) \times (5a - 3b) = a^2 (5a - 3b) + 2b^2 \times (5a - 3b)$

$$= 5a^3 - 3a^2b + 10ab^2 - 6b^3$$

6.9.2 త్రిపదితో ద్విపదిని గుణించడం:

ఇక్కడ మనం ద్విపదిలోని ప్రతి పదంతో త్రిపదిలోని ప్రతి పదాన్ని గుణించాలి. అప్పుడు $3 \times 2 = 6$ పదాలను నిరీక్షించవచ్చు. అయితే పదాల గుణకారంలో సజాతి పదాలు లభించినచో అప్పుడు పదాల సంఖ్య 5 లేదా అంతకంటే తక్కువ కావచ్చు. కింది గుణాకారాన్ని పరిగణించండి.

$(a + 7) \times (a^2 + 3a + 5) = a \times (a^2 + 3a + 5) + 7 \times (a^2 + 3a + 5)$

ద్విపది   త్రిపది   విభాగ న్యాయం ప్రకారం

$= a^3 + 3a^2 + 5a + 7a^2 + 21a + 35$

$= a^3 + (3a^2 + 7a^2) + (5a + 21a) + 35$

$= a^3 + 10a^2 + 26a + 35$ (అంతిమ జవాబులో 4 పదాలు మాత్రమే ఉండడానికి కారణం ఏమిటి?)

ఉదాహరణం 10: $(a + b)(2a - 3b + c) - (2a - 3b)c$ లను సూక్ష్మీకరించండి.

సాధన : $(a + b)(2a - 3b + c) = a(2a - 3b + c) + b(2a - 3b + c)$

$= 2a^2 - 3ab + ac + 2ab - 3b^2 + bc$

$= 2a^2 - ab - 3b^2 + bc + ac$ ($-3ab$, $2ab$ లు సజాతి పదాలు)

మరియు $(2a - 3b)c = 2ac - 3bc$ అందువలన,

$(a + b)(2a - 3b + c) - (2a - 3b)c = 2a^2 - ab - 3b^2 + bc + ac - (2ac - 3bc)$

$= 2a^2 - ab - 3b^2 + bc + ac - 2ac + 3bc$

$= 2a^2 - ab - 3b^2 + (bc + 3bc) + (ac - 2ac)$

$= 2a^2 - 3b^2 - ab + 4bc - ac.$

అభ్యాసం 6.4

1. ద్విపదులను గుణించండి.

   (i) $(2x + 5)$ మరియు $(4x - 3)$ (ii) $(y - 8)$ మరియు $(3y - 4)$

   (iii) $(2.5l - 0.5m)$ మరియు $(2.5l + 0.5m)$ (iv) $(a + 3b)$ మరియు $(x + 5)$

   (v) $(2pq + 3q^2)$ మరియు $(3pq - 2q^2)$ (vi) $\left(\frac{3}{4}a^2 + 3b^2\right)$ మరియు $4\left(a^2 - \frac{2}{3}b^2\right)$

2. గుణలబ్ధాలు కనుగొనండి.

   (i) $(5 - 2x)(3 + x)$ (ii) $(x + 7y)(7x - y)$

   (iii) $(a^2 + b)(a + b^2)$ (iv) $(p^2 - q^2)(2p + q)$

3. సూక్ష్మీకరించండి.

(i) $(x^2 - 5)(x + 5) + 25$ (ii) $(a^2 + 5)(b^3 + 3) + 5$

(iii) $(t + s^2)(t^2 - s)$

(iv) $(a + b)(c - d) + (a - b)(c + d) + 2(ac + bd)$

(v) $(x + y)(2x + y) + (x + 2y)(x - y)$

(vi) $(x + y)(x^2 - xy + y^2)$

(vii) $(1.5x - 4y)(1.5x + 4y + 3) - 4.5x + 12y$

(viii) $(a + b + c)(a + b - c)$

6.10 సర్వసమీకరణం అనగా నేమి?

$(a + 1)(a + 2) = a^2 + 3a + 2$ సమానత్వాన్ని పరిగణించండి. మనం ఇరువైపులా a కి కొన్ని విలువలనిచ్చి బీజీయ సమానవిలువలను కనుగొనండి.

$a = 10$ అనుకుందాం అప్పుడు, LHS $= (a + 1)(a + 2)$

$= (10 + 1)(10 + 2)$

$= 11 \times 12$

$= 132$

RHS $= a^2 + 3a + 2$

$= 10^2 + 3 \times 10 + 2$

$= 100 + 30 + 2$

$= 132$

$\therefore$ $a = 10$ అయినప్పుడు సమానత్వానికి రెండు వైపులా విలువ సమానంగా ఉంది.

$a = -5$ అని తీసుకుంటే LHS $= (a + 1)(a + 2)$

$= (-5 + 1)(-5 + 2)$

$= (-4) \times (-3)$

$= 12$

RHS $= a^2 + 3a + 2$

$= (-5)^2 + 3(-5) + 2$

$= 25 - 15 + 2$

$= 10 + 2$

$= 12$

అందువలన $a = -5$ అయినప్పుడు కూడా, LHS = RHS.

a యొక్క ఏదైనా విలువకు LHS = RHS కావడాన్ని మనం చూడవచ్చు. ఈ విధంగా **చరరాశుల విలువలన్నింటికి సత్యమగు ఒక సమానత్వాన్ని 'సర్వసమీకరణం'** అంటారు. కావున $(a + 1)(a + 2) = a^2 + 3a + 2$ ఒక సర్వసమీకరణం. అయితే, ఒక సమీకరణం చరరాశి యొక్క కొన్ని నిర్దిష్ట విలువలకు మాత్రమే సత్యమవుతుంది. ఇది చరరాశి ఏ విలువకైనా సత్యంకావు. ఉదాహరణకు $a^2 + 3a + 2 = 132$ సమీకరణము తీసుకోండి పైన చూపినట్లు $a = 10$ అయినప్పుడు సత్యమవుతుంది. $a = -5$ లేదా $a = 0$ అయినప్పుడు ఇది సత్యం చెందదు.

ప్రయత్నించండి : $a^2 + 3a + 2 = 132$ అనునది $a = -5$ లేదా $a = 0$ అయినప్పుడు సరిపోదని చూపండి.

6.11 ప్రామాణిక సర్వసమీకరణాలు (Standard Identities)

మనమిప్పుడు చాలా ఉపయోగకరమైన మూడు సర్వసమీకరణాలను అధ్యయనం చేద్దాం. ఈ సర్వసమీకరణాలను రెండు ద్విపదులను గుణించడం ద్వారా పొందవచ్చు.

మొదట $(a + b)(a + b)$ లేదా $(a + b)^2$ ను పరిశీలిద్దాం.

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$$
$$= a(a + b) + b(a + b)$$
$$= a^2 + ab + ba + b^2$$
$$= a^2 + 2ab + b^2 \quad (ab = ba \text{ అయివుండుట వలన})$$

ఇదేవిధంగా $\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$ ....(I)

స్పష్టంగా ఇదొక సర్వసమీకరణము. ఎందుకంటే ఎడమవైపు (LHS) పదాలను గుణించి కుడివైపు పదాలను (RHS) పొందాం. a మరియు b కు ఏ విలువ ఇచ్చి రెండు వైపుల విలువను కనుగొని అవి సమానమని ఎవరైనా పరిశీలించవచ్చు.

- ఇదేవిధంగా $(a - b)^2 = (a - b)(a - b)$

$$= a(a - b) - b(a - b)$$
$$= a^2 - ab - ba + b^2$$
$$= a^2 - 2ab + b^2 \quad (ab = ba \text{ అయివుండుటవలన})$$

$\boxed{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$ ....(II)

- చివరగా $(a + b)(a - b)$ గుణలబ్ధాన్ని చూద్దాం

$$(a + b)(a - b) = a(a - b) + b(a - b)$$
$$= a^2 - ab + ba - b^2$$
$$= a^2 - b^2 \quad (ab = ba \text{ అయివుండుటవలన})$$

$\boxed{(a+b)(a-b) = a^2 - b^2}$ ....(III)

I, II మరియు III వ సర్వసమీకరణాలు "**ప్రామాణిక సర్వసమీకరణాలు**" అని పరిగణించబడ్డాయి.

వీటిని ప్రయత్నించండి.

- Iవ సర్వసమీకరణంలో bకు బదులుగా $-b$ వేస్తే మీరు IIవ సర్వసమీకరణాన్ని పొందగలరా?

మనమిప్పుడు మరొక ముఖ్య సమీకరణాన్ని సాధిద్దాం

$$(x + a)(x + b) = x(x + b) + a(x + b)$$

$$= x^2 + bx + ax + ab$$

$$\boxed{(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab} \quad \text{..............(IV)}$$

వీటిని ప్రయత్నించండి.

1. $a = 2, \ b = 3, \ x = 5$ లకు IVవ సర్వసమీకరణం పరిశీలించండి.
2. $a = b$ అయిన విశేష సందర్భంలో IVవ సర్వసమీకరణాన్ని పరిగణించండి. మీకు మీరు ఏమి పొందుతారు? అది I వ సర్వసమీకరణానికి సంబంధించినదా?
3. $a = -c$ మరియు $b = -c$ అయిన విశేష సందర్భములో IVవ సర్వసమీకరణాన్ని పరిగణించండి. మీరు ఏమి పొందుతారు? ఇది IIవ సర్వసమీకరణానికి సంబంధించినదా?
4. $b = -a$ అయిన విశేష సందర్భంలో IVవ సర్వసమీకరణాన్ని పరిగణించండి. మీరు ఏమి పొందుతారు? ఇది IIIవ సర్వసమీకరణానికి సంబంధించినదా?

IVవ సర్వసమీకరణం మిగిలిన మూడు సర్వసమీకరణాల సామాన్యరూపం అని మనం చూడవచ్చు.

6.12 సర్వసమీకరణాల వినియోగం (అన్వయం) :

ద్విపదుల గుణకారం మరియు సంఖ్యల గుణకారానికి సంబంధించిన అనేక సమస్యలను సర్వసమీకరణాలను ఉపయోగించి, మరొక విధానంతో ఎలా సాధించవచ్చో అని తెలుసు కుందాం.

ఉదాహరణం 11: I వ సర్వ సమీకరణం ఉపయోగించి కనుగొనండి.

(i) $(2x + 3y)^2$ (ii) 103^2

సాధన : (i) $(2x+3y)^2=(2x)^2+2(2x)(3y)+(3y)^2$ [(I)వసర్వసమీకరణంఉపయోగించబడింది.]

$$= 4x^2 + 12xy + 9y^2$$

$(2x + 3y)^2$ ను మనం నేరుగా కూడా కనుగొనవచ్చు.

$$(2x + 3y)^2 = (2x + 3y)(2x + 3y)$$

$$= (2x)(2x) + (2x)(3y) + (3y)(2x) + (3y)(3y)$$

$$= 4x^2 + 6xy + 6yx + 9y^2 \quad (xy = yx \text{ అయివుండుట వలన})$$

$$= 4x^2 + 12xy + 9y^2$$

$(2x + 3y)$ ను వర్గం చేయడానికి I ను సర్వసమీకరణం పర్యాయ విధానాన్ని ఏర్పరచింది. నేరు విధానం కంటే సర్వసమీకరణ విధానం తక్కువ దశలను కలిగి ఉండడంచూడవచ్చు. $(2x + 3y)$ కంటే సంకీర్ణమైన ద్విపదులను వర్గములను కనుగొనునప్పుడు సర్వసమీకరణ విధానం సులభమని తెలుసుకొనవచ్చు.

(ii) $(103)^2 = (100 + 3)^2$

$= 100^2 + 2 \times 100 \times 3 + 3^2$ (I వ సర్వ సమీకరణం నుండి)

$= 10000 + 600 + 9$

$= 10609$

మనం 103ను 103తో నేరుగా గుణించి జవాబు పొందవచ్చు. 103 యొక్క వర్గమును కనుగొనడానికి Iవ సర్వ సమీకరణంలో నేరు విధానం కంటే సులభంగా పరిహారం దొరుకుతుందని చూశారా? 1013 వర్గం చేయడానికి ప్రయత్నించండి. గుణాకార నేరు విధానం కంటే సర్వసమీకరణ విధానము ఆకర్షణీయంగా ఉండుటను మీరు తెలుసుకొంటారు.

ఉదాహరణం 12: II వ సర్వ సమీకరణంను ఉపయోగించి కనుగొనండి.

(i) $(4p - 3q)^2$ (ii) $(4.9)^2$

సాధన : (i) $(4p - 3q)^2 = (4p)^2 - 2(4p)(3q) + (3q)^2$ [IIవ సర్వసమీకరణం నుండి]

$= 16p^2 - 24pq + 9q^2$

$(4p - 3q)^2$ ను కనుగొనడానికి నేరు విధానం కంటే సర్వసమీకరణ విధానం సులభం అనుట మీరు ఒప్పుకుంటారా?

(ii) $(4.9)^2 = (5.0 - 0.1)^2$

$= (5.0)^2 - 2(5.0)(0.1) + (0.1)^2$

$= 25.00 - 1.00 + 0.01$

$= 24.01$

4.9 యొక్క వర్గం కనుగొనడానికి IIవ సర్వ సమీకరణం యొక్క ఉపయోగం నేరు విధానం కంటే సులభం కాదా?

ఉదాహరణం 13: IIIవ సర్వసమీకరణం ఉపయోగించి కనుగొనండి.

(i) $\left(\frac{3}{2}m + \frac{2}{3}n\right)\left(\frac{3}{2}m - \frac{2}{3}n\right)$ (ii) $983^2 - 17^2$

(iii) 194×206

సాధన : (i) $\left(\frac{3}{2}m+\frac{2}{3}n\right)\left(\frac{3}{2}m-\frac{2}{3}n\right) = \left(\frac{3}{2}m\right)^2 - \left(\frac{2}{3}n\right)^2$

$= \frac{9}{4}m^2 - \frac{4}{9}n^2$

(ii) $983^2 - 17^2 = (983 + 17)(983 - 17)$

[ఇక్కడ $a = 983$, $b = 17$ మరియు

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

అందువలన $983^2 - 17^2 = 1000 \times 966$

$= 966000$

(iii) $194 \times 206 = (200 - 6) \times (200 + 6)$

$= 200^2 - 6^2$

$= 40000 - 36$

$= 39964.$

దీనిని నేరు విధానంలో గుణించడానికి ప్రయత్నించండిIII వ సర్వసమీకరణం ఉపయోగం దీనిని ఎంత సులభంగా చేసిందనే దానిని తెలుసుకొంటారు.

ఉదాహరణం14 : $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ సర్వ సమీకరణాన్ని ఉపయోగించి కింది వాటిని కనుగొనండి.

(i) 501×502 (ii) 95×103.

సాధన : (i) $501 \times 502 = (500 + 1) \times (500 + 2)$

$= 500^2 + (1 + 2) \times 500 + 1 \times 2$

$= 250000 + 1500 + 2$

$= 251502$

(ii) $95 \times 103 = (100 - 5) \times (100 + 3)$

$= 100^2 + (-5 + 3) \times 100 + (-5) \times 3$

$= 10000 + (-2) \times 100 - 15$

$= 10000 - 200 - 15$

$= 9785.$

అభ్యాసం 6.5

1. కింది వాటి గుణలబ్ధాలను సరైన సర్వ సమీకరణం ఉపయోగించి, కనుగొనండి.

(i) $(x + 3)(x + 3)$ (ii) $(2y + 5)(2y + 5)$

(iii) $(2a - 7)(2a - 7)$ (iv) $\left(3a - \frac{1}{2}\right)\left(3a - \frac{1}{2}\right)$

(v) $(1.1m - 0.4)(1.1m + 0.4)$ (vi) $(a^2 + b^2)(-a^2 + b^2)$

(vii) $(6x - 7)(6x + 7)$ (viii) $(-a + c)(-a + c)$

(ix) $\left(\frac{x}{2} + \frac{3y}{4}\right)\left(\frac{x}{2} + \frac{3y}{4}\right)$ (x) $(7a - 9b)(7a - 9b)$

2. $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ సర్వ సమీకరణం ఉపయోగించి కింది వాటి గుణలబ్ధాలు కనుగొనండి.
   (i) $(x + 3)(x + 7)$ (ii) $(4x + 5)(4x + 1)$
   (iii) $(4x - 5)(4x - 1)$ (iv) $(4x + 5)(4x - 1)$
   (v) $(2x + 5y)(2x + 3y)$ (vi) $(2a^2 + 9)(2a^2 + 5)$
   (vii) $(xyz - 4)(xyz - 2)$

3. కింది వాటి వర్గాలను సర్వ సమీకరణం ఉపయోగించి, కనుగొనండి.
   (i) $(b - 7)^2$ (ii) $(xy + 3z)^2$ (iii) $(6x^2 - 5y)^2$
   (iv) $\left(\frac{2m}{3}+\frac{3n}{2}\right)^2$ (v) $(0.4p - 0.5q)^2$ (vi) $(2xy + 5y)^2$

4. సూక్ష్మీకరించండి.
   (i) $(a^2 - b^2)^2$ (ii) $(2x + 5)^2 - (2x - 5)^2$
   (iii) $(7m - 8n)^2 + (7m + 8n)^2$ (iv) $(4m + 5n)^2 + (5m + 4n)^2$
   (v) $(2.5p - 1.5q)^2 - (1.5p - 2.5q)^2$ (vi) $(ab + bc)^2 - 2ab^2c$
   (vii) $(m^2 - n^2m)^2 + 2m^3n^2$

5. వీటిని సాధించండి.
   (i) $(3x + 7)^2 - 84x = (3x - 7)^2$
   (ii) $(9p - 5q)^2 + 180pq = (9p + 5q)^2$
   (iii) $\left(\frac{4m}{3}-\frac{3n}{4}\right)^2 + 2mn = \frac{16}{9}m^2 + \frac{9}{16}n^2$
   (iv) $(4pq + 3q)^2 - (4pq - 3q)^2 = 48pq^2$
   (v) $(a - b)(a + b) + (b - c)(b + c) + (c - a)(c + a) = 0$

6. సర్వ సమీకరణాలను ఉపయోగించి, కింది వాటి విలువలను కనుగొనండి.
   (i) 71^2 (ii) 99^2 (iii) 102^2 (iv) 998^2 (v) 5.2^2
   (vi) 297×303 (vii) 78×82 (viii) 8.9^2 (ix) 10.5×9.5

7. $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ సర్వ సమీకరణం ఉపయోగించి, కింది వాటి విలువలను కనుగొనండి.
   (i) $51^2 - 49^2$ (ii) $(1.02)^2 - (0.98)^2$
   (iii) $153^2 - 147^2$ (iv) $12.1^2 - 7.9^2$

8. $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ ఉపయోగించుకొని, కింది వాటిని కనుగొనండి.
   (i) 103×104 (ii) 5.1×5.2
   (iii) 103×98 (iv) 9.7×9.8

సారాంశం

1. బీజీయ సమాసాలు, చరరాశులు మరియు స్థిర రాశులతో ఏర్పడినాయి.
2. బీజ పదాలు సంకలనం ద్వారా **బీజీయ సమాసాలు** ఏర్పడుతాయి కారణాంకాల గుణలబ్ధంతో **బీజీయపదాలు** ఏర్పడుతాయి.
3. ఒకటి, రెండు మరియు మూడు పదాలతో కూడిన బీజీయ సమాసాలను వరుసగా **ఏకపది**, **ద్విపది** మరియు **త్రిపది** అంటారు. సాధారణంగా శూన్యేతర గుణకాలతో ఒకటి లేదా ఎక్కువ పదాలు గల సమాసాన్ని **బహుపది** అంటారు.
4. చరరాశులు మరియు వాటి ఘాతసూచికలు సమానంగా ఉన్న బీజపదాలను **సజాతి పదాలు** అంటారు. సజాతి పదాల సంఖ్యా సహగుణకము ఒకటే అయిఉండాలని లేదు
5. బహుపదులను కూడునప్పుడు లేదా తీసివేయునప్పుడు మొదట సజాతి పదాలను కూడాలి లేదా తీసివేయాలి తర్వాత విజాతి పదాలను గమనించాలి.
6. మనం బీజీయ సమాసాలను గుణకారం చేయవలసిన అనేక సందర్భాలను చూస్తాం ఉదా: ఒక ధీర్ఘ చతురస్రపు పొడవు మరియు వెడల్పులు బీజీయ సమాసాలైతే దాని వైశాల్యం కనుగొనవలసినప్పుడు వాటిని గుణిస్తాం.
7. ఒక ఏకపదిని మరొక ఏకపదితో గుణించినప్పుడు గుణలబ్ధం కూడా ఏకపది వస్తుంది.
8. మనం ఒక బహుపదిని ఏకపదితో గుణించునప్పుడు బహుపదిలోని ప్రతి పదాన్ని ఏకపదితో గుణిస్తాం.
9. బహుపదిని ద్విపది లేదా త్రిపదిచే గుణించేటప్పుడు పదం వారిగా గుణకారం చేయాలి. అనగా బహుపదిలోని ప్రతి పదంతో ద్విపది లేదా త్రిపది యొక్క ప్రతి పదంతో గుణించాలి ఈ విధంగా వచ్చిన గుణలబ్ధాలలో సజాతి పదాలు ఉన్నచో వాటిని కూడాలి.
10. సర్వసమీకరణం అనునది ఒక సమానత్వం అయివుండి, అది చరరాశిలోని అన్ని విలువలకు సత్యమవుతుంది. మరొక విధానంలో చెప్పాలంటే చరరాశుల కొన్ని నిర్దిష్ట విలులకు మాత్రమే నిజమైన సమీకరణం సర్వసమీకరణం కాదు.
11. కింది ప్రామాణిక సర్వసమీకరణాలు అయ్యాయి.

    $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ....(I)

    $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ ....(II)

    $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ .... (III)
12. మరొక ఉపయోగకరమైన సర్వసమీకరణం అనగా,

    $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ ....(IV)
13. పై నాలుగు సర్వసమీకరణాలు బీజీయ సమాసాల వర్గం మరియు గుణలబ్ధములు కనుగొనడానికి ఉపయోగమైనది అవి సంఖ్యల గుణలబ్ధం మొదలగు వాటిని కనుగొనడానికి కూడా సులభమైన పర్యాయ విధానాలు

♦♦♦♦

అధ్యాయం

7

ప్రయోగాత్మక రేఖాగణితం

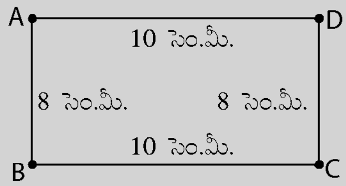
7.1 పీఠిక :

ఏడవ తరగతిలో త్రిభుజ నిర్మాణం నేర్చుకున్నారు. ఒక నిర్దిష్ట త్రిభుజాన్ని నిర్మించడానికి మనకు భుజము మరియు కోణముల మొత్తం మూడు కొలతలు కావాలి.

మూడు కొలతలు త్రిభుజ నిర్మాణానికి సరిపోవడం వలన ఒక నిర్దిష్ట చతురస్రం నిర్మించడానికి నాలుగు కొలతలు సరిపోతాయా? అను సహజ ప్రశ్న మనలో కలుగుతుంది.

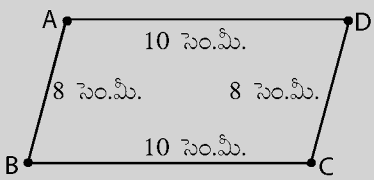
చేసి చూడండి.

10 సెం.మీ. పొడవుగల 2 మరియు 8 సెం.మీ. పొడవుగల 2 పుల్లలు తీసుకోండి. 10 సెం.మీ. పొడవు మరియు8 సెం.మీ. వెడల్పుగల దీర్ఘ చతురస్రాకారంలో నాలుగు పుల్లలను బంధించివుంచండి (చిత్రం 7.1)



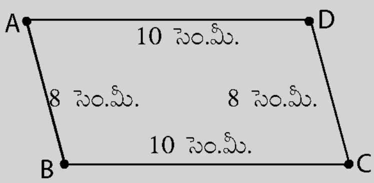
చిత్రం 7.1

ఇచ్చిన 4 కొలతలనుండి ఈ దీర్ఘచతురస్రం నిర్మించబడింది. ఇప్పుడు, ఈ పుల్ల ఆకృతి యొక్క వెడల్పును పట్టుకొని కుడివైపుకు తోయండి (చిత్రం 7.2) ఇప్పుడు దీర్ఘ చతురస్రం సమాంతర చతుర్భుజం కావడాన్ని గమనించండి. పుల్లలను మార్చినారా? లేదు వాటి కొలతలు అలాగే ఉన్నాయి.



చిత్రం 7.2

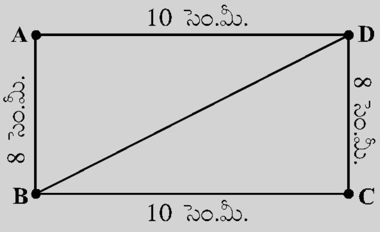
ఇదేవిధంగా ఈ సమాంతర చతుర్భుజాన్ని మరొక వైపుకుతోయండి. (చిత్రం 7.3) ఇప్పుడు చిత్రం 7.3లో ఉండేదానికంటే వేరొక సమాంతర చతుర్భుజం పొందుతారు. ఇప్పుడు కూడా కొలతలు అలాగే ఉన్నాయి.



చిత్రం 7.3

ఒక నిర్దిష్ట చతుర్భుజం నిర్మాణం చేయడానికి కేవల 4 కొలతలు సరిపోవు అనునది దీనివలన తెలుస్తోంది. 5 కొలతలు సరిపోతాయా? దీనిని తెలుసుకోవడానికి తిరిగి మొదటి కార్యాచరణాన్నే పరిశీలిద్దాం.

4పుల్లలను ఉపయోగించి, 10 సెం.మీ. పొడవు మరియు 8 సెం.మీ. వెడల్పుగల ధీర్ఘచతురస్రం నిర్మాణం చేశారు. ఇప్పుడు దాని కర్ణం BD పొడవంత పుల్లను అదే కర్ణం మీద ఉంచి కట్టండి. (చిత్రం 7.4).



చిత్రం 7.4

ఈ విధంగా 5వ పుల్లను అమర్చిన తరువాత మొదటిలాగా మీరు ధీర్ఘ చతురస్రాన్ని త్రోయడానికి ప్రయత్నించండి. సాధ్యపడిందా? లేదు. అనగా, ఈ పుల్లలతో ఒక నిరిష్ట చతుర్భుజ (ఇక్కడ ధీర్ఘ చతురస్రం) నిర్మాణం సాధ్యమయింది. ఈ విధమైన పుల్లల అమరిక వలన వేరె చతురస్ర నిర్మాణం సాధ్యం కాదు.

అందువలన ఒక నిర్దిష్టమైన చతుర్భుజాన్ని 5 కొలతలతో నిర్మాణం చేయడానికి సాధ్యమునునది మనం గమనించాం. అయితే, భుజాలు మరియు కోణముల ఏవైనా 5 కొలతలతో ఇది సాధ్యమగుతుందా?

ఆలోచించండి, చర్చించండి, రాయండి

ABCD చతుర్భుజం యొక్క 5 కొలతలను అర్షాద్‌కు ఇవ్వబడ్డాయి. అవి ఈ విధంగా ఉన్నాయి AB = 5 సెం.మీ., $\angle A = 50°$, AC = 4 సెం.మీ., BD = 5 సెం.మీ. మరియు AD = 6 సెం.మీ. వాటితో అతడు ఒక నిర్దిష్ట చతురస్రం నిర్మించడానికి సాధ్యమా? కారణంతోపాటు జవాబివ్వండి.

7.2 చతుర్భుజ నిర్మాణం

కింది కొలతలు ఉపయోగించి, ఒక నిర్దిష్ట చతుర్భుజాన్ని నిర్మాణంచేయు విధానాలు నేర్చుకుందాం.

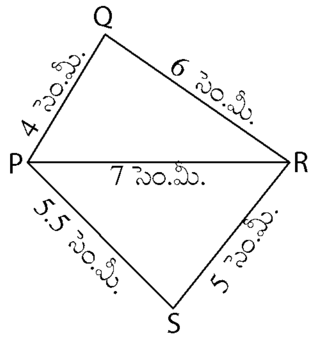
- 4 భుజాలు మరియు ఒక కర్ణం ఇచ్చినప్పుడు
- 2 కర్ణాలు మరియు 3 భుజాలు ఇచ్చినప్పుడు
- 2 పార్శ్వ భుజాలు మరియు 3 కోణాలు ఇచ్చినప్పుడు
- 3 భుజాలు మరియు 2 మధ్య కోణాలు ఇచ్చినప్పుడు.
- ఇతర విశేష లక్షణాలు ఇచ్చినప్పుడు

వీటిని ఒక్కొక్కటిగా తీసుకుందాం.

7.2.1 నాలుగు భుజాలు మరియు ఒక కర్ణం ఇచ్చినప్పుడు

ఒక ఉదాహరణ ద్వారా ఈ నిర్మాణాన్ని వివరిద్దాం

ఉదాహరణం 1 : PQ = 4 సెం.మీ., QR = 6 సెం.మీ., RS = 5 సెం.మీ., PS = 5.5 సెం.మీ. మరియు PR = 7 సెం.మీ. ఉండునట్లు PQRS చతుర్భుజం నిర్మించండి.

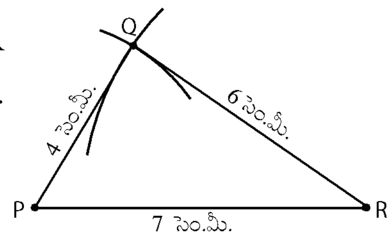


(కొలతలు సెం.మీ.లలో)

చిత్రం 7.5

సాధన : [కావలసిన చుతుర్భుజాన్ని గీయడానికి మనకు ఒక చిత్తు చిత్రం సహాయ పడుతుంది. మొదట దీనిని గీచి, కొలతలు గుర్తిస్తాం (చిత్రం 7.5)].

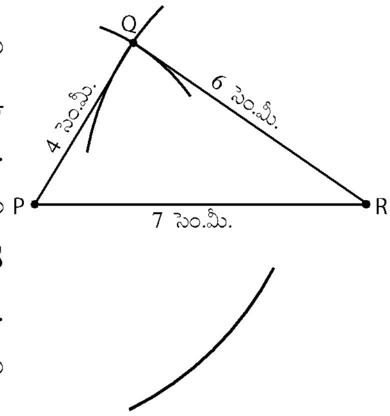
1వ దశ : కచ్చా (చిత్తు) చిత్రం నుండి ΔPQR (భు.భు.భు) నిబంధనలతో నిర్మించవచ్చు. ΔPQRను నిర్మించండి (చిత్రం 7.6)



(కొలతలు సెం.మీ.లలో)

చిత్రం 7.6

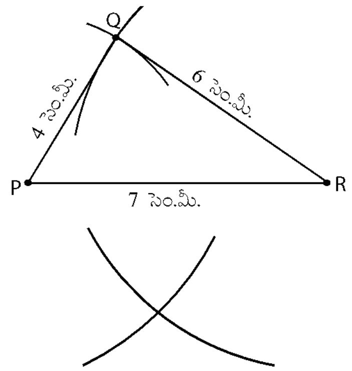
2వ దశ : ఇప్పుడు మనం 4వ బిందువు S ను గుర్తించాలి. ఈ బిందువు S, PR యొక్క ఒక బిందువులోగల Q బిందువు యొక్క. వ్యతిరేక దిక్కులో ఉంటుంది. దీనిని గుర్తించడానికి మనకు 2 కొలతలు తెలిశాయి. S బిందువు P బిందువు నుండి 5.5 సెం.మీ. దూరంలో ఉంది. అందువలన P బిందువును కేంద్రంగా పెట్టుకొని 5.5 సెం.మీ. వ్యాసార్థంగా పెట్టుకొని ఒక చాపం గీయండి. (S బిందువు ఈ చాపం మీద ఉంది)



(కొలతలు సెం.మీ.లలో)

చిత్రం 7.7

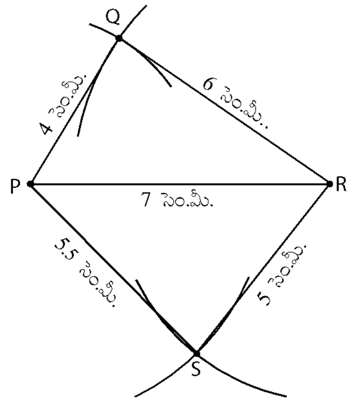
3వ దశ : S బిందువు R సెం.మీ. దూరంలో ఉంది. అందువలన R బిందువును కేంద్రంగా పెట్టుకొని 5సెం.మీ. వ్యాసార్థంగా పెట్టుకొని ఒక చాపం గీయండి. (S బిందువు ఈ చాపం మీద కూడా ఉంది). (చిత్రం 7.8)



(కొలతలు సెం.మీ.లలో)

చిత్రం 7.8

4వ దశ : S మీద గీచిన రెండు చాపాల మీద S ఉండటం వలన అది ఆ రెండింటిని ఖండించు బిందువు అయివుండాలి. S ను గుర్తించండి. PQRS ను పూర్తి చేయండి. ఇప్పుడు PQRS మనకు కావలసిన చతుర్భుజం (చిత్రం 7.9)



(కొలతలు సెం.మీ.లలో)

చిత్రం 7.9

ఆలోచించండి, చర్చించండి, రాయండి

1. 5 కొలతలతో ఒక నిర్దిష్ట చతుర్భుజం నిర్మించవచ్చని మనం తెలుసుకున్నాం. ఏవైనా 5 కొలతలతో ఈ విధమైన ఒక నిర్దిష్ట చతుర్భుజం నిర్మించడం సాధ్యమా?
2. BA = 5 సెం.మీ.,AT = 6 సెం.మీ. మరియు AS = 6.5 సెం.మీ. ఉండునట్లు BATS సమాంతర చతుర్భుజం నిర్మించడం సాధ్యమా? కారణాలు తెల్పండి.
3. ZE = 3.5 సెం.మీ. మరియు కర్ణం EL = 5 సెం.మీ. గల ZEAL వజ్రాకృతిని నిర్మించడం సాధ్యమా? కారణాలు తెల్పండి.
4. ఒక విద్యార్థి PL = 3 సెం.మీ., LA = 4 సెం.మీ., AY = 4.5 సెం.మీ., PY = 2 సెం.మీ. మరియు LY = 6 సెం.మీ. ఉండునట్లు PLAY చతుర్భుజం గీయడానికి ప్రయత్నించాడు. అయితే, అది సాధ్యం కాలేదు. కారణాలేమిటి? [సూచన: చిత్తు (కచ్చా) చిత్రంలోపాటు చర్చించండి.]

అభ్యాసం 7.1

1. కింది చతుర్భుజాలు నిర్మించండి:

(i) చతుర్భుజం ABCD
AB = 4.5 సెం.మీ.
BC = 5.5 సెం.మీ.
CD = 4 సెం.మీ.
AD = 6 సెం.మీ.
AC = 7 సెం.మీ.

(ii) చతుర్భుజం JUMP
JU = 3.5 సెం.మీ.
UM = 4 సెం.మీ.
MP = 5 సెం.మీ.
PJ = 4.5 సెం.మీ.
PU = 6.5 సెం.మీ.

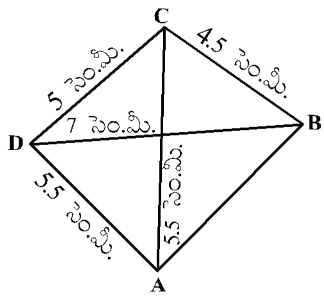
(iii) సమాంతర చతుర్భుజం MORE
OR = 6 సెం.మీ.
RE = 4.5 సెం.మీ.
EO = 7.5 సెం.మీ.

(iv) పట్రాకృతి BEST
BE = 4.5 సెం.మీ.
ET = 6 సెం.మీ.

7.2.2 రెండు కర్ణములు మరియు మూడు భుజాలు ఇచ్చినప్పుడు

నాలుగు భుజాలు మరియు ఒక కర్ణం ఇచ్చినప్పుడు మొదట ఒక త్రిభుజం నిర్మించి, తరువాత నాల్గవ బిందువును కనుగొనడానికి ప్రయత్నించాం. అదే విధానాన్ని ఇక్కడ కూడా అనుసరిస్తున్నాం.

ఉదాహరణం 2 : BC = 4.5 సెం.మీ. AD = 5.5 సెం.మీ. CD = 5 సెం.మీ. కర్ణం AC = 5.5 సెం.మీ. మరియు కర్ణ BD = 7 సెం.మీ. గల ABCD త్రిభుజం నిర్మించండి.

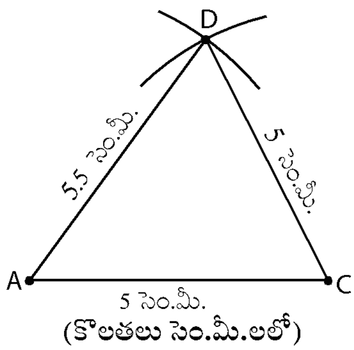


(కొలతలు సెం.మీ.లలో)

చిత్రం 7.10

సాధన : ఇక్కడున్న చిత్తు చిత్రంలో చతుర్భుజం (చిత్రం 7.10) ABCD ఉంది. దీని నుండి ΔACD లను నిర్మాణం చేయవచ్చని సులభంగా తెలుసుకోవచ్చు (ఎలా?)

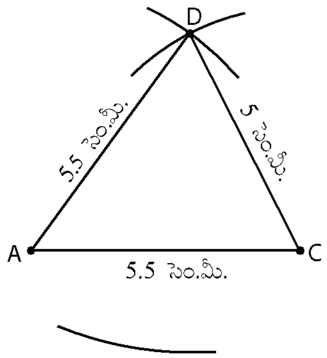
1వ దశ : భు.భు.భు. నిర్మాణ విధానాన్ని ఉపయోగించి ΔACDలను నిర్మించండి (చిత్రం 7.11) ఇప్పుడు C బిందువు నుండి 4.5 సెం.మీ. మరియు D బిందువు నుండి 7 సెం.మీ. దూరంలోగల B బిందువును కనుగొనాల్సి ఉంది.



(కొలతలు సెం.మీ.లలో)

చిత్రం 7.11

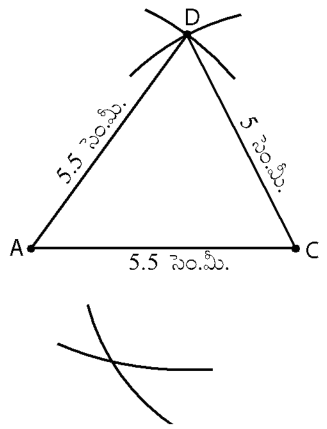
2వ దశ : D బిందువును కేంద్రంగా పెట్టుకొని 7 సెం.మీ. వ్యాసార్థంగల ఒక చాపాన్ని గీయండి. (చిత్రం 7.12) B బిందువు ఈ చాపం పైన ఉంది.



(కొలతలు సెం.మీ.లలో)

చిత్రం 7.12

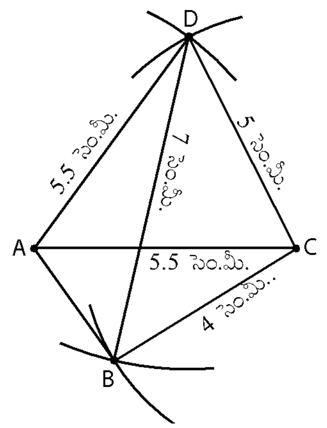
3వ దశ : C బిందువును కేంద్రంగా పెట్టుకొని 4.5 సెం.మీ. వ్యాసార్థంగల ఒక చాపం గీయండి (చిత్రం 7.13) B బిందువు ఈ చాపం మీద కూడా ఉంది.



(కొలతలు సెం.మీ.లలో)

చిత్రం 7.13

4వ దశ : B బిందువు మీద గీచిన రెండు చాపాల పైన ఉండటం వలన అది ఆ రెండింటి ఖండన బిందువు అయివుండాలి. B బిందువును గుర్తించండి. ABCD ని పూర్తి చేయండి. ఇప్పుడు ABCD మనకు కావలసిన చతుర్భుజం (చిత్రం 7.14).



(కొలతలు సెం.మీ.లలో)

చిత్రం 7.14

ఆలోచించండి, చర్చించండి, రాయండి

1. పై ఉదాహరణ నుండి మొదట ΔABD లను నిర్మించిన తరువాత C బిందువును కనుగొనడం సాధ్యమా?
2. PQ = 3 సెం.మీ., RS = 3 సెం.మీ., PS = 7.5 సెం.మీ., PR = 8 సెం.మీ. మరియు SQ = 4 సెం.మీ. గల PQRS చతుర్భుజం నిర్మించడం సాధ్యమా? కారణాలతో పాటు జవాబివ్వండి.

అభ్యాసం 7.2

1. కింది చతుర్భుజాలు నిర్మించండి.

(i) చతుర్భుజం LIFT
LI = 4 సెం.మీ.
IF = 3 సెం.మీ.
TL = 2.5 సెం.మీ.
LF = 4.5 సెం.మీ.
IT = 4 సెం.మీ.

(ii) చతుర్భుజం GOLD
OL = 7.5 సెం.మీ.
GL = 6 సెం.మీ.
GD = 6 సెం.మీ.
LD = 5 సెం.మీ.
OD = 10 సెం.మీ.

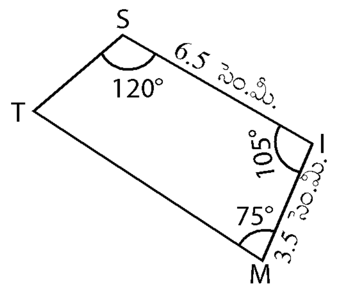
(iii) వజ్రాకృతి BEND
BN = 5.6 సెం.మీ.
DE = 6.5 సెం.మీ.

7.2.3 రెండు పార్శ్వ భుజాలు మరియు మూడు కోణాలు ఇచ్చినప్పుడు :

మొదటి విధంగా, ఇక్కడ కూడా ఒక త్రిభుజం నిర్మించిన తరువాత నాల్గవ బిందువును కనుగొని చతుర్భుజం పూర్తిచేద్దాం.

ఉదాహరణం 3 : MI = 3.5 సెం.మీ., IS = 6.5 సెం.మీ., $\widehat{M} = 75°$ $\widehat{I} = 105°$ మరియు $\widehat{S} = 120°$ గల MIST చతుర్భుజం నిర్మించండి.

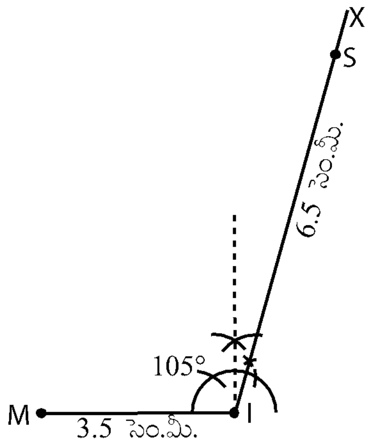
సాధన : ఈ నిర్మాణం కొరకు మనం వివిధ దశలు నిర్ధారించడానికి ఈ చిత్తు చిత్రం సహాయపడుతుంది. (చిత్రం 7.15) కింద ఈ దశలు సూచించబడ్డాయి.



(భుజాల కొలతలు సెం.మీ.లలో)

చిత్రం 7.15

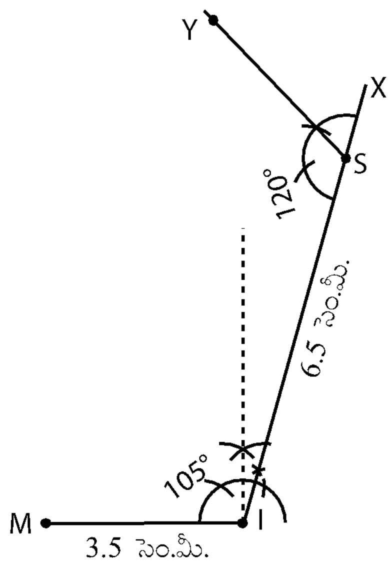
1వ దశ : బిందువులను ఎలా గుర్తిస్తారు? దేనిని పాదంగా ఎంచుకొంటారు. మొదటి దశ నిర్మాణం ఏది? (చిత్రం 7.16)



(భుజాల కొలతలు సెం.మీ.లలో)

చిత్రం 7.16

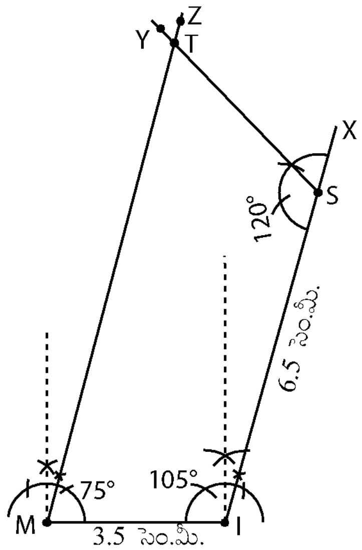
2వ దశ : S బిందువులో $\angle ISY = 120°$ కోణం గీయండి (చిత్రం 7.17)



(భుజాల కొలతలు సెం.మీ.లలో)

చిత్రం 7.17

3వ దశ : Mలో $\widehat{IMZ} = 75°$ కోణం గీయండి. (SY మరియు MZ లు ఎక్కడ ఖండిస్తున్నాయి?) ఈ ఖండనా బిందువును T అని గుర్తించినచో మనకు కావలసిన చతుర్భుజం లభిస్తుంది. (చిత్రం 7.18)



(భుజాల కొలతలు సెం.మీ.లలో)

చిత్రం 7.18

ఆలోచించండి, చర్చించండి, రాయండి

1. 75° బదులు ∠M = 100° అయితే, పై చతుర్భుజం MIST ని గీయడం సాధ్యమా?
2. PL = 6 సెం.మీ., LA = 9.5 సెం.మీ., ∠P = 75°, ∠L = 150° మరియు ∠A = 140°? ఉండునట్లు PLAN అను చతుర్భుజం నిర్మించడం సాధ్యమా? (**సూచన:** కోణాల మొత్తం గురించిన లక్షణాలను గుర్తుంచుకోండి).
3. ఒక సమాంతర చతుర్భుజంలో పార్శ్వ భుజాల పొడవులు తెలిశాయి. వాటిని గీయడానికి పై ఉదాహరణం లాగా కోణాల కొలతలు కూడా తెలిసివుండాలా?

అభ్యాసం 7.3

1. కింది చతుర్భుజాలు నిర్మించండి:

(i) చతుర్భుజం MORE
MO = 6 సెం.మీ.
OR = 4.5 సెం.మీ.
∠M = 60°
∠O = 105°
∠R = 105°

(ii) చతుర్భుజం PLAN
PL = 4 సెం.మీ.
LA = 6.5 సెం.మీ.
∠P = 90°
∠A = 110°
∠N = 85°

(iii) సమాంతర చతుర్భుజం HEAR
HE = 5 సెం.మీ.
EA = 6 సెం.మీ.
$\angle R = 85°$

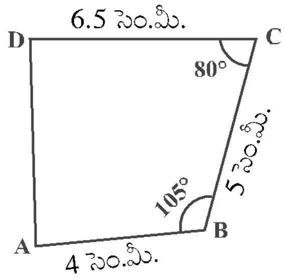
(iv) దీర్ఘ చతురస్రం OKAY
OK = 7 సెం.మీ.
KA = 5 సెం.మీ.

7.2.4 మూడు భుజాలు మరియు రెండు మధ్య కోణాలు ఇచ్చినప్పుడు :

ఈ విధమైన నిర్మాణంలో మొదట గీచెడి చిత్తు చిత్రంలో మధ్యకోణాలను జాగ్రత్తగా గమనించండి.

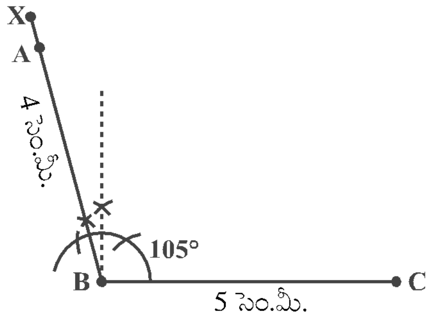
ఉదాహరణం 4 : AB = 4 సెం.మీ., BC = 5 సెం.మీ., CD = 6.5 సెం.మీ., $\widehat{B} = 105°$ మరియు $\widehat{C} = 80°$ గల ABCD చతుర్భుజం గీయండి.

సాధన : వెనుకటిలాగా ఒక చిత్తు చిత్రం గీచి, ఎలా ప్రారంభిస్తాం. అనంతరం 4 బిందువులు గుర్తించడానికి అనుసరించాల్సిన పద్ధతిని తయారు చేసుకుంటాం. (చిత్రం 7.19)



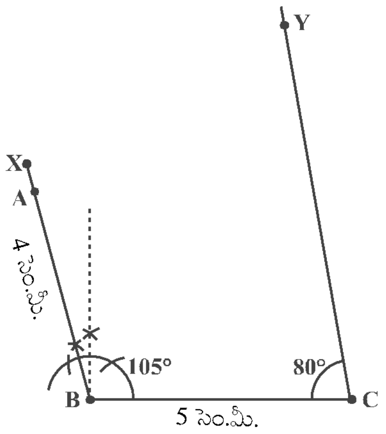
(భుజాలకొలతలు సెం.మీ.లలో)
చిత్రం 7.19

1వ దశ : B నుండి 5 సెం.మీ. పొడవుగల BC రేఖ గీయండి 105° కొలతగల $C\widehat{B}X$ కోణం నిర్మించండి. BX మీద B నుండి 4 సెం.మీ. దూరంలో A బిందువును గుర్తించండి. ఇప్పుడు మనకు B, C, మరియు A బిందువులు లభిస్తాయి, (చిత్రం 7.20)



(భుజాల కొలతలు సెం.మీ.లలో)
చిత్రం 7.20

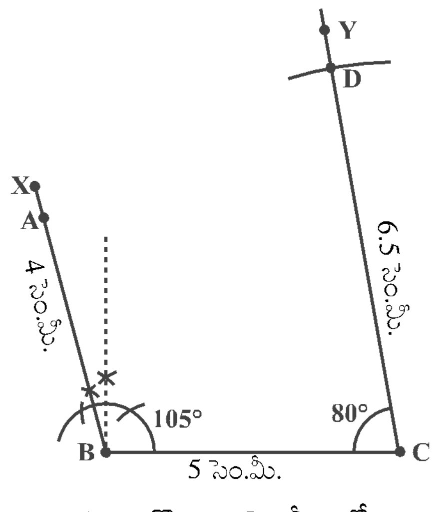
2వ దశ : నాల్గవ బిందువైన D, BC కి 80° కోణం అయ్యేటట్లుగల CY పైన ఉంది. (చిత్రం 7.21) అందువలన BC మీద C బిందువులో 80° కొలత యొక్క BCY కోణం గీయండి.



(భుజాల కొలతలు సెం.మీ.లలో)

చిత్రం 7.21

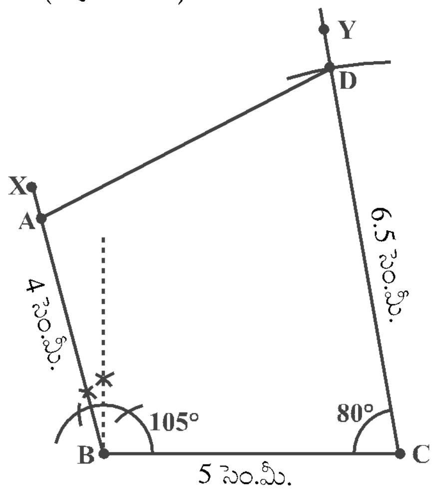
3వ దశ : CY మీద C నుండి 6.5 సెం.మీ. దూరంలో D బిందువు ఉంది. అందువలన C ని కేంద్రంగాపెట్టుకొని 6.5 సెం.మీ. వ్యాసార్థం యొక్క ఒక చాపం గీయండి. అది CY ని D లో ఖండించనీయండి. (చిత్రం 7.22)



(భుజాల కొలతలు సెం.మీ.లలో)

చిత్రం 7.22

4వ దశ : ఇప్పుడు ABCD చతుర్భుజాన్ని పూర్తిచేయండి. ఇదే మనకు కావలసిన చతుర్భుజం (చిత్రం 7.23)



(భుజాల కొలతలు సెం.మీ.లలో)

చిత్రం 7.23

ఆలోచించండి, చర్చించండి, రాయండి

1. పై ఉదాహరణలో మొదట BC ని గీశాం. దానికి బదులు వేరే బిందువునుండి ప్రారంభించినచో ఏమయ్యేది?
2. చతుర్భుజ నిర్మాణం కొరకు మనం ఇప్పటివరకు 5 కొలతలు ఉపయోగించాం. వేరే ఏదైనా ఐదు కొలతలు ఉపయోగించుకొని మనం చతుర్భుజం నిర్మించవచ్చా? ఈ ప్రశ్నకు జవాబివ్వడానికి కింది సమస్యలు ఉద్భయించవచ్చు.
   (i) AB = 5 సెం.మీ., BC = 5.5 సెం.మీ., CD = 4 సెం.మీ., AD = 6 సెం.మీ. మరియు $\angle B = 80°$. గల ABCD చతుర్భుజం.
   (ii) PQ = 4.5 సెం.మీ., $\angle P = 70°$, $\angle Q = 100°$, $\angle R = 80°$ మరియు $\angle S = 110°$ గల PQRS చతుర్భుజం.

చతుర్భుజం నిర్మించడానికి ఇచ్చిన వివరాలు చాలా లేదా చాలవా అని తెలుసుకోవడానికి మీవేఅయిన కొన్ని ఉదాహరణలు తీసుకొని చూడండి.

అభ్యాసం 7.4

1. కింది చతుర్భుజాలు నిర్మించండి.

(i) చతుర్భుజం DEAR
DE = 4 సెం.మీ.
EA = 5 సెం.మీ.
AR = 4.5 సెం.మీ.
$\angle E = 60°$
$\angle A = 90°$

(ii) చతుర్భుజం TRUE
TR = 3.5 సెం.మీ.
RU = 3 సెం.మీ.
UE = 4 సెం.మీ.
$\angle R = 75°$
$\angle U = 120°$

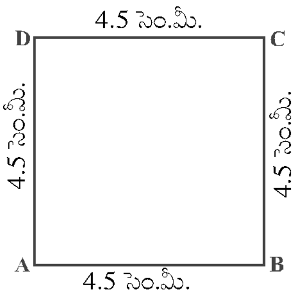
7.3 కొన్ని ప్రత్యేక సందర్భాలు

మనం ఒక చతుర్భుజం గీయడానికి ఇప్పటివరకు 5 కొలతలు ఉపయోగించాం 5 కంటే తక్కువ కొలతలు ఇచ్చినచో ఏదైనా చతుర్భుజం మనం నిర్మించవచ్చా? కింది ఉదాహరణలు అలాంటి కొన్ని ప్రత్యేక సందర్భాలను వివరిస్తున్నాయి.

ఉదాహరణం 5 : 4.5 సెం.మీ. పొడవుగల చతురస్రం నిర్మించండి.

సాధన : చూపినదానిలో మనకు ఒకే ఒక కొలత ఇచ్చినట్లు కనబడుతుంది. అయితే, నిజంగా, మనకు ఇంకా ఎక్కువ వివరాలు తెలుస్తాయి. ఎందుకనగా, మనకు కావలసిన ఆకృతి యొక్క ఒక విశేష చతుర్భుజమైన చతురస్రం అందులో ప్రతి కోణం కూడా లంబకోణమని తెలిసింది. (చిత్తు చిత్రం 7.24ను చూడండి) గీయండి.

చిత్తు చిత్రం



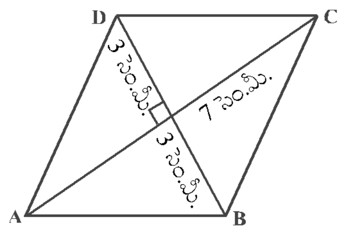
(భుజాల కొలతలు సెం.మీ.లలో)
చిత్రం 7.24

దీనివలన భు.కో.భు నిబంధనతో ΔABC నిర్మించడానికి సాధ్యమవుతుంది. అనంతరం నాల్గవ బిందువు D ని గుర్తించడం సులభం. ఇప్పుడు చతురస్రాన్ని మీరే గీయడానికి ప్రయత్నించండి.

ఉదాహరణం 6 : AC = 6 సెం.మీ. మరియు BD = 7 సెం.మీ. గల వజ్రాకృతి ABCD ని నిర్మించడం సాధ్యమా? కారణాలతోపాటు జవాబివ్వండి.

సాధన : కావలసిన వజ్రాకృతి యొక్క రెండు కర్ణాల కొలత మాత్రం ఇవ్వడింది. అయితే, అది వజ్రాకృతి అయినందువలన దాని లక్షణాల నుండి ఎక్కువ సహాయం పొందవచ్చు.

చిత్తు చిత్రం



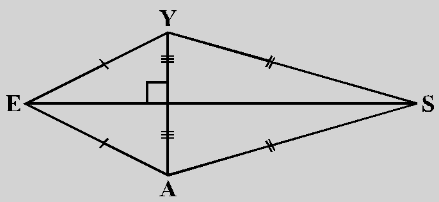
(భుజాల కొలతలు సెం.మీ.లలో)
చిత్రం 7.25

వజ్రాకృతి యొక్క కర్ణములు పరస్పరం లంబంగా ఖండిస్తాయి.

అందువలన మొదట 7 సెం.మీ. పొడవుగల ACని గీయండి. ఇప్పుడు దాని లంబార్ధకాలను నిర్మించండి. ఆ రెండు కూడా O బిందువులో ఖండించనీయండి. ఈ లంబార్ధకపు రెండు వైపుల 3 సెం.మీ. పొడవులో కత్తిరించండి. ఇప్పుడు B మరియు D బిందువులను పొందుతారు. ఇప్పుడు వజ్రాకృతి పైన తెలిపినట్లుగా గీయండి (చిత్రం 7.25).

చేసి చూడండి

1. PQ మరియు QR ల పొడవులు మాత్రం తెలిసినచో, PQRS చతుర్భుజాన్ని ఎలా నిర్మించగలరు.
2. AY = 8 సెం.మీ. EY = 4 సెం.మీ. మరియు SY = 6 సెం.మీ. ఉండునట్లు EASY గాలిపటం నిర్మించండి (చిత్రం 7.26)



చిత్రం 7.26

ఈ విధానంలో మీరు ఉపయోగించిన గాలిపటం యొక్క లక్షణాలేవి.

అభ్యాసం 7.5

కింది చతుర్భుజాలు నిర్మించండి.

1. RE = 5.1 సెం.మీ. గల చతురస్రం READ.
2. 6.4 సెం.మీ. మరియు 5.2 సెం.మీ. పొడవుగల కర్ణములగల వజ్రాకృతి
3. పార్శ్వ భుజాలు 5 సెం.మీ. మరియు 4 సెం.మీ. పొడవుగల దీర్ఘచతురస్రం.
4. OK = 5.5 సెం.మీ. మరియు KA = 4.2 సెం.మీ. ఉండునట్లు OKAY సమాంతర చతుర్భుజం. ఇది అనంతమా?

సారాంశం

1. ఐదు కొలతలతో ఒక అనన్య చతురస్రం నిర్మించవచ్చు.
2. నాలుగు భుజాలు మరియు ఒక కర్ణం ఇచ్చినప్పుడు ఒక నిర్దిష్ట చతుర్భుజం నిర్మించవచ్చు/గీయవచ్చు.
3. రెండు కర్ణములు మరియు మూడు భుజాలు ఇచ్చినప్పుడు ఒక నిర్దిష్ట చతుర్భుజం నిర్మించవచ్చు.
4. రెండు పార్శ్వ భుజాలు మరియు మూడు కోణాలు ఇచ్చినప్పుడు ఒక నిర్దిష్ట చతుర్భుజం నిర్మించవచ్చు.
5. మూడు భుజాలు మరియు రెండు మధ్య కోణాలు ఇచ్చినప్పుడు ఒక నిర్దిష్ట చతుర్భుజం నిర్మించవచ్చు.

♦♦♦♦

జవాబులు

1. సంఖ్యలతో ఆట

అభ్యాసం 1.1

1. A = 7, B = 6
2. A = 5, B = 4, C = 1
3. A = 6
4. A = 2, B = 5
5. A = 5, B = 0, C = 1
6. A = 5, B = 0, C = 2
7. A = 7, B = 4
8. A = 7, B = 9
9. A = 4, B = 7
10. A = 8, B = 1

అభ్యాసం 1.2

1. $y = 1$
2. $z = 0$ లేదా 9
3. $z = 0, 3, 6$ లేదా 9
4. 0, 3, 6 లేదా 9

2. అకరణీయ సంఖ్యలు

అభ్యాసం 2.1

1. (i) 2 (ii) $\frac{-11}{28}$

2. (i) $\frac{-2}{8}$ (ii) $\frac{5}{9}$ (iii) $\frac{-6}{5}$ (iv) $\frac{2}{9}$ (v) $\frac{19}{6}$

4. (i) $\frac{-1}{13}$ (ii) $\frac{-19}{13}$ (iii) 5 (iv) $\frac{56}{15}$ (v) $\frac{5}{2}$ (vi) -1

5. (i) 1 గుణకారపు అనన్యతాంశం (ii) సంవృత ధర్మం (iii) గుణకారపు విలోమం

6. $\frac{-96}{91}$ 7. సహచరధర్మం 8. లేదు, ఎందుకనగా గుణలబ్ధం 1 కాదు

9. అవును, ఎందుకనగా $0.3 \times 3\frac{1}{3} = \frac{3}{10} \times \frac{10}{3} = 1$

10. (i) 0 (ii) 1 మరియు (–1) (iii) 0

11. (i) కాదు (ii) 1, –1 (iii) $\frac{-1}{5}$ (iv) x (v) అకరణీయ సంఖ్య

(vi) ధనాత్మకం

అభ్యాసం 2.2

1. (i) $0 \frac{1}{4} \frac{2}{4} \frac{3}{4} \frac{4}{4} \frac{5}{4} \frac{6}{4} \frac{7}{4}$ (ii) $\frac{-6}{6} \frac{-5}{6} \frac{-4}{6} \frac{-3}{6} \frac{-2}{6} \frac{-1}{6} 0$

2. $\frac{-11}{11} \frac{-10}{11} \frac{-9}{11} \frac{-8}{11} \frac{-7}{11} \frac{-6}{11} \frac{-5}{11} \frac{-4}{11} \frac{-3}{11} \frac{-2}{11} \frac{-1}{11} 0$

3. వీటిలో కొన్ని 1, $\frac{1}{2}$, 0, –1, $\frac{-1}{2}$

4. $\frac{-7}{20}, \frac{-6}{20}, \frac{-5}{20} \frac{-4}{20} \frac{-3}{20}, \frac{-2}{20}, \frac{-1}{20}, 0, ..., \frac{1}{20}, \frac{2}{20}$ (ఇంకా ఈ విధమైన చాలా అకరణీయ సంఖ్యలు ఉండవచ్చు)

5. (i) $\frac{41}{60}, \frac{42}{60}, \frac{43}{60}, \frac{44}{60}, \frac{45}{60}$ (ii) $\frac{-8}{6}, \frac{-7}{6}, 0, \frac{1}{6}, \frac{2}{6}$ (iii) $\frac{9}{32}, \frac{10}{32}, \frac{11}{32}, \frac{12}{32}, \frac{13}{32}$

(ఇంకా ఈ విధమైన చాలా అఖరణీయ సంఖ్యలు ఉండవచ్చు)

6. $-\frac{3}{2}, -1, \frac{-1}{2}, 0, \frac{1}{2}$ (ఇంకా ఈ విధమైన చాలా అకరణీయ సంఖ్యలు ఉండవచ్చు)

7. $\frac{97}{160}, \frac{98}{160}, \frac{99}{160}, \frac{100}{160}, \frac{101}{160}, \frac{102}{160}, \frac{103}{160}, \frac{104}{160}, \frac{105}{160}, \frac{106}{160}$

(ఇంకా ఈ విధమైన చాలా అకరణీయ సంఖ్యలు ఉండవచ్చు)

3. ఏక చరరాశిగల రేఖీయ సమీకరణాలు

అభ్యాసం 3.1

1. $x = 9$ 2. $y = 7$ 3. $z = 4$ 4. $x = 2$

5. $x = 2$, 6. $t = 50$ 7. $x = 27$, 8. $y = 2.4$

9. $x = \frac{25}{7}$ 10. $y = \frac{3}{2}$ 11. $p = -\frac{4}{3}$ 12. $x = -\frac{8}{5}$

అభ్యాసం 3.2

1. $\frac{3}{4}$ 2. పొడవు = 52 మీ. వెడల్పు = 25 మీ.

3. $1\frac{2}{5}$ సెం.మీ. 4. 40 మరియు 55

5. 45,27 6. 16,17,18 7. 288,296 మరియు 304 8. 7,8,9

9. రాహుల్ వయస్సు 20 సంవత్సరాలు, హరూన్ వయస్సు 28 సంవత్సరాలు

10. 48 మంది విద్యార్థులు

11. బైచుంగ్ వయస్సు 17 సంవత్సరాలు: బైచుంగ్ తండ్రి వయస్సు 46 సంవత్సరాలు బైచుంగ్ తాత వయస్సు 72 సంవత్సరాలు

12. 5 సంవత్సరాలు 13. $-\frac{1}{2}$

14. ₹ 100 $\rightarrow$ 2000 నోట్లు; ₹ 50 $\rightarrow$ 3000 నోట్లు;
₹ 10 $\rightarrow$ 5000 నోట్లు

15. ₹ 1 నాణెములు = 80; ₹ 2 నాణెములు = 60; ₹ 5 నాణెములు = 20.

16. 19.

అభ్యాసం 3.3

1. $x = 18$ 2. $t = -1$ 3. $x = -2$ 4. $z = \frac{3}{2}$

5. $x = 5$, 6. $x = 0$ 7. $x = 40$, 8. $x = 10$

9. $y = \frac{7}{3}$ 10. $m = \frac{4}{5}$

అభ్యాసం 3.4

1. 4 2. 7,35 3. 36 4. 26 (లేదా 62)

5. శోబో వయస్సు 5 సంవత్సరాలు ; అతని తల్లి వయస్సు 30 సంవత్సరాలు.

6. పొడవు = 275 మీ.; వెడల్పు = 100 మీ. 7. 200మీ. 8. 72

9. మనుమరాలి వయస్సు 6 సంవత్సరాలు; తాత వయస్సు 60 సంవత్సరాలు.

10. అమన్ వయస్సు 60 సంవత్సరాలు; అతని కుమారుని వయస్సు 20 సంవత్సరాలు.

అభ్యాసం 3.5

1. $x = \frac{27}{10}$ 2. $n = 36$ 3. $x = -5$ 4. $x = 8$ 5. $t = 2$

6. $m = \frac{7}{5}$ 7. $t = -2$, 8. $y = \frac{2}{3}$ 9. $z = 2$ 10. $f = 0.6$

అభ్యాసం 3.6

1. $x = \frac{3}{2}$ 2. $x = \frac{35}{33}$ 3. $z = 12$ 4. $y = -8$ 5. $y = -\frac{4}{5}$

6. హరి వయస్సు 20 సంవత్సరాలు; హ్యారి వయస్సు 28 సంవత్సరాలు 7. $\frac{13}{21}$

4. చతుర్భుజాల పరిచయం

అభ్యాసం 4.1

1. (a) 1,2,5,6,7. (b) 1,2,5,6,7 (c) 1,2 (d) 2
2. (a) 2 (b) 9 (c) 0
3. 360° ; అవును
4. (a) 900° (b) 1080° (c) 1440° (d) $(n-2)\,180°$

5. సమాన భుజాలు మరియు సమాన కోణాలుగల ఒక బహుభుజి

(i) సమబాహు త్రిభుజం (ii) వర్గం

(iii) నియమిత షడ్భుజి

6. (a) $60°$ (b) $140°$ (c) $140°$ (d) $108°$

7. (a) $x + y + z = 360°$ (b) $x + y + z + w = 360°$

అభ్యాసం 4.2

1. (a) $360° - 250° = 110°$ (b) $360° - 310° = 50°$

2. (i) $\frac{360°}{9} = 40°$ (ii) $\frac{360°}{15} = 24°$

3. $\frac{360°}{24°} = 15$ భుజాలు

4. భుజాలు = 24

5. (i) కాదు ; (ఎందుకనగా, 22, $360°$ యొక్క విభాజకంకాలేదు)

(ii) కాదు ; (ఎందుకనగా ప్రతికోణం = $180° - 22° = 158°$, ఇది $360°$ దీని విభాజకం కాదు)

6. (a) సమబాహు త్రిభుజం ఒక నియమిత బహుభుజియైయుండి, 3 భుజాలు కలిగియుంటుంది. దాని అత్యంత చిన్న అంతరకోణం కొలత = $60°$

(b) (a) తో చాలా పెద్ద వెలుపలి కోణం కొలత $120°$ అనిచెప్పవచ్చు.

అభ్యాసం 4.3

1. (i) BC (ఎదురెదురు భుజాలు సమానం)

(ii) $\angle DAB$ (ఎదురెదురు కోణాలు సమానం)

(iii) OA (కర్ణములు పరస్పరం ఖండించుకుంటాయి)

(iv) $180°$ (అంతర అభిముఖ కోణాలు, ఎందుకనగా $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$

2. (i) $x = 80°$; $y = 100°$; $z = 80°$

(ii) $x = 130°$; $y = 130°$; $z = 130°$

(iii) $x = 90°$; $y = 60°$; $z = 60°$

(iv) $x = 100°$; $y = 80°$; $z = 80°$

(v) $x = 112°$; $y = 28°$; $z = 28°$

3. (i) కావచ్చు, అయితే, కానేకావాలనిలేదు.

(ii) కాదు (సమాంతర చతుర్భుజంలో, ఎదురెదురు భుజాలు సమానం అయితే $AD \neq BC$)

(iii) కాదు ; (సమాంతర చతుర్భుజంలో, ఎదురెదురుకోణాలు సమానం అయితే $\angle A \neq \angle C$)

4. ఉదాహరణకు ఒక గాలిపటం

5. $108°$; $72°$

6. ప్రతి కోణం లంబకోణం

7. $x = 110°$; $y = 40°$; $z = 30°$

8. (i) $x = 6$; $y = 9$ (ii) $x = 3$; $y = 13$

9. $x = 50°$

10. $\overline{NM} \parallel \overline{KL}$ (అంతర అభిముఖ కోణాల మొత్తం $180°$ ఉటుంది). అందువలన KLMN ఒక ట్రెపీజియం.

11. $60°$

12. $\angle P = 50°$; $\angle S = 90°$

అభ్యాసం 4.4

1. (b), (c), (f), (g), (h) లు సరి; మిగిలినవి తప్పు

2. (a) వజ్రాకృతి; చతురస్రం (b) చతురస్రం ; దీర్ఘచతురస్రం

3. (i) ఒకచతురస్రం నాలుగుభుజాలుగల ఆకృతి; అందువలన అది చతుర్భుజం

(ii) చతురస్రం సమానమైన ఎదురెదురు భుజాలును సమాంతరంగా ఉంటాయి అందువలన అది ఒక సమాంతర చతుర్భుజం.

(iii) చతురస్రం తన నాలుగు భుజాలను సమానంగా కల్గియున్న సమాంతర చతుర్భుజం అమదువలన ఆది ఒక వజ్రాకృతి.

(iv) చతురస్రం తన ప్రతి కోణాన్ని లంబకోణంగా కల్గియున్న సమాంతర చతుర్భుజం, అందువలన ఆది ఒక ధీర్ఘచతురస్రం.

4. (i) సమాంతర చతుర్భుజం, వజ్రాకృతి; చతురస్రం, ధీర్ఘచతురస్రం

(ii) వజ్రాకృతి, చతురస్రం (iii) చతురస్రం, ధీర్ఘచతురస్రం

5. రెండు కర్ణములు బహుభుజిలోనిలోపలిభాగంలో ఉన్నాయి.

6. $\overline{AD} \parallel \overline{BC}; \overline{AB} \parallel \overline{DC}$ అందువలన సమాంతర చతుర్భుజం ABCD లో కర్ణం $\overline{AC}$ యొక్క మధ్యబిందువు 'O'

5. వర్గాలు మరియు వర్గమూలాలు

అభ్యాసం 5.1

1. (i) 1 (ii) 4 (iii) 1 (iv) 9 (v) 6 (vi) 9
   (vii) 4 (viii) 0 (ix) 6 (x) 5
2. ఈ సంఖ్యలలో ఒకట్లస్థానంలోగల అంకెలు
   (i) 7 (ii) 3 (iii) 8 (iv) 2 (v) 0 (vi) 2
   (vii) 0 (viii) 0
3. (i), (ii)
4. 10000200001, 100000020000001
5. 1020304030201, 101010101^2
6. 20, 6, 42, 43
7. (i) 25 (ii) 100 (iii) 144
8. (i) 1+3+5+7+9+11+13 (ii) 1+3+5+7+9+11+13+15+17+19+21
9. (i) 24 (ii) 50 (iii) 198

అభ్యాసం 5.2

1. (i) 1024 (ii) 1225 (iii) 7396 (iv) 8649 (v) 5041 (vi) 2116
2. (i) 6,8,10 (ii) 14,48,50 (iii) 16,63,65 (iv) 18,80,82

అభ్యాసం 5.3

1. (i) 1,9 (ii) 4,6 (iii) 1,9 (iv) 5
2. (i), (ii), (iii)
3. 10, 13
4. (i) 27 (ii) 20 (iii) 42 (iv) 64 (v) 88 (vi) 98
   (vii) 77 (viii) 96 (ix) 23 (x) 90

5. (i) 7,42 (ii) 5,30 (iii) 7,84 (iv) 3,78 (v) 2,54 (vi) 3,48
6. (i) 7,6 (ii) 13,15 (iii) 11;6 (iv) 5,23 (v) 7,20 (vi) 5,18
7. 49
8. అడ్డవరుసల సంఖ్య = 45, ప్రతి అడ్డవరుసలోగల మొక్కలు = 45
9. 900 10. 3600

అభ్యాసం 5.4

1. (i) 48 (ii) 67 (iii) 59 (iv) 23 (v) 57
   (vi) 37 (vii) 76 (viii) 89 (ix) 24 (x) 32
   (xi) 56 (xii) 30
2. (i) 1 (ii) 2 (iii) 2 (iv) 3 (v) 3
3. (i) 1.6 (ii) 2.7 (iii) 7.2 (iv) 6.5 (v) 5.6
4. (i) 2,20 (ii) 53,44 (iii) 1,57 (iv) 41,28 (v) 31,63
5. (i) 4,23 (ii) 14,42 (iii) 4,16 (iv) 24,43 (v) 149,81
6. 21 మీ.
7. (a) 10 సెం.మీ. (b) 12 సెం.మీ.
8. 24 మొక్కలు
9. 16 మంది పిల్లలు

6. బీజీయ సమాసాలు మరియు సర్వ సమీకరణాలు

అభ్యాసం 6.1

క్ర.సం	బీజపదాలు	సంఖ్యా సహగుణకాలు
(i)	$5xyz^2$ $-3zy$	5 –3
(ii)	1 x x^2	1 1 1

(iii)	$4x^2y^2$ $-4x^2y^2z^2$ z^2	4 –4 1
(iv)	3 $-pq$ qr $-rp$	3 –1 1 –1
(v)	$\frac{x}{2}$ $\frac{y}{2}$ $-xy$	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ –1
(vi)	$0.3a$ $-0.6ab$ $0.5b$	0.3 –0.6 $0.5b$

2. ఏకపదులు : 1000, pqr

   ద్విపదులు : $x + y, 2y - 3y^2, 4z - 15z^2,$
   $p^2q + pq^2, \quad 2p + 2q$

   త్రిపదాలు : $7 + y + 5x, 2y - 3y^2 + 4y^3,$
   $5x - 4y + 3xy$.

   ఈ గుంపులకు చేరని బహుపదులు : $x + x^2 + x^3 + x^4, \quad ab + bc + cd + da$

3. (i) 0 (ii) $ab + bc + ac$
   (iii) $-p^2q^2 + 4pq + 9$ (iv) $2(l^2 + m^2 + n^2 + lm + mn + nl)$

4. (a) $8a - 2ab + 2b - 15$ (b) $2xy - 7yz + 5zx + 10xyz$
   (c) $p^2q - 7pq^2 + 8pq - 18q + 5p + 28$

అభ్యాసం 6.2

1. (i) $28p$ (ii) $-28p^2$ (iii) $-28p^2q$ (iv) $-12p^4$ (v) 0
2. pq ; $50\,mn$; $100\,x^2y^2$; $12x^3$; $12mn^2p$

3.

మొదటి ఏకపదం → / రెండవ ఏకపదం ↓	**$2x$**	**$-5y$**	**$3x^2$**	**$-4xy$**	**$7x^2y$**	**$-9x^2y^2$**
$2x$	$4x^2$	$-10xy$	$6x^3$	$-8x^2y$	$14x^3y$	$-18x^3y^2$
$-5y$	$-10xy$	$25y^2$	$-15x^2y$	$20xy^2$	$-35x^2y^2$	$45x^2y^3$
$3x^2$	$6x^3$	$-15x^2y$	$9x^4$	$-12x^3y$	$21x^4y$	$-27x^4y^2$
$-4xy$	$-8x^2y$	$20xy^2$	$-12x^3y$	$16x^2y^2$	$-28x^3y^2$	$36x^3y^3$
$7x^2y$	$14x^3y$	$-35x^2y^2$	$21x^4y$	$-28x^3y^2$	$49x^4y^2$	$-63x^4y^3$
$-9x^2y^2$	$-18x^3y^2$	$45x^2y^3$	$-27x^4y^2$	$36x^3y^3$	$-63x^4y^3$	$81x^4y^4$

4. (i) $105a^7$ (ii) $64pqr$ (iii) $4x^4y^4$ (iv) $6abc$

5. (i) $x^2\,x^2x^2$ (ii) $-a^6$ (iii) $1024y^6$ (iv) $36a^2\,b^2\,c^2$ (v) $-m^3\,n^2\,p$

అభ్యాసం 6.3

1. (i) $4pq + 4pr$ (ii) $a^2b - a^2b$ (iii) $7a^3b^2 + 7a^2b^3$

   (iv) $4a^3 + 36a$ (v) 0

2. (i) $ab + ac + ad$ (ii) $5x^2y + 5xy^2 - 25xy$

   (iii) $6p^3 - 7p^2 + 5p$ (iv) $4p^4q^2 - 4p^2q^4$

   (v) $a^2bc + ab^2c + abc^2$

3. (i) $8a^{50}$ (ii) $-\frac{3}{5}x^3y^3$ (iii) $-4p^4q^4$ (iv) x^{10}

4. (a) $12x^2 - 15x + 3$ (i) 66 (ii) $-\frac{3}{2}$

   (b) $a^3 + a^2 + a + 5$ (i) 5 (ii) 8 (iii) 4

5. (a) $p^2 + q^2 + r^2 - pq - qr - pr$

   (b) $-2x^2 - 2y^2 - 4xy + 2yz + 2zx$

   (c) $5l^2 + 25ln$

   (d) $-3a^2 - 2b^2 + 4c^2 - ab + 6bc - 7ac$

అభ్యాసం 6.4

1. (i) $8x^2 + 14x - 15$ (ii) $3y^2 - 8y + 32$
   (iii) $6.25l^2 - 0.25m^2$ (iv) $ax + 5a + 3bx + 15b$
   (v) $6p^2q^2 + 5pq^3 - 6q^4$ (vi) $3a^4 + 10a^2b^2 - 8b^4$
2. (i) $15 - x - 2x^2$ (ii) $7x^2 + 48xy - 7y^2$
   (iii) $a^3 + a^2b^2 + ab + b^3$ (iv) $2p^3 + p^2q - 2pq^2 - q^3$
3. (i) $x^3 + 5x^2 - 5x$ (ii) $a^2b^3 + 3a^2 + 5b^3 + 20$
   (iii) $t^3 - st + s^2t^2 - s^3$ (iv) $4ac$
   (v) $3x^2 + 4xy - y^2$ (vi) $x^3 + y^3$
   (vii) $2.25x^2 - 16y^2$ (viii) $a^2 + b^3 - c^2 + 2ab$

అభ్యాసం 6.5

1. (i) $x^2 + 6x + 9$ (ii) $4y^2 + 20y + 25$
   (iii) $4a^2 - 28a + 49$ (iv) $9a^2 - 3a + \frac{1}{4}$
   (v) $1.21m^2 - 0.16$ (vi) $b^4 - a^4$
   (vii) $36x^2 - 49$ (viii) $a^2 - 2ac + c^2$
   (ix) $\frac{x^2}{4} + \frac{3xy}{4} + \frac{9y^2}{16}$ (x) $49a^2 - 126ab + 81b^2$
2. (i) $x^2 + 10x + 21$ (ii) $16x^2 + 24x + 5$
   (iii) $16x^2 - 24x + 5$ (iv) $16x^2 + 16x - 5$
   (v) $4x^2 + 16xy + 15y^2$ (vi) $4a^4 + 28a^2 + 45$
   (vii) $x^2y^2z^2 - 6xyz + 8$
3. (i) $b^2 - 14b + 49$ (ii) $x^2y^2 + 6xyz + 9z^2$
   (iii) $36x^4 - 60x^2y + 25y^2$ (iv) $\frac{4}{9}m^2 + 2mn + \frac{9}{4}n^2$
   (v) $0.16p^2 + 0.04pq + 0.25q^2$ (vi) $4x^2y^2 + 20xy^2 + 25y^2$

4. (i) $a^4 - 2a^2b^2 + b^4$ (ii) $40x$

(iii) $98m^2 + 128n^2$ (iv) $41m^2 + 80mn + 41n^2$

(v) $4p^2 - 4q^2$ (vi) $a^2a^2 + b^2c^2$

(vii) $m^4 + n^4m^2$

6. (i) 5041 (ii) 9801 (iii) 10404

(iv) 996004 (v) 27.04 (vi) 89991

(vii) 6396 (viii) 79.21 (ix) 9.975

7. (i) 200 (ii) 0.08

(iii) 1800 (iv) 84

8. (i) 10712 (ii) 26.52

(iii) 10094 (iv) 95.06

♦♦♦♦