अध्याय 5

महत्तम समापवर्तक एवं लघुत्तम समापवर्त्य

अपवर्तक तथा अपवर्त्य

यदि संख्या a, संख्या b को पूर्णतया विभाजित कर दे, तो संख्या a को संख्या b का अपवर्तक कहते हैं तथा संख्या b को संख्या a का अपवर्त्य कहते हैं।

जैसे— 2 तथा 5 को 10 का अपवर्तक कहते हैं तथा 10 को 2 तथा 5 का अपवर्त्य कहते हैं।

महत्तम समापवर्तक

ऐसी संख्याएँ, जो दी गई दो या दो से अधिक संख्याओं को पूर्णतया विभाजित करें, उन संख्याओं के समापवर्तक कहलाती हैं।

ऐसी बड़ी से बड़ी संख्या, जो दी गई दो या दो से अधिक संख्याओं को पूर्णतया विभाजित करें, उन संख्याओं का महत्तम समापवर्तक (म.स.) कहलाती हैं।

जैसे—15, 30, 45 के समापवर्तक 3, 5, 15 हैं, परन्तु 15, 30, 45 का महत्तम समापवर्तक 15 है।

महत्तम समापवर्तक ज्ञात करने की विधियाँ

महत्तम समापवर्तक ज्ञात करने की दो विधियाँ हैं

1. **गुणनखण्ड विधि** प्रत्येक दी गई संख्या को अभाज्य गुणनखण्डों के रूप में लिख लेते हैं तथा सभी संख्याओं में उभयनिष्ठ गुणनखण्डों का गुणनफल ही दी गई संख्याओं का म.स. होता है।

उदाहरण 1 24, 30, 42 का म.स. ज्ञात कीजिए।

(a) 6 (b) 7
(c) 8 (d) 9

हल *(a)* $\because 24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$

$30 = 2 \times 3 \times 5$

$42 = 2 \times 3 \times 7$

$\therefore$ 24, 30 तथा 42 का म.स. $= 2 \times 3 = 6$

2. **भाग विधि** (Division Method) दी गई दो संख्याओं में से बड़ी संख्या को छोटी संख्या से विभाजित किया जाता है तथा पुनः शेषफल द्वारा भाजक में भाग दिया जाता है। यह क्रिया तब तक दोहराई जाती है, जब तक शेषफल शून्य न प्राप्त हो जाए। अन्तिम भाजक ही दी गई दो संख्याओं का म.स. होता है।

दो से अधिक संख्याओं का म.स. निकालने में पहले दो संख्याओं का म.स. ज्ञात किया जाता है तथा इस म.स. का तीसरी संख्या के साथ म.स. निकालते हैं। यही म.स. तीनों संख्याओं का अभीष्ट म.स. होता है।

यह विधि निम्न उदाहरण द्वारा समझी जा सकती है

उदाहरण 2 36, 54, 63 का म.स. ज्ञात कीजिए।

(a) 8 (b) 9 (c) 10 (d) 18

हल *(b)* सर्वप्रथम 36 तथा 54 का म.स. इस विधि से निकालते हैं।

```
36 ) 54 ( 1
     36
     18 ) 36 ( 2
          36
          ×
```

अतः 36 तथा 54 का म.स. = 18

अब, 18 तथा 63 का म.स. निकालते हैं।

```
18 ) 63 ( 3
     54
      9 ) 18 ( 2
          18
          ×
```

अतः 36, 54 तथा 63 का म.स. 9 है।

लघुत्तम समापवर्त्य

ऐसी संख्याएँ, जो दी गई दो या दो से अधिक संख्याओं में से प्रत्येक से पूर्णतया विभाजित हो, उन संख्याओं के समापवर्त्य कहलाती हैं।

ऐसी छोटी से छोटी संख्या, जो दी गई दो या दो से अधिक संख्याओं में प्रत्येक से पूर्णतया विभाजित हो, उन संख्याओं का लघुत्तम समापवर्त्य (ल.स.) कहलाती हैं।

जैसे— 3, 5 के समापवर्त्य 15, 30, 45, ... हैं, परन्तु 3, 5 का लघुत्तम समापवर्त्य 15 है।

लघुत्तम समापवर्त्य ज्ञात करने की विधियाँ

लघुत्तम समापवर्त्य ज्ञात करने की भी दो विधियाँ हैं

1. **गुणनखण्ड विधि** (Factorisation Method) दी गई संख्याओं के अभाज्य गुणनखण्ड ज्ञात करते हैं। संख्याओं के अभाज्य गुणनखण्डों के सबसे बड़े घातांकों वाली संख्याओं का गुणनफल ही अभीष्ट ल.स. होता है।

उदाहरण 3 40, 36 व 126 का ल.स. ज्ञात कीजिए।

(a) 2520 (b) 2620 (c) 2530 (d) 2430

हल *(a)* $40 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 = 2^3 \times 5$

$36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 3^2 \times 2^2$ तथा

$126 = 2 \times 3 \times 3 \times 7 = 2 \times 3^2 \times 7$

$\therefore$ 40, 36 व 126 का ल.स. $= 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 = 8 \times 9 \times 35 = 2520$

2. **भाग विधि** इस विधि को निम्न उदाहरण द्वारा समझा जा सकता है

उदाहरण 4 24, 36 का ल.स. ज्ञात कीजिए।

(a) 360 (b) 45 (c) 72 (d) 108

हल *(c)*

2	18, 24, 36
2	9, 12, 18
2	9, 6, 9
3	9, 3, 9
3	3, 1, 3
	1, 1, 1

18, 24 व 36 का ल.स. $= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 72$

उदाहरण 5 चार घण्टियाँ 6, 8, 12 तथा 18 सेकण्ड के अन्तर पर बजती है यदि वे 12 बजे एक साथ बजती हैं, तो बताएँ कि वे पुन: कितने सेकण्ड के बाद एक साथ बजेंगी?

(a) 40 सेकण्ड
(b) 15 सेकण्ड
(c) 72 सेकण्ड
(d) 108 सेकण्ड

हल *(c)* इस प्रकार के प्रश्नों में हम ल.स. निकालते हैं

2	6, 8, 12, 18
2	3, 4, 6, 9
2	3, 2, 3, 9
3	3, 1, 3, 9
3	1, 1, 1, 3
	1, 1, 1, 1

$= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 72$

अर्थात् घण्टियाँ 72 सेकण्ड बाद पुनः एक साथ बजेंगी।

अति महत्त्वपूर्ण फॉर्मूले

- भिन्नों का ल.स. $= \dfrac{\text{अंशों का ल.स.}}{\text{हरों का म.स}}$
- भिन्नों का म.स. $= \dfrac{\text{अंशों का म.स.}}{\text{हरों का ल.स.}}$
- पहली संख्या × दूसरी संख्या = ल.स. × म.स.
- दशमलव संख्याओं का म.स. तथा ल.स. निकालने के लिए सर्वप्रथम सभी दी गई संख्याओं को समान दशमलव रूप में लिखते हैं। इन संख्याओं को प्राकृतिक संख्या मानकर इनका म.स. या ल.स. निकालते हैं। इसके बाद प्राप्त म.स. या ल.स. में दशमलव समान दशमलव रूप के अनुसार लगाया जाता है।
- यदि किन्ही संख्याओं में कोई उभयनिष्ठ गुणनखण्ड न हो, तो उनका म.स. 1 तथा ल.स. उनका गुणनफल होता है।
- a, b और c को पूर्णतया विभाजित करने वाली सबसे बड़ी संख्या = a, b और c का म.स.
- a, b और c द्वारा पूर्णतया विभाजित होने वाली सबसे छोटी संख्या = a, b और c का ल.स.

अभ्यास के लिए प्रश्न

म.स और ल.स. पर आधारित प्रश्न

1. $2^3 \times 3^2 \times 5^4$ तथा $2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7$ का म.स. होगा

(a) 180 (b) 360 (c) 540 (d) 35

2. 3556 तथा 3444 का म.स. होगा

(a) 25 (b) 28 (c) 3 (d) 26

3. 28 और 42 का ल.स. तथा म.स. किस अनुपात में है?

(a) 6 : 1 (b) 2 : 3 (c) 3 : 2 (d) 7 : 2

4. $\frac{5}{6}, \frac{10}{18}, \frac{25}{36}$ का म.स. है

(a) 5/36 (b) 25/6
(c) 25/36 (d) 5/18

5. $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}$ का ल.स. है

(a) 42 (b) 24
(c) 12 (d) 4/5

म.स. और ल.स. के अनुप्रयोगों पर आधारित प्रश्न

6. 14 तथा 16 के ल.स. तथा म.स. का गुणनफल है

(a) 2 (b) 12 (c) 224 (d) 112

7. $2^{-7}, 2^{-4}$ तथा 2^{-9} का ल.स. है

(a) 2^{-8} (b) 2^{-7}
(c) 2^{-9} (d) इनमें से कोई नहीं

8. 11, 11.11, 0.11, 0.011 का म.स. है

(a) 0.011 (b) 1.1 (c) 0.11 (d) 0.111

9. $\frac{2}{3}, \frac{3}{5}$ तथा $\frac{4}{7}$ का लघुत्तम समापवर्त्य है

(a) $\frac{1}{36}$ (b) 36
(c) $\frac{1}{12}$ (d) 12

10. दो संख्याओं का ल.स. 495 तथा म.स. 5 हैं। यदि उन संख्याओं का योग 100 है, तो उनका अन्तर है

(a) 10 (b) 46 (c) 70 (d) 90

11. दो संख्याओं का ल.स. 225 है तथा उनका म.स. 5 हैं। यदि एक संख्या 25 हो, तो दूसरी संख्या होगी

(a) 5 (b) 25
(c) 45 (d) 225

12. दो संख्याओं का अनुपात 15 : 11 है। यदि उनका महत्तम समापवर्तक 12 हो, तो वे संख्याएँ हैं

(a) 180, 132 (b) 132, 180
(c) 180, 232 (d) 180, 135

13. दो संख्याओं का म.स. 8 है। तब निम्नलिखित में से कौन-सी संख्या ऐसी है, जो उनका ल.स. नहीं हो सकती?

(a) 24 (b) 48 (c) 56 (d) 60

14. वह छोटी से छोटी संख्या, जिसे 12, 15, 20 या 54 से भाग करने पर प्रत्येक दशा में शेष 4 बचे, है

(a) 450 (b) 454
(c) 540 (d) 544

15. 23 का ऐसा सबसे छोटा गुणज जिसे 18, 21 और 24 से भाग देने पर क्रमशः 7, 10 और 13 शेष बचे, है

(a) 3013 (b) 3024 (c) 3002 (d) 3036

16. तीन लोहे की छड़े 64 सेमी, 80 सेमी और 96 सेमी लम्बाइयों की हैं। किसी एक छड़ के द्वारा कम-से-कम कितनी लम्बाई का कपड़ा पूरा-पूरा नापा जा सकता है?

(a) 0.96 मी (b) 19.20 मी
(c) 9.60 मी (d) 96.00 मी

17. एक माली को पंक्तियों में बराबर संख्या में पौधे लगाने को कहा गया। उसने प्रत्येक पंक्ति में 6, 8, 10 और 12 पौधे लगाने की कोशिश की लेकिन प्रत्येक बार पाँच पौधे शेष रह गए। जब उसने एक पंक्ति में 13 पौधे लगाए, तो कोई पौधा शेष नहीं बचा। पौधों की न्यूनतम संख्या होगी।

(a) 245 (b) 125 (c) 485 (d) 845

18. एक व्यापारी के पास तीन प्रकार के तेल तीन मात्राओं कमशः 435 लीटर, 493 लीटर और 551 लीटर में हैं। भरने के लिए एक ही माप के कम-से-कम कितने बर्तन चाहिए?

(a) 51 (b) 61 (c) 47 (d) 45

19. तीन विभिन्न चौराहों की बत्तियाँ क्रमशः 48 सेकण्ड, 72 सेकण्ड तथा 108 सेकण्ड के बाद बदलती रहती हैं। यदि वे 7 : 20 : 00 बजे एक साथ बदलें, तो पुनः एक साथ कितने बजे बदलेंगी?

(a) 7 : 27 : 12 (b) 8 : 28 : 12
(c) 7 : 25 : 32 (d) 7 : 26 : 12

20. कुछ अमरूद 16 या 40 या 70 लड़कों में इस प्रकार बाँटें कि प्रत्येक को बराबर-बराबर अमरूद मिले यदि कोई अमरूद शेष न बचे, तो अमरूद की कम-से-कम संख्या क्या होनी चाहिए?

(a) 560 (b) 280
(c) 140 (d) इनमें से कोई नहीं

✓ विगत् वर्षों के प्रश्न

21. पाँच घण्टे एकसाथ बजना शुरू करते हैं और क्रमशः 6, 7, 8, 9 और 12 सेकण्ड के अन्तराल पर बजते हैं। कितने सेकण्ड बाद वे फिर एकसाथ बजेंगे? **[SSC कांस्टेबल, 2013]**

(a) 72 (b) 612 (c) 504 (d) 318

22. एक दुग्ध विक्रेता के पास 21 लीटर गाय का दूध है, 42 लीटर टोन्ड दूध है और 63 लीटर डबल टोन्ड दूध है। यदि वह उन्हें टीन के डिब्बों में इस प्रकार पैक करना चाहे कि हर डिब्बे में उतने ही लीटर दूध हो और किसी भी दो तरह के दूध को एक डिब्बे में मिलाना न चाहे, तो डिब्बों की अपेक्षित न्यूनतम संख्या है **[SSC कांस्टेबल, 2012]**

(a) 3 (b) 6
(c) 9 (d) 12

23. A, B और C एक ही समय एक वृत्ताकार स्टेडियम में एक ही बिन्दु से एक ही दिशा में भागना शुरू करते हैं। A एक चक्कर 252 सेकण्ड में पूरा कर लेता है, B 308 सेकण्ड में और C 198 सेकण्ड में। वे आरम्भिक बिन्दु पर कितने समय बाद फिर मिलेंगे? **[SSC कांस्टेबल, 2012]**

(a) 26 मिनट 18 सेकण्ड
(b) 42 मिनट 36 सेकण्ड
(c) 45 मिनट
(d) 46 मिनट 12 सेकण्ड

24. दो संख्याओं का लघुत्तम समापवर्त्य 520 है और उनका महत्तम समापवर्तक 4 है। यदि उनमें एक संख्या 52 हो, तो दूसरी कितनी होगी? **[SSC कांस्टेबल, 2012]**

(a) 40 (b) 42
(c) 50 (d) 52

उत्तरमाला

1 (a)	2 (b)	3 (a)	4 (a)	5 (c)
6 (c)	7 (d)	8 (a)	9 (d)	10 (a)
11 (c)	12 (a)	13 (d)	14 (d)	15 (a)
16 (c)	17 (d)	18 (a)	19 (a)	20 (a)
21 (c)	22 (b)	23 (d)	24 (a)	

संकेत एवं हल

1. (a) प्रथम संख्या $= 2^3 \times 3^2 \times 5^4$

द्वितीय संख्या $= 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7$

$\therefore$ अभीष्ट म. स. $= 2^2 \times 3^2 \times 5$

$= 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 180$

2. (b)

```
3444) 3556 (1
      3444
      112) 3444 (30
           336
            84)112(1
               84
               28)84(3
                  84
                   ×
```

अभीष्ट म. स. = 28

3. (a) $\because 28 = 2 \times 2 \times 7$ व $42 = 2 \times 3 \times 7$

28 व 42 का म.स. $= 7 \times 2 = 14$

तथा 28 व 42 का ल.स.

$= 7 \times 2 \times 2 \times 3 = 84$

$\therefore$अभीष्ट अनुपात $= \dfrac{\text{ल.स.}}{\text{म.स.}} = \dfrac{84}{14} = \dfrac{6}{1} = 6 : 1$

4. (a) $\dfrac{5}{6}, \dfrac{10}{18}, \dfrac{25}{36}$ का म.स.

$= \dfrac{5, 10, 25 \text{ का म.स.}}{6, 18, 36 \text{ का ल.स.}} = \dfrac{5}{36}$

5. (c) $\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}$ का ल.स.

$= \dfrac{1, 2, 3, 4 \text{ का ल.स.}}{2, 3, 4, 5 \text{ का ल.स.}} = \dfrac{12}{1} = 12$

पहली संख्या = 14 तथा दूसरी संख्या = 16

$\because$ म.स. × ल.स. = पहली संख्या × दूसरी संख्या

$\therefore$ म.स. × ल.स. $= 14 \times 16 = 224$

7. (d) $2^{-7}, 2^{-4}, 2^{-9}$ का ल.स.

$= \dfrac{1}{2^7, 2^4, 2^9 \text{ का म.स.}} = \dfrac{1}{2^4} = 2^{-4}$

8. (a) 11, 11.11, 0.11, 0.11 का म.स.

$= \dfrac{11}{1}, \dfrac{1111}{100}, \dfrac{11}{100}, \dfrac{11}{1000}$ का म.स.

$= \dfrac{11, 1111, 11, \text{ का म. स.}}{1, 100, 100, 1000, \text{ का ल.स.}}$

$= \dfrac{11}{1000} = 0.011$

9. (d) $\dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{7}$ का ल.स.

9. (d) $\frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{4}{7}$ का ल.स.

$= \frac{2, 3, 4 \text{ का ल.स.}}{3, 5, 7 \text{ का म.स.}}$

$= \frac{12}{1} = 12$

10. (a) माना संख्याएँ क्रमशः 5a और 5b हैं, तब

$5a + 5b = 100$

$a + b = 20$ ...(i)

$\because$ $5a \times 5b = 495 \times 5$

$a \times b = 99$ ...(ii)

समी (i) और (ii) से, $a = 11$ और $b = 9$

$\therefore$ अभीष्ट अन्तर $= 5 \times 11 - 5 \times 9$

$= 55 - 45 = 10$

11. (c) दूसरी संख्या $= \frac{\text{म.स.} \times \text{ल.स.}}{\text{पहली संख्या}}$

$= \frac{225 \times 5}{25} = 45$

12. (a) माना संख्याएँ 15x तथा 11x हैं। तब उनका म.स. = x परन्तु x = 12

अतः वे संख्याएँ 15 × 12 तथा 11 × 12 हैं।

अतः संख्याएँ 180 तथा 132 हैं।

13. (d) दिए गए विकल्पों में से केवल 60, 8 से विभाज्य नहीं है अर्थात् जिन संख्याओं का म.स. 8 है उनका ल.स. 60 नहीं हो सकता है।

14. (d)

2	12, 15, 20, 54
2	6, 15, 10, 27
3	3, 15, 5, 27
9	1, 5, 5, 9
5	1, 5, 5, 1
	1, 1, 1, 1

12, 15, 20 और 54 का ल. स.

$= 2 \times 2 \times 3 \times 9 \times 5 = 540$

$\therefore$ अभीष्ट संख्या = 540 + 4 = 544

15. (a) 18 − 7 = 21 − 10 = 24 − 13 = 11

2	18, 21, 24
2	9, 21, 12
2	9, 21, 6
3	9, 21, 3
	3, 7, 1

18, 21 और 24 का ल. स.

$= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 7$

$= 504$

$\therefore$ अभीष्ट संख्या $= 504 \times 6 - 11$

$= 3024 - 11 = 3013$

16. (c)

2	64, 80, 96
2	32, 40, 48
2	16, 20, 24
2	8, 10, 12
2	4, 5, 6
	2, 5, 3

अतः 64, 80 और 96 का ल. स.

$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$

$= 64 \times 15$

$= 960$

अभीष्ट कपड़े की नाप = 960 सेमी

या 9.60 मी [∵ 1 सेमी = 1/100 मी]

17. (d)

2	6, 8, 10, 12
2	3, 4, 5, 6
2	3, 2, 5, 3
3	3, 1, 5, 3
5	1, 1, 5, 1
	1, 1, 1, 1

$\therefore$ 6, 8, 10 और 12 का ल. स.

$= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$

$= 120$

$\therefore$ पौधों की न्यूनतम संख्या $= 120 \times k + 5$

k का वह न्यूनतम मान, जिससे प्राप्त संख्या 13 से पूर्णत विभाजित हों

$\therefore$ k = 7 रखने पर

$= 120 \times 7 + 5$

$= 840 + 5 = 845$

18. (a) पहले 435 लीटर और 493 लीटर का म.स. ज्ञात करते हैं।

```
435)493(1
    435
    ----
     58)435(7
        406
        ----
         29)58(2
            58
            --
             ×
```

अब, 29 लीटर और 551 लीटर का म.स. लेने पर,

```
29)551(19
   29
   ---
   261
   261
   ---
    ×
```

अतः 435 लीटर, 493 लीटर और 551 लीटर का म.स. = 29 लीटर

$\therefore$ अभीष्ट बर्तनों की संख्या

$= \frac{435}{29} + \frac{493}{29} + \frac{551}{29}$

$= 15 + 17 + 19 = 51$

19. (a) वह समय जिसके बाद बत्तियाँ पुनः इकट्ठी बदलेंगी

= 48,72,108 का ल.स. = 432 सेकण्ड = 7 मिनट 12 सेकण्ड

$\therefore$ पुनः इकट्ठा परिवर्तन होगा

= 7 : (20 + 7) : 12 बजे

= 7 : 27 : 12 बजे

20. (a) इस प्रकार के प्रश्नों में ल.स. निकालते हैं।

2	16, 40, 70
2	8, 20, 35
2	4, 10, 35
2	2, 5, 35
5	1, 5, 35
7	1, 1, 7
	1, 1, 1

$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 7 = 560$ अमरूद

अतः कम-से-कम अमरूदों की संख्या = 560

21. (c)

2	6, 7, 8, 9, 12
2	3, 7, 4, 9, 6
2	3, 7, 2, 9, 3
3	3, 7, 1, 9, 3
3	1, 7, 1, 3, 1
7	1, 7, 1, 1, 1
	1, 1, 1, 1, 1

$\therefore$ ल. स. $= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 7 = 504$

अतः पाँचों घण्टे 504 सेकण्ड बाद फिर एकसाथ बजेंगे।

22. (b) अभीष्ट संख्या

$= \frac{21, 42 \text{ और } 63 \text{ का ल. स.}}{21, 42 \text{ और } 63 \text{ का म. स.}}$

$= \frac{2 \times 3 \times 3 \times 7}{21} = 6$

23. (d) A, B और C के मिलने का समय

= 252, 308 एवं 198 का ल. स.

= 2772 सेकण्ड = 46 मिनट 12 सेकण्ड

24. (a) पहली संख्या × दूसरी संख्या

= ल. स. × म. स.

52 × दूसरी = 520 × 4

$\Rightarrow$ दूसरी संख्या $= \frac{520 \times 4}{52} = 40$