# વાસ્તવિક સંખ્યાઓ 1

## 1.1 પ્રાસ્તાવિક

ધોરણ IX માં તમે વાસ્તવિક સંખ્યાઓની દુનિયામાં ડોકિયું કર્યું અને તમને અસંમેય સંખ્યાઓ મળી. આ પ્રકરણમાં આપણે વાસ્તવિક સંખ્યાઓની ચર્ચા ચાલુ રાખીશું. આપણે વિભાગ 1.2 અને 1.3 માં ધન પૂર્ણાંકોના ખૂબ જ અગત્યના ગુણધર્મો, યુક્લિડની ભાગ પ્રવિધિ અને અંકગણિતના મૂળભૂત પ્રમેયથી પ્રારંભ કરીશું.

**'યુક્લિડની ભાગ પ્રવિધિ'** નામ જ દર્શાવે છે કે, તેને પૂર્ણાંકોની વિભાજ્યતા સાથે કંઈક સંબંધ છે. સરળ ભાષામાં કહીએ તો કોઈ પણ ધન પૂર્ણાંક $a$ ને બીજા કોઈ ધન પૂર્ણાંક $b$ વડે ભાગવામાં આવે, તો અનૃણ શેષ $r$ વધે અને તે $b$ કરતાં નાની હોય. તમારામાંથી મોટા ભાગના અભ્યાસાર્થી કદાચ ભાગાકારને સ્વાભાવિક લાંબી પ્રક્રિયા તરીકે ઓળખતા હશે. જો કે, આ પરિણામ ખૂબ જ સરળતાથી દર્શાવી અને સમજી શકાય, છતાં પૂર્ણાંકોની વિભાજ્યતાના ગુણધર્મો સંબંધી તેના ઘણા બધા ઉપયોગો છે. આપણે તેમાંના કેટલાકને સમજીશું અને તેનો ઉપયોગ મુખ્યત્વે બે ધન પૂર્ણાંકોના ગુ.સા.અ. **(ગુરુતમ સામાન્ય અવયવ, HCF અથવા GCD)** શોધવા માટે કરીશું.

અન્ય પાસામાં અંકગણિતના મૂળભૂત પ્રમેયમાં ધન પૂર્ણાંકોના ગુણાકારની વાત આવે છે. તમે જાણો છો કે, દરેક વિભાજ્ય પૂર્ણાંકને અવિભાજ્ય પૂર્ણાંકોના ગુણાકાર તરીકે અનન્ય રીતે દર્શાવી શકાય. આ અગત્યનો ગુણધર્મ એ ***અંકગણિતનું મૂળભૂત પ્રમેય*** છે. આ પરિણામ સરળતાથી દર્શાવી અને સમજાવી શકાય. આપણે અંકગણિતના મૂળભૂત પ્રમેયના બે મુખ્ય વ્યવહારુ ઉપયોગ કરીશું. તેના ગણિતના ક્ષેત્રમાં કેટલાક ખૂબ જ ઊંડા અને નોંધપાત્ર ઉપયોગો છે. તમે ધોરણ IX માં અભ્યાસ કર્યો છે કે, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ અને $\sqrt{5}$ જેવી ઘણી બધી સંખ્યાઓને અસંમેય સાબિત કરવા આ પ્રમેય વપરાય છે.

બીજું, આ પ્રમેયનો ઉપયોગ, સંમેય સંખ્યાઓ $\frac{p}{q}$ $(q \neq 0)$ ની દશાંશ અભિવ્યક્તિ ક્યારે સાન્ત હોય અને ક્યારે અનંત આવૃત્ત હોય તે જાણવામાં થાય છે. આ માટે આપણે $\frac{p}{q}$ ના છેદ $q$ ના અવિભાજ્ય અવયવો પર દૃષ્ટિપાત કરીએ છીએ. તમે જોશો કે, $q$ નું અવિભાજ્ય અવયવોમાં અવયવીકરણ $\frac{p}{q}$ ની દશાંશ અભિવ્યક્તિનું સંપૂર્ણ સ્વરૂપ નક્કી કરે છે.

આથી, ચાલો આપણે નિરીક્ષણ દ્વારા અભ્યાસનો પ્રારંભ કરીએ.

## 1.2 યુક્લિડનું ભાગાકારનું પૂર્વપ્રમેય

નીચે દર્શાવેલ લોક કોયડાને વિચારીએ.*

એક વેપારી રસ્તા પર ઈંડાં વેચી રહ્યો હતો. જેની પાસે કંઈ જ કામ ન હતું તેવો એક આળસુ માણસ તે વેપારી સાથે શાબ્દિક દ્વન્દ્વમાં ઊતરી ગયો અને તેનું પરિણામ તકરારમાં આવ્યું. તેણે ઈંડાંની ટોપલી ખેંચી લીધી અને જમીન પર પછાડી. ઈંડાં તૂટી ગયાં. વેપારી પંચાયત પાસે ગયો અને પેલા આળસુ વ્યક્તિ પાસેથી તૂટેલાં ઈંડાંના પૈસા અપાવવા કહ્યું. પંચાયતે પૂછ્યું કે કેટલાં ઈંડાં તૂટી ગયાં હતાં. તેણે આ પ્રમાણે જવાબ આપ્યો :

**જો ઈંડાંને બે-બેના સમૂહમાં ગણવામાં આવે તો, એક ઈંડું બાકી રહે;**

**જો ઈંડાંને ત્રણ-ત્રણના સમૂહમાં ગણવામાં આવે તો, બે ઈંડાં બાકી રહે;**

**જો ઈંડાંને ચાર-ચારના સમૂહમાં ગણવામાં આવે તો, ત્રણ ઈંડાં બાકી રહે;**

**જો ઈંડાંને પાંચ-પાંચના સમૂહમાં ગણવામાં આવે તો, ચાર ઈંડાં બાકી રહે;**

**જો ઈંડાંને છ-છના સમૂહમાં ગણવામાં આવે તો, પાંચ ઈંડાં બાકી રહે;**

**જો ઈંડાંને સાત-સાતના સમૂહમાં ગણવામાં આવે તો, કોઈ ઈંડું બાકી ન રહે.**

મારી ટોપલીમાં 150 થી વધુ ઈંડાં સમાઇ શકે નહિ. તો તે ટોપલીમાં કેટલાં ઈંડાં હતાં? ચાલો આપણે કોયડો ઉકેલવા પ્રયાસ કરીએ. ધારો કે ઈંડાંની સંખ્યા $a$ હતી. ગણતરી કરતાં પહેલાં એ તો સ્પષ્ટ છે કે, $a$ ની કિંમત 150 કે તેથી ઓછી હોય.

જો ઈંડાંની સાત-સાતના સમૂહમાં ગણતરી કરીએ તો કંઈ જ બાકી રહે નહિ, તેથી કોઈક પ્રાકૃતિક સંખ્યા $p$ માટે, $a = 7p + 0$ વડે દર્શાવી શકાય.

જો ઈંડાંની છ-છના સમૂહમાં ગણતરી કરીએ તો, પાંચ ઈંડાં બાકી રહે. કોઈક પ્રાકૃતિક સંખ્યા $q$ માટે, $a = 6q + 5$

જો ઈંડાંની પાંચ-પાંચના સમૂહમાં ગણતરી કરીએ તો, ચાર ઈંડાં બાકી રહે. તેથી કોઈક પ્રાકૃતિક સંખ્યા $w$ માટે, $a = 5w + 4$

જો ઈંડાંની ચાર-ચારના સમૂહમાં ગણતરી કરીએ તો, ત્રણ ઈંડાં બાકી રહે. તેથી, કોઈક પ્રાકૃતિક સંખ્યા $s$ માટે, $a = 4s + 3$ વડે દર્શાવી શકાય.

જો ઈંડાંની ત્રણ-ત્રણના સમૂહમાં ગણતરી કરીએ તો, બે ઈંડાં બાકી રહે. આથી કોઈ પ્રાકૃતિક સંખ્યા $t$ માટે, $a = 3t + 2$ વડે દર્શાવી શકાય.

જો ઈંડાંની બે-બેના સમૂહમાં ગણતરી કરીએ તો, એક ઈંડું બાકી રહે. તેથી, કોઈ પ્રાકૃતિક સંખ્યા $u$ માટે, $a = 2u + 1$ વડે દર્શાવી શકાય.

દરેક કિસ્સામાં, આપણે આપેલ $a$ નો ધન પૂર્ણાંક $b$ (આપણા આ ઉદાહરણમાં $b$ ની કિંમત ક્રમિક રીતે 7, 6, 5, 4, 3 અને 2 છે.) વડે ભાગાકાર થાય છે અને શેષ $r$ વધે છે. (આપણા આ ઉદાહરણમાં $r$ ની કિંમત ક્રમિક રીતે 0, 5, 4, 3, 2 અને 1 છે.) અને શેષ $b$ કરતાં ઓછી છે. જ્યારે આપણે આવાં સમીકરણો લખીએ છીએ ત્યારે આપણે પ્રમેય 1.1માં આપેલ યુક્લિડનું ભાગાકારનું પૂર્વ પ્રમેય વાપરીએ છીએ.

ફરી આપણે આપણા કોયડા તરફ જઈએ. તમને કોઈ ખ્યાલ આવે છે કે, આપણે તેને કેવી રીતે ઉકેલી શકીએ? હા, આ બધી જ સ્થિતિનું સમાધાન કરે તેવા 7 ના ગુણિત શોધવા જોઈએ. પ્રયત્ન અને ભૂલ પરથી, (લ.સા.અ.ની સંકલ્પનાનો ઉપયોગ કરતાં) તમને તેની પાસે 119 ઈંડાં હતાં તેવી માહિતી મળી શકે.

યુક્લિડના ભાગાકારના પૂર્વ પ્રમેયનો પરિચય મેળવવા માટે, નીચે આપેલ પૂર્ણાંકોના યુગ્મ વિચારીએ.

17, 6;   5, 12;   20, 4

* આ એ. રામપાલ અને અન્યો દ્વારા લિખિત 'Numeracy Counts!' માં આપેલ કોયડાનું સુધારેલ સ્વરૂપ છે.

આ કોયડામાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે, આપણે દરેક યુગ્મ વચ્ચે નીચે પ્રમાણે સંબંધ દર્શાવી શકીએ :

$17 = 6 \times 2 + 5$ (17 માં 6 બે વખત છે અને 5 શેષ વધે છે.)

$5 = 12 \times 0 + 5$ (12 એ 5 થી મોટા હોવાથી આ સંબંધ આમ થશે.)

$20 = 4 \times 5 + 0$ (અહીં 4 ના પાંચ ગણા 20 થાય અને કંઈ જ શેષ ન વધે.)

ધન પૂર્ણાંકો $a$ અને $b$ ના પ્રત્યેક યુગ્મ માટે, આપણને નીચેના સંબંધને સંતોષે તેવી પૂર્ણ સંખ્યાઓ $q$ અને $r$ મળે છે.

$$a = bq + r, 0 \le r < b$$

આપણે નોંધીએ કે, $q$ અથવા $r$ શૂન્ય પણ હોઈ શકે. (પરંતુ બંને સાથે શૂન્ય નહિ.)

હવે નીચે દર્શાવેલ ધન પૂર્ણાંકો $a$ અને $b$ ના યુગ્મ માટે તમે પૂર્ણાંકો $q$ અને $r$ શોધવા પ્રયત્ન કરી શકશો?

(i) 10, 3 (ii) 4, 19 (iii) 81, 3

તમે નોંધ્યું કે $q$ અને $r$ અનન્ય છે? તે $0 \le r < b$ માટે $a = bq + r$ નું સમાધાન કરતા હોય તેવા પૂર્ણાંકોની એક માત્ર જોડ મળે.

તમને એવી અનુભૂતિ પણ થઈ હશે કે આપણે ભાગાકારની જે લાંબી પ્રક્રિયા વર્ષોથી કરતા આવ્યા છીએ તેનું આ તો માત્ર નવા સ્વરૂપે પુનઃવિધાન છે અને તેમાં આ પૂર્ણાંકો $q$ અને $r$ ને અનુક્રમે *ભાગફળ* અને *શેષ* કહે છે.

આપણે આ પરિણામને ઔપચારિક રીતે નીચેના સ્વરૂપમાં સામાન્ય વિધાન સ્વરૂપે મૂકી શકીએ :

**પ્રમેય : 1.1 (યુક્લિડનું ભાગાકારનું પૂર્વ-પ્રમેય) :** ***આપેલ ધન પૂર્ણાંકો a અને b ને સંગત અનન્ય અનૃણ પૂર્ણાંકો q અને r એવા મળે કે જેથી $a = bq + r, 0 \le r < b$.***

**નોંધ :** $q$ અનૃણ છે. પરંતુ $q$ તથા $r$ બંને સાથે શૂન્ય નથી. આ પરિણામ લાંબા સમયથી પ્રચલિત છે. પરંતુ તેની પ્રથમ વખત નોંધ *યુક્લિડ (Euclid)ની Elements Book-VII* માં લેવાઈ હતી. *યુક્લિડની ભાગપ્રવિધિ (Euclid's division algorithm)* **આ પૂર્વ-પ્રમેય પર આધારિત છે.**

An ***algorithm*** is a series of well defined steps which gives a procedure for solving a type of problem.

The word *algorithm* comes from the name of the 9th century Persian mathematician ***al-Khwarizmi***. In fact, even the word 'algebra' is derived from a book, he wrote, called ***Hisab al-jabr w'al-muqabala.***

A ***lemma*** is a proven statement used for proving another statement.

**Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi (C.E. 780 - C.E.850)**

યુક્લિડની ભાગ-પ્રવિધિ એ આપેલા બે ધન પૂર્ણાંકોનો ગુ.સા.અ. શોધવા માટેની પ્રવિધિ છે. જેના વડે ધન પૂર્ણાંકો $a$ અને $b$ બંને વિભાજ્ય હોય તેવો મોટામાં મોટો ધન પૂર્ણાંક $d$ એ $a$ અને $b$ નો ગુ.સા.અ. છે.

ચાલો આપણે પ્રથમ એક ઉદાહરણ દ્વારા આ પ્રવિધિનો ઉપયોગ કેવી રીતે કરી શકાય છે તે જોઈએ. ધારો કે આપણે બે પૂર્ણાંકો 455 અને 42 નો ગુ.સા.અ. શોધવો છે તો આપણે મોટા પૂર્ણાંક 455 થી શરૂઆત કરીશું. ત્યાર બાદ તેની ઉપર આપણે યુક્લિડનું પૂર્વ પ્રમેય વાપરીશું.

$$455 = 42 \times 10 + 35$$

હવે આપણે ભાજક 42 ને ભાજ્ય તરીકે લઈ અને 35 ને ભાજક તરીકે લઈને ભાગાકારના પૂર્વ પ્રમેયનો ઉપયોગ કરીએ તો,

$$42 = 35 \times 1 + 7 \text{ મળે.}$$

હવે ભાજક 35 ને ભાજ્ય તરીકે લઈ અને 7 ને ભાજક તરીકે લઈને ભાગાકારના પૂર્વ પ્રમેયનો ઉપયોગ કરતાં,

$$35 = 7 \times 5 + 0 \text{ મળે.}$$

આપણે નોંધીએ કે, શેષ શૂન્ય મળે છે અને હવે આપણે પ્રક્રિયા આગળ નથી કરી શકતા. આ તબક્કે આપણે એવું નિર્ણયાત્મક રીતે કહીએ છીએ કે 455 અને 42 નો ગુ.સા.અ. 7 થાય. તમે 455 અને 42 ના અવયવોની યાદી બનાવીને સરળતાથી આ ચકાસી શકો છો. આ પદ્ધતિ કેમ નિર્ણયાત્મક છે? આનો જવાબ નીચેના પરિણામ ઉપરથી મળશે.

હવે, આપણે **યુક્લિડની ભાગપ્રવિધિ** સ્પષ્ટપણે દર્શાવી શકીએ.

*$c > d$ હોય તેવા બે ધન પૂર્ણાંકો $c$ અને $d$ નો ગુ.સા.અ. મેળવવા માટે નીચેનાં સોપાન છે :*

**સોપાન 1 :** યુક્લિડના ભાગાકાર પૂર્વ-પ્રમેયનો $c$ અને $d$ ઉપર ઉપયોગ કરતાં આપણને $c = dq + r$, $0 \le r < d$ થાય તેવી પૂર્ણ સંખ્યાઓ $q$ અને $r$ મળે.

**સોપાન 2 :** જો $r = 0$, તો $d$ એ $c$ અને $d$ નો ગુ.સા.અ. થાય.
જો $r \neq 0$, તો $d$ અને $r$ ને ભાગાકારનું પૂર્વ-પ્રમેય લગાડીએ.

**સોપાન 3 :** આ પ્રક્રિયા જ્યાં સુધી શેષ 0 ન થાય ત્યાં સુધી ચાલુ રાખો. આ તબક્કે જ્યારે શેષ શૂન્ય બને ત્યારે ભાજક એ માંગેલ ગુ.સા.અ. થાય.

આ પ્રવિધિમાં પરિણામ મળે છે કારણ કે ગુ.સા.અ. $(c, d)$ = ગુ.સા.અ. $(d, r)$.

ગુ.સા.અ. $(c, d)$ એ $c$ અને $d$ નો ગુ.સા.અ. દર્શાવે છે. વગેરે.

**ઉદાહરણ 1 :** યુક્લિડની ભાગ-પ્રવિધિનો ઉપયોગ કરી 4052 અને 12576 નો ગુ.સા.અ. શોધો.

**ઉકેલ :**

**સોપાન 1 :** $12576 > 4052$ હોવાથી ભાગાકારના પૂર્વ પ્રમેયનો ઉપયોગ 12576 અને 4052 ઉપર કરતાં,

$$12576 = 4052 \times 3 + 420$$

**સોપાન 2 :** શેષ 420 શૂન્યેતર હોવાથી ભાગાકારના પૂર્વ પ્રમેયનો ઉપયોગ 4052 અને 420 ઉપર કરતાં,

$$4052 = 420 \times 9 + 272$$

**સોપાન 3 :** ભાજક 420ને નવા ભાજ્ય તરીકે અને શેષ 272 ને નવા ભાજક તરીકે લેતાં અને ભાગાકારના પૂર્વપ્રમેયનો ઉપયોગ કરતાં,

$$420 = 272 \times 1 + 148$$

હવે આપણે નવો ભાજ્ય 272 અને નવો ભાજક 148 લઈએ અને ભાગાકારના પૂર્વપ્રમેયનો ઉપયોગ કરીએ, તો

$$272 = 148 \times 1 + 124$$

હવે નવો ભાજ્ય 148 અને નવો ભાજક શેષ 124 લેતાં અને ભાગાકારના પૂર્વપ્રમેયનો ઉપયોગ કરતાં,

$$148 = 124 \times 1 + 24$$

નવો ભાજ્ય 124 અને નવો ભાજક 24 લેતાં અને ભાગાકારના પૂર્વપ્રમેયનો ઉપયોગ કરતાં,

$$124 = 24 \times 5 + 4$$

નવો ભાજ્ય 24 અને નવો ભાજક 4 લેતાં અને ભાગાકારના પૂર્વપ્રમેયનો ઉપયોગ કરતાં,

$$24 = 4 \times 6 + 0$$

શેષ હવે શૂન્ય બને છે. આથી આપણી પ્રક્રિયા અટકે છે. આ તબક્કે ભાજક 4 હોવાથી, 12576 અને 4052નો ગુ.સા.અ. 4 થાય.

આપણે નોંધીએ કે 4 = ગુ.સા.અ. (24, 4)
= ગુ.સા.અ. (124, 24)
= ગુ.સા.અ. (148, 124)
= ગુ.સા.અ. (272, 148)
= ગુ.સા.અ. (420, 272)
= ગુ.સા.અ. (4052, 420)
= ગુ.સા.અ. (12576, 4052).

યુક્લિડની ભાગપ્રવિધિ માત્ર ખૂબ જ મોટી સંખ્યાઓના ગુ.સા.અ. મેળવવા માટે જ ઉપયોગી છે, એટલું જ નહિ પરંતુ તે કમ્પ્યૂટરના પ્રોગ્રામ તૈયાર કરવા માટેના અલગોરિધમ (પ્રવિધિ)ના ખૂબ જ શરૂઆતનાં ઉદાહરણોમાંની એક છે.

આપણે નોંધીએ કે જ્યાં સુધી શેષ 0 ન બને ત્યાં સુધી દરેક તબક્કે ભાજક એ નવો ભાજ્ય બને છે અને શેષ એ નવો ભાજક બને છે. શેષ શૂન્ય બને તે તબક્કે છેલ્લો ભાજક એ આપેલ સંખ્યાઓનો ગુ.સા.અ. છે.

**નોંધ :**

1. યુક્લિડના ભાગાકારનું પૂર્વપ્રમેય અને ભાગપ્રવિધિ ખૂબ જ નજીકથી એકબીજા સાથે જોડાયેલા હોવાથી લોકો અવારનવાર ભાગાકારના પૂર્વપ્રમેયને પણ ભાગાકાર પ્રવિધિ કહેતા હતા.
2. વળી, યુક્લિડની ભાગપ્રવિધિનું વિધાન માત્ર ધન પૂર્ણાંકો માટે જ કર્યું છે, છતાં તેને $b \neq 0$ હોય તેવા બધા જ શૂન્યેતર પૂર્ણાંકો સુધી વિસ્તારી શકાય, જોકે ભાગ પ્રવિધિના આ પાસાની ચર્ચા આપણે અહીં નહિ કરીએ.

સંખ્યાઓના ગુણધર્મો મેળવવા માટે યુક્લિડની ભાગપ્રવિધિના કેટલાક ઉપયોગો છે. આપણે આ ઉપયોગોના કેટલાંક ઉદાહરણો અહીં આપીએ.

**ઉદાહરણ 2 :** દર્શાવો કે દરેક યુગ્મ ધન પૂર્ણાંક એ કોઈક પૂર્ણાંક $q$ માટે, $2q$ સ્વરૂપમાં હોય અને દરેક અયુગ્મ ધન પૂર્ણાંક કોઈક પૂર્ણાંક $q$ માટે, $2q + 1$, સ્વરૂપમાં હોય.

**ઉકેલ :** ધારો કે $a$ કોઈ ધન પૂર્ણાંક છે અને $b = 2$. તો,

યુક્લિડની ભાગ પ્રવિધિ અનુસાર કોઈ પૂર્ણાંક $q \geq 0$ માટે $a = 2q + r$ અને $r = 0$ અથવા $r = 1$, કારણ કે $0 \leq r < 2$.

માટે, **$a = 2q$ અથવા $2q + 1$.**

**જો $a = 2q$, તો $a$ એ 2 વડે વિભાજ્ય છે અને $a$ ને યુગ્મ પૂર્ણાંક કહે છે.**

**જો $a = 2q + 1$ તો $a$ એ 2 વડે વિભાજ્ય નથી તથા $a$ ને 2 વડે ભાગતાં 1 શેષ વધે છે. આવા પૂર્ણાંક $a$ ને અયુગ્મ પૂર્ણાંક કહે છે.**

જો $a$ એ $2q$ ના સ્વરૂપમાં હોય તો $a$ યુગ્મ પૂર્ણાંક છે. વળી કોઈ પણ ધન પૂર્ણાંક યુગ્મ અથવા અયુગ્મ હોઈ શકે. માટે કોઈ પણ અયુગ્મ ધન પૂર્ણાંક એ $2q + 1$ સ્વરૂપમાં હોય.

**ઉદાહરણ 3 :** દર્શાવો કે કોઈ પણ અયુગ્મ ધન પૂર્ણાંક એ કોઈક પૂર્ણાંક $q$ માટે $4q + 1$ અથવા $4q + 3$, સ્વરૂપમાં હોય.

**ઉકેલ :** ચાલો આપણે અયુગ્મ ધન પૂર્ણાંક $a$ લઈએ. આપણે પૂર્ણાંક $a$ અને $b = 4$ માટે ભાગપ્રવિધિનો ઉપયોગ કરીએ.

$0 \leq r < 4$, હોવાથી સંભવિત શેષ 0, 1, 2 અને 3 થાય.

આથી, $q$ ને ભાગફળ લેતાં, $a$ એ $4q$, અથવા $4q + 1$, અથવા $4q + 2$, અથવા $4q + 3$.

જો કે $a$ અયુગ્મ હોવાથી $a$ એ $4q$ અથવા $4q + 2$ ન હોઈ શકે. (કારણ કે બંને 2 વડે વિભાજ્ય છે.)

માટે, કોઈ પણ અયુગ્મ પૂર્ણાંક એ $4q + 1$ અથવા $4q + 3$ સ્વરૂપનો હોય.

**ઉદાહરણ 4 :** એક મીઠાઈવાળા પાસે 420 નંગ કાજુ બરફી અને 130 નંગ બદામ બરફી છે. તે એવી રીતે આ બરફીઓને થપ્પી સ્વરૂપે ગોઠવવા માંગે છે કે દરેક થપ્પીમાં બરફીની સંખ્યા સમાન હોય અને તે તાસકમાં ઓછામાં ઓછી જગ્યા રોકે. આ હેતુ માટે દરેક થપ્પીમાં કેટલી સંખ્યામાં બરફી રાખવી જોઈએ?

**ઉકેલ :** આ પ્રશ્નનો ઉકેલ પ્રયત્ન અને ભૂલ દ્વારા મેળવી શકાય. પરંતુ આને ગાણિતિક રીતે કરવા માટે આપણે ગુ.સા.અ. (420, 130) શોધવો જોઈએ. આ ગુ.સા.અ. દરેક થપ્પીમાં રહેલ બરફીની મહત્તમ સંખ્યા થાય અને થપ્પીઓની સંખ્યા પણ લઘુતમ થાય. આથી તાસકમાં વપરાયેલ જગ્યા પણ લઘુતમ થાય.

હવે તેનો ગુ.સા.અ. શોધવા માટે યુક્લિડ પ્રવિધિનો ઉપયોગ કરતાં,

$$420 = 130 \times 3 + 30$$
$$130 = 30 \times 4 + 10$$
$$30 = 10 \times 3 + 0$$

આથી 420 અને 130 નો ગુ.સા.અ. 10 થાય.

માટે તે મીઠાઈવાળા દરેક થપ્પીમાં કોઈ પણ પ્રકારની બરફીની સંખ્યા 10 રાખી શકે.

**નોંધ :** દરેક થપ્પીમાં બરફીની સમાન સંખ્યા $d$ હોય, તો 420 તથા 130 બંને $d$ વડે વિભાજ્ય છે. થપ્પીઓની સંખ્યા $\frac{420}{d}$ તથા $\frac{130}{d}$ ન્યૂનતમ હોય તો, તાસકમાં ઓછામાં ઓછી જગ્યા રોકે. આ માટે $d$ મહત્તમ હોય તે આવશ્યક છે. આથી $d$ = ગુ.સા.અ. (420, 130).

## સ્વાધ્યાય 1.1

1. યુક્લિડની ભાગપ્રવિધિનો ઉપયોગ કરી ગુ.સા.અ. શોધો :
   (i) 135 અને 225 (ii) 196 અને 38220 (iii) 867 અને 255
2. દર્શાવો કે કોઈ પણ અયુગ્મ ધન પૂર્ણાંક સંખ્યા, કોઈક પૂર્ણાંક $q$ માટે $6q + 1$, અથવા $6q + 3$, અથવા $6q + 5$ પ્રકારની હોઈ શકે.
3. એક લશ્કરનું 616 સભ્યોનું જૂથ લશ્કરના બેન્ડના 32 સભ્યોની પાછળ કૂચ કરી રહ્યું છે. બંને જૂથ સમાન સંખ્યાના સ્તંભમાં કૂચ કરી રહ્યાં છે. તે જે સ્તંભમાં કૂચ કરી રહ્યા છે તેવા કોઈ પણ સ્તંભમાં મહત્તમ કેટલા સભ્યો હશે?
4. યુક્લિડની ભાગપ્રવિધિનો ઉપયોગ કરી દર્શાવો કે કોઈ પણ ધન પૂર્ણાંકનો વર્ગ કોઈક પૂર્ણાંક $m$ માટે $3m$ અથવા $3m + 1$ સ્વરૂપમાં હોય.
   [**સૂચન :** ધારો કે $x$ કોઈ ધન પૂર્ણાંક છે તો તે $3q$, $3q + 1$ અથવા $3q + 2$ સ્વરૂપમાં હોય. હવે દરેકનો વર્ગ કરો અને દર્શાવો કે ફરીથી તેને $3m$ અથવા $3m + 1$ સ્વરૂપમાં લખી શકાય.]
5. યુક્લિડનું ભાગાકારનું પૂર્વપ્રમેય વાપરીને દર્શાવો કે કોઈ પણ ધન પૂર્ણાંકનો ઘન $9m$, $9m + 1$ અથવા $9m + 8$ સ્વરૂપનો હોય.

## 1.3 અંકગણિતનું મૂળભૂત પ્રમેય

અગાઉનાં ધોરણોમાં તમે જોયું છે કે કોઈ પણ પ્રાકૃતિક સંખ્યાને તેના અવિભાજ્ય અવયવોના ગુણાકાર રૂપે લખી શકાય. ઉદાહરણ તરીકે, $2 = 2$, $4 = 2 \times 2$, $253 = 11 \times 23$, અને આ પ્રમાણે આગળ વધી શકાય.

હવે, આપણે પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનું બીજું પાસું જોવા પ્રયત્ન કરીએ. કોઈ પણ પ્રાકૃતિક સંખ્યા અવિભાજ્ય સંખ્યાઓના

ગુણાકારથી મેળવી શકાય? ચાલો આપણે જોઈએ. અવિભાજ્ય સંખ્યાઓનો કોઈ પણ સમૂહ લો. ઉદાહરણ તરીકે, 2, 3, 7, 11 અને 23. આપણે કેટલીક અથવા બધી જ સંખ્યાઓનો ગુણાકાર કરીએ અને આપણે ઇચ્છીએ તેટલી વખત તેનું પુનરાવર્તન કરવાની છૂટ આપીએ તો આપણે બહોળી સંખ્યામાં ધન પૂર્ણાંકો મેળવી શકીએ. (ખરેખર તો, અનંત સંખ્યાઓ) ચાલો આપણે કેટલીક યાદી બનાવીએ.

$7 \times 11 \times 23 = 1771$

$3 \times 7 \times 11 \times 23 = 5313$

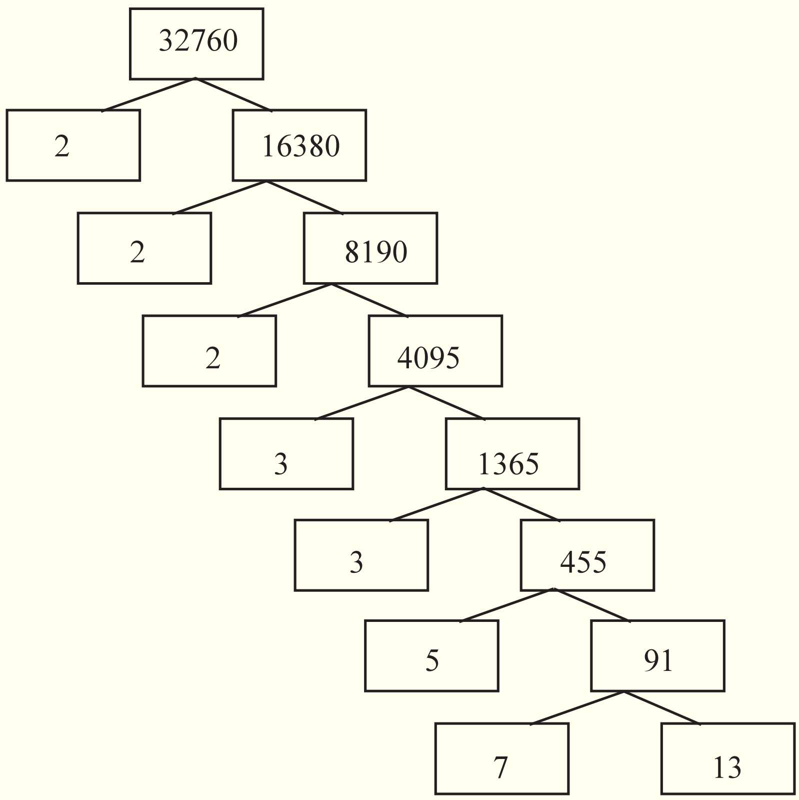
$2 \times 3 \times 7 \times 11 \times 23 = 10626$

$2^3 \times 3 \times 7^3 = 8232$

$2^2 \times 3 \times 7 \times 11 \times 23 = 21252$ અને આ પ્રમાણે...

હવે, ધારો કે તમારા અવિભાજ્ય સંખ્યાઓના સમૂહમાં બધી જ શક્ય અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ લઈએ તો આ સમૂહનું કદ કેટલું થાય તે માટે તમારું શું અનુમાન છે? શું તેમાં માત્ર નિશ્ચિત સંખ્યામાં જ પૂર્ણાંકો હશે ? અથવા અનંત સંખ્યામાં પૂર્ણાંકો હશે? ખરેખર તો અનંત સંખ્યામાં અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ છે. આથી, જો આપણે બધી જ અવિભાજ્ય સંખ્યાઓને આ રીતે સાંકળીએ તો, બધી જ અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ અને બધી જ અવિભાજ્ય સંખ્યાઓના તમામ શક્ય ગુણાકારો લઈને આપણે અનંત સંખ્યાઓનો સમૂહ મેળવી શકીએ. પ્રશ્ન એ છે કે આપણે બધી જ વિભાજ્ય સંખ્યાઓ આ રીતે મેળવી શકીએ? તમે શું વિચારો છો? તમે વિચારો છો કે જે અવિભાજ્ય સંખ્યાઓના ઘાતનો ગુણાકાર ન હોય તેવી કોઈ વિભાજ્ય સંખ્યા કદાચ હશે? આપણે ઉત્તર આપીએ તે પહેલાં, ચાલો આપણે ધન પૂર્ણાંકોનું અવયવીકરણ કરીએ. આપણે અગાઉ જે કર્યું છે તેનાથી ઊલટી પ્રક્રિયા કરીએ.

આપણે તમને પરિચિત એવા અવયવ વૃક્ષનો ઉપયોગ કરીએ. ચાલો, આપણે કોઈ મોટી સંખ્યા લઈએ જેમકે 32,760 અને આગળ દર્શાવ્યા પ્રમાણે અવયવ પાડીએ :



આથી આપણને 32760 એ $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 13$ જેવી અવિભાજ્ય સંખ્યાઓના ગુણાકાર રૂપે મળે છે.

આથી $32760 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 13$ ને અવિભાજ્ય સંખ્યાઓના ઘાતના ગુણાકાર રૂપે દર્શાવી શકાય. ચાલો આપણે બીજી સંખ્યા 123456789 ચકાસીએ. તેને $3^2 \times 3803 \times 3607$ તરીકે લખી શકાય. ખરેખર તો તમારે પરીક્ષણ કરવું જોઈએ કે 3803 અને 3607 અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ છે! (તમારી જાતે બીજી કેટલીક પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ માટે પરીક્ષણ કરો.) આ તથ્ય આપણને એવી ધારણા તરફ દોરી જાય છે કે દરેક વિભાજ્ય સંખ્યાને અવિભાજ્ય સંખ્યાઓના ઘાતના ગુણાકાર સ્વરૂપે લખી શકાય. ખરેખર તો આ વિધાન સત્ય છે. પૂર્ણાંકોના અભ્યાસ માટે તેની પાયાની નિર્ણાયક ભૂમિકા હોવાથી તેને ***અંકગણિતનું મૂળભૂત પ્રમેય*** કહે છે.

ચાલો આપણે હવે આ પ્રમેયને ઔપચારિક રીતે દર્શાવીએ.

**પ્રમેય 1.2 (અંકગણિતનું મૂળભૂત પ્રમેય) : *દરેક વિભાજ્ય સંખ્યાને, તેના અવયવોના ક્રમને અવગણીને અવિભાજ્ય સંખ્યાઓના ગુણાકાર તરીકે અનન્ય રીતે લખી શકાય છે.***

An equivalent version of Theorem 1.2 was probably first recorded as Proposition 14 of Book IX in ***Euclid's Elements***, before it came to be known as the ***Fundamental Theorem of Arithmetic***. However, the first correct proof was given by ***Carl Friedrich Gauss*** in his ***Disquisitiones Arithmeticae***. ***Carl Friedrich Gauss*** is often referred to as the 'Prince of Mathematicians' and is considered one of the three greatest mathematicians of all time, along with ***Archimedes*** and ***Newton***. He has made fundamental contributions to both mathematics and science.

**Carl Friedrich Gauss**
**(C.E.1777 – C.E.1855)**

અંકગણિતનું મૂળભૂત પ્રમેય દર્શાવે છે કે, દરેક વિભાજ્ય સંખ્યાનું અવિભાજ્ય સંખ્યાઓના ગુણાકાર સ્વરૂપે અવયવીકરણ કરી શકાય. હકીકતમાં તે કંઈક વધુ દર્શાવે છે. તે દર્શાવે છે કે આપેલ કોઈ પણ વિભાજ્ય સંખ્યાનું તેના અવયવોના ક્રમને અવગણીને અવિભાજ્ય સંખ્યાઓના ગુણાકાર તરીકે અનન્ય રીતે નિરૂપણ કરી શકાય.

આ પરથી આપેલ કોઈ પણ વિભાજ્ય સંખ્યાને અવિભાજ્ય સંખ્યાઓના ગુણાકાર તરીકે અનન્ય રીતે દર્શાવી શકાય અને તેમાં કઈ અવિભાજ્ય સંખ્યા કયા ક્રમે મળશે તે માટે આપણે ચોક્કસ ન હોઈ શકીએ. ઉદાહરણ તરીકે ગુણાકારમાં દર્શાવેલ સંખ્યા $2 \times 3 \times 5 \times 7$ અને $3 \times 5 \times 7 \times 2$ તરીકે અથવા બીજા કોઈ પણ શક્ય ક્રમમાં દર્શાવેલ આ અવિભાજ્ય સંખ્યાઓને લખીએ તો તે બધા ગુણાકાર સમાન છે. આ હકીકતને નીચેના સ્વરૂપે પણ દર્શાવી શકાય.

***1 થી મોટી કોઈ પણ પ્રાકૃતિક સંખ્યાનું અવિભાજ્ય અવયવોમાં અવયવીકરણ તેના ક્રમને અવગણીએ તો અનન્ય હોય છે.***

વ્યાપક રીતે, આપેલ વિભાજ્ય સંખ્યા $x$ ને આપણે $x = p_1 p_2 \ldots p_n$ તરીકે લખી શકીએ, જ્યાં $p_1, p_2, \ldots, p_n$ એ અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ છે અને ચડતા ક્રમમાં લખેલી છે, એટલે કે $p_1 \le p_2 \le \ldots \le p_n$. જો આપણે સમાન અવિભાજ્ય સંખ્યાઓને ગુણીએ, તો આપણને અવિભાજ્ય સંખ્યાના ઘાત મળે. ઉદાહરણ તરીકે,

$$32760 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 13 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 13$$

એક વખત આપણે નક્કી કરીએ કે, અવિભાજ્ય અવયવો ચડતા ક્રમમાં હશે તો આપણું અવયવીકરણ અનન્ય હશે.

ગણિતમાં અને બીજા ક્ષેત્રમાં અંકગણિતના મૂળભૂત પ્રમેયના અનેક ઉપયોગો છે. ચાલો આપણે કેટલાંક ઉદાહરણો જોઈએ.

**ઉદાહરણ 5 :** કોઈક ધન પૂર્ણાંક $n$ માટે $4^n$ નો છેલ્લો અંક શૂન્ય હશે કે કેમ તે નિર્ણય કરો.

**ઉકેલ :** જો કોઈ પણ ધન પૂર્ણાંક $n$ માટે સંખ્યા $4^n$ નો છેલ્લો અંક શૂન્ય હોય, તો તે 5 વડે વિભાજ્ય હોય. આથી $4^n$ ના અવિભાજ્ય અવયવોમાં 5 હોવો જોઈએ. આ શક્ય નથી, કારણ કે $4^n = (2)^{2n}$; આથી $4^n$ ના અવયવીકરણમાં એક જ અવિભાજ્ય પૂર્ણાંક 2 મળે. આથી અંકગણિતના મૂળભૂત પ્રમેયની અનન્યતા શરત અનુસાર નક્કી થાય છે કે $4^n$ ના અવયવીકરણમાં 2 સિવાય બીજી કોઈ અવિભાજ્ય સંખ્યા નથી. માટે કોઈ પ્રાકૃતિક સંખ્યા $n$ એવી ન મળે કે જેના માટે $4^n$ નો અંતિમ અંક શૂન્ય હોય.

અગાઉનાં ધોરણોમાં તમે અંકગણિતના મૂળભૂત પ્રમેયનો સ્પષ્ટ રીતે ઉલ્લેખ કર્યા વગર બે ધન પૂર્ણાંકોના ***ગુ.સા.અ. અને લ.સા.અ. (લઘુતમ સામાન્ય અવયવ, LCM, Least Common Multiple)*** શોધતાં શીખી ગયાં છો. આ પદ્ધતિ **અવિભાજ્ય અવયવીકરણ** પદ્ધતિ તરીકે પણ ઓળખાય છે. ચાલો આપણે આ પદ્ધતિને ઉદાહરણ દ્વારા યાદ કરીએ.

**ઉદાહરણ 6 :** અવિભાજ્ય અવયવીકરણ પદ્ધતિથી 6 અને 20 નો ગુ.સા.અ. અને લ.સા.અ. શોધો.

**ઉકેલ :** આપણી પાસે $6 = 2^1 \times 3^1$ અને $20 = 2 \times 2 \times 5 = 2^2 \times 5^1$ હોવાથી,

અગાઉનાં ધોરણોમાં મેળવ્યું છે તેમ તમે ગુ.સા.અ. (6, 20) = 2 અને લ.સા.અ. $(6, 20) = 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 60$ મેળવી શકો.

જુઓ કે, ગુ.સા.અ. (6, 20) = $2^1$ = **આપેલી સંખ્યાઓમાં રહેલા સામાન્ય અવિભાજ્ય અવયવના નાનામા નાના ઘાતાંકવાળાં પદોનો ગુણાકાર**

લ.સા.અ. (6, 20) = $2^2 \times 3^1 \times 5^1$ = **આપેલી સંખ્યામાં રહેલા તમામ અવિભાજ્ય અવયવોના મહત્તમ ઘાતાંકવાળાં પદોનો ગુણાકાર**

ઉપરના ઉદાહરણમાં તમે જોયું હશે કે ગુ.સા.અ. (6, 20) × લ.સા.અ. (6, 20) = 6 × 20.

ખરેખર તો આપણે ચકાસી શકીએ કે કોઈ પણ બે ધન પૂર્ણાંકો, $a$ અને $b$ માટે

**ગુ.સા.અ. $(a, b)$ × લ.સા.અ. $(a, b) = a \times b$** થાય.

જો બે ધન પૂર્ણાંકોનો ગુ.સા.અ. આપેલ હોય તો આપણે આ પરિણામનો ઉપયોગ કરી તેમનો લ.સા.અ. શોધી શકીએ.

**ઉદાહરણ 7 :** 96 અને 404 નો ગુ.સા.અ. અવિભાજ્ય અવયવની રીતે મેળવો અને તે પરથી તેનો લ.સા.અ. શોધો.

**ઉકેલ :** 96 અને 404 નું અવિભાજ્યોમાં અવયવીકરણ $96 = 2^5 \times 3$, $404 = 2^2 \times 101$ મળશે.

આથી આ બંને પૂર્ણાંકોનો ગુ.સા.અ. $= 2^2 = 4$.

$$\text{વળી, લ.સા.અ.}\ (96, 404) = \frac{96 \times 404}{\text{ગુ.સા.અ.}\ (96, 404)} = \frac{96 \times 404}{4} = 9696$$

**ઉદાહરણ 8 :** અવિભાજ્ય અવયવોની રીતથી 6, 72 અને 120 નો ગુ.સા.અ. અને લ.સા.અ. શોધો.

**ઉકેલ :** આપણી પાસે,

$$6 = 2 \times 3,\ 72 = 2^3 \times 3^2,\ 120 = 2^3 \times 3 \times 5$$

અહીં, સામાન્ય અવયવો અનુક્રમે 2 અને 3 ની નાનામાં નાની ઘાત $2^1$ અને $3^1$ છે.

આથી ગુ.સા.અ. (6, 72, 120) = $2^1 \times 3^1 = 2 \times 3 = 6$

આપેલી ત્રણેય સંખ્યાઓમાં $2^3$, $3^2$ અને $5^1$ એ અવિભાજ્ય અવયવો 2, 3 અને 5 ની મોટામાં મોટી ઘાત છે.

આથી, લ.સા.અ. (6, 72, 120) = $2^3 \times 3^2 \times 5^1 = 360$

**નોંધ :** જુઓ કે, $6 \times 72 \times 120 \neq$ ગુ.સા.અ. (6, 72, 120) $\times$ લ.સા.અ. (6, 72, 120).

આથી ત્રણ સંખ્યાઓનો ગુણાકાર તેમના ગુ.સા.અ. અને લ.સા.અ.ના ગુણાકારને સમાન ન પણ હોય.

## સ્વાધ્યાય 1.2

**1.** નીચેની દરેક સંખ્યાને તેના અવિભાજ્ય અવયવોના ગુણાકાર સ્વરૂપે દર્શાવો :

(i) 140 (ii) 156 (iii) 3825 (iv) 5005 (v) 7429

**2.** નીચે આપેલ પૂર્ણાંકોની જોડીના ગુ.સા.અ. અને લ.સા.અ. શોધો અને

ગુ.સા.અ. $\times$ લ.સા.અ. = બંને પૂર્ણાંકોનો ગુણાકાર થાય છે તેમ ચકાસો.

(i) 26 અને 91 (ii) 510 અને 92 (iii) 336 અને 54

**3.** નીચે આપેલ પૂર્ણાંકોના અવિભાજ્ય અવયવની રીતે ગુ.સા.અ. અને લ.સા.અ. શોધો :

(i) 12, 15 અને 21 (ii) 17, 23 અને 29 (iii) 8, 9 અને 25

**4.** જો ગુ.સા.અ. (306, 657) = 9 આપેલ હોય, તો લ.સા.અ. (306, 657) શોધો.

**5.** કોઈક પ્રાકૃતિક સંખ્યા $n$ માટે $6^n$ નો અંતિમ અંક શૂન્ય થાય કે નહિ તે ચકાસો.

**6.** સમજાવો કે $7 \times 11 \times 13 + 13$ અને $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 + 5$ એ શા માટે વિભાજ્ય સંખ્યાઓ છે ?

**7.** એક રમતના મેદાનમાં વર્તુળાકાર માર્ગ છે. સોનિયાને તેનું એક પરિભ્રમણ પૂર્ણ કરતાં 18 મિનિટ લાગે છે, જ્યારે રવિને તેનું એક પરિભ્રમણ પૂર્ણ કરતાં 12 મિનિટ લાગે છે. ધારો કે બંને એક જ સમયે, એક જ બિંદુએથી, એક જ દિશામાં પરિભ્રમણ કરવાનું પ્રારંભ કરે છે, તો કેટલી મિનિટ બાદ બંને ફરી પ્રારંભબિંદુ પર ભેગા થાય ?

## 1.4 અસંમેય સંખ્યાઓનું પુનરાવર્તન

ધોરણ IX માં અસંમેય સંખ્યાઓ અને તેના ઘણા બધા ગુણધર્મોનો પરિચય તમને કરાવવામાં આવ્યો હતો. તમે તેના અસ્તિત્વનો અને કેવી રીતે સંમેય અને અસંમેય સંખ્યાઓ સાથે મળીને વાસ્તવિક સંખ્યાઓ બનાવે છે તેનો અભ્યાસ કર્યો હતો. તમે અસંમેય સંખ્યાઓને સંખ્યારેખા પર દર્શાવતાં પણ શીખ્યા છો. જો કે આપણે તે સંખ્યાઓ અસંમેય સંખ્યાઓ છે તેમ સાબિત નહોતું કર્યું. આ વિભાગમાં, આપણે $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ અને $\sqrt{5}$ અને વ્યાપક રીતે અવિભાજ્ય $p$ માટે $\sqrt{p}$ અસંમેય છે તે સાબિત કરીશું. અંકગણિતના મૂળભૂત પ્રમેય અને અન્ય પ્રમેયોનો ઉપયોગ કરી આપણે આ પરિણામ પ્રાપ્ત કરીશું.

યાદ કરો કે જે સંખ્યાને પૂર્ણાંક $p$ તથા શૂન્યેતર પૂર્ણાંક $q$ માટે $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપમાં લખી ન શકાય તે સંખ્યા '$s$' ને અસંમેય સંખ્યા કહેવાય છે. જેનાથી આપણે પરિચિત છીએ, તેવા $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{15}$, $\pi$, $-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, 0.10110111011110... જેવી અસંમેય સંખ્યાઓનાં ઉદાહરણો મળે.

આપણે $\sqrt{2}$ અસંમેય છે તેમ સાબિત કરીએ તે પહેલાં આપણને આગળ દર્શાવેલ પ્રમેયની જરૂર પડશે. તેની સાબિતી અંકગણિતના મૂળભૂત પ્રમેય પર આધારિત છે.

***પ્રમેય 1.3 : ધારો કે $p$ એ એક અવિભાજ્ય સંખ્યા છે. ધન પૂર્ણાંક $a$ માટે, $a^2$ એ $p$ વડે વિભાજ્ય હોય, તો $a$ પણ $p$ વડે વિભાજ્ય હોય.***

***સાબિતી :** ધારો કે $a$ નું અવિભાજ્ય અવયવોમાં અવયવીકરણ નીચે પ્રમાણે છે :

$a = p_1p_2 \ldots p_n$, જ્યાં $p_1, p_2 \ldots, p_n$ એ અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ છે. આવશ્યક નથી કે તે $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ભિન્ન સંખ્યાઓ જ હોય.

માટે, $a^2 = (p_1p_2 \ldots p_n)(p_1p_2 \ldots p_n) = p_1^2\, p_2^2 \ldots p_n^2$

હવે આપણને આપેલ છે કે $a^2$ એ $p$ વડે વિભાજ્ય છે. માટે અંકગણિતના મૂળભૂત પ્રમેય પરથી કહી શકાય કે $p$ એ $a^2$ નો એક અવિભાજ્ય અવયવ હોય. અંકગણિતના મૂળભૂત પ્રમેયના અનન્યતા ભાગ પરથી કહી શકાય કે $a^2$ ના અવિભાજ્ય અવયવો માત્ર $p_1, p_2, \ldots, p_n$ છે. આથી $p$ એ $p_1, p_2, \ldots, p_n$ પૈકીનો એક હોય. હવે $a = p_1\, p_2 \ldots p_n$, હોવાથી $p$ એ $a$ નો અવયવ પણ છે.

હવે આપણે $\sqrt{2}$ અસંમેય છે તેની સાબિતી આપવા માટે તૈયાર છીએ.

આ સાબિતી 'અનિષ્ટાપત્તિ'ની પ્રયુક્તિ પર આધારિત છે. (આ પ્રયુક્તિની કેટલીક ચર્ચા પરિશિષ્ટ 1 માં વિગતે કરેલ છે.)

***પ્રમેય 1.4 : $\sqrt{2}$ એ અસંમેય છે.***

**સાબિતી :** આથી ઊલટું, ધારો કે $\sqrt{2}$ સંમેય છે.

આથી આપણે $\sqrt{2} = \frac{r}{s}$ થાય તેવા પૂર્ણાંકો $r$ અને $s$ ($s \neq 0$) મેળવી શકીએ.

જો $r$ અને $s$ ને 1 સિવાય સામાન્ય અવયવ હોય, તો તે તમામ સામાન્ય અવયવ વડે $r$ તથા $s$ ને ભાગતાં $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ મળે.

આપણે $a$ અને $b$ પરસ્પર અવિભાજ્ય લઈ શકીએ. આથી, $b\sqrt{2} = a$.

આપણે બંને બાજુ વર્ગ કરી પુનઃગોઠવણ કરીએ તો, $2b^2 = a^2$ મળે. માટે $a^2$ એ 2 વડે વિભાજ્ય છે.

હવે, પ્રમેય 1.3 અનુસાર, $a$ એ 2 વડે વિભાજ્ય છે.

આથી, આપણે કોઈ પૂર્ણાંક $c$ માટે $a = 2c$ લખી શકીએ.

$a$ ની કિંમત મૂકતાં આપણને $2b^2 = 4c^2$ મળે. આથી, $b^2 = 2c^2$ થાય.

આનો અર્થ એ થાય કે $b^2$ એ 2 વડે વિભાજ્ય છે. આથી, $b$ પણ 2 વડે વિભાજ્ય છે.

**(ફરીથી પ્રમેય 1.3, $p = 2$ સાથે ઉપયોગમાં લેતાં)**

માટે, $a$ તથા $b$ ને ઓછામાં ઓછો એક સામાન્ય અવયવ 2 છે.

આથી, $a$ અને $b$ ને 1 સિવાય કોઈ જ સામાન્ય અવયવ નથી તે ધારણાનો વિરોધાભાસ મળે.

$\sqrt{2}$ સંમેય છે તે ધારણા અસત્ય હોવાથી આ વિરોધાભાસ ઉદ્‌ભવ્યો.

આથી, કહી શકાય કે $\sqrt{2}$ અસંમેય છે.

*પરીક્ષાના હેતુથી આપેલ નથી.

**ઉદાહરણ 9 :** સાબિત કરો કે $\sqrt{3}$ એ અસંમેય છે.

**ઉકેલ :** આથી ઊલટું શક્ય હોય તો, ધારો કે $\sqrt{3}$ એ સંમેય છે.

આથી આપણે શૂન્યેતર પૂર્ણાંક $a$ અને $b$ શોધી શકીએ કે જેથી $\sqrt{3} = \frac{a}{b}$ થાય.

ધારો કે $a$ અને $b$ ને 1 સિવાય કોઈ સામાન્ય અવયવ છે. આથી આપણે તેને સામાન્ય અવયવ વડે ભાગી શકીએ અને વ્યાપકતા ગુમાવ્યા સિવાય માની શકીએ કે, $a$ અને $b$ પરસ્પર અવિભાજ્ય છે.

આથી, $b\sqrt{3} = a$.

બંને બાજુ વર્ગ કરી પુનઃગોઠવણ કરતાં આપણને $3b^2 = a^2$ મળે.

માટે $a^2$ એ 3 વડે વિભાજ્ય છે. આથી પ્રમેય 1.3 અનુસાર $a$ પણ 3 વડે વિભાજ્ય છે.

આથી, આપણે કોઈ પૂર્ણાંક $c$ માટે $a = 3c$ લખી શકીએ.

$a$ ની કિંમત મૂકવાથી $3b^2 = 9c^2$. આથી, આપણને $b^2 = 3c^2$ મળે.

આનો અર્થ એ થયો કે $b^2$ ને 3 વડે ભાગી શકાય અને તેથી $b$ ને પણ 3 વડે ભાગી શકાય.

**($p = 3$ માટે પ્રમેય 1.3નો ઉપયોગ કરતાં)**

આથી, $a$ તથા $b$ ને ઓછામાં ઓછો એક સામાન્ય અવયવ 3 છે.

માટે, $a$ અને $b$ પરસ્પર અવિભાજ્ય હોવાના વિધાનનો વિરોધાભાસ ઊભો થયો.

આ વિરોધાભાસ ઉદ્ભવ્યો કારણકે આપણે $\sqrt{3}$ સંમેય છે તેવી કરેલ ધારણા અસત્ય છે.

માટે, આપણે કહી શકીએ કે $\sqrt{3}$ એ અસંમેય છે.

ધોરણ IX માં આપણે દર્શાવ્યું હતું કે,

- ***સંમેય અને અસંમેય સંખ્યાઓના સરવાળા કે તફાવત અસંમેય હોય છે, અને***
- ***શૂન્યેતર સંમેય સંખ્યા અને અસંમેય સંખ્યાઓના ગુણાકાર અને ભાગફળ અસંમેય હોય છે.***

આપણે કેટલાક ખાસ વિકલ્પોમાં આ પરિણામ સાબિત કરીએ.

**ઉદાહરણ 10 :** દર્શાવો કે $5 - \sqrt{3}$ અસંમેય છે.

**ઉકેલ :** આથી ઊલટું ધારો કે $5 - \sqrt{3}$ એ સંમેય છે.

આથી આપણે પરસ્પર અવિભાજ્ય પૂર્ણાંક $a$ અને પૂર્ણાંક $b$ શોધી શકીએ કે જેથી $5 - \sqrt{3} = \frac{a}{b}$ થાય $(b \neq 0)$.

માટે $5 - \frac{a}{b} = \sqrt{3}$.

આ સમીકરણની પુનઃગોઠવણી કરતાં આપણને $\sqrt{3} = 5 - \frac{a}{b} = \frac{5b - a}{b}$ મળે. $a$ અને $b$ પૂર્ણાંકો હોવાથી $5 - \frac{a}{b}$ સંમેય મળે અને આથી $\sqrt{3}$ પણ સંમેય થાય.

આથી, $\sqrt{3}$ અસંમેય છે તે તથ્યનો વિરોધાભાસ ઉત્પન્ન થાય.

આ વિરોધાભાસ ઉદ્ભવ્યો, કારણ કે આપણે $5 - \sqrt{3}$ સંમેય છે તેવી કરેલ ધારણા અસત્ય હતી.

માટે, આપણે કહી શકીએ કે $5 - \sqrt{3}$ અસંમેય છે.

**ઉદાહરણ 11 :** દર્શાવો કે $3\sqrt{2}$ અસંમેય છે.

**ઉકેલ :** આથી ઊલટું ધારો કે $3\sqrt{2}$ સંમેય છે.

આથી પરસ્પર અવિભાજ્ય પૂર્ણાંક $a$ અને પૂર્ણાંક $b$ શોધી શકીએ કે જેથી $3\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ $(b \neq 0)$. પુનઃગોઠવણ કરતાં આપણને $\sqrt{2} = \frac{a}{3b}$ મળે.

3, $a$ અને $b$ પૂર્ણાંકો હોવાથી, $\frac{a}{3b}$ સંમેય છે અને આથી $\sqrt{2}$ પણ સંમેય છે. પરંતુ $\sqrt{2}$ અસંમેય છે. આથી વિરોધાભાસ ઊભો થાય.

આથી આપણે કહી શકીએ કે $3\sqrt{2}$ અસંમેય છે.

### સ્વાધ્યાય 1.3

**1.** સાબિત કરો કે, $\sqrt{5}$ અસંમેય છે.

**2.** સાબિત કરો કે, $3 + 2\sqrt{5}$ અસંમેય છે.

**3.** નીચે દર્શાવેલ સંખ્યા અસંમેય છે તેમ સાબિત કરો :

(i) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (ii) $7\sqrt{5}$ (iii) $6 + \sqrt{2}$

## 1.5 સંમેય સંખ્યાઓ અને તેના દશાંશ નિરૂપણનું પુનરાવર્તન

ધોરણ IX માં તમે અભ્યાસ કર્યો કે, સંમેય સંખ્યાઓનું દશાંશ નિરૂપણ સાન્ત અથવા અનંત અને આવૃત્ત હોય છે. આ વિભાગમાં આપણે સંમેય સંખ્યા $\frac{p}{q}$ $(q \neq 0)$ લઈએ અને શોધીએ કે તેનું દશાંશ નિરૂપણ ક્યારે સાન્ત અને ક્યારે અનંત અને આવૃત્ત હોય છે. કેટલાંક ઉદાહરણો જોઈ આપણે તે નક્કી કરીએ.

ચાલો આપણે નીચે દર્શાવેલ સંમેય સંખ્યાઓ લઈએ :

(i) 0.375 (ii) 0.104 (iii) 0.0875 (iv) 23.3408

હવે,

(i) $0.375 = \frac{375}{1000} = \frac{375}{10^3}$ (ii) $0.104 = \frac{104}{1000} = \frac{104}{10^3}$

(iii) $0.0875 = \frac{875}{10000} = \frac{875}{10^4}$ (iv) $23.3408 = \frac{233408}{10000} = \frac{233408}{10^4}$

કોઈ પણ અપેક્ષા રાખી શકે કે આ તમામને જેનો છેદ 10 નો ઘાત હોય તેવી સંમેય સંખ્યા તરીકે દર્શાવી શકીએ. ચાલો આપણે અંશ અને છેદમાં રહેલા સામાન્ય અવયવોને દૂર કરીએ અને જોઈએ કે આપણને શું પ્રાપ્ત થાય છે :

(i) $0.375 = \frac{375}{10^3} = \frac{3 \times 5^3}{2^3 \times 5^3} = \frac{3}{2^3}$ (ii) $0.104 = \frac{104}{10^3} = \frac{13 \times 2^3}{2^3 \times 5^3} = \frac{13}{5^3}$

(iii) $0.0875 = \frac{875}{10^4} = \frac{7}{2^4 \times 5}$ (iv) $23.3408 = \frac{233408}{10^4} = \frac{2^2 \times 7 \times 521}{5^4}$

કોઈ તરાહ દેખાય છે? આપણે સાન્ત દશાંશ સ્વરૂપમાં આપેલી વાસ્તવિક સંખ્યાને જ્યાં $p$ અને $q$ પરસ્પર અવિભાજ્ય પૂર્ણાંકો હોય અને $q$ શૂન્યેતર હોય તેવા સંમેય સંખ્યાના સ્વરૂપ $\frac{p}{q}$ માં રૂપાંતરિત કરી અને છેદ $q$ ના અવિભાજ્ય અવયવોની ઘાતમાં 2 ની અથવા 5 ની અથવા તેમના બંનેની ઘાત છે. આપણે 10 ના ઘાતના અવયવો માત્ર 2 તથા 5 ના ઘાત હોય તેવી જ અપેક્ષા રાખીએ છીએ.

જો કે આપણે અમુક જ ઉદાહરણો પર કાર્ય કર્યું, છતાં આપણે જોઇ શકીએ કે, જેનું દશાંશ નિરૂપણ સાન્ત હોય એવી કોઈ પણ વાસ્તવિક સંખ્યાને છેદમાં 10 ના ઘાતવાળી પૂર્ણાંક સંખ્યા હોય તેવા સ્વરૂપમાં પરિણમતી સંખ્યા તરીકે દર્શાવી શકાય. વળી 10 ના અવિભાજ્ય અવયવો માત્ર 2 અને 5 છે. આથી અંશ અને છેદ વચ્ચેના સામાન્ય અવયવો દૂર કરતાં આ વાસ્તવિક સંખ્યા જ્યાં $q$ નું અવિભાજ્ય અવયવોમાં અવયવીકરણ $2^n5^m$ સ્વરૂપમાં હોય અને $n, m$ એ અનૃણ પૂર્ણાંક હોય એવા $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપમાં મળે.

ચાલો આપણે આપણું પરિણામ ઔપચારિક રીતે લખીએ :

**પ્રમેય 1.5 : જો $x$ એ સાન્ત દશાંશ નિરૂપણવાળી સંમેય સંખ્યા હોય, તો $x$ ને જ્યાં $p$ અને $q$ પરસ્પર અવિભાજ્ય પૂર્ણાંકો હોય અને $q$ નું અવિભાજ્યમાં અવયવીકરણ $2^n5^m$ સ્વરૂપમાં હોય તેવા $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપમાં દર્શાવી શકાય. $n$, $m$ એ અનૃણ પૂર્ણાંકો છે. (જો $m = n = 0$ તો $q = 1$. તે અવિભાજ્યોમાં વર્ગીકરણ નથી. $x$ પોતે જ પૂર્ણાંક છે.)**

જો પ્રમેય 1.5ના પ્રતીપનો વિચાર કરીએ તો શું થશે તે જાણીને તમને આશ્ચર્ય થશે. જો આપણે $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપની સંમેય સંખ્યા પસંદ કરીએ અને અનૃણ પૂર્ણાંકો $m$ તથા $n$ માટે $q$ નું અવિભાજ્યોમાં અવયવીકરણ $2^n5^m$ હોય, તો $\frac{p}{q}$ નું દશાંશ નિરૂપણ સાન્ત થશે? *(જો $m = n = 0$ તો $q = 1$ તથા $\frac{p}{q}$ પોતે જ પૂર્ણાંક છે.)*

ચાલો આપણે આ સત્ય હોવાના દેખીતાં કારણો જોઈએ. તમે ચોક્કસ સહમત થશો કે જ્યાં $b$ એ 10 નો ઘાતાંક હોય તેવી $\frac{a}{b}$ સ્વરૂપની સંખ્યાનું દશાંશ નિરૂપણ સાન્ત છે. જ્યાં $q$ એ $2^n5^m$ સ્વરૂપે હોય, તેવા સ્વરૂપની સંખ્યા $\frac{p}{q}$ ને જ્યાં $b$ એ 10 ની ઘાત હોય તેવા સમકક્ષ સ્વરૂપમાં પરિવર્તિત કરવી એ અર્થસભર થશે.

ચાલો આપણે ઉપરનાં ઉદાહરણો તરફ જઈએ અને ઊલટી પ્રક્રિયા કરીએ.

(i) $\frac{3}{8} = \frac{3}{2^3} = \frac{3 \times 5^3}{2^3 \times 5^3} = \frac{375}{10^3} = 0.375$

(ii) $\frac{13}{125} = \frac{13}{5^3} = \frac{13 \times 2^3}{5^3 \times 2^3} = \frac{104}{10^3} = 0.104$

(iii) $\frac{7}{80} = \frac{7}{2^4 \times 5} = \frac{7 \times 5^3}{2^4 \times 5^4} = \frac{875}{10^4} = 0.0875$

(iv) $\frac{14588}{625} = \frac{2^2 \times 7 \times 521}{5^4} = \frac{2^6 \times 7 \times 521}{2^4 \times 5^4} = \frac{233408}{10^4} = 23.3408$

આ ઉદાહરણો દર્શાવે છે કે જો $q$ એ $2^n\ 5^m$ સ્વરૂપમાં હોય, તો આપણે $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપની સંમેય સંખ્યાને જ્યાં $b$ એ 10 ની ઘાત હોય તેવી સમાન સંખ્યા $\frac{a}{b}$ માં કેવી રીતે રૂપાંતરિત કરી શકીએ. આથી આવી સંખ્યાની દશાંશ અભિવ્યક્તિ સાન્ત છે. હવે આ પરિણામ આપણે ઔપચારિક રીતે લખીએ.

***પ્રમેય 1.6 : જો $x = \frac{p}{q}$ માં $q$ નું અવિભાજ્યોમાં અવયવીકરણ $2^n\ 5^m$ સ્વરૂપે હોય અને $n$, $m$ એ અનૃણ પૂર્ણાંકો હોય, તો $x$ નું દશાંશ નિરૂપણ સાન્ત હોય. (જો $m = n = 0$ તો $q = 1$)***

હવે આપણે જેનું દશાંશ નિરૂપણ અનંત અને આવૃત હોય એવી સંમેય સંખ્યાઓ તરફ જવા તૈયાર છીએ. ફરીથી આપણે એક ઉદાહરણ લઈએ અને જોઈએ આગળ શું થાય છે.

આપણે ધોરણ IXના પુસ્તકમાંથી પ્રકરણ 1નું $\frac{1}{7}$ ના દશાંશ નિરૂપણ વિષયક ઉદાહરણ 5 જોઈએ.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 0.1428571 \\
7 & 10 \\
 & \underline{7} \\
 & 30 \\
 & \underline{28} \\
 & 20 \\
 & \underline{14} \\
 & 60 \\
 & \underline{56} \\
 & 40 \\
 & \underline{35} \\
 & 50 \\
 & \underline{49} \\
 & 10 \\
 & \underline{7} \\
 & 30
\end{array}
$$

અહીં શેષ 3, 2, 6, 4, 5, 1, 3, 2, 6, 4, 5, 1... અને ભાજક 7 છે.

આપણે નોંધીએ કે અહીં છેદ 7 સ્પષ્ટપણે $2^n\ 5^m$ સ્વરૂપમાં નથી. આથી પ્રમેય 1.5 અને 1.6 પરથી આપણે જાણીએ છીએ કે $\frac{1}{7}$ નું દશાંશ નિરૂપણ સાન્ત ન હોઈ શકે. 0 એ શેષ તરીકે નથી આવતો (કારણ?) અને શેષ અમુક તબક્કા બાદ પુનરાવર્તન પામે છે. આથી, આપણને અંકસમૂહ 142857 નું પુનરાવર્તિત જૂથ $\frac{1}{7}$ ના ભાગફળના ભાગ રૂપે મળે છે.

$\frac{1}{7}$ ના કિસ્સામાં આપણે જે જોયું તે પ્રમેય 1.5 અને 1.6 માં આવરી લેવાઈ ન હોય તેવી કોઈપણ સંમેય સંખ્યા માટે સત્ય છે. આવી સંખ્યાઓ માટે આપણી પાસે :

***પ્રમેય 1.7 : જો $q$ નું અવિભાજ્યોમાં અવયવીકરણ અનૃણ પૂર્ણાંકો $n$, $m$ માટે $2^n 5^m$ સ્વરૂપે ન હોય, તો $x = \frac{p}{q}$ નું દશાંશ નિરૂપણ અનંત અને આવૃત્ત છે.***

*ઉપરની ચર્ચાને અંતે આપણે એવા તારણ પર આવીએ કે દરેક સંમેય સંખ્યાનું દશાંશ નિરૂપણ સાન્ત અથવા અનંત અને આવૃત્ત હોય છે.*

## સ્વાધ્યાય 1.4

**1.** ભાગાકારની લાંબી પ્રક્રિયા કર્યા વગર, નીચે દર્શાવેલ સંમેય સંખ્યાઓનું નિરૂપણ સાન્ત છે કે અનંત અને આવૃત્ત છે તે જણાવો :

(i) $\frac{13}{3125}$ (ii) $\frac{17}{8}$ (iii) $\frac{64}{455}$ (iv) $\frac{15}{1600}$

(v) $\frac{29}{343}$ (vi) $\frac{23}{2^3 5^2}$ (vii) $\frac{129}{2^2 5^7 7^5}$ (viii) $\frac{6}{15}$

(ix) $\frac{35}{50}$ (x) $\frac{77}{210}$

**2.** પ્રશ્ન 1 માં જે સંમેય સંખ્યાઓનું દશાંશ નિરૂપણ સાન્ત હોય તેનું દશાંશ નિરૂપણ દર્શાવો.

**3.** નીચેની વાસ્તવિક સંખ્યાઓનું દશાંશ નિરૂપણ દર્શાવેલ છે. દરેક માટે જણાવો કે તે સંમેય છે કે નહિ. અને જો સંમેય હોય, તો તેના $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપમાં $q$ ના અવિભાજ્ય અવયવો વિશે તમે શું કહી શકશો ?

(i) 43.123456789 (ii) 0.120 1200 12000 120000... (iii) $43.\overline{123456789}$

## 1.6 સારાંશ

આ પ્રકરણમાં તમે નીચેના મુદ્દાઓનો અભ્યાસ કર્યો :

**1.** **યુક્લિડનું ભાગાકારનું પૂર્વ-પ્રમેય**

**આપેલ ધન પૂર્ણાંકો $a$ અને $b$ને સંગત $a = bq + r$, $0 \le r < b$ નું સમાધાન કરે તેવી અનન્ય પૂર્ણ સંખ્યાઓ $q$ અને $r$ નું અસ્તિત્વ છે. (બંને સાથે શૂન્ય નહિ.)**

**2.** **યુક્લિડની ભાગ-પ્રવિધિ :** યુક્લિડના ભાગાકારના પૂર્વ-પ્રમેય અનુસાર $a > b$ હોય તેવા કોઈપણ બે ધન પૂર્ણાંકો $a$ અને $b$ નો ગુ.સા.અ. નીચે પ્રમાણે મેળવી શકાય.

**પગલું 1 :** $a = bq + r$, $0 \le r < b$ થાય તેવા $q$ અને $r$ મેળવવા ભાગાકારના પૂર્વ પ્રમેયનો ઉપયોગ કરો.

**પગલું 2 :** જો $r = 0$ તો ગુ.સા.અ. $b$ છે. જો $r \ne 0$ તો ભાગાકારના પૂર્વ-પ્રમેયનો $b$ અને $r$ માટે ઉપયોગ કરો.

**પગલું 3 :** જ્યાં સુધી શેષ 0 ન મળે ત્યાં સુધી આ પ્રક્રિયા ચાલુ રાખો. શેષ 0 થાય તે તબક્કે ભાજક એ ગુ.સા.અ. $(a, b)$ થાય. વળી ગુ.સા.અ. $(a, b)$ = ગુ.સા.અ. $(b, r)$

**3.** ***અંકગણિતનું મૂળભૂત પ્રમેય : દરેક વિભાજ્ય સંખ્યાને તેના અવયવોના ક્રમને અવગણીને અવિભાજ્ય સંખ્યાઓના ગુણાકાર તરીકે અનન્ય રીતે દર્શાવી શકાય છે.***

**4.** જો $p$ અવિભાજ્ય હોય અને $a^2$ એ $p$ વડે વિભાજ્ય હોય, તો $a$ પણ $p$ વડે વિભાજ્ય છે.

**5.** $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ અસંમેય છે તે સાબિત કરવું.

**6.** જેનું દશાંશ નિરૂપણ સાન્ત છે તેવી સંમેય સંખ્યા $a$ ને આપણે $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપમાં દર્શાવી શકીએ. $p$ અને $q$ પરસ્પર અવિભાજ્ય છે અને અનૃણ પૂર્ણાંકો $n$, $m$ માટે $q$ નું અવિભાજ્યોમાં અવયવીકરણ $2^n5^m$ સ્વરૂપમાં હોય.

(જો $m = n = 0$ તો $q = 1$ અને તેનું અવિભાજ્યોમાં વર્ગીકરણ નથી. $\frac{p}{q}$ પૂર્ણાંક જ છે.)

**7.** જેમાં અનૃણ પૂર્ણાંકો $n$, $m$ માટે $q$ નું અવિભાજ્યોમાં અવયવીકરણ $2^n5^m$ સ્વરૂપનું હોય તેવી સંમેય સંખ્યા $x = \frac{p}{q}$ નું દશાંશ નિરૂપણ સાન્ત હોય.

**8.** જેમાં અનૃણ પૂર્ણાંકો $n$, $m$ માટે $q$ નું અવિભાજ્યોમાં અવયવીકરણ $2^n5^m$ સ્વરૂપનું ન હોય તેવી સંમેય સંખ્યા $x = \frac{p}{q}$ નું દશાંશ નિરૂપણ અનંત અને આવૃત હોય.

## વાચકને નોંધ

તમે જોયું છે કે,

ધન પૂર્ણાંકો $p$, $q$, $r$ માટે ગુ.સા.અ. $(p, q, r) \times$ લ.સા.અ. $(p, q, r) \neq p \times q \times r$, (પ્રશ્ન 8)

આમ છતાં, ત્રણ સંખ્યાઓ $p$, $q$, $r$ માટે નીચેનાં પરિણામો સત્ય છે :

$$\text{લ.સા.અ.}(p, q, r) = \frac{p \cdot q \cdot r \times \text{ગુ.સા.અ.}(p,q,r)}{\text{ગુ.સા.અ.}(p,q) \times \text{ગુ.સા.અ.}(q,r) \times \text{ગુ.સા.અ.}(p,r)}$$

$$\text{ગુ.સા.અ.}(p, q, r) = \frac{p \cdot q \cdot r \times \text{લ.સા.અ.}(p,q,r)}{\text{લ.સા.અ.}(p,q) \times \text{લ.સા.અ.}(q,r) \times \text{લ.સા.અ.}(p,r)}$$

## જાણકારી માટે

C.E. is an abbreviation for Common Era
B.C.E. is an abbreviation for Before Common Era
C.E. and B.C.E. are used in exactly the same way as AD and BC.