अध्याय 1

संख्या पद्धति
Number System

शून्य तथा दाशमिक स्थान मान पद्धति का आविष्कार गणित के क्षेत्र में 'भारत' की अभूतपूर्व देन है। यह पद्धति भारत से सर्वप्रथम अरब पहुँची तथा वहाँ से पश्चिमी देशों में गई। इसी कारण पश्चिमी देशों में 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 को हिन्दू-अरेबिक न्यूमरल्स (Hindu-Arabic Numerals) कहा जाता है। इन्हीं संख्याओं के गुणों के व्यवहारगत अध्ययन को 'संख्या पद्धति' कहा जाता है।

संख्या पद्धति के आधारभूत तथ्य निम्नलिखित हैं

प्राकृत संख्याएँ Natural Numbers

वे संख्याएँ जो वस्तुओं की गिनती करने में प्रयुक्त की जाती हैं, प्राकृत संख्याएँ कहलाती हैं।

$$N = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

पूर्ण संख्याएँ Whole Numbers

यदि प्राकृत संख्याओं के साथ शून्य को भी सम्मिलित कर लिया जाए, तो वे संख्याएँ पूर्ण संख्याएँ कहलाती हैं। $W = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

पूर्णांक Integers

धन पूर्णांक $(I^+) = \{1, 2, 3, \ldots\}$, शून्य पूर्णांक '0' तथा ऋण पूर्णांक $(I^-) = \{\ldots, -3, -2, -1\}$ के सम्मिलित समुच्चय को पूर्णांकों का समुच्चय कहते हैं।

$$I = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

परिमेय संख्याएँ Rational Numbers

वे सभी संख्याएँ जिन्हें p/q के रूप में व्यक्त किया जा सके, परिमेय संख्याएँ कहलाती हैं, जहाँ $q \neq 0$।

$Q = \{p/q : p$ तथा q पूर्णांक हैं और $q \neq 0\}$ **जैसे** $7, -2, \frac{7}{5}, 0$ इत्यादि परिमेय संख्याएँ हैं।

अपरिमेय संख्याएँ Irrational Numbers

वे सभी संख्याएँ जिन्हें p/q के रूप में व्यक्त नहीं किया जा सकता, अपरिमेय संख्याएँ कहलाती हैं।

जैसे $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ इत्यादि अपरिमेय संख्याएँ हैं।

परिमेय तथा अपरिमेय संख्याओं का योग तथा अन्तर अपरिमेय होता है।

उदाहरण $3 + \sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

परिमेय तथा अपरिमेय संख्याओं का गुणनफल अपरिमेय संख्या होता है।

उदाहरण $3\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

वास्तविक संख्याएँ Real Numbers

वास्तविक संख्याओं में परिमेय तथा अपरिमेय दोनों प्रकार की संख्याएँ आती हैं।

सम संख्याएँ Even Numbers

वे सभी प्राकृत संख्याएँ जो 2 से पूर्णत: विभाजित हो जाती हैं, सम संख्याएँ कहलाती हैं।

जैसे 2, 4, 6, 8, ... सम संख्याएँ हैं।

विषम संख्याएँ Odd Numbers

वे सभी प्राकृत संख्याएँ जो 2 से पूर्णत: विभाजित नहीं होती हैं, विषम संख्याएँ कहलाती हैं।

जैसे 1, 3, 5, 7, ... विषम संख्याएँ हैं।

अभाज्य संख्याएँ Prime Numbers

वे सभी संख्याएँ जो 1 तथा स्वयं के अतिरिक्त किसी अन्य संख्या से पूर्णत: विभाजित न हो, अभाज्य संख्याएँ कहलाती हैं। **जैसे** 2, 3, 5, 7, 11, ... सभी अभाज्य संख्याएँ हैं।

भाज्य संख्याएँ Composite Numbers

1 के अतिरिक्त वे सभी प्राकृत संख्याएँ जो अभाज्य नहीं हैं।

भाज्यता की जाँच Test of Divisibility

2 से भाज्य यदि दी गई संख्या के इकाई के स्थान पर शून्य या सम संख्या हो, तो वह संख्या 2 से भाज्य होगी।

3 से भाज्य यदि दी गई संख्या के सभी अंकों का योग 3 से विभाजित हो जाता है, तो वह संख्या 3 से भाज्य होगी।

4 से भाज्य यदि दी गई संख्या के इकाई व दहाई के अंकों द्वारा बनी संख्या 4 से विभाजित है, तो वह संख्या 4 से विभाजित होगी।

5 से भाज्य यदि दी गई संख्या के इकाई के स्थान पर शून्य या 5 हो, तो वह संख्या 5 से भाज्य होगी।

6 से भाज्य यदि दी गई संख्या 2 तथा 3 से पूर्णतः विभाजित हो जाती है, तो वह संख्या 6 से भाज्य होगी।

7 से भाज्य यदि किसी संख्या के इकाई के अंक का दोगुना तथा शेष अंकों से बनी संख्या का अन्तर 0 हो या 7 से विभाज्य हो, तो वह संख्या 7 से विभाज्य होती है।

8 से भाज्य यदि दी गई संख्या के अन्तिम तीन अंकों द्वारा बनी संख्या 8 से विभाजित हो जाती है, तो वह संख्या 8 से भाज्य होगी।

9 से भाज्य यदि दी गई संख्या के सभी अंकों का योग 9 से विभाजित हो जाता है, तो वह संख्या 9 से भाज्य होगी।

11 से भाज्य यदि दी गई संख्या के सम तथा विषम स्थान पर स्थित अंकों का योगफल का अन्तर 0 या 11 होता है, तो वह संख्या 11 से भाज्य होगी।

महत्त्वपूर्ण तथ्य एवं सूत्र

- भाज्य = (भाजक × भागफल) + शेषफल
- शून्य न तो धन पूर्णांक है और न ही ऋण पूर्णांक है।
- 1 न तो अभाज्य संख्या है और न ही भाज्य संख्या है।
- एकमात्र 2 सम अभाज्य संख्या है।
- 1 से 100 के मध्य केवल 25 अभाज्य संख्याएँ हैं।
- प्रथम n प्राकृत संख्याओं का योग $= \frac{n(n+1)}{2}$
- प्रथम n सम प्राकृत संख्याओं का योग $= n(n+1)$
- प्रथम n तक की सम प्राकृत संख्याओं का योग $= \frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right)$
- प्रथम n विषम प्राकृत संख्याओं का योग $= n^2$

संख्याओं के स्थानीय मान एवं जातीय मान
Place and Face Values of Numbers

किसी संख्या में किसी अंक का वह मान जो उसके स्थान विशेष की स्थिति के अनुसार बदलता रहता है, 'स्थानीय मान' तथा 'जातीय मान' वह मान है, जो उसका अपना मान है चाहे वह किसी भी स्थान पर हो।

जैसे 63015 में 6 का स्थानीय मान $= 6 \times 10000$
$= 60000$

तथा 63015 में 6 का जातीय मान = 6

पूर्ववर्ती एवं अनुवर्ती संख्याएँ
Predecessor and Successor Numbers

किसी दी गई संख्या (x) से ठीक पहले (छोटी) वाली संख्या उस संख्या (x) की पूर्ववर्ती संख्या तथा ठीक बाद (बड़ी) वाली संख्या उस संख्या (x) की अनुवर्ती संख्या कहलाती है।

जैसे 521 की पूर्ववर्ती संख्या = 520
521 की अनुवर्ती संख्या = 522

इकाई का अंक ज्ञात करना To Find Out Unit Digit

किसी संख्या के इकाई के अंक की पुनरावृत्ति घातांक 4 के बाद पुनः (Repeat) होती है। इसलिए घात में 4 से भाग देने पर जो शेष अंक (0, 1, 2 या 3) बचता है उसे संख्या के इकाई के अंक की घात के रूप में प्रयोग कर, संख्या के इकाई का अंक ज्ञात किया जाता है।

जैसे $(529)^{59}$ में इकाई का अंक
$= (9)^{14\times 4+3}$ में इकाई का अंक
$= 9^3$ में इकाई का अंक = 9

दो अंकीय संख्याओं पर आधारित समस्याओं को सुलझाना
Solved the Problems Based on Two Digit Numbers

माना कोई दो अंकों वाली संख्या $10x + y$ है। तब

- संख्या के अंकों को पलटने पर बनी नई संख्या $(10y + x)$ को मूल संख्या में जोड़ने पर योगफल सदैव 11 से भाज्य होगा।
- संख्या के अंकों को पलटने पर बनी नई संख्या $(10y + x)$ मूल संख्या $(10x + y)$ से अधिक है, तो इकाई व दहाई अंकों का अन्तर $= \frac{\text{नई संख्या एवं मूल संख्या का अन्तर}}{9}$

भाज्य, भाजक, भागफल तथा शेषफल में सम्बन्ध

कोई भाज्य अपने भाजक तथा भागफल के गुणनफल में शेषफल के योग के बराबर होता है अर्थात् भाज्य = भाजक × भागफल + शेषफल

समान्तर श्रेणी Arithmetic Progression

जब किसी श्रेणी का कोई पद एवं ठीक पहले वाले पद का अन्तर सदैव स्थिर (नियत) रहे, तो उस श्रेणी को 'समान्तर श्रेणी' कहा जाता है। इस पहले पद को a तथा पदान्तर को d से सूचित किया जाता है।

जैसे नीचे दी गई श्रेणी एक समान्तर श्रेणी है

$$a + (a + d) + (a + 2d) + (a + 3d) + \ldots\ldots + [a + (n-1)d]$$

ध्यान दें !

- समान्तर श्रेणी का nवाँ पद $= T_n = a + (n-1)d = l$ (अन्तिम पद)
- समान्तर श्रेणी के n पदों का योगफल $(S_n) = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$
$= \frac{n}{2}(a + l)$

साधित उदाहरण

1. प्रथम 25 प्राकृतिक संख्याओं का योगफल होगा

(1) 625 (2) 375 (3) 329 (4) 315
(5) 325

हल *(5)* प्रथम n प्राकृतिक संख्याओं का योगफल $= \frac{n(n+1)}{2}$

$$= \frac{25 \times (25+1)}{2} = \frac{25 \times 26}{2} = 25 \times 13 = 325$$

2. यदि $738A6A$, 11 से भाज्य है, तो A का मान है

(1) 6 (2) 3 (3) 9 (4) 1
(5) 11

हल *(3)* यदि उपरोक्त संख्या 11 से विभाज्य होगी, तो विषम तथा सम पदों के योगफल का अन्तर 11 से विभाज्य या शून्य होगा। शून्य के लिए

$$3 + 2A - 21 = 0$$
$$\Rightarrow \quad 2A = 18$$
$$\therefore \quad A = 9$$

3. $(5263)^{821}$ में इकाई का अंक होगा

(1) 3 (2) 9
(3) 7 (4) 5
(5) 9

हल *(1)* $(5263)^{821}$ में इकाई का अंक

$= (3)^{205 \times 4 + 1}$ में इकाई का अंक

$= 3^1$ में इकाई का अंक $= 3$

4. 3 के चार क्रमागत गुणज का योगफल 162 है। उनमें बड़ी संख्या क्या है?

(1) 45 (2) 55
(3) 35 (4) 40
(5) 59

हल *(1)* यदि संख्याएँ x, $x + 3$, $x + 6$ तथा $x + 9$ हों, तो

$$x + x + 3 + x + 6 + x + 9 = 162$$
$$4x + 18 = 162$$
$$\Rightarrow \quad x = \frac{162 - 18}{4} \therefore x = 36$$

अत: सबसे बड़ी संख्या $= x + 9 = 36 + 9 = 45$

5. 5332624 निम्न में से किस संख्या से विभाजित होती है?

(1) 4 (2) 8 (3) 11 (4) 13
(5) ये सभी

हल *(3)* 5332624 के इकाई तथा दहाई के अंकों द्वारा बनी संख्या 4 से विभाजित होती है।

अत: संख्या 4 से विभाजित होती है तथा संख्या के इकाई, दहाई तथा सैकड़े से बनी संख्या 8 से विभाजित होती है।

अत: संख्या 8 से विभाजित होती है तथा संख्या के विषम स्थानों के अंकों का योग तथा सम स्थानों के अंकों के योग का अन्तर

$$= (5 + 3 + 6 + 4) - (3 + 2 + 2) = 11$$

अत: संख्या 11 से विभाजित होती है।

6. श्रेणी 2, 7, 12, ... के 20 पदों का योगफल क्या होगा?

(1) 970 (2) 980 (3) 990 (4) 995
(5) 1150

हल *(3)* अभीष्ट योगफल $= \frac{20}{2}[2 \times 2 + (20 - 1) 5]$

$= 10 [4 + 19 \times 5]$ $\quad [\because a = 2$ तथा $d = 5]$

$= 10 (4 + 95)$

$= 99 \times 10 = 990$

7. दो अंकों की एक संख्या के अंकों का योगफल 12 है। यदि अंकों को परस्पर बदल दिया जाए, तो वह मूल संख्या से 36 अधिक हो जाती है। वह संख्या है

(1) 84 (2) 52 (3) 93 (4) 39
(5) 48

हल *(5)* माना वह संख्या $10x + y$ है। तब

प्रश्नानुसार,

$$10y + x - 10x - y = 36$$
$$9y - 9x = 36$$
$$\therefore \quad y - x = 4 \quad \text{...(i)}$$
$$\because \quad x + y = 12 \quad \text{...(ii)}$$

समी (i) तथा (ii) से,

$y = 8$ तथा $x = 4$

$\therefore$ अभीष्ट संख्या $= 10 \times 4 + 8 = 40 + 8 = 48$

अभ्यास प्रश्न

1. निम्न में से कौन-सी संख्या अपरिमेय है?

(1) 22/7 (2) π (3) 1.333....
(4) 3.14 (5) 7 / 22

2. निम्न में से कौन-सी संख्या परिमेय है?

(1) $\sqrt{4}$ (2) $\sqrt{3}$ (3) $2 + \sqrt{3}$
(4) $5\sqrt{3}$ (5) $\sqrt{6}$

3. 6 से विभक्त होने वाली तीन अंकों की कुल कितनी संख्याएँ हैं?

(1) 149 (2) 151 (3) 166
(4) 150 (5) 152

4. 50 से 90 के बीच सभी अभाज्य संख्याओं का योग कितना है?

(1) 485 (2) 572 (3) 722
(4) 635 (5) 600

5. निम्नलिखित में से अभाज्य संख्या कौन-सी नहीं है?

(1) 161 (2) 221 (3) 734
(4) 437 (5) 373

6. 100 तथा 200 के बीच आने वाले उन पूर्णांकों, जो 9 तथा 6 दोनों से विभाजित हों, की कुल संख्या होगी

(1) 5 (2) 7 (3) 6
(4) 8 (5) 9

7. $\frac{(243)^{n/5} \cdot 3^{2n+1}}{9^n \cdot 3^{n-1}}$ का मान है

(1) 1 (2) 9 (3) 3
(4) 3^n (5) 27

8. $\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)........\left(1-\frac{1}{n}\right)$ का मान है

(1) $1/n$ (2) $2/n$
(3) $\frac{2(n-1)}{n}$ (4) $\frac{2}{n(n+1)}$
(5) n

9. गुणनफल $(2153)^{167}$ का इकाई का अंक क्या होगा?

(1) 1 (2) 3
(3) 7 (4) 9
(5) 5

10. यदि $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + x^2 = \frac{x(x+1)(2x+1)}{6}$ हो, तो $1^2 + 3^2 + 5^2 + ... + 19^2$ बराबर है

(1) 1330 (2) 2100 (3) 2485
(4) 2500 (5) 1360

11. भाजक भागफल का 25 गुना है तथा शेषफल का 5 गुना है, यदि भागफल 16 हो, तो भाज्य है

(1) 6400 (2) 648
(3) 400 (4) 480
(5) 6480

12. यदि $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + 10^3 = 3025$ हो, तो $2^3 + 4^3 + 6^3 + ... + 20^3$ का मान है

(1) 6050 (2) 9075 (3) 12100
(4) 24200 (5) 2400

13. यदि 17^{200} को 18 से भाग दें, तो शेषफल क्या होगा?

(1) 17 (2) 16
(3) 10 (4) 2
(5) 1

14. $(101 + 102 + 103 + ... + 200)$ का योग क्या होगा?

(1) 15000 (2) 15025
(3) 15050 (4) 25000
(5) 15550

15. 75 से 97 तक की सभी प्राकृतिक संख्याओं का योग कितना होगा?

(1) 1598 (2) 1798 (3) 1958
(4) 1978 (5) 1900

16. 15876 के वर्गमूल में इकाई का अंक क्या होगा?

(1) 8 (2) 3 (3) 4
(4) 2 (5) 6

17. 3 से गुणा करके बनी 100 तथा 200 के बीच की सभी प्राकृतिक संख्याओं का योग क्या होगा?

(1) 5000 (2) 4950 (3) 4980
(4) 4900 (5) 5050

18. 1000 में कौन-सी सबसे छोटी संख्या जोड़ी जाये, ताकि वह योग 45 से पूरी तरह विभाजित हो जाये?

(1) 35 (2) 80 (3) 20
(4) 10 (5) 30

19. प्रथम 20 विषम प्राकृतिक संख्याओं का योग क्या होगा?

(1) 210 (2) 300 (3) 400
(4) 420 (5) 330

20. $(251)^{98} + (21)^{29} - (106)^{100} + (705)^{35} - (16)^4 + 259$ के सरलीकृत रूप में इकाई का अंक क्या होगा?

(1) 1 (2) 4 (3) 5
(4) 6 (5) 8

21. $30^7 \times 22^5 \times 34^{11}$ में अभाज्य गुणनखण्डों की संख्या होगी

(1) 50 (2) 51 (3) 52
(4) 53 (5) 54

22. $(264)^{102} + (264)^{103}$ में इकाई का अंक क्या होगा?

(1) 0 (2) 4 (3) 6
(4) 8 (5) 2

23. यदि $(2^{32} + 1)$, किसी निश्चित संख्या से पूर्णतया विभक्त हो, तो $(2^{32} + 1)$ से निम्नलिखित में से कौन-सी संख्या पूर्णतया विभक्त होगी?

(1) $2^{16} + 1$ (2) $2^{16} - 1$ (3) $2^{96} + 1$
(4) 7×2^{33} (5) $2^{95} + 1$

24. यदि $\sqrt{3^n} = 81$ हो, तो n का मान है

(1) 2 (2) 4 (3) 6
(4) 8 (5) 9

25. यदि $777777 \div x = 11$ हो, तो x का मान होगा

(1) 70707 (2) 70700 (3) 7077
(4) 777 (5) 7079

उत्तरमाला

1. (2)	**2.** (1)	**3.** (4)	**4.** (4)	**5.** (5)	**6.** (3)	**7.** (2)	**8.** (1)	**9.** (3)	**10.** (1)
11. (5)	**12.** (4)	**13.** (5)	**14.** (3)	**15.** (4)	**16.** (5)	**17.** (2)	**18.** (1)	**19.** (3)	**20.** (2)
21. (4)	**22.** (1)	**23.** (3)	**24.** (4)	**25.** (1)					

संकेत एवं हल

3. 6 से विभक्त होने वाली तीन अंकों की सबसे छोटी संख्या 102 है तथा तीन अंकों की सबसे बड़ी संख्या 996 है।

$\therefore$ श्रेणी 102, 108, ..., 996 होगी।

यहाँ, $a = 102,\ d = 6,\ T_n = 996,\ n = ?$

$T_n = a + (n-1)\cdot d$ से

$$996 = 102 + (n-1)\,6$$
$$\Rightarrow \quad 894 = (n-1)\,6$$
$$\Rightarrow \quad (n-1) = 149$$
$$\Rightarrow \quad n = 150$$

4. 50 तथा 90 के बीच अभाज्य संख्याएँ 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83 व 89 हैं।

$\therefore$ अभीष्ट योग $= 53 + 59 + 61 + 67 + 71 + 73 + 79 + 83 + 89 = 635$

7.
$$\frac{(243)^{n/5}\cdot 3^{2n+1}}{9^n\cdot 3^{n-1}} = \frac{(3^5)^{n/5}\cdot 3^{2n}\cdot 3}{3^{2n}\cdot 3^n/3}$$
$$= \frac{3^n \times 3^{2n}\times 3\times 3}{3^{2n}\times 3^n} = 3\times 3 = 9$$

8.
$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\ldots\ldots\left(1-\frac{1}{n}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\ldots\ldots\times\frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}$$

9. $(2153)^{167}$ में इकाई का अंक

$= 3^{167}$ में इकाई का अंक

$= 3^{4\times 41+3}$ में इकाई का अंक

$= 3^3$ में इकाई का अंक

$= 27$ में इकाई का अंक $= 7$

10. $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots\ldots + 19^2$

$= (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots\ldots + 18^2 + 19^2) - (2^2 + 4^2 + \ldots\ldots + 18^2)$

$$= \frac{19\,(19+1)\,(38+1)}{6} - 4\,(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 9^2)$$
$$= \frac{19\times 20\times 39}{6} - \frac{4\times 9\times 10\times 19}{6}$$
$$= 2470 - 1140 = 1330$$

11. भागफल $= 16$

भाजक $= 25 \times$ भागफल $= 25 \times 16 = 400$

शेषफल $= \frac{1}{5} \times$ भाजक $= \frac{1}{5}\times 400$

$= 80$

हम जानते हैं कि भाज्य = (भाजक $\times$ भागफल) + शेषफल

$\therefore$ भाज्य $= 400\times 16 + 80$

$= 6480$

13. $(17)^{200} = (18-1)^{200}$ को 18 से भाग देने पर

$= (-1)^{200} + 18$ का गुणज

$\because$ $n = 200$ (एक सम धनपूर्णांक है।)

$\therefore$ अभीष्ट शेषफल $= 1$

14. $101 + 102 + \ldots\ldots + 200$

$= (1 + 2 + \ldots.. + 100 + 101 + 102 + \ldots. + 200) - (1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + 100)$

$$= \frac{200\,(200+1)}{2} - \frac{100\,(100+1)}{2}$$
$$= 100\times 201 - 50\times 101$$
$$= 20100 - 5050 = 15050$$

16. $\sqrt{15876} = 126$

$\therefore$ 15876 के वर्गमूल में इकाई का अंक $= 6$

19. प्रथम 20 विषम प्राकृतिक संख्याओं का योग $= n^2$

$= (20)^2 = 400$

22. $[(264)^{102} + (264)^{103}]$ में इकाई का अंक

$= [4^{102} + 4^{103}]$ में इकाई का अंक

$= [4^{25\times 4+2} + 4^{25\times 4+3}]$ में इकाई का अंक

$= [4^2\cdot 6 + 4^3\cdot 6]$ में इकाई का अंक

$= [16\cdot 6 + 64\cdot 6]$ में इकाई का अंक

$= [96 + 384]$ में इकाई का अंक

$= 480$ में इकाई का अंक $= 0$

23. $2^{96} + 1 = (2^{32})^3 + (1)^3$

$= (2^{32} + 1)\,(2^{64} + 1 - 2^{32})$

$\therefore$ $(2^{96} + 1)$, $(2^{32} + 1)$ से पूर्णतया विभाजित होगी।