1. જો $\vec{a}$ શૂન્યેતર સદિશ હોય અને તેનું માન 'a' હોય અને λ શૂન્યેતર અદિશ હોય, તો λની કઈ કિંમત માટે $\lambda\vec{a}$ એકમ સદિશ થાય.

(A) $\lambda = 1$ (B) $\lambda = -1$ (C) $a = |\lambda|$ (D) $a = \frac{1}{|\lambda|}$

જવાબ (D) $a = \frac{1}{|\lambda|}$

➡ $|\lambda\vec{a}| = 1$

$\therefore |\lambda||\vec{a}| = 1$

પરંતુ $\vec{a}$ નું માન a છે. અર્થાત્ $|\vec{a}| = a$

$\therefore |\lambda| a = 1$

$\therefore |\lambda| = \frac{1}{a}$

$\therefore a = \frac{1}{|\lambda|}$

$\therefore$ વિકલ્પ (D) આવે.

2. સદિશ $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ અને $\vec{b} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - k$ હોય તો $(\vec{a} + 3\vec{b})\cdot(2\vec{a} - \vec{b})$ શોધો.

➡ **−15**

3. સદિશો $2\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$ અને $\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ વચ્ચેનો ખૂણો શોધો.

➡ $\cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{84}}\right)$

4. જો $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ અને $\vec{b} = 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ હોય તો બતાવો કે $(\vec{a} + \vec{b})$ એ સદિશ $(\vec{a} - \vec{b})$ ને લંબ છે.

➡ **(i) − 3 (ii) 2 (iii) − 13 (iv) 17 (v) 16**

5. જો $\vec{a} = 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} - 3\hat{k}$ અને $\vec{c} = \hat{i} + 2\hat{j}$ હોય તો (i) $\vec{a}\cdot\vec{b}$ (ii) $(\vec{a} + \vec{b})\cdot\vec{c}$

(iii) $(\vec{a} - \vec{b})\cdot(\vec{b} - \vec{c})$ (iv) $(\vec{a} + 2\vec{b})\cdot\vec{b}$ (v) $(\vec{a} - 3\vec{c})\cdot(2\vec{a} + \vec{b})$ શોધો.

➡ સ્વપ્રયત્ને

6. સદિશ $7\hat{i} + \hat{j} - 4\hat{k}$ નો $2\hat{i} + 6\hat{j} + 3\hat{k}$ પરનો પ્રક્ષેપ શોધો.

➡ $\frac{8}{7}$

7. બે સદિશો $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ માટે $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 3$ અને $\vec{a}\cdot\vec{b} = 6$ તો $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ વચ્ચેનો ખૂણો શોધો.

➡ $\frac{\pi}{3}$

8. $\vec{a}=\lambda\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k},\ \vec{b}=\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k}$. જો $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ પરસ્પર લંબ હોય તો λનું મૂલ્ય મેળવો.

➥ -3

9. $\vec{a}=3\hat{i}+2\hat{j}+9\hat{k}$ અને $\vec{b}=\hat{i}+p\hat{j}+3\hat{k}$. જો સદિશો $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ સમાંતર હોય તો pનું મૂલ્ય મેળવો.

➥ $\frac{2}{3}$

10. બિંદુઓ A, B, C અને Dનાં સ્થાન સદિશો અનુક્રમે $\hat{i}+\hat{j}+\hat{k},\ 2\hat{i}+5\hat{j},\ 3\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$ અને $\hat{i}-6\hat{j}-\hat{k}$ હોય તો સાબિત કરો કે $\vec{AB}$ અને $\vec{CD}$ સમાંતર છે.

➥ $|\vec{a}|=6,\ |\vec{b}|=2$

11. જો $(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=27$ અને $|\vec{a}|=2|\vec{b}|$ તો $|\vec{a}|$ અને $|\vec{b}|$ શોધો.

➥ સ્વપ્રયત્ને

12. એકમ સદિશ $\vec{a}$ એ x-અક્ષ સાથે $\frac{\pi}{4}$નાં માપનો, y-અક્ષ સાથે $\frac{\pi}{3}$નાં માપનો અને z-અક્ષ સાથે θ ખૂણો બનાવે તો સદિશ $\vec{a}$ નાં ઘટકો મેળવો.

➥ $\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{i},\ \frac{1}{2}j,\ \frac{1}{2}\hat{k}$

13. એકમ સદિશ $\vec{a}$ એ સદિશો $\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$ અને $3\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$ ને લંબ હોય તો $\vec{a}$ નાં ઘટકો મેળવો.

➥ $\frac{3}{\sqrt{83}}i,\ \frac{-5}{\sqrt{83}}\hat{j},\ \frac{-7}{\sqrt{83}}\hat{k}$ અથવા $\frac{-3}{\sqrt{83}}\hat{i},\ \frac{5}{\sqrt{83}}\hat{j},\ \frac{7}{\sqrt{83}}\hat{k}$

14. સદિશ $\hat{r}=(a^2-4)\hat{i}+2\hat{j}-(a^2-9)\hat{k}$ એ અક્ષો સાથે લઘુકોણ બનાવે તો aનું મૂલ્ય મેળવો.

➥ $a\in(-3,-2)\cup(2,3)$

15. સદિશ $\vec{a}=\hat{i}-\hat{j}+\sqrt{2}\hat{k}$ એ અક્ષો સાથે બનાવેલ ખૂણાઓનું મૂલ્ય મેળવો.

➥ $\frac{\pi}{3},\ \frac{2\pi}{3},\ \frac{\pi}{4}$

16. સદિશ $\vec{a}$નો $\hat{i}+\hat{j}-3\hat{k},\ \hat{i}+3\hat{j}-2\hat{k}$ અને $2\hat{i}+\hat{j}+4\hat{k}$ સાથેનો અદિશ ગુણાકાર અનુક્રમે 0, 5 અને 8 હોય તો સદિશ $\vec{a}$ મેળવો.

➥ $\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$

17. જો $|\vec{a}|=2,\ |\vec{b}|=5$ અને $\vec{a}\cdot\vec{b}=10$ હોય તો $|\vec{a}-\vec{b}|$ શોધો.

➥ 3

18. જો $\vec{a}=5\hat{i}-\hat{j}+7\hat{k}$ અને $\vec{b}=\hat{i}-\hat{j}+\lambda\hat{k}$ જો $\vec{a}+\vec{b}$ અને $\vec{a}-\vec{b}$ પરસ્પર લંબ હોય તો λનું મૂલ્ય મેળવો.

➥ $\sqrt{75}$

19. $2\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k}$ને એવાં બે સદિશનાં સરવાળા સ્વરૂપે દર્શાવો કે જેથી બે સદિશ પૈકીનો એક સદિશ એ $2\hat{i}-4\hat{j}+\hat{k}$ને લંબ હોય અને બીજો સદિશ એ $2\hat{i}-4\hat{j}+\hat{k}$ને સમાંતર હોય.

➥ $B_1=\left(-\frac{2}{3},\frac{4}{3},-\frac{1}{3}\right)\ B_2=\left(\frac{8}{3},\frac{5}{3},\frac{4}{3}\right)$

20. A(0, –1, –2) B(3, 1, 4) અને C (5, 7, 1) શિરોબિંદુવાળા ત્રિકોણનાં ખૂણા Aનું માપ શોધો.

➥ $\frac{\pi}{4}$

21. સાબિત કરો કે અર્ધવર્તુળમાં આવેલો ખૂણો કાટકોણ હોય છે.

➥ સ્વપ્રયત્ને

22. સાબિત કરો કે કાટકોણ ત્રિકોણમાં કર્ણનું મધ્યબિંદુ એ ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓથી સમાન અંતરે આવેલું છે. (સદિશની રીતે)

➥ સ્વપ્રયત્ને

23. જો $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$ અને $|\vec{a}| = 6,\ |\vec{b}| = 5,\ |\vec{c}| = 7$ હોય તો $\vec{b}$ અને $\vec{c}$ સદિશો વચ્ચેનો ખૂણો મેળવો.

➥ $\cos^{-1}\left(-\dfrac{19}{35}\right)$

24. ત્રિકોણની બે બાજુઓનાં સદિશો $\vec{a} = 3\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k}$ અને $\vec{b} = 4\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$ હોય તો ત્રિકોણનાં ત્રણેય ખૂણાઓ મેળવો.

➥ $\cos^{-1}\left(\dfrac{7}{\sqrt{75}}\right) \cos^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{26}}{\sqrt{75}}\right), 90^\circ$

25. દર્શાવો કે બિંદુઓ A(–2, 3, 5), B (1, 2, 3) અને C (7, 0, –1) સમરેખ છે.

➥ સ્વપ્રયત્ને

26. $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ કોઈ પણ બે સદિશો છે. સાબિત કરો કે

(i) $(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \le |\vec{a}|^2\,|\vec{b}|^2$ (ii) $|\vec{a} + \vec{b}| \le |\vec{a}| + |\vec{b}|$

➥ સ્વપ્રયત્ને

27. જો $|\vec{a} + \vec{b}| = 60,\ |\vec{a} - \vec{b}| = 40$ અને $|\vec{b}| = 46$ હોય તો $|\vec{a}|$ શોધો.

➥ 22

28. સદિશો $\vec{a}, \vec{b}$ અને $\vec{c}$ નાં માન અનુક્રમે 3, 4 અને 5 છે. જો દરેક સદિશ એ બાકીનાં બે સદિશોનાં સરવાળાને લંબ હોય તો $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ નું માન શોધો.

➥ $5\sqrt{2}$

29. સદિશ $\vec{a} = (c\log_2 x)\,\hat{i} - 6\hat{j} + 3\hat{k}$ અને $\vec{b} = (\log_2 x)\,\hat{i} + 2\hat{j} + (2c\log_2 x)\,\hat{k}$ વચ્ચેનો ખૂણો લઘુ કોણ હોય તો e નું મૂલ્ય મેળવો. ($x \in 0, \infty$)

➥ $C \in \left(-\dfrac{4}{3}, 0\right)$

30. જો એકમ સદિશો $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ વચ્ચેનો ખૂણો θ હોય તો સાબિત કરો કે $\sin\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{1}{2}|\hat{a} - \hat{b}|$

➥ સ્વપ્રયત્ને

31. $\vec{a} = 2\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k},\ \vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} + -2\hat{k}$ અને $\vec{c} = 2\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$ હોય તો $\vec{b} + \vec{c}$ નો $\vec{a}$ પરનો પ્રક્ષેપ શોધો.

➥ 2

32. બે સદિશોનાં માન અનુક્રમે $\sqrt{3}$ અને 2 હોય તથા $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sqrt{6}$ આપેલ હોય, તો તે સદિશો વચ્ચેનો ખૂણો શોધો.

➥ આપેલ છે કે $|\vec{a}| = \sqrt{3}$ તથા $|\vec{b}| = 2$ અને $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sqrt{6}$

ધારો કે સદિશો $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ વચ્ચેનો ખૂણો θ છે.

$$\therefore\ \cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}$$

$$\therefore\ \cos\theta = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3} \times 2}$$

$\therefore\ \cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}{\sqrt{3}\times 2}$

$\therefore\ \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \cos\dfrac{\pi}{4}$

$\therefore\ \theta = \dfrac{\pi}{4}$

$\therefore$ બે સદિશો વચ્ચેનો ખૂણો $\dfrac{\pi}{4}$ છે.

33. સદિશ $\hat{i}-\hat{j}$ નો સદિશ $\hat{i}+\hat{j}$ પરનો પ્રક્ષેપ શોધો.

➡ $\vec{a} = \hat{i}-\hat{j},\quad \vec{b} = \hat{i}+\hat{j}$

$\therefore\ \vec{a}\cdot\vec{b} = (\hat{i}-\hat{j})\cdot(\hat{i}+\hat{j})$

$= 1 - 1 = 0$

$\therefore$ સદિશ $\vec{a}$ અને સદિશ $\vec{b}$ વચ્ચેનો ખૂણો $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ છે.

$\therefore$ સદિશ $\vec{a}$ નો સદિશ $\vec{b}$ પરનો પ્રક્ષેપ સદિશ શૂન્ય છે.

34. સદિશ $\hat{i}+3\hat{j}+7\hat{k}$ નો $7\hat{i}-\hat{j}+8\hat{k}$ પરનો પ્રક્ષેપ શોધો.

➡ $\vec{a} = \hat{i}+3\hat{j}+7\hat{k}$

$\vec{b} = 7\hat{i}-\hat{j}+8\hat{k}$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = (\hat{i}+3\hat{j}+7\hat{k})\cdot(7\hat{i}-\hat{j}+8\hat{k})$

$= 7 - 3 + 56 = 60$

$|\vec{b}| = \sqrt{(7)^2+(-1)^2+(8)^2}$

$= \sqrt{49+1+64} = \sqrt{114}$

હવે સદિશ $\vec{a}$ નો સદિશ $\vec{b}$ પરનો પ્રક્ષેપ $= \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}$

$= \dfrac{60}{\sqrt{114}}$

35. $\left(3\vec{a}-5\vec{b}\right)\cdot\left(2\vec{a}+7\vec{b}\right)$ શોધો.

➡ $(3\vec{a}-5\vec{b})\cdot(2\vec{a}+7\vec{b})$

$= 3\vec{a}\cdot(2\vec{a}+7\vec{b}) - 5\vec{b}\cdot(2\vec{a}+7\vec{b})$

$= 6\,\vec{a}\cdot\vec{a} + 21\,\vec{a}\cdot\vec{b} - 10\,\vec{b}\cdot\vec{a} - 35\,\vec{b}\cdot\vec{b}$

$= 6|\vec{a}|^2 + 21\,\vec{a}\cdot\vec{b} - 10\,\vec{a}\cdot\vec{b} - 35|\vec{b}|^2$

($\because\ \vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2$ તથા $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$)

$= 6|\vec{a}|^2 + 11\,\vec{a}\cdot\vec{b} - 35|\vec{b}|^2$

36. **જો બે સદિશો $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ નાં માન સમાન હોય અને તેમની વચ્ચેનો ખૂણો 60° તથા તેમનો અદિશ ગુણાકાર $\frac{1}{2}$ હોય તો તેમનાં માન શોધો.**

➥ બે સદિશો $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ ના માન સરખા છે.

$\therefore |\vec{a}| = |\vec{b}|$

તેમની વચ્ચેનો ખૂણો 60° છે. $\theta = 60°$

તેમનો અદિશ ગુણાકાર $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}$

હવે $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

$\therefore \frac{1}{2} = |\vec{a}|\,|\vec{a}|\cos 60°$

$\therefore \frac{1}{2} = |\vec{a}|^2\left(\frac{1}{2}\right)$

$\therefore |\vec{a}|^2 = 1$

$\therefore |\vec{a}| = 1$

$\therefore |\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$

$\therefore$ તેમનાં માન 1 છે. તેઓ એકમ સદિશ છે.

37. **જો એકમ સદિશ $\vec{a}$ માટે $\left(\vec{x} - \vec{a}\right)\cdot\left(\vec{x} + \vec{a}\right) = 12$ હોય તો $|\vec{x}|$ શોધો.**

➥ $|\vec{a}| = 1$

$(\vec{x} - \vec{a})\cdot(\vec{x} + \vec{a}) = 12$

$\therefore |\vec{x}|^2 - |\vec{a}|^2 = 12$

$\therefore |\vec{x}|^2 - 1 = 12$

$(\because |\vec{a}| = 1)$

$\therefore |\vec{x}|^2 = 13$

$\therefore |\vec{x}| = \sqrt{13}$

38. **જો $\vec{a} \cdot \vec{a} = 0$ અને $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ હોય, તો સદિશ $\vec{b}$ વિશે શું તારણ કાઢી શકાય ?**

➥ $\vec{a} \cdot \vec{a} = 0$ અને $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

$\therefore \vec{a} = 0$ અને ($\vec{a} = 0$ અથવા $\vec{b} = 0$ અથવા $\vec{a} \perp \vec{b}$)

$\therefore \vec{b}$ કોઈ પણ સદિશ હોઈ શકે.

39. **જો સદિશ $\vec{a} = \vec{0}$ અથવા $\vec{b} = \vec{0}$ હોય તો $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. પરંતુ પ્રતીપ, સત્ય હોય તે જરૂરી નથી. તમારા જવાબનું ઉદાહરણ સહિત સમર્થન કરો.**

➥ સદિશ $\vec{a} = \vec{0}$ અથવા $\vec{b} = \vec{0}$ હોય તો $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{0}$ થાય.

પરંતુ તેનું પ્રતીપ અર્થાત્ $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{0}$ હોય તો,

$|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta = 0$ થાય.

પરંતુ જો $|\vec{a}| \neq 0, |\vec{b}| \neq 0$ હોય તો $\cos\theta = 0$ થાય.

અર્થાત્ $\theta = \frac{\pi}{2}$ થાય.

એટલે કે સદિશો $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ પરસ્પર લંબ છે. તેમ કહેવાય.

દા.ત.,

$\vec{a} = 2\hat{i} + 5\hat{j} + 2\hat{k}$ હોય તથા $\vec{b} = 2\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$ હોય તો $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 - 10 + 6 = 0$ પરંતુ $\vec{a} \neq 0$ તથા $\vec{b} \neq 0$

અર્થાત્ આપેલ વિધાનનું પ્રતીપ સત્ય નથી.

40. સદિશો $\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$ અને $3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ વચ્ચેનો ખૂણો શોધો.

➡ $\vec{a} = \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$

$\vec{b} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$

હવે $|\vec{a}| = \sqrt{(1)^2 + (-2)^2 + (3)^2} = \sqrt{14}$

$|\vec{b}| = \sqrt{(3)^2 + (-2)^2 + (1)^2} = \sqrt{14}$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = (\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}) \cdot (3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k})$

$= 3 + 4 + 3 = 10$

ધારો કે સદિશો $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ વચ્ચેનો ખૂણો θ છે.

$\therefore \cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

$\therefore \cos\theta = \frac{10}{\sqrt{14}\sqrt{14}}$

$\therefore \cos\theta = \frac{10}{14}$

$\therefore \theta = \cos^{-1}\left(\frac{5}{7}\right)$

$\therefore$ આપેલ બે સદિશો વચ્ચેનો ખૂણો $\cos^{-1}\left(\frac{5}{7}\right)$ છે.

41. જો $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot \left(\vec{a} - \vec{b}\right) = 8$ અને $|\vec{a}| = 8|\vec{b}|$ તો, $|\vec{a}|$ અને $|\vec{b}|$ શોધો.

➡ $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 8$ અને $|\vec{a}| = 8|\vec{b}|$

હવે $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 8$

$\therefore |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 8$

$\therefore 64|\vec{b}|^2 - |\vec{b}|^2 = 8 \quad (\because |\vec{a}| = 8|\vec{b}|)$

$\therefore 63|\vec{b}|^2 = 8$

$\therefore |\vec{b}|^2 = \frac{8}{63}$

$\therefore |\vec{b}| = \sqrt{\frac{8}{63}} = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{7}}$

હવે, $|\vec{a}| = 8|\vec{b}|$

$= 8 \times \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{7}} = \frac{16\sqrt{2}}{3\sqrt{7}}$

આમ, $|\vec{a}| = \frac{16\sqrt{2}}{3\sqrt{7}}$ તથા $|\vec{b}| = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{7}}$

42. જો સદિશો $\vec{a} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}, \vec{b} = -\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ અને $\vec{c} = 3\hat{i} + \hat{j}$ માટે $\hat{a} + \lambda\hat{b}$ એ $\vec{c}$ ને લંબ હોય, તો λ નું મૂલ્ય શોધો.

➡ $\vec{a} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$

$\vec{b} = -\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$

$\vec{c} = 3\hat{i} + \hat{j}$

$\vec{a} + \lambda\vec{b} = (2\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) + \lambda(-\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k})$

$= (2-\lambda)\hat{i} + (2+2\lambda)\hat{j} + (3+\lambda)\hat{k}$

હવે $\vec{a} + \lambda\vec{b}$ અને $\vec{c}$ લંબ છે.

$\therefore (\vec{a} + \lambda\vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$

$\therefore \{(2-\lambda)\hat{i} + (2+2\lambda)j + (3+\lambda)\hat{k}\} \cdot (3\hat{i} + \hat{j} + 0\hat{k}) = 0$

$\therefore 3(2-\lambda) + 1(2+2\lambda) + 0 = 0$

$\therefore 6 - 3\lambda + 2 + 2\lambda = 0$

$\therefore \lambda = 8$

43. કોઈ પણ બે શૂન્યેતર સદિશો $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ માટે દર્શાવો કે $|\vec{a}|\vec{b} + |\vec{b}|\vec{a}$ એ $|\vec{a}|\vec{b} - |\vec{b}|\vec{a}$ ને લંબ છે.

➡ $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ બે શૂન્યેતર સદિશો છે.

હવે $(|\vec{a}|\vec{b} + |\vec{b}|\vec{a}) \cdot (|\vec{a}|\vec{b} - |\vec{b}|\vec{a})$

$= |\vec{a}|\vec{b} \cdot (|\vec{a}|\vec{b} - |\vec{b}|\vec{a}) + |\vec{b}|\vec{a}(|\vec{a}|\vec{b} - |\vec{b}|\vec{a})$

$= |\vec{a}|^2 \vec{b}\cdot\vec{b} - |\vec{a}||\vec{b}|\vec{b}\cdot\vec{a} + |\vec{a}||\vec{b}|\vec{a}\cdot\vec{b} - |\vec{b}|^2 \vec{a}\cdot\vec{a}$

$= |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - |\vec{b}|^2|\vec{a}|^2 \qquad (\because \vec{x}\cdot\vec{x} = |\vec{x}|^2)$

$= |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 = 0$

$\therefore |\vec{a}|\vec{b} + |\vec{b}|\vec{a}$ એ $|\vec{a}|\vec{b} - |\vec{b}|\vec{a}$ ને લંબ છે.

(અહીં યાદ રાખો કે $|\vec{a}|$ અને $|\vec{b}|$ સંખ્યા છે. જ્યારે $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ સદિશો છે.)

44. જો ત્રિકોણ ABC નાં શિરોબિંદુઓ A, B, C અનુક્રમે (1, 2, 3), (–1, 0, 0), (0, 1, 2) હોય તો $\angle ABC$ શોધો. ($\angle ABC$ એ $\vec{BA}$ તથા $\vec{BC}$ વચ્ચેનો ખૂણો છે.)

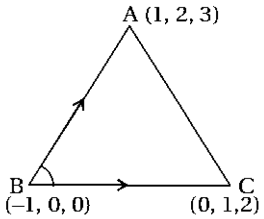
➥ A (1, 2 3), B(–1, 0, 0) તથા C(0, 1, 2) એ ΔABCનાં શિરોબિંદુઓ છે.

$\therefore \vec{OA} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$

$\vec{OB} = -\hat{i}$

$\vec{OC} = \hat{j} + 2\hat{k}$

હવે $\vec{BA} = \vec{OA} - \vec{OB}$



$= \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k} - (-\hat{i})$

$= 2\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$

$\vec{BC} = \vec{OC} - \vec{OB}$

$= \hat{j} + 2\hat{k} - (-\hat{i}) = \hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$

$|\vec{BA}| = \sqrt{(2)^2 + (2)^2 + (3)^2} = \sqrt{17}$

$|\vec{BC}| = \sqrt{(1)^2 + (1)^2 + (2)^2} = \sqrt{6}$

$\vec{BA} \cdot \vec{BC} = (2\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) \cdot (\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k})$

$= 2 + 2 + 6 = 10$

હવે $\cos \angle BAC = \dfrac{\vec{BA} \cdot \vec{BC}}{|\vec{BA}|\,|\vec{BC}|}$

$= \dfrac{10}{\sqrt{17}\,\sqrt{6}}$

$= \dfrac{10}{\sqrt{102}}$

$\therefore \angle BAC = \cos^{-1}\left(\dfrac{10}{\sqrt{102}}\right)$

45. સાબિત કરો કે બિંદુઓ A(1, 2, 7), B(2, 6, 3) અને C (3, 10, –1) સમરેખ છે.

➥ A (1, 2 7), B (2, 6, 3) અને C (3, 10, –1) આપેલ બિંદુઓ છે.

$\therefore \vec{OA} = \hat{i} + 2\hat{j} + 7\hat{k}$

$\vec{OB} = 2\hat{i} + 6\hat{j} + 3\hat{k}$

$\vec{OC} = 3\hat{i} + 10\hat{j} - \hat{k}$

$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$

$= (2\hat{i} + 6\hat{j} + 3\hat{k}) - (\hat{i} + 2\hat{j} + 7\hat{k})$

$= \hat{i} + 4\hat{j} - 4\hat{k}$

$\vec{BC} = \vec{OC} - \vec{OB}$

^ ^ ^ ^ ^ ^

$= (3i + 10j - k) - (2i + 6j + 3k)$

$= \hat{i} + 4\hat{j} - 4\hat{k}$

$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}$

$= (\hat{i} + 2\hat{j} + 7\hat{k}) - (3\hat{i} + 10\hat{j} - \hat{k})$

$= - 2\hat{i} - 8\hat{j} + 8\hat{k}$

$= - 2(\hat{i} + 4\hat{j} - 4\hat{k})$

$= - 2\overrightarrow{BC}$

અહીં $\overrightarrow{CA} || \overrightarrow{BC}$ તથા તેમનું સામાન્ય બિંદુ C છે.

વળી $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$

∴ બિંદુઓ A, B, C સમરેખ છે.

46. દર્શાવો કે નીચે આપેલ ત્રણ સદિશો પૈકી પ્રત્યેક સદિશ એકમ સદિશ છે :

$\frac{1}{7}\left(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}\right), \frac{1}{7}\left(3\hat{i} - 6\hat{j} + 2\hat{k}\right), \frac{1}{7}\left(6\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}\right)$. વળી, સાબિત કરો કે આ સદિશો પરસ્પર લંબ છે.

➥ ધારો કે $\vec{a} = \frac{1}{7}(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$

$\vec{b} = \frac{1}{7}(3\hat{i} - 6\hat{j} + 2\hat{k})$

$\vec{c} = \frac{1}{7}(6\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k})$

∴ $\vec{a} = \frac{2}{7}\hat{i} + \frac{3}{7}\hat{j} + \frac{6}{7}\hat{k}$

$\vec{b} = \frac{3}{7}\hat{i} - \frac{6}{7}\hat{j} + \frac{2}{7}\hat{k}$

$\vec{c} = \frac{6}{7}\hat{i} + \frac{2}{7}\hat{j} - \frac{3}{7}\hat{k}$

હવે $|\vec{a}| = \sqrt{\left(\frac{2}{7}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^2 + \left(\frac{6}{7}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{4 + 9 + 36}{49}} = 1$

$|\vec{b}| = \sqrt{\left(\frac{3}{7}\right)^2 + \left(\frac{-6}{7}\right)^2 + \left(\frac{2}{7}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{9 + 36 + 4}{49}} = 1$

$|\vec{c}| = \sqrt{\left(\frac{6}{7}\right)^2 + \left(\frac{2}{7}\right)^2 + \left(\frac{-3}{7}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{36 + 4 + 9}{49}} = 1$

$\therefore$ સદિશો $\vec{a}$, $\vec{b}$ તથા $\vec{c}$ નું માન 1 છે.

$\therefore$ પ્રત્યેક સદિશ એકમ સદિશ છે.

➡ ધારો કે $\vec{a} = \frac{1}{7}(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$

$\vec{b} = \frac{1}{7}(3\hat{i} - 6\hat{j} + 2\hat{k})$

$\vec{c} = \frac{1}{7}(6\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k})$

$\therefore \vec{a} = \frac{2}{7}\hat{i} + \frac{3}{7}\hat{j} + \frac{6}{7}\hat{k}$

$\vec{b} = \frac{3}{7}\hat{i} - \frac{6}{7}\hat{j} + \frac{2}{7}\hat{k}$

$\vec{c} = \frac{6}{7}\hat{i} + \frac{2}{7}\hat{j} - \frac{3}{7}\hat{k}$

હવે $|\vec{a}| = \sqrt{\left(\frac{2}{7}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^2 + \left(\frac{6}{7}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{4+9+36}{49}} = 1$

$|\vec{b}| = \sqrt{\left(\frac{3}{7}\right)^2 + \left(\frac{-6}{7}\right)^2 + \left(\frac{2}{7}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{9+36+4}{49}} = 1$

$|\vec{c}| = \sqrt{\left(\frac{6}{7}\right)^2 + \left(\frac{2}{7}\right)^2 + \left(\frac{-3}{7}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{36+4+9}{49}} = 1$

$\therefore$ સદિશો $\vec{a}$, $\vec{b}$ તથા $\vec{c}$ નું માન 1 છે.

$\therefore$ પ્રત્યેક સદિશ એકમ સદિશ છે.

47. જો $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ એકમ સદિશો અને $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$ હોય, તો $\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{c} + \vec{c}\cdot\vec{a}$ નું મૂલ્ય શોધો.

➡ $\vec{a}, \vec{b}$ અને $\vec{c}$ એકમ સદિશો છે.

$\therefore |\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 1, |\vec{c}| = 1$

હવે $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$

$\therefore \vec{a}\cdot(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = 0$

$\therefore \vec{a}\cdot\vec{a} + \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c} = 0$

$\therefore |\vec{a}|^2 + \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c} = 0$

$\therefore 1 + \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c} = 0$ ... (i)

ફરીથી $\vec{b}\cdot(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = 0$

$\therefore\ b \cdot a + b \cdot b + b \cdot c = 0$

$\therefore\ \vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 + \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$

$\therefore\ \vec{a} \cdot \vec{b} + 1 + \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$ ... (ii)

તેવી જ રીતે $\vec{c} \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = 0$

$\vec{c} \cdot \vec{a} + \vec{c} \cdot \vec{b} + \vec{c} \cdot \vec{c} = 0$

$\vec{c} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{c} + |\vec{c}|^2 = 0$

$\therefore\ \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} + 1 = 0$ ... (iii)

સમીકરણ (i), (ii) અને (iii)નો સરવાળો કરતાં,

$3 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}) = 0$

$\therefore\ \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a} = -\frac{3}{2}$

➥ $\vec{a}, \vec{b}$ અને $\vec{c}$ એકમ સદિશો છે.

$\therefore\ |\vec{a}| = 1,\ |\vec{b}| = 1,\ |\vec{c}| = 1$

હવે $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$

$\therefore\ \vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = 0$

$\therefore\ \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} = 0$

$\therefore\ |\vec{a}|^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} = 0$

$\therefore\ 1 + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} = 0$ ... (i)

ફરીથી $\vec{b} \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = 0$

$\therefore\ \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$

$\therefore\ \vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 + \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$

$\therefore\ \vec{a} \cdot \vec{b} + 1 + \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$ ... (ii)

તેવી જ રીતે $\vec{c} \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = 0$

$\vec{c} \cdot \vec{a} + \vec{c} \cdot \vec{b} + \vec{c} \cdot \vec{c} = 0$

$\vec{c} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{c} + |\vec{c}|^2 = 0$

$\therefore\ \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} + 1 = 0$ ... (iii)

સમીકરણ (i), (ii) અને (iii)નો સરવાળો કરતાં,

$3 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}) = 0$

$\therefore\ \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a} = -\frac{3}{2}$

48. સાબિત કરો કે સદિશો $2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$, $\hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k}$ અને $3\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k}$ કાટકોણ ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓ છે.

➥ ધારો કે A, B અને C એ ત્રિકોણ ABCનાં શિરોબિંદુઓ છે.

$OA = 2i - j + k$

$\overrightarrow{OB} = \hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k}$

$\overrightarrow{OC} = 3\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k}$

$\therefore\ \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

$= (\hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k}) - (2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$

$= -\hat{i} - 2\hat{j} - 6\hat{k}$

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$

$= (3\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k}) - (\hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k})$

$= 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$

$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}$

$= (2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) - (3\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k})$

$= -\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}$

હવે, $|\overrightarrow{AB}|^2 = (-1)^2 + (-2)^2 + (-6)^2 = 41$

$|\overrightarrow{BC}|^2 = (2)^2 + (-1)^2 + (1)^2 = 6$

$|\overrightarrow{CA}|^2 = (-1)^2 + (3)^2 + (5)^2 = 35$

સ્પષ્ટ છે કે 41 = 6 + 35

$\therefore\ |\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{BO}|^2 + |\overrightarrow{CA}|^2$

$\therefore$ પાયથાગોરસનાં પ્રતિપ્રમેય પ્રમાણે ΔABC કાટકોણ ત્રિકોણ છે.

બીજી રીત :

$\overrightarrow{AB} = -\hat{i} - 2\hat{j} - 6\hat{k}$

$\overrightarrow{BC} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$

$\overrightarrow{CA} = -\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}$

➡ ધારો કે A, B અને C એ ત્રિકોણ ABCનાં શિરોબિંદુઓ છે.

$\overrightarrow{OA} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$

$\overrightarrow{OB} = \hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k}$

$\overrightarrow{OC} = 3\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k}$

$\therefore\ \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

$= (\hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k}) - (2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$

$= -\hat{i} - 2\hat{j} - 6\hat{k}$

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$

$= (3\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k}) - (\hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k})$

$= 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$

$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}$

$= (2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) - (3\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k})$

$= -\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}$

હવે, $|\overrightarrow{AB}|^2 = (-1)^2 + (-2)^2 + (-6)^2 = 41$

$|\overrightarrow{BC}|^2 = (2)^2 + (-1)^2 + (1)^2 = 6$

$|\overrightarrow{CA}|^2 = (-1)^2 + (3)^2 + (5)^2 = 35$

સ્પષ્ટ છે કે 41 = 6 + 35

$\therefore |\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{BO}|^2 + |\overrightarrow{CA}|^2$

$\therefore$ પાયથાગોરસનાં પ્રતિપ્રમેય પ્રમાણે ΔABC કાટકોણ ત્રિકોણ છે.

બીજી રીત :

$\overrightarrow{AB} = -\hat{i} - 2\hat{j} - 6\hat{k}$

$\overrightarrow{BC} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$

$\overrightarrow{CA} = -\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}$