1. **બે સમતલો : $2x + 3y + 4z = 4$ અને $4x + 6y + 8z = 12$ વચ્ચેનું અંતર**

(A) 2 એકમ **(B) 4 એકમ** **(C) 8 એકમ** **(D) $\frac{2}{\sqrt{29}}$ એકમ**

જવાબ (D) $\frac{2}{\sqrt{29}}$ એકમ

➡ સમતલ $\pi_1 : 2x + 3y + 4z = 4$

સમતલ $\pi_2 : 4x + 6y + 8z = 12$

$\therefore \pi_2 : 2x + 3y + 4z = 6$

અહીં $d_1 = 4,\ d_2 = 6$

π_1 અને π_2 સમતલો સમાંતર સમતલો છે.

તેમની વચ્ચેનું અંતર $d = \frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

$\therefore d = \frac{|4 - 6|}{\sqrt{4 + 9 + 16}}$

$\therefore d = \frac{2}{\sqrt{29}}$ એકમ

$\therefore$ વિકલ્પ (D) આવે.

2. **સમતલો : $2x - y + 4z = 5$ અને $5x - 2.5\,y + 10\,z = 6$**

(A) પરસ્પર લંબ છે. **(B) સમાંતર છે.**

(C) y–અક્ષને છેદે છે. **(D) $\left(0, 0, \frac{5}{4}\right)$ માંથી પસાર થાય છે.**

જવાબ (B) સમાંતર છે.

➡ સમતલ $\pi_1 : 2x - y + 4z = 5$

$\therefore$ તેના અભિલંબનો સદિશ $\vec{n_1} = 2\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$

સમતલ $\pi_2 : 5x - 2.5y + 10z = 6$

તેના અભિલંબનો સદિશ $\vec{n_2} = 5\hat{i} - 2.5\hat{j} + 10\hat{k}$

અહીં $\frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{5},\ \frac{b_1}{b_2} = \frac{-1}{-2.5} = \frac{10}{25} = \frac{2}{5},\ \frac{c_1}{c_2} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

$\therefore \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

$\therefore$ સમતલો π_1 અને π_2 સમાંતર સમતલો છે.

3. **બે રેખાઓની દિક્કોસાઇનો 1, –2, –2 અને 0, 2, 1 નાં પ્રમાણમાં છે. આ બંને રેખાઓને લંબ હોય તેવી રેખાની દિક્કોસાઇનો મેળવો.**

➡ **2, –1, 2**

4. **બે રેખાઓના દિક્કોસાઇનો નીચેના સમીકરણ દ્વારા આપેલા છે. $3l + m + 5n = 0,\ 6mn - 2nl + 5lm = 0$ આ બંને રેખાઓ વચ્ચેનો ખૂણો શોધો.**

➠ $\cos^{-1}\left(\frac{1}{6}\right)$

5. બતાવો કે બિંદુઓ (4, 7, 8) અને (2, 3, 4) માંથી પસાર થતી રેખા એ બિંદુઓ (–1, –2, 1) અને (1, 2, 5) માંથી પસાર થતી રેખાને સમાંતર છે.

➠ સ્વપ્રયત્ને

6. બતાવો કે બિંદુઓ (1, –1, 2) અને (3, 4, –2) માંથી પસાર થતી રેખા અને બિંદુઓ (0, 3, 2) અને (3, 5, 6) માંથી પસાર થતી રેખા પરસ્પર લંબ છે.

➠ સ્વપ્રયત્ને

7. રેખાઓ $\frac{5-x}{-2} = \frac{y+3}{1} = \frac{1-z}{3}$ અને $\frac{x}{3} = \frac{1-y}{-2} = \frac{z+5}{-1}$ વચ્ચેનો ખૂણો શોધો.

➠ $\cos^{-1}\left(\frac{11}{14}\right)$

8. બતાવો કે રેખાઓ $\frac{x-5}{7} = \frac{y+2}{-5} = \frac{z}{1}$ અને $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ પરસ્પર લંબ છે.

➠ સ્વપ્રયત્ને

9. રેખા $\frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+3}{4}$ એ સમતલ $x + y + 4z = 6$ ને જે બિંદુમાં મળે તે બિંદુના યામ મેળવો.

➠ (1, 1, 1)

10. બિંદુઓ A(3, 4, 1) અને B(5, 1, 6) માંથી પસાર થતી રેખા XY-સમતલના જે બિંદુમાંથી પસાર થાય તે બિંદુના યામ શોધો.

➠ $\left(\frac{13}{5}, \frac{23}{5}, 0\right)$

11. બિંદુઓ (0, –1, 3) અને (2, –3, 1) ને જોડતી રેખા ઉપર P(1, 8, 4) માંથી દોરેલ લંબનો લંબપાદ મેળવો.

➠ $\left(-\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, \frac{19}{3}\right)$

12. રેખા $\frac{x+3}{5} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+4}{3}$ ને બિંદુ (0, 2, 3) માંથી દોરેલ લંબનો લંબપાદ મેળવો. લંબની લંબાઈ પણ શોધો.

➠ (2, 3, –1), $\sqrt{21}$

13. બિંદુ (3, 5, 3) નું રેખા $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{3}$ ને સાપેક્ષ પ્રતિબિંબ શોધો.

➠ (–1, 1, 7)

14. બિંદુઓ (1, 2, 3) અને (0, –1, 0) માંથી પસાર થતા તથા રેખા $\frac{x-1}{2} = \frac{y+z}{3} = \frac{z}{-3}$ ને સમાંતર સમતલનું સમીકરણ મેળવો.

➠ $6x - 3y + z = 3$

15. સમતલો $2x + 3y - z + 1 = 0$ અને $x + y - 2z + 3 = 0$ ની છેદરેખામાંથી પસાર થતા અને સમતલ $3x - y - 2z - 4 = 0$ ને લંબ હોય તેવા સમતલનું સમીકરણ મેળવો.

➠ $7x + 13y + 4z - 9 = 0$

16. બિંદુ (3, 4, –1) માંથી પસાર થતા અને સમતલ $\vec{r} \cdot (2\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}) + 2 = 0$ ને સમાંતર હોય તેવા સમતલનું સમીકરણ મેળવો.

➠ $\vec{r} \cdot (2\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}) + 11 = 0$

17. સમતલો $\vec{r} \cdot (\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}) = 0$ અને $\vec{r} \cdot (\hat{j} + 2\hat{k}) = 0$ ની છેદરેખામાંથી પસાર થતા તથા બિંદુ $2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ માંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ મેળવો.

➠ $\vec{r} \cdot (\hat{i} + 9\hat{j} + 11\hat{k}) = 0$

18. દર્શાવો કે બિંદુઓ (1, 1, 1) અને (–3, 0, 1) નું સમતલ $3x + 4y - 12z + 13 = 0$ થી અંતરો સમાન છે.

➠ સ્વપ્રયત્ને

19. રેખાઓ $\vec{r} = (\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}) = \lambda\,(3\hat{i} - \hat{j})$ અને $\vec{r} = (4\hat{i} - \hat{k}) + \mu\,(2\hat{i} + 3\hat{k})$ ને સમાવતાં સમતલનું સમીકરણ મેળવો.

➠ $\vec{r} \cdot (3\hat{i} + 9\hat{j} - 2\hat{k}) = 14$

20. બે સમાંતર રેખાઓ $\frac{x-4}{1} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z-2}{5}$ અને $\frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z}{5}$ ને સમાવતાં સમતલનું સમીકરણ મેળવો.

➠ $11x - y - 3z = 35$

21. દર્શાવો કે રેખા $\vec{r} = \hat{i} + \hat{j} + \lambda\,(2\hat{i} + \hat{j} + 4\hat{k})$ એ સમતલ $\vec{r} \cdot (\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}) = 3$ માં આવેલી છે.

➠ સ્વપ્રયત્ને

22. બિંદુ (1, 3, 4) નું સમતલ $\vec{r} \cdot (2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) + 3 = 0$ ને સાપેક્ષ પ્રતિબિંબ મેળવો.

➠ $-3\hat{i} + 5\hat{j} + 2\hat{k}$

23. (0, 2, –2) થી સમતલ $2x - 3y + 4z - 44 = 0$ પરનો લંબપાદ શોધો તથા આ બિંદુમાંથી પસાર થતા સમતલને લંબરેખાનું સમીકરણ અને લંબની લંબાઈ શોધો.

➠ (4, –4, 6) ; $\frac{x}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+2}{4}$; $2\sqrt{29}$

24. રેખા $\frac{x-1}{2} = \frac{2-y}{3} = \frac{z+3}{4}$ અને સમતલ $2x + 4y - z = 1$ નું છેદબિંદુ શોધો. તે બે વચ્ચેનાં ખૂણાનું માપ પણ શોધો.

➠ (3, –1, 1) $\sin^{-1}\left(\frac{12}{\sqrt{609}}\right)$

25. (1, 2, –3) અને (–3, 6, 4) ને જોડતાં રેખાખંડનાં લંબદ્વિભાજક સમતલનું સમીકરણ મેળવો.

➠ $8x - 8y - 14z + 47 = 0$

26. $l + m + n = 0$, $l^2 = m^2 + n^2$ તથા l, m, n બે રેખાઓની દિક્સંખ્યાઓ હોય તો તેમની વચ્ચેના ખૂણાનું માપ મેળવો.

➠ $\frac{\pi}{3}$

27. સાબિત કરો કે ઊગમબિંદુને (2, 1, 1) બિંદુ સાથે જોડતી રેખા એ બિંદુઓ (3, 5, –1), (4, 3, –1) થી બનતી રેખાને લંબ છે.

➥ ઊગમબિંદુ O (0, 0, 0) અને બિંદુ A(2, 1, 1) માંથી પસાર થતી રેખા OA ના દિક્ગુણોત્તર :

$\vec{b_1} = 2 - 0,\ 1 - 0,\ 1 - 0 = 2, 1, 1$

બિંદુઓ B(3, 5, –1) અને C(4, 3, –1) માંથી પસાર થતી રેખા BC ના દિક્ગુણોત્તર :

$\vec{b_2} = 4 - 3,\ 3 - 5,\ -1 + 1 = 1, -2, 0$

હવે $\vec{b_1} \cdot \vec{b_2} = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2$

$= 2(1) + 1(-2) + 1(0)$

$= 2 - 2$

$= 0$

∴ રેખા OA ⊥ રેખા BC

28. જો પરસ્પર લંબ હોય તેવી બે રેખાઓની દિક્કોસાઈન l_1, m_1, n_1 અને l_2, m_2, n_2 હોય, તો તે બંનેને લંબરેખાની દિક્કોસાઈન $m_1n_2 - m_2n_1,\ n_1l_2 - n_2l_1,\ l_1m_2 - l_2m_1$ છે.

➥ રેખા L_1 ની દિક્કોસાઈન l_1, m_1, n_1 છે.

રેખા L_2 ની દિક્કોસાઈન l_2, m_2, n_2 છે.

ધારો કે આ બંને રેખા L_1 અને L_2 ને લંબ હોય તેવી રેખા L ની દિક્કોસાઇન l, m, n છે.

$\therefore\ ll_1 + mm_1 + nn_1 = 0$ ....(i)

$\therefore\ ll_2 + mm_2 + nn_2 = 0$ ....(ii)

સમીકરણ (i) અને (ii) ને ચોકડી ગુણાકારની રીતથી ઉકેલતાં,

$$\frac{l}{m_1n_2 - m_2n_1} = \frac{m}{n_1l_2 - n_2l_1} = \frac{n}{l_1m_2 - l_2m_1}$$

$\therefore$ રેખા L ની દિક્કોસાઇન $m_1n_2 - m_2n_1,\ n_1l_2 - n_2l_1\ \ l_1m_2 - l_2m_1$ છે.

29. x–અક્ષને સમાંતર અને ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થતી રેખાનું સમીકરણ શોધો.

➥ X-અક્ષના દિક્ગુણોત્તર 1, 0, 0 છે.

ઊગમબિંદુ O(0, 0, 0) માંથી પસાર થતી અને X-અક્ષને સમાંતર રેખાનું સમીકરણ :

$$\frac{x-0}{1} = \frac{y-0}{0} = \frac{z-0}{0}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{0}$$

30. જો રેખાઓ $\frac{x-1}{-3}=\frac{y-2}{2k}=\frac{z-3}{2}$ અને $\frac{x-1}{3k}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-6}{-5}$ પરસ્પર લંબ હોય, તો k શોધો.

➥ રેખા L_1 : $\frac{x-1}{-3} = \frac{y-2}{2k} = \frac{z-3}{2}$

રેખા L_2 : $\frac{x-1}{3k} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-6}{-5}$

રેખાઓ L_1 અને L_2 પરસ્પર લંબ છે.

$\therefore\ (-3)\ (3k) + (2k)(1) + (2)(-5) = 0$

$\therefore\ -9k + 2k - 10 = 0$

$\therefore\ -7k = 10$

$\therefore\ k = \frac{-10}{7}$

31. (1, 2, 3) માંથી પસાર થતી અને સમતલ $\vec{r}\cdot(\hat{i}+2\hat{j}-5\hat{k}) + 9 = 0$ ને લંબ રેખાનું સદિશ સમીકરણ શોધો.

➥ સમતલ $\pi : \vec{r}\cdot(\hat{i}+2\hat{j}-5\hat{k}) = 2$

$\Rightarrow x + y + z = 2$

$\therefore$ સમતલના અભિલંબનો સદિશ $\vec{n} = \hat{i} + 2\hat{j} - 5\hat{k}$

રેખા L એ $A(\vec{a}) = (1, 2, 3)$ માંથી પસાર થાય છે તથા તે સમતલ π ને લંબ છે.

$\therefore$ રેખા L ને સમાંતર સદિશ $\vec{n} = \hat{i} + 2\hat{j} - 5\hat{k}$ થાય.

$\therefore$ રેખા L નું સમીકરણ : $\vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{n}$

$\therefore\ \vec{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) + \lambda\ (\hat{i} + 2\hat{j} - 5\hat{k})$

32. (a, b, c) માંથી પસાર થતા અને સમતલ $\vec{r}\cdot(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})=2$ ને સમાંતર સમતલનું સમીકરણ શોધો.

➥ સમતલ $\pi : \vec{r}\cdot(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}) = 2$

$\therefore\ x + y + z = 2$

સમતલ π ને સમાંતર સમતલનું સમીકરણ

$x + y + z = \lambda$ છે જે (a, b, c) માંથી પસાર થાય છે.

$\therefore\ a + b + c = \lambda$

$\therefore$ માંગેલ સમતલનું સમીકરણ : $x + y + z = a + b + c$ છે.

33. જે રેખાઓના દિક્‌ગુણોત્તર a, b, c અને $b-c, c-a, a-b$ હોય તે રેખાઓ વચ્ચેનો ખૂણો શોધો.

➡ ધારો કે આપેલ બે રેખાઓને સમાંતર સદિશો $\vec{m_1}$ અને $\vec{m_2}$ છે.

$\vec{m_1}$ = રેખાના દિક્‌ગુણોત્તર a, b, c ને સમાંતર સદિશ

$= a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$

અને $\vec{m_2}$ = રેખાના દિક્‌ગુણોત્તર $b-c, c-a, a-b$ ને સમાંતર સદિશ

$= (b-c)\hat{i} + (c-a)\hat{j} + (a-b)\hat{k}$

જો બંને રેખાઓ વચ્ચેનો ખૂણો θ હોય તો

$$\cos\theta = \frac{\vec{m_1}\cdot\vec{m_2}}{|\vec{m_1}||\vec{m_1}|}$$

હવે $\vec{m_1}\cdot\vec{m_2} = (a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}).((b-c)\hat{i} + (c-a)\hat{j} + (a-b)\hat{k})$

$= ab - ac + bc - ba + ac - bc$

$= 0$

$\therefore \cos\theta = 0$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{2}$

∴ બંને રેખાઓ પરસ્પર લંબ છે.

34. જો બિંદુઓ A, B, C, D ના યામ અનુક્રમે (1, 2, 3), (4, 5, 7), (–4, 3, –6) અને (2, 9, 2) હોય, તો રેખાઓ AB અને CD વચ્ચેનો ખૂણો શોધો.

➡ આપેલ છે કે A(1, 2, 3), B(4, 5, 7), C(–4, 3, –6) અને D(2, 9, 2) ચાર બિંદુઓ છે.

$\therefore \vec{OA} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$

$\vec{OB} = 4\hat{i} + 5\hat{j} + 7\hat{k}$

$\vec{OC} = -4\hat{i} + 3\hat{j} - 6\hat{k}$

$\vec{OD} = 2\hat{i} + 9\hat{j} + 2\hat{k}$

રેખા AB ની દિશા $\vec{b_1} = \vec{OB} - \vec{OA}$

$= 3\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$

રેખા CD ની દિશા $\vec{b_2} = \vec{OD} - \vec{OC}$

$= 6\hat{i} + 6\hat{j} + 8\hat{k}$

હવે $\vec{b_1}\cdot\vec{b_2} = (3\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k})\cdot(6\hat{i} + 6\hat{j} + 8\hat{k})$

$= 18 + 18 + 32$

$= 68$

$|\vec{b_1}| = \sqrt{(3)^2 + (3)^2 + (4)^2} = \sqrt{9 + 9 + 16} = \sqrt{34}$

$|\vec{b_2}| = \sqrt{(6)^2 + (6)^2 + (8)^2} = \sqrt{36 + 36 + 64} = \sqrt{136}$

જો AB અને CD રેખાઓ વચ્ચેનો ખૂણો θ હોય તો

$$\cos\theta = \frac{\vec{b_1}\cdot\vec{b_2}}{|\vec{b_1}||\vec{b_2}|}$$

$= \dfrac{68}{\sqrt{34}\ \sqrt{136}}$

$= \dfrac{68}{2 \times 34} = 1$

$\therefore\ \theta = 0°$

$\therefore$ AB અને CD રેખાઓ વચ્ચેનો ખૂણો 0° છે.

35. **રેખાઓ $\vec{r} = 6\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k} + \lambda(\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k})$ અને $\vec{r} = -4\hat{i} - \hat{k} + \mu(3\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k})$ વચ્ચેનું લઘુતમ અંતર શોધો.**

➡ રેખા L_1 : $\vec{r} = 6\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k} + \lambda(\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k})$

સમીકરણને $\vec{r} = \vec{a_1} + \lambda\vec{b_1}$ સાથે સરખાવતાં,

$\vec{a_1} = 6\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k},\ \vec{b_1} = \hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$ રેખા L_2 : $\vec{r} = 4\hat{i} - \hat{k} + \mu(3\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k})$

સમીકરણને $\vec{r} = \vec{a_2} + \mu\vec{b_2}$ સાથે સરખાવતાં,

$\vec{a_2} = -4\hat{i} - \hat{k},\ \vec{b_2} = 3\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}$

$\vec{a_2} - \vec{a_1} = (-4\hat{i} - \hat{k}) - (6\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k})$

$= -10\hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k}$

$$b_1 \times b_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 8\hat{i} + 8\hat{j} + 4\hat{k}$$

$|\vec{b_1} \times \vec{b_2}| = \sqrt{(8)^2 + (8)^2 + (4)^2}$

$= \sqrt{64 + 64 + 16} = 12$

રેખા L_1 અને L_2 વચ્ચેનું લઘુતમ અંતર

$$= \frac{|(\vec{a_2} - \vec{a_1}) \cdot (\vec{b_1} \times \vec{b_2})|}{|\vec{b_1} \times \vec{b_2}|}$$

$$= \frac{|(-10\hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k}) \cdot (8\hat{i} + 8\hat{j} + 4\hat{k})|}{12}$$

$$= \frac{|-80 - 16 - 12|}{12}$$

$$= \frac{108}{12} = 9$$

36. **(5, 1, 6) અને (3, 4, 1) માંથી પસાર થતી રેખા ZX સમતલના જે બિંદુમાંથી પસાર થાય તે બિંદુના યામ શોધો.**

➡ આપેલ બિંદુઓ A(5, 1, 6) અને (3, 4, 1) છે. બિંદુ A નો સ્થાન સદિશ $\vec{a} = 5\hat{i} + \hat{j} + 6\hat{k}$ બિંદુ B નો સ્થાન સદિશ $\vec{b} = 3\hat{i} + 4\hat{j} + \hat{k}$ બે ભિન્ન બિંદુઓ $A(\vec{a})$ અને $B(\vec{b})$ માંથી પસાર થતી રેખાનું સમીકરણ :

$\vec{r} = \vec{a} + \lambda(\vec{b} - \vec{a})\ \ \lambda \in R$

$\therefore\ \vec{r} = (5\hat{i} + \hat{j} + 6\hat{k}) + \lambda\ \ [(3\hat{i} + 4\hat{j} + \hat{k}) - (5\hat{i} + \hat{j} + 6\hat{k})]$

$\therefore\ \vec{r} = (5\hat{i} + \hat{j} + 6\hat{k}) + \lambda(-2\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k})$ ....(i)

આ રેખા ZX-સમતલને બિંદુ $P(x, o, z)$ માંથી પસાર થાય છે.

$\therefore$ સમીકરણ (i) પરથી

$x\hat{i} + o\hat{j} + z\hat{k} = (5 - 2\lambda)\hat{i} + (1 + 3\lambda)\hat{j} + (6 - 5\lambda)\hat{k}$

બંને બાજુના $\hat{i}, \hat{j}$ અને $\hat{k}$ ના સહગુણકો સરખાવતાં

$x = 5 - 2\lambda$, $O = 1 + 3\lambda$, $z = 6 - 5\lambda$

$\therefore \lambda = -\frac{1}{3}$

$x = 5 - 2\left(-\frac{1}{3}\right)$ $\qquad z = 6 - 5\left(-\frac{1}{3}\right)$

$\therefore x = \frac{17}{3}$ $\qquad \therefore z = \frac{23}{3}$

$\therefore$ $A(\vec{a})$ અને $B(\vec{b})$ માંથી પસાર થતી રેખા ZX–સમતલના બિંદુ P $\left(\frac{17}{3}, 0, \frac{23}{3}\right)$ માંથી પસાર થાય છે.

37. (3, –4, –5) અને (2, –3, 1) માંથી પસાર થતી રેખા $2x + y + z = 7$ સમતલના જે બિંદુમાંથી પસાર થાય તે બિંદુના યામ શોધો.

➥ આપેલ બિંદુઓ A(3, –4, –5) અને B(2, –3, 1) છે.

બિંદુ A નો સ્થાન સદિશ $\vec{a} = 3\hat{i} - 4\hat{j} - 5\hat{k}$

બિંદુ B નો સ્થાન સદિશ $\vec{b} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$

બે ભિન્ન બિંદુઓ $A(\vec{a})$ અને $B(\vec{b})$ માંથી પસાર થતી રેખાનું સમીકરણ :

$\vec{r} = \vec{a} + \lambda(\vec{b} - \vec{a}),\ \lambda \in R$

$\therefore \vec{r} = (3\hat{i} - 4\hat{j} - 5\hat{k}) + \lambda[(2\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}) - (3\hat{i} - 4\hat{j} - 5\hat{k})]$

$\therefore \vec{r} = (3\hat{i} - 4\hat{j} - 5\hat{k}) + \lambda(-\hat{i} + \hat{j} + 6\hat{k})$

$\therefore \vec{r} = (3 - \lambda)\hat{i} + (-4 + \lambda)\hat{j} + (-5 + 6\lambda)\hat{k}$

આ રેખા $2x + y + z = 7$ સમતલને બિંદુ $P(x, y, z)$ માંથી પસાર થાય છે.

બિંદુ $P(x, y, z)$ રેખા પરનું બિંદુ હોવાથી કોઈક $\lambda \in R$ માટે, $x = 3 - \lambda$, $y = -4 + \lambda$, $z = -5 + 6\lambda$

બિંદુ $P(x, y, z)$ એ સમતલ $2x + y + z = 7$ પર પણ આવેલું છે. માટે તેનાં સમીકરણનું સમાધાન કરશે.

$\therefore 2(3 - \lambda) + (-4 + \lambda) + (-5 + 6\lambda) = 7$

$\therefore 6 - 2\lambda - 4 + \lambda - 5 + 6\lambda = 7$

$\therefore 5\lambda = 10 \Rightarrow \lambda = 2$

$\lambda = 2$ માટે, $x = 3 - \lambda = 3 - 2 = 1$

$y = -4 + \lambda = -4 + 2 = -2$

$z = -5 + 6\lambda = -5 + 12 = 7$

$\therefore$ માંગેલ બિંદુના યામ $P(x, y, z) = (1, -2, 7)$ છે.

38. જો બિંદુઓ (1, 1, p) અને (–3, 0, 1) સમતલ $\vec{r}\cdot(3\hat{i} + 4\hat{j} - 12\hat{k}) + 13 = 0$ થી સમાન અંતરે આવેલાં હોય, તો p નું મૂલ્ય શોધો.

➥ સમતલનું સમીકરણ $\vec{r}\cdot(3\hat{i} + 4\hat{j} - 12\hat{k}) + 13 = 0$

બિંદુ A(1, 1, P) નું આપેલ સમતલથી અંતર d_1 હોય, તો

$d_1 = \frac{|\vec{r}\cdot\vec{n} - d|}{|\vec{n}|}$ $\qquad$ જ્યાં $\vec{r} = \hat{i} + \hat{j} + p\hat{k}$

$\vec{n} = 3\hat{i} + 4\hat{j} - 12\hat{k}$

$d = -13$

$\therefore d_1 = \frac{|3 + 4 - 12p + 13|}{\sqrt{9 + 16 + 144}}$

$\therefore d_1 = \frac{|20 - 12p|}{\sqrt{169}} = \frac{|20 - 12p|}{13}$ ....(i)

બિંદુ B(–3, 0, 1) નું આપેલ સમતલથી અંતર d_2 હોય, તો

જ્યાં $\vec{r} = 3\hat{i} + 0\hat{j} + \hat{k}$

$\therefore \quad d_2 = \dfrac{|\vec{r} \cdot \vec{n} - d|}{|\vec{n}|} \qquad \vec{n} = 3\hat{i} + 4\hat{j} - 12k, \quad d = -13$

$\therefore \quad d_2 = \dfrac{|-9 + 0 - 12 + 13|}{\sqrt{9 + 16 + 144}}$

$= \dfrac{|-8|}{13}$ ....(ii)

આપેલ છે કે $d_1 = d_2$

$\therefore \quad \dfrac{|20 - 12p|}{13} = \dfrac{|-8|}{13}$ ((i) અને (ii) પરથી)

$\therefore \quad 20 - 12p = 8$ અથવા $20 - 12p = -8$

$\therefore \quad p = 1$ અથવા $p = \dfrac{7}{3}$

(પાઠ્યપુસ્તકના જવાબમાં ક્ષતિ છે.)

39. જો O ઊગમબિંદુ હોય અને P ના યામ (1, 2, –3) હોય, તો P માંથી પસાર થતા અને OP ને લંબ સમતલનું સમીકરણ શોધો.

➥ માંગેલ સમતલ એ OP ને લંબ છે.

$\therefore$ સમતલના અભિલંબનો સદિશ

$\vec{n} = \overrightarrow{OP}$

$= (1-0,\ 2 - 0,\ 3 - 0)$

$= (1,\ 2,\ 3)$

$= \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$

સમતલ $p(1, 2, 3)$ માંથી પસાર થાય છે.

$\therefore \quad \vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$

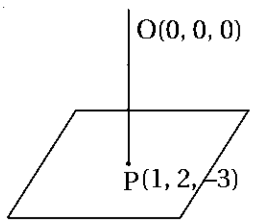
$\therefore$ માંગેલ સમતલનું સમીકરણ : $(\vec{r} - \vec{a}) \cdot \vec{n} = 0$

$\therefore \quad (\vec{r} - (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k})) \cdot (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) = 0$

$\therefore \quad ((x-1)\hat{i} + (y-2)\hat{j} + (z-3)\hat{k}) \cdot (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) = 0$

$\therefore \quad x - 1 + 2y - 4 + 3z - 9 = 0$

$\therefore \quad x + 2y + 3z - 14 = 0$



40. રેખા $\vec{r} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k} + \lambda(3\hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k})$ અને સમતલ $\vec{r} \cdot (\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) = 5$ ના છેદબિંદુથી બિંદુ (–1, –5, –10) નું અંતર શોધો.

➥ રેખા L: $\vec{r} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k} + \lambda(3\hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k})$

સમતલ π : $\vec{r} \cdot (\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) = 5$

ધારો કે રેખા L અને સમતલ π

નું છેદબિંદુ $P(x, y, z)$ છે. બિંદુ P રેખા L ઉપર હોવાથી કોઈ $\lambda \in R$ માટે P ના યામ, $P(x, y, z) = (2 + 3\lambda, -1 + 4\lambda, 2 + 2\lambda)$ થાય.

$\therefore$ P નો સ્થાન સદિશ $= (2+3\lambda)\hat{i} + (-1+4\lambda)\hat{j} + (2+2\lambda)\hat{k}$

બિંદુ P સમતલ π પર આવેલું હોવાથી તેનાં સમીકરણનું સમાધાન કરે.

$\therefore$ $[(2 + 3\lambda)\hat{i} + (-1 + 4\lambda)\hat{j} + (2 + 2\lambda)\hat{k}] \cdot [\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}] = 5$

$\therefore$ $2 + 3\lambda + 1 - 4\lambda + 2 + 2\lambda = 5$

$\therefore$ $\lambda = 0$

$\therefore$ P ના યામ = $(2 + 0, -1 + 0, 2 + 0) = (2, -1, 2)$

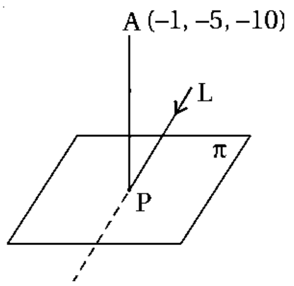
બિંદુ A ના યામ = $(-1, -5, -10)$

$\therefore$ માંગેલ અંતર

$AP = \sqrt{(2 + 1)^2 + (-1 + 5)^2 + (2 + 10)^2}$

$= \sqrt{9 + 16 + 144}$

= 13 એકમ.



41. **(1, 2, 3) માંથી પસાર થતી અને સમતલો $\vec{r} \cdot (\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}) = 5$ તથા $\vec{r} \cdot (3\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = 6$ ને સમાંતર રેખાનું સદિશ સમીકરણ શોધો.**

➥ સમતલ π_1 : $\vec{r} \cdot (\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}) = 5$

સમતલ π_1 ના અભિલંબનો સદિશ $\vec{n_1} = \hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$

સમતલ π_2 : $\vec{r} \cdot (3\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = 6$

$\therefore$ સમતલ π_2 ના અભિલંબનો સદિશ $\vec{n_2} = 3\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ માંગેલ રેખા L એ બિંદુ $A(\vec{a}) = (1, 2, -4)$ માંથી પસાર થાય છે. $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}$.

રેખા L એ સમતલો π_1 અને π_2 ને સમાંતર છે.

$\therefore$ રેખા L ની દિશા એ સમતલો π_1 અને π_2 બંનેને લંબ હશે.

હવે π_1 અને π_2 બંનેને લંબ સદિશ $\vec{n_1} \times \vec{n_2}$ છે.

$\therefore$ રેખા L ની દિશા $\vec{b} = \vec{n_1} \times \vec{n_2}$ થાય.

$\therefore$ $\vec{b} = (\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}) \times (3\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$

$= -3\hat{i} + 5\hat{j} + 4\hat{k}$

$\therefore$ માંગેલ રેખા L એ $\vec{a}$ માંથી પસાર થતી તથા $\vec{b}$ દિશાવાળી રેખા છે.

$\therefore$ રેખા L નું સમીકરણ :

$\vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{b}, \lambda \in R$

$\therefore$ $\vec{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}) + \lambda(-3\hat{i} + 5\hat{j} + 4\hat{k})$

42. **બિંદુ (1, 2, –4) માંથી પસાર થતી અને બે રેખાઓ $\frac{x-8}{3} = \frac{y+19}{-16} = \frac{z-10}{7}$ તથા $\frac{x-15}{3} = \frac{y-29}{8} = \frac{z-5}{-5}$ ને લંબ હોય તેવી રેખાનું સદિશ સમીકરણ શોધો.**

➥ રેખા L_1 : $\frac{x - 8}{3} = \frac{y + 19}{-16} = \frac{z - 10}{7}$

રેખા L_1 ને સમાંતર સદિશ $\vec{b_1} = 3\hat{i} - 16\hat{j} + 7\hat{k}$

રેખા L_2 : $\dfrac{x-15}{3} = \dfrac{y-29}{8} = \dfrac{z-5}{-5}$

રેખા L_2 ને સમાંતર સદિશ $\vec{b_2} = 3\hat{i} + 8\hat{j} - 5\hat{k}$

ધારો કે માંગેલ રેખા L ને સમાંતર સદિશ $\vec{b}$ હોય, તો

$\vec{b} = \vec{b_1} \times \vec{b_2}$

$= (3\hat{i} - 16\hat{j} + 7\hat{k}) \times (3\hat{i} + 8\hat{j} - 5\hat{k})$

$= 24\hat{i} + 36\hat{k} + 72\hat{k}$

રેખા L એ બિંદુ A(1, 2, –4) માંથી પસાર થાય છે.

$\therefore \vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}$

માંગેલ રેખા L નું સમીકરણ :

$\vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{b}, \lambda \in R$

$\therefore \vec{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}) + \lambda\,(24\hat{i} + 36\hat{j} + 72\hat{k})$

$\therefore \vec{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}) + \lambda\,(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$

43. જો સમતલના અંતઃખંડો *a, b, c* હોય અને તે ઊગમબિંદુથી *p* એકમ અંતરે આવેલું હોય, તો સાબિત કરો કે $\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2} = \dfrac{1}{p^2}$.

➡ સમતલના અંતઃખંડો a, b, c છે,

$\therefore$ સમતલનું સમીકરણ (અંતઃખંડ સ્વરૂપ)

$\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$ થાય.

$\therefore \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} - 1 = 0$

સમતલનું ઊગમબિંદુથી અંતર P છે.

$\therefore P = \dfrac{|ax_1 + by_1 + cz_1 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ સૂત્રનો ઉપયોગ કરતાં,

$$P = \dfrac{\left|\dfrac{1}{a}(0) + \dfrac{1}{b}(0) + \dfrac{1}{c}(0) - 1\right|}{\sqrt{\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}}}$$

$\therefore P^2 = \dfrac{1}{\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}}$ (બંને બાજુ વર્ગ કરતાં)

$\therefore \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2} = \dfrac{1}{p^2}$ સાબિત થાય છે.

44. (5, 1, 6) અને (3, 4, 1) માંથી પસાર થતી રેખા YZ સમતલના જે બિંદુમાંથી પસાર થાય તેના યામ શોધો.

➡ આપેલ બિંદુ A(5, 1, 6) અને B(3, 4, 1) છે

બિંદુ A નો સ્થાન સદિશ $\vec{a} = 5\hat{i} + \hat{j} + 6\hat{k}$

તથા બિંદુ B નો સ્થાન સદિશ $\vec{b} = 3\hat{i} + 4\hat{j} + \hat{k}$ થાય

બે ભિન્ન બિંદુઓ $A(\vec{a})$ અને $B(\vec{b})$ માંથી પસાર થતી રેખાનું સદિશ સમીકરણ,

$\vec{r} = \vec{a} + \lambda(\vec{b} - \vec{a})$ છે. $\lambda \in R$

$\therefore \vec{r} = (5\hat{i} + \hat{j} + 6\hat{k}) + \lambda[3\hat{i} + 4\hat{j} + \hat{k}) - (5\hat{i} + \hat{j} + 6\hat{k})]$

$\therefore \vec{r} = (5\hat{i} + \hat{j} + 6\hat{k}) + \lambda(-2\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k})$ ...(i)

આ રેખા YZ-સમતલને બિંદુ P(o, y, z) માંથી પસાર થાય છે.

$\therefore$ સમીકરણ (i) પરથી,

$o\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = (5 - 2\lambda)\hat{i} + (1 + 3\lambda)\hat{j} + (6 - 5\lambda)\hat{k}$

બંને બાજુ $\hat{i}$, $\hat{j}$ અને $\hat{k}$ ના સહગુણકો સરખાવતાં, $o = 5 - 2\lambda$, $y = 1 + 3\lambda$, $z = 6 - 5\lambda$

$\therefore \lambda = \frac{5}{2}$, $y = 1 + 3\left(\frac{5}{2}\right)$, $z = 6 - 5\left(\frac{5}{2}\right)$

$\therefore y = \frac{17}{2}$ $\qquad \therefore z = \frac{-13}{2}$

$\therefore$ બિંદુ A અને B માંથી પસાર થતી રેખા YZ- સમતલના બિંદુ $P\left(0, \frac{17}{2}, \frac{-13}{2}\right)$ માંથી પસાર થાય છે.

45. (–1, 3, 2) બિંદુમાંથી પસાર થતા તથા પ્રત્યેક સમતલ $x + 2y + 3z = 5$ અને $3x + 3y + z = 0$ ને લંબ હોય તેવા સમતલનું સમીકરણ શોધો.

➥ બિંદુ (–1, 3, 2) માંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ $a(x + 1) + b(y - 3) + c(z - 2) = 0$ છે. ....(i)

સમીકરણ (i) દ્વારા દર્શાવાતું સમીકરણ એ સમતલો $x + 2y + 3z = 5$ અને $3x + 3y + z = 0$ ને લંબ છે.

$\therefore a + 2b + 3c = 5$ .....(ii)

$3a + 3b + c = 0$ ....(iii)

$\left\{ a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0 \right.$ નો ઉપયોગ કરતાં

સમીકરણ (ii) અને (iii) ને ચોકડી ગુણાકારની રીતે ઉકેલતાં

$$\frac{a}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{b}{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{c}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}}$$

$\therefore \frac{a}{-7} = \frac{b}{8} = \frac{c}{-3} = \lambda$ કહો.

$\therefore a = -7\lambda, b = 8\lambda, c = -3\lambda$

$\therefore a, b, c$ ની આ કિંમતો સમીકરણ (i) માં મૂકતાં, $-7\lambda(x + 1) + 8\lambda(y - 3) - 3\lambda(z - 2) = 0$

$\therefore -7x - 7 + 8y - 24 - 3z + 6 = 0$

$\therefore -7x + 8y - 3z - 25 = 0$

$\therefore 7x - 8y + 3z + 25 = 0$

જે માંગેલ સમતલનું સમીકરણ છે.

બીજી રીત :

સમતલ $\pi_1 : x + 2y + 3z = 5$

$\therefore$ સમતલ π_1 ના અભિલંબનો સદિશ $\vec{n_1} = 1\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$

સમતલ $\pi_2 : 3x + 3y + z = 0$

$\therefore$ સમતલ π_2 ના અભિલંબનો સદિશ $\vec{n_2} = 3\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$

ધારો કે સમતલ π_1 અને સમતલ π_2 ને લંબ હોય તેવું સમતલ π છે.

જો સમતલ π ના અભિલંબનો સદિશ $\vec{n}$ હોય તો

$\vec{n} = \vec{n_1} \times \vec{n_2}$

$= (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) \times (3\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k})$

$= -7\hat{i} + 8\hat{j} - 3\hat{k}$

➥ બિંદુ (–1, 3, 2) માંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ $a(x + 1) + b(y - 3) + c(z - 2) = 0$ છે. ....(i)

સમીકરણ (i) દ્વારા દર્શાવાતું સમીકરણ એ સમતલો $x + 2y + 3z = 5$ અને $3x + 3y + z = 0$ ને લંબ છે.

$\therefore\ a + 2b + 3c = 5$ .....(ii) $\left\{ a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 \right.$

$3a + 3b + c = 0$ ....(iii) $= 0$ નો ઉપયોગ કરતાં

સમીકરણ (ii) અને (iii) ને ચોકડી ગુણાકારની રીતે ઉકેલતાં

$$\frac{a}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{b}{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{c}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}}$$

$\therefore\ \dfrac{a}{-7} = \dfrac{b}{8} = \dfrac{c}{-3} = \lambda$ કહો.

$\therefore\ a = -7\lambda,\ b = 8\lambda,\ c = -3\lambda$

$\therefore\ a, b, c$ ની આ કિંમતો સમીકરણ (i) માં મૂકતાં, $-7\lambda\ (x + 1) + 8\lambda\ (y - 3) -3\lambda\ (z - 2) = 0$

$\therefore\ -7x - 7 + 8y - 24 - 3z + 6 = 0$

$\therefore\ -7x + 8y - 3z - 25 = 0$

$\therefore\ 7x - 8y + 3z + 25 = 0$

જે માંગેલ સમતલનું સમીકરણ છે.

બીજી રીત :

સમતલ $\pi_1 : x + 2y + 3z = 5$

$\therefore$ સમતલ π_1 ના અભિલંબનો સદિશ $\vec{n_1} = 1\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$

સમતલ $\pi_2 : 3x + 3y + z = 0$

$\therefore$ સમતલ π_2 ના અભિલંબનો સદિશ $\vec{n_2} = 3\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$

ધારો કે સમતલ π_1 અને સમતલ π_2 ને લંબ હોય તેવું સમતલ π છે.

જો સમતલ π ના અભિલંબનો સદિશ $\vec{n}$ હોય તો

$\vec{n} = \vec{n_1} \times \vec{n_2}$

$= (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) \times (3\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k})$

$= -7\hat{i} + 8\hat{j} - 3\hat{k}$

46. સમતલો $\vec{r} \cdot (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = 1$ અને $\vec{r} \cdot (2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}) + 4 = 0$ ની છેદરેખામાંથી પસાર થતા તથા X–અક્ષને સમાંતર સમતલનું સમીકરણ શોધો.

➥ સમતલો $\vec{r} \cdot (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = 1$ અને $\vec{r} \cdot (2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}) + 4 = 0$ ની છેદરેખામાંથી પસાર થતાં સમતલનું સમીકરણ :

$[\vec{r} \cdot (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) - 1] + \lambda\ [\vec{r} \cdot (2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}) + 4] = 0$ છે.

$\therefore\ \vec{r} \cdot [(1 + 2\lambda)\hat{i} + (1 + 3\lambda)\hat{j} + (1 - \lambda)\hat{k}] -1 + 4\lambda = 0$ ....(i)

આ સમતલ X-અક્ષને સમાંતર છે.

X-અક્ષને સમાંતર સદિશ $1\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k}$ છે.

$\therefore\ (\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k}) \cdot [(1 + 2\lambda)\hat{i} + (1 + 3\lambda)\hat{j} + (1 - \lambda)\hat{k}] = 0$

$\therefore\ 1 + 2\lambda = 0$ ($\because$ સમતલનો અભિલંબ એ X-અક્ષને લંબ થશે.)

$\therefore\ \lambda = -\dfrac{1}{2}$

$\lambda = -\dfrac{1}{2}$ સમીકરણ (i) માં મૂકતાં,

$$\vec{r} \cdot \left[\left(1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)\right)\hat{i} + \left(1 + 3\left(-\frac{1}{2}\right)\right)\hat{j} + \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)\hat{k}\right] -1 + 4\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$$

$\therefore\ \vec{r}\cdot\left[0\hat{i}-\frac{\hat{j}}{2}+\frac{3}{2}\hat{k}\right]-3=0$

$\therefore\ \vec{r}\cdot\left(-\frac{\hat{j}}{2}+\frac{3}{2}\hat{k}\right)-3=0$

$\therefore\ -\frac{1}{2}y+\frac{3}{2}z=-3$

$\therefore\ y-3z+6=0$

જે માંગેલ સમતલનું સમીકરણ છે.

47. સમતલો $\vec{r}\cdot(\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k})-4=0$, $\vec{r}\cdot(2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k})+5=0$ ની છેદરેખાને સમાવતા તથા સમતલ $\vec{r}\cdot(5\hat{i}+3\hat{j}-6\hat{k})+8=0$ ને લંબ સમતલનું સમીકરણ શોધો.

➡ સમતલો $\vec{r}\cdot(\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k})-4=0$ અને

$\vec{r}\cdot(2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k})+5=0$ ની છેદ રેખામાંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ,

$[\vec{r}\cdot(\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k})-4]$

$+\lambda\,[\vec{r}\cdot(2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k})+5]=0$ છે.

$\therefore\ \vec{r}\cdot[(1+2\lambda)\hat{i}+(2+\lambda)\hat{j}+(3-\lambda)\hat{k}]-4+5\lambda=0$ ...(i)

સમીકરણ (i) દ્વારા દર્શાવાતા સમતલનો

અભિલંબ $\vec{n_1}=(1+2\lambda)\hat{i}+(2+\lambda)\hat{j}+(3-\lambda)\hat{k}$ છે.

સમતલ $\vec{r}\cdot(5\hat{i}+3\hat{j}-6\hat{k})+8=0$ ...(ii)

આ સમતલનો અભિલંબ $\vec{n_2}=5\hat{i}+3\hat{j}-6\hat{k}$ છે. સમીકરણ (i) અને (ii) દ્વારા દર્શાવાતા સમતલો પરસ્પર લંબ છે.

$\therefore$ તેમના અભિલંબો પણ પરસ્પર લંબ થાય.

$\therefore\ \vec{n_1}\cdot\vec{n_2}=0$

$\therefore\ 5(1+2\lambda)+3(2+\lambda)-6(3-\lambda)=0$

$\therefore\ 5+10\lambda+6+3\lambda-18+6\lambda=0$

$\therefore\ 19\lambda=7$

$\therefore\ \lambda=\frac{7}{19}$

$\lambda=\frac{7}{19}$ સમીકરણ (i) માં મૂકતાં,

$\vec{r}\cdot\left[\left(1+\frac{14}{19}\right)\hat{i}+\left(2+\frac{7}{19}\right)\hat{j}+\left(3-\frac{7}{19}\right)\hat{k}\right]-4+\frac{35}{19}=0$

$\vec{r}\cdot[(19+14)\hat{i}+(38+7)\hat{j}+(57-7)\hat{k}]-76+35=0$

$\vec{r}\cdot(33\hat{i}+45\hat{j}+50\hat{k})-41=0$

$\therefore\ 33x+45y+50z-41=0$

જે માંગેલ સમતલનું સમીકરણ છે.