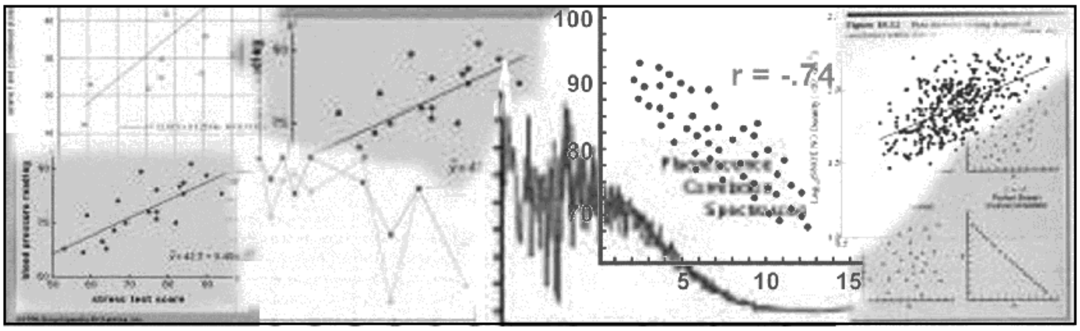
A1U8H6

അധ്യായം 7

സഹബന്ധം (Correlation)



പഠനനേട്ടങ്ങൾ

- സഹബന്ധം എന്ന വാക്കിന്റെ അർഥം മനസ്സിലാക്കുന്നു.
- രണ്ട് ചരങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള സഹബന്ധത്തിന്റെ പ്രകൃതം മനസ്സിലാക്കുന്നു.
- സഹബന്ധത്തിന്റെ വ്യത്യസ്ത അളവുകൾ കണക്ക്കൂട്ടാൻ കഴിയുന്നു.
- ബന്ധത്തിന്റെ തീവ്രതയും ദിശയും വിശകലനം ചെയ്യാൻ കഴിയുന്നു.

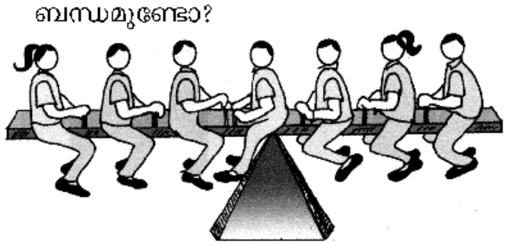
1. ആമുഖം

ഒരുകൂട്ടം ദത്തങ്ങളിൽ നിന്ന് സംക്ഷിപ്ത അളവുകളുടെ നിർമിതിയേയും ഒരേതരം ചരങ്ങൾക്കിടയിലെ മാറ്റങ്ങളേയും കുറിച്ച് കഴിഞ്ഞ അധ്യായങ്ങളിൽ നിങ്ങൾ പഠിച്ചുവല്ലോ. ഈ അധ്യായത്തിൽ രണ്ടു ചരങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധങ്ങൾ എപ്രകാരമാണെന്ന് പരിശോധിക്കാം.

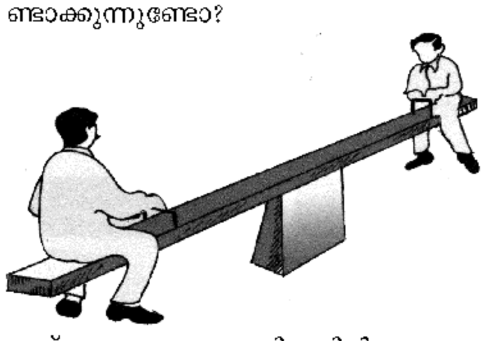
ചൂടുകാലമായാൽ കുന്നിൻമുകളിലെ സ്ഥലങ്ങളിലേക്ക് ധാരാളമായി സന്ദർശകർ വരാറുണ്ട്. അവിടെ ഐസ്ക്രീം കച്ചവടവും വളരെ തിരക്കുള്ളതാകുന്നു. സന്ദർശകരുടെ എണ്ണവും ഐസ്ക്രീം വിൽപനയും അന്തരീക്ഷത്തിലെ താപനിലയുമായി ബന്ധപ്പെടുത്താം. ഇതുപോലെ കമ്പോളത്തിൽ ഉരുളക്കിഴങ്ങിന്റെ പ്രദാനം (supply) വർദ്ധിക്കുമ്പോൾ അതിന്റെ വില കുറയുന്നു. പരിസരത്തെ കർഷകർ ഉരുളക്കിഴങ്ങിന്റെ വിളവെടുപ്പ് തുടങ്ങിയാൽ കമ്പോളത്തിലേക്കുള്ള ഉരുളക്കിഴങ്ങിന്റെ പ്രദാനം കൂടുകയും വില

കിലോഗ്രാമിന് 40 രൂപ എന്നത് 4 രൂപയോ, അതിനു താഴെയോ ആകുകയും ചെയ്യുന്നു. അതിനാൽ പ്രദാനം വിലയുമായി ബന്ധപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു. അതുകൊണ്ട്, സഹബന്ധമെന്നാൽ ചരങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധങ്ങളുടെ ക്രമാനുഗതമായ പഠനത്തിനുള്ള ഒരു ഉപാധിയാണ്. അതിനെ താഴെ നൽകുന്ന ചോദ്യങ്ങളുമായി ബന്ധപ്പെടുത്താവുന്നതാണ്.

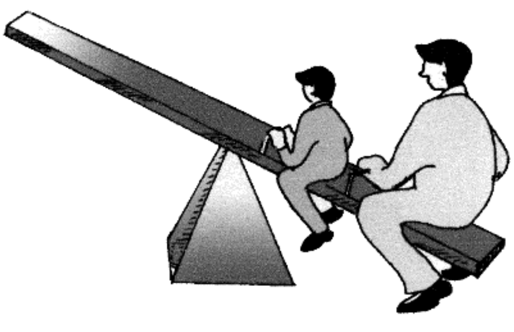
- രണ്ടു ചരങ്ങൾ തമ്മിൽ എന്തെങ്കിലും ബന്ധമുണ്ടോ?



- ഒരു ചരത്തിന്റെ മൂല്യം മാറിയാൽ അത് മറ്റൊരു ചരത്തിന്റെ മൂല്യത്തിൽ മാറ്റമുണ്ടാക്കുന്നുണ്ടോ?



- രണ്ട് ചരങ്ങളും ഒരേ ദിശയിൽ ആണോ നീങ്ങുന്നത്?



- ചരങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം എത്രത്തോളം ശക്തമാണ്?

2. വിവിധതരം ബന്ധങ്ങൾ (Types of relationships)

നമുക്ക് ചരങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള പലവിധ ബന്ധങ്ങളെ പരിശോധിക്കാം. വസ്തുവിന്റെ ചോദനത്തിന്റെയും വിലയുടേയും മാറ്റങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം ചോദനസിദ്ധാന്ത (Law of Demand) ത്തിന്റെ അവിഭാജ്യഘടകമാണ്. 12-ാം ക്ലാസിൽ നിങ്ങൾ ഇതിനെപ്പറ്റി കൂടുതലായി പഠിക്കും. കാർഷിക ഉൽപാദനക്ഷമതയിൽ ഉണ്ടാകുന്ന കുറവ് മഴയിലുണ്ടാകുന്ന കുറവുമായി ബന്ധപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു. ഇത്തരം ഉദാഹരണങ്ങൾ ചരങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധത്തിന്റെ കാര്യകാരണ വ്യാഖ്യാനങ്ങൾ നൽകുന്നു. മറ്റു ഘടകങ്ങൾ ഇവിടെ തികച്ചും യാദൃച്ഛികമായിരിക്കും. വന്യജീവിസങ്കേതത്തിലേക്കുള്ള ദേശാടനപ്പക്ഷികളുടെ വരവും ആ പ്രദേശത്തെ മനുഷ്യരുടെ ജനനനിരക്കും തമ്മിലുള്ള ബന്ധത്തിന് യാതൊരു കാര്യകാരണവ്യഖ്യാനങ്ങളും നൽകാനാവില്ല. ഇവ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം യാദൃച്ഛികം മാത്രമാണ്. നിങ്ങളുടെ കീശയിലെ പണവും ഷൂവിന്റെ വലുപ്പവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം മറ്റൊരു ഉദാഹരണമാണ്. ഇവതമ്മിൽ ബന്ധമുണ്ടെങ്കിൽതന്നെ അവ വിശദീകരിക്കാൻ പ്രയാസമാണ്.

രണ്ടു ചരങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധത്തിൽ മാറ്റം വരുത്താൻ മൂന്നാമത് ചരത്തിന്റെ സ്വാധീനം കൊണ്ട് കഴിയും. ഐസ്ക്രീമിന്റെ ഉയർന്ന വിൽപനയും മുങ്ങി മരണവും തമ്മിൽ ബന്ധപ്പെട്ടിരിക്കാം. ഐസ്ക്രീം കഴിച്ചതിനാലല്ല മുങ്ങിമരണം സംഭവിച്ചത്. അന്തരീക്ഷത്തിലെ താപനില കൂടുന്നത്

ഐസ്ക്രീമിന്റെ ഉയർന്ന വിൽപനയിലേക്കു നയിച്ചു. അതിനു പുറമെ, ഉയർന്ന ചൂട് ശമിപ്പിക്കാൻ ധാരാളം പേർ നീന്തൽക്കുളത്തിലേക്ക് പോകാൻ തുടങ്ങി. ഇത് മുങ്ങിമരണങ്ങളുടെ എണ്ണം വർദ്ധിപ്പിച്ചിരിക്കാം. ആയതിനാൽ ഐസ്ക്രീമിന്റെ വിൽപനയും മുങ്ങിമരണങ്ങളും തമ്മിലുള്ള ഉയർന്ന സഹബന്ധത്തിന് പിന്നിലുള്ള കാരണം അന്തരീക്ഷതാപമാണ്.

എന്താണ് സഹബന്ധം അളക്കുന്നത്? (What does Correlation Measure?)

ചരങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധത്തിന്റെ ദിശയും തീവ്രതയും കണക്കാക്കുന്നതാണ് സഹബന്ധപഠനം. സഹബന്ധം കണക്കാക്കുന്നത് സഹവ്യതിയാനത്തെയാണ്, മറിച്ച് കാര്യകാരണങ്ങളെക്കുറിച്ചല്ല. ചരങ്ങളുടെ ബന്ധത്തിന്റെ കാരണമോ ഫലമോ സഹബന്ധത്തിന്റെ വ്യഖ്യാനത്തിൽപെടുന്നില്ല. X,Y എന്നീ രണ്ടു ചരങ്ങളുടെ ദിശാമാറ്റത്തിന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ സഹബന്ധം പോസിറ്റീവ് എന്നോ നെഗറ്റീവ് എന്നോ കണക്കാക്കാം. ഒരു ചരത്തിന്റെ (X) വർധനവിനൊപ്പം (കുറവ്), മറ്റേ ചരവും (Y) വർധനവ് (കുറവ്) കാണിക്കുന്നു എങ്കിൽ സഹബന്ധം പോസിറ്റീവ് ആകുന്നു. X എന്ന ചരത്തിന്റെ വർധനവ് (കുറവ്) Y എന്ന ചരത്തിന്റെ കുറവിന് (വർധനവ്) കാരണമാകുന്നു എങ്കിൽ സഹബന്ധം നെഗറ്റീവ് ആകുന്നു. പരസ്പം ബന്ധമുള്ള രണ്ട് ചരങ്ങളും സ്ഥിര അനുപാതത്തിലാണ് മാറുന്നതെങ്കിൽ സഹബന്ധം (കുറവ്) രേഖീയ (Linear) മാണ്. രേഖീയമായ സഹബന്ധം ഒരു ഗ്രാഫ് പേപ്പറിൽ നേർരേഖയായി വരച്ചു കാണിക്കാവുന്നതാണ്.

സഹബന്ധത്തിന്റെ വിവിധ തരങ്ങൾ (Types of Correlation)

സാധാരണയായി സഹബന്ധത്തെ പോസിറ്റീവ് സഹബന്ധം, നെഗറ്റീവ് സഹബന്ധം എന്നിങ്ങനെ തരംതിരിക്കുന്നു. ചരങ്ങൾ ഒരേ ദിശയിൽ ഒരുമിച്ചു നീങ്ങുന്നുവെങ്കിൽ അവ പോസിറ്റീവ് സഹബന്ധമാണ്. ഉദാഹരണം : വരുമാനം വർധിക്കുമ്പോൾ ഉപഭോഗവും വർധിക്കുന്നു. വരുമാനം കുറയുമ്പോൾ ഉപഭോഗം കുറയുന്നു. ഐസ്ക്രീമിന്റെ വിൽപനയും അന്തരീക്ഷത്തിലെ താപവും ഒരേദിശയിൽ നീങ്ങുന്നു. ചരങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള നീക്കം വിപരീതദിശയിലാണെങ്കിൽ സഹബന്ധം നെഗറ്റീവ് ആണെന്ന് പറയാം. ഉദാഹരണം: ആപ്പിളിന്റെ വില കുറയുമ്പോൾ അതിന്റെ ചോദനം കുടുന്നു. ആപ്പിളിന്റെ വില കൂടുമ്പോൾ അതിന്റെ ചോദനം കുറയുന്നു. നിങ്ങൾ കൂടുതൽ സമയം പഠനത്തിനായി ചെലവഴിക്കുമ്പോൾ, പരാജയപ്പെടാനുള്ള നിങ്ങളുടെ സാധ്യത കുറയുന്നു. പഠനത്തിനായി കുറച്ചു സമയമാണ് ചെലവഴിക്കുന്നതെങ്കിൽ, നിങ്ങളുടെ പരാജയപ്പെടാനുള്ള സാധ്യത കൂടുന്നു. ഇവിടെ ചരങ്ങൾ വിപരീതദിശയിലാണ് നീങ്ങുന്നത്.

3. സഹബന്ധം കണക്കാക്കുന്നതിനുള്ള ഉപാധികൾ (Techniques for Measuring Correlation)

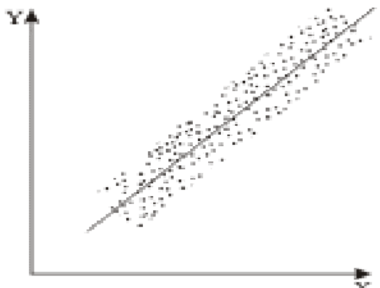
സഹബന്ധപഠനത്തിന് വ്യാപകമായി ഉപയോഗിക്കുന്ന ഉപാധികളാണ് സ്കാറ്റർ ഡയഗ്രം (Scatter diagram), കാൾ പിയേഴ്സന്റെ സഹബന്ധഗുണാങ്കം (Karl Pearson's Co-efficent of correlation), സ്പിയർമാന്റെ റാങ്ക് സഹബന്ധം (Spearman's Rank Correlation) എന്നിവ.

സ്കാറ്റർ ഡയഗ്രം ചരങ്ങളുടെ സഹബന്ധത്തിന്റെ സംഖ്യാപരമായ മൂല്യം നൽകാതെ, സഹബന്ധത്തിന്റെ സ്വഭാവം ചിത്രരൂപേണ അവതരിപ്പിക്കുന്നു. രണ്ടു ചരങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള രേഖീയബന്ധം കാൾ പിയേഴ്സന്റെ സഹബന്ധഗുണാങ്കം വഴി കണക്കാക്കുന്നു. ചരങ്ങളുടെ ബന്ധം രേഖീയമാണെങ്കിൽ അത് പ്രതിനിധാനം ചെയ്യുന്നത് നേർരേഖയായിരിക്കും. വ്യക്തികളുടെ സൗന്ദര്യം, ബുദ്ധി, സത്യസന്ധത മുതലായ ഗുണാത്മകചരങ്ങൾ (Attributes) സംഖ്യകളുടെ രീതിയിൽ അളക്കാനാകില്ല. ഇത്തരം ചരങ്ങളിലെ മൂല്യങ്ങൾക്ക് റാങ്ക് (Rank) കൽപിച്ചു നൽകി അവയുടെ രേഖീയ ബന്ധത്തിന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിലാണ് സ്പിയർമാന്റെ റാങ്ക് സഹബന്ധഗുണാങ്കം കണക്കാക്കുന്നത്.

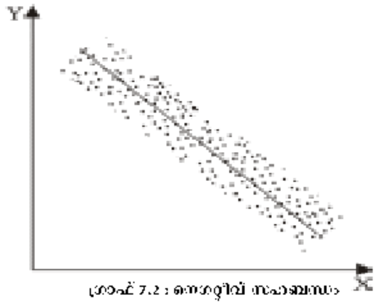
സ്കാറ്റർ ഡയഗ്രം (Scatter diagram)

സംഖ്യാപരമായ മൂല്യം കണക്കാക്കാതെ ചരങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധത്തിന്റെ സ്വഭാവം ചിത്രരൂപേണ വ്യാഖ്യാനിക്കുന്നതിനുള്ള ഉപാധിയാണ് സ്കാറ്റർഡയഗ്രം. ഈ രീതിയിൽ രണ്ടുചരങ്ങളുടെ മൂല്യങ്ങളെ ഒരു ഗ്രാഫുപേപ്പറിൽ ബിന്ദുക്കളായി അടയാളപ്പെടുത്തുന്നു. ഇങ്ങനെ രേഖപ്പെടുത്തിയ ബിന്ദുക്കളുടെ കൂട്ടമാണ് സ്കാറ്റർ ഡയഗ്രം. ഇതിൽ ചരങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധത്തിന്റെ പ്രകൃതം നിർണയിക്കുന്നു. സ്കാറ്റർഡയഗ്രം രീതി അനുസരിച്ച് ചരങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധത്തെപറ്റി ഒരു ധാരണ ചിത്രത്തിൽ നിന്നും രൂപീകരിക്കാൻ കഴിയും. ഇത്തരത്തിൽ രേഖപ്പെടുത്തിയ ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അടുപ്പത്തിന്റെ അവസ്ഥയും അവയുടെ മൊത്തമായ ദിശയും പരിഗണിച്ച് ചരങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം സ്കാറ്റർ ഡയഗ്രത്തിൽ നിന്നും മനസിലാക്കാം. രേഖപ്പെടുത്തിയ ബിന്ദുക്കളെല്ലാം ഒരു നേർരേഖയിലാണ് കിടക്കുന്നതെങ്കിൽ സഹബന്ധം പരിപൂർണവും ഏകമാത്രവുമാണ് (Unity). രേഖപ്പെടുത്തിയ ബിന്ദുക്കൾ രേഖക്ക് ചുറ്റും അകലത്തിൽ ചിതറിക്കിടക്കുകയാണങ്കിൽ സഹബന്ധം കുറവാണ് എന്നും, രേഖപ്പെടുത്തിയ ബിന്ദുക്കൾ ഒരു രേഖയിലോ, രേഖക്ക് അടുത്തോ കിടക്കുന്നുവെങ്കിൽ സഹബന്ധം രേഖീയമാണെന്നും പറയുന്നു.

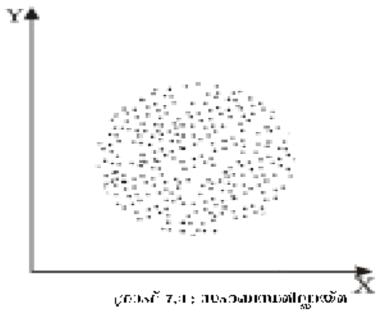
സ്കാറ്റർഡയഗ്രം 7.1 മുതൽ 7.5 വരെയുള്ള ഗ്രാഫുകൾ രണ്ടു ചരങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധത്തെപ്പറ്റി ധാരണ നൽകുന്നു. ഗ്രാഫ് 7.1–ൽ രേഖപ്പെടുത്തിയ ബിന്ദുക്കൾ മുകളിലേക്ക് ഉയരുന്ന രേഖയുടെ ചുറ്റും ചിതറിക്കിടക്കുന്നു. ഇവിടെ ചരങ്ങളുടെ മാറ്റത്തിന്റെ ഗതി ഒരേ ദിശയിലേക്കാണെന്ന് കാണാം. X എന്ന ചരം ഉയരുമ്പോൾ Y എന്ന ചരവും ഉയരുന്നു. ഇതിനെ പോസിറ്റീവ് സഹബന്ധം എന്നു വിളിക്കാം. ഗ്രാഫ് 7.2–ൽ രേഖപ്പെടുത്തിയ ബിന്ദുക്കൾ താഴേക്ക് ചെരിഞ്ഞ രേഖക്ക് ചുറ്റും ചിതറിക്കിടക്കുന്നു. ഇവിടെ ചരങ്ങളുടെ മാറ്റത്തിന്റെ ദിശ വിപരീതമാണ്. X എന്ന ചരം ഉയരുമ്പോൾ Y എന്ന ചരം താഴുന്നു. നേരെ മറിച്ചും സംഭവിക്കുന്നു. ഇതിനെ നെഗറ്റീവ് സഹബന്ധം എന്നുവിളിക്കുന്നു. ഗ്രാഫ് 7.3–ൽ രേഖപ്പെടുത്തിയ ബിന്ദുക്കൾ മുകളിലേക്ക് ഉയരുന്നതോ താഴേക്ക് ചെരിഞ്ഞതോ ആയ രേഖക്ക് ചുറ്റും ചിതറിക്കിടക്കുന്നില്ല. ഇത് ചരങ്ങൾ തമ്മിൽ ഒരു സഹബന്ധവുമില്ലാത്തതിന് ഉദാഹരണമാ



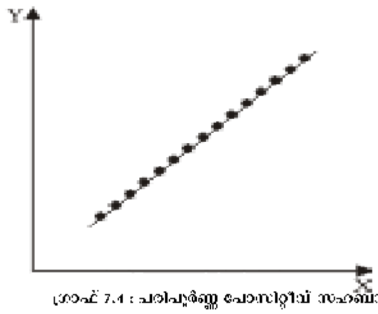
ഗ്രാഫ് 7.1 : പോസിറ്റീവ് സഹബന്ധം



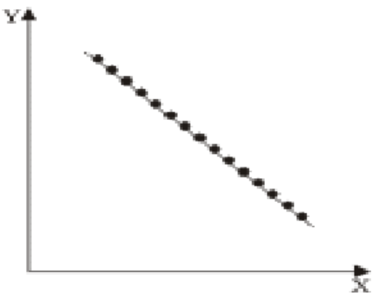
ഗ്രാഫ് 7.2 : നെഗറ്റീവ് സഹബന്ധം



ഗ്രാഫ് 7.3 : സഹബന്ധമില്ലായ്മ



ഗ്രാഫ് 7.4 : പരിപൂർണ്ണ പോസിറ്റീവ് സഹബന്ധം



ഗ്രാഫ് 7.4 : പരിപൂർണ്ണ നെഗറ്റീവ് സഹബന്ധം

ണ്. ഗ്രാഫ് 7.4 ഉം 7.5 ഉം രേഖപ്പെടുത്തിയ ബിന്ദുക്കൾ ഒരു നേർരേഖയിൽത്തന്നെ കിടക്കുന്നു. ഇതിനെ യഥാക്രമം പരിപൂർണമായും പോസിറ്റീവ്സഹബന്ധമെന്നും, പരിപൂർണമായ നെഗറ്റീവ്സഹബന്ധമെന്നും പറയാം. ബന്ധത്തിന്റെ തീവ്രതയും പ്രകൃതവും മനസിലാക്കുന്നതിന് സ്കാറ്റർഡയഗ്രം സഹായിക്കുന്നു.

പ്രവർത്തനം

- നിങ്ങളുടെ ക്ലാസിലെ കുട്ടികളിൽ നിന്നും അവരുടെ പത്താംതരത്തിലെ രണ്ടു വിഷയങ്ങളിൽ നേടിയ മാർക്കും, അവരുടെ ഉയരം, തൂക്കം അടങ്ങിയ ദത്തങ്ങളും ശേഖരിക്കുക. ഈ ചരങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് സ്കാറ്റർഡയഗ്രം വരയ്ക്കുക. ഏതുതരം ബന്ധമാണെന്ന് കണ്ടെത്തുക.

കാൾ പിയേഴ്സന്റെ സഹബന്ധഗുണാങ്കം (Karl Pearson's Co-efficent of Correlation)

കാൾപിയേഴ്സന്റെ സഹബന്ധഗുണാങ്കത്തെ പ്രൊഡക്റ്റ് മൊമെന്റ് സഹബന്ധം (Product moment correlation) എന്നും കേവലസഹബന്ധഗുണാങ്കം (Simple Corretation Co-efficient) എന്നും അറിയപ്പെടുന്നു. രണ്ട്

ചരങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള (X,Y) രേഖീയബന്ധത്തിന്റെ കൃത്യമായ സംഖ്യാപരമായ മൂല്യം ഈ ഗുണാങ്കത്തിലൂടെ ലഭിക്കുന്നു. രേഖീയബന്ധത്തെ താഴെപ്പറയും പ്രകാരം നൽകിയാൽ

$$Y = a + bX$$

ഈ തരത്തിലുള്ള ബന്ധം ഒരു നേർരേഖയിൽ നിന്നും വിവരിച്ചെടുക്കാം. രേഖീയബന്ധസമവാക്യത്തിൽ Y അക്ഷത്തിലെ ലംബഛേദം a ആയും രേഖയുടെ ചെരിവ് b ആയും നൽകുന്നു. X മൂല്യത്തിൽ ഉണ്ടാകുന്ന ചെറിയ മാറ്റം Y മൂല്യത്തിൽ എത്ര മാറ്റം വരുത്തുന്നുവെന്ന് ഇത് സൂചിപ്പിക്കുന്നു. മറ്റൊരു രീതിയിൽ പറഞ്ഞാൽ $Y = X^2$ ആണെങ്കിൽ ഈ ബന്ധം ഒരു നേർരേഖയിൽ പ്രതിനിധാനം ചെയ്യാൻ കഴിയുകയില്ല. സഹബന്ധഗുണാങ്കത്തിന്റെ മൂല്യം പൂജ്യമാകാം. സഹബന്ധം പൂജ്യമാണെന്നാൽ അതിനർഥം രണ്ടു ചരങ്ങൾ തമ്മിൽ യാതൊരു ബന്ധവും ഇല്ല എന്നല്ല.

$X_1, X_2, X_3, \ldots\ldots Xn$ എന്നിവ n ഇനങ്ങളുടെ X മൂല്യവും $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots\ldots Y_n$ എന്നിവ n ഇനങ്ങളുടെ Y മൂല്യവുമാണെങ്കിൽ X,Y എന്നിവയുടെ സമാന്തരമാധ്യം (Arithemetic Mean)

$$\overline{X} = \frac{\sum X}{N}; \quad \overline{Y} = \frac{\sum Y}{N}$$

താഴെ ഇവയുടെ വ്യതിയാനം (Variance) നൽകുന്നു.

$$\sigma^2{}_X = \frac{\sum (X - \overline{X})^2}{N} = \frac{\sum X^2}{N} - \overline{X}^2$$

അതുപോലെ;

$$\sigma^2{}_Y = \frac{\sum (Y - \overline{Y})^2}{N} = \frac{\sum Y^2}{N} - \overline{Y}^2$$

ഇവയുടെ വിചരണങ്ങളുടെ പോസിറ്റീവ് വർഗമൂലമാണ് X, Y എന്നിവയുടെ മാനകവ്യതിയാനം (Standard Deviation). X,Y എന്നിവയുടെ സഹവ്യതിയാനം (Covariance) നിർവചിച്ചാൽ

$$\text{cov}(x, y) = \frac{\sum (X - \overline{X})(Y - \overline{Y})}{N} = \frac{\sum xy}{N}$$

ഇവിടെ,

$x = (X - \overline{X})$, $y = (Y - \overline{Y})$. x ഉം y ഉം കാണിക്കുന്നത് X ന്റെയും Y യുടെയും മാധ്യത്തിൽ നിന്നുള്ള വ്യതിയാനമാണ്.

x, y എന്നീ ഇനങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള സഹവ്യതിയാനത്തിന്റെ ചിഹ്നമാണ് അവയുടെ സഹബന്ധഗുണാങ്കം തീരുമാനിക്കുന്നത്. മാനകവ്യതിയാനം എല്ലായ്പ്പോഴും പോസിറ്റീവ് ആയിരിക്കും. സഹവ്യതിയാനം പൂജ്യമാണെങ്കിൽ സഹബന്ധഗുണാങ്കവും പൂജ്യമായിരിക്കും. പ്രൊഡക്റ്റ്മൊമെന്റ് സഹബന്ധം അഥവ കാൾപിയേഴ്സന്റെ സഹബന്ധഗുണാങ്കം കണക്കാക്കുന്നത് താഴെപ്പറയും പ്രകാരമാണ്

$$r = \frac{\sum xy}{N\sigma_X \sigma_Y} \quad \ldots(1)$$

അല്ലെങ്കിൽ

$$r = \frac{\sum (X - \overline{X})(Y - \overline{Y})}{\sqrt{\sum (X - \overline{X})^2} \cdot \sqrt{\sum (Y - \overline{Y})^2}} \quad \ldots(2)$$

അല്ലെങ്കിൽ,

$$r = \frac{\sum XY - \frac{(\sum X)(\sum Y)}{N}}{\sqrt{\sum X^2 - \frac{(\sum X)^2}{N}} \cdot \sqrt{\sum Y^2 - \frac{(\sum Y)^2}{N}}} \quad \ldots(3)$$

അല്ലെങ്കിൽ,

$$r = \frac{N\sum XY - (\sum X)(\sum Y)}{\sqrt{N\sum X^2 - (\sum X)^2} \cdot \sqrt{N\sum Y^2 - (\sum Y)^2}} \quad \ldots(4)$$

സഹബന്ധഗുണാങ്കത്തിന്റെ പ്രത്യേകതകൾ (Properties of Correlation Coefficent)

സഹബന്ധഗുണാങ്കത്തിന്റെ പ്രത്യേകതകൾ എന്തെല്ലാമാണെന്ന് നോക്കാം

1. r-ന് ഒരു ഏകകമില്ല (unit). ഇതിനർഥം ഇത് ഒരു സംഖ്യമാത്രമാണെന്നാണ്. അളവിന്റെ ഏകകങ്ങൾ r ന്റെ ഭാഗമല്ല. അതായത് r-ന് കിലോഗ്രാം, സെന്റീമീറ്റർ, രൂപ തുടങ്ങിയ അളവുകോൽ ഇല്ല. ഉദാഹരണം: അടിക്കണക്കിലുള്ള ഉയരവും കിലോഗ്രാമിലുള്ള തൂക്കവും തമ്മിലുള്ള സഹബന്ധ (r) 0.7 ആണ്.

2. ചരങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം വിപരീതമാണെങ്കിൽ r ന്റെ മൂല്യം നെഗറ്റീവ് ആകുന്നു. ഒരു ചരത്തിന്റെ മൂല്യത്തിലുള്ള മാറ്റം മറ്റൊരു ചരത്തിന്റെ മാറ്റവുമായി വിപരീതദിശയിലുള്ള ബന്ധമാണുള്ളത്. ഒരുവസ്തുവിന്റെ വില വർധിക്കുമ്പോൾ അതിന്റെ ചോദനം കുറയുന്നു. പലിശനിരക്ക് ഉയരുമ്പോൾ ബാങ്കിൽ നിന്നും വാങ്ങുന്ന വായ്പയുടെ ചോദനം കുറയുന്നു. ഇതിനു കാരണം വായ്പയുടെ ചിലവ് കൂടുന്നതു കൊണ്ടാണ്.

3. രണ്ട് ചരങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള നീക്കം ഒരേ ദിശയിലാണെങ്കിൽ r-ന്റെ മൂല്യം പോസിറ്റീവ് ആണ്. ഉദാഹരണം: കാപ്പിയുടെ വില ചായയെ അപേക്ഷിച്ച് കൂടുമ്പോൾ ചായയുടെ ചോദനം വർധിക്കും (ചായയും കാപ്പിയും പ്രതിസ്ഥാപന വസ്തുക്കളാണ്). ജലസേചനസൗകര്യങ്ങൾ മെച്ചപ്പെടുത്തൽ ഉയർന്ന കാർഷിക വിളയ്ക്ക് കാരണമാകും. താപനിലയിലെ വർധനവ് ഐസ്ക്രീം വിൽപനയെ ഉയർത്തും.

4. r-ന്റെ മൂല്യം പൂജ്യമായിരുന്നാൽ രണ്ട് ചരങ്ങൾ തമ്മിൽ ഒരുതരത്തിലുള്ള സഹബന്ധവുമില്ല. ഈ ചരങ്ങൾ തമ്മിൽ ഒരു രേഖീയബന്ധവുമില്ല. എന്നാൽ മറ്റു തരത്തിലുള്ള ബന്ധങ്ങളുണ്ടാകാം.

5. സഹബന്ധത്തിന്റെ സ്വഭാവം പരിപൂർണമാണെങ്കിൽ r =1 അല്ലെങ്കിൽ r = −1 ആകുന്നു. അവ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം കൃത്യമാണ്.

6. r-ന്റെ ഉയർന്ന മൂല്യം ശക്തമായ രേഖീയബന്ധത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. r-ന്റെ മൂല്യം + 1 നും –1 നും വളരെ അടുത്താണെങ്കിൽ അതിന്റെ മൂല്യം ഉയർന്നതാകുന്നു. r-ന്റെ മൂല്യം വളരെ ചെറുതാണെങ്കിൽ സഹബന്ധം ശക്തി കുറഞ്ഞ രേഖീയബന്ധത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. r-ന്റെ മൂല്യം പൂജ്യത്തിനോട് അടുത്താണെങ്കിൽ താഴ്ന്ന മൂല്യമാണെന്ന് പറയാം. സഹബന്ധഗുണാങ്കത്തിന്റെ മൂല്യം –1 നും + 1 നും ഇടയിലായിരിക്കും ($-1 \le r \le 1$). ഏതെങ്കിലും സന്ദർഭത്തിൽ r -ന്റെ മൂല്യം –1 നും +1 നും ഇടയിലല്ല എങ്കിൽ r കണക്കാക്കുന്നതിൽ പിശക് സംഭവിച്ചിട്ടുണ്ട് എന്ന് മനസിലാക്കാം.

7. ഉൽഭവം (Origin), തോത് (Scale) എന്നിവയിലെ മാറ്റങ്ങൾ r-ന്റെ മൂല്യത്തെ ബാധിക്കില്ല. X, Y എന്നീ രണ്ടു ചരങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് ഇവ നിർവചിക്കാം.

$$U = \frac{X - A}{B}; V = \frac{Y - C}{D}$$

യഥാക്രമം X, Y എന്നിവയുടെ അഭ്യൂഹമാധ്യങ്ങളാണ് A, C എന്നിവ. B, D എന്നിവ പൊതുഘടകങ്ങളുമാണ് എങ്കിൽ, $r_{xy} = r_{uv}$

പാദവ്യതിയാനരീതിയിൽ (Step Deviation Method) എന്നത് പോലെ വളരെ ലളിതമായി ഈ സവിശേഷത ഉപയോഗിച്ച് സഹബന്ധഗുണാങ്കം കണക്കാക്കാം.

ഒന്നാം അധ്യായത്തിൽ നിന്നും നാം മനസിലാക്കിയതുപോലെ സാംഖ്യകരീതികൾ സാമാന്യബോധത്തിന് പകരമാവില്ല. സഹബന്ധം കണക്കു കൂട്ടുന്നതിന് മുമ്പ് ദത്തങ്ങൾ ശരിയായി മനസിലാക്കേണ്ടതിന്റെ ആവശ്യകത ഉയർത്തിക്കാട്ടുന്ന മറ്റൊരു ഉദാഹരണം നോക്കാം. പകർച്ചവ്യാധി പടർന്നുപിടിച്ച ഗ്രാമങ്ങളിലേക്ക് സർക്കാർ ഒരു സംഘം ഡോക്ടർമാരെ അയയ്ക്കുന്നു. അവിടെ മരിച്ച വ്യക്തികളുടെ എണ്ണവും, അയച്ച ഡോക്ടർമാരുടെ എണ്ണവും തമ്മിൽ പോസിറ്റീവ് സഹബന്ധമാണുള്ളത്. സാധാരണയായി ഡോക്ടർമാരുടെ ആരോഗ്യപരിപാലന സൗകര്യങ്ങളുടെ ഫലമായി മരണനിരക്ക് താഴുകയും അവതമ്മിലുള്ള സഹബന്ധം നെഗറ്റീവ്സഹബന്ധമായി കാണേണ്ടതുമാണ്. ഇങ്ങനെ സംഭവിക്കാതിരുന്നത് മറ്റുചില കാരണങ്ങൾ കൊണ്ടായിരുന്നു. ദത്തങ്ങൾ നിർദിഷ്ടസമയവുമായി ബന്ധപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു. അതുകൊണ്ട് റിപ്പോർട്ടുചെയ്ത മരണങ്ങൾ അധികവും ഡോക്ടർമാർക്ക് കാര്യമായൊന്നും ചെയ്യാനാകാത്ത വിധം തീവ്രമായ സ്ഥിതിയിലുള്ളതുമായിരുന്നേക്കാം. അല്ലെങ്കിൽ, ഡോക്ടർമാരുടെ സേവനത്തിന് കാലതാമസമുണ്ടായിരുന്നിരിക്കാം. മറ്റൊരു സാധ്യത, റിപ്പോർട്ട് ചെയ്ത എല്ലാ മരണവും പകർച്ചവ്യാധി മൂലം ആയിരിക്കണമെന്നുമില്ല. പെട്ടെന്നുണ്ടാകുന്ന സുനാമി സംസ്ഥാനത്ത് മരണനിരക്ക് ഉയർത്തുന്നതു പോലെ.

കർഷകർ വിദ്യാഭ്യാസത്തിനായി ചിലവഴിച്ച വർഷവും അവരുടെ വിളവിന്റെ അളവും (വാർഷിക) തമ്മിലുള്ള സഹബന്ധം കണക്കുകൂട്ടി നോക്കാം.

ഉദാഹരണം 1

കർഷകന്റെ വിദ്യാഭ്യാസ വർഷങ്ങൾ	വാർഷികവിളവ് ഏക്കറിൽ (/000 രൂപ)
0	4
2	4
4	6
6	10
8	10
10	8
12	7

സൂത്രവാക്യം 1 ഉപയോഗിക്കുകയാണെങ്കിൽ $\Sigma xy, \sigma x, \sigma y$ എന്നിവയുടെ മൂല്യം ആവശ്യമാണ്.

പട്ടിക 7.1-ൽ നിന്നും താഴെപ്പറയുന്ന മൂല്യങ്ങൾ ലഭിക്കുന്നു.

$$\sum XY = 42$$

$$\sigma_X = \sqrt{\frac{\sum\left(X - \bar{X}\right)^2}{N}} = \sqrt{\frac{112}{7}}$$

$$\sigma_Y = \sqrt{\frac{\sum\left(Y - \bar{Y}\right)^2}{N}} = \sqrt{\frac{38}{7}}$$

മുകളിലെ മൂല്യങ്ങൾ സൂത്രവാക്യം 1-ൽ നൽകിയാൽ,

$$r = \frac{42}{\sqrt{\frac{112}{7}}.\sqrt{\frac{38}{7}}} = 0.644$$

സൂത്രവാക്യം 2 ഉപയോഗിച്ച് കണക്കുകൂട്ടിയാലും ഇതേ മൂല്യം തന്നെ കിട്ടും.

$$r = \frac{\sum(X - \bar{X})(Y - \bar{Y})}{\sqrt{\sum(X - \bar{X})^2}.\sqrt{\sum(Y - \bar{Y})^2}} \quad \ldots (2)$$

$$r = \frac{42}{\sqrt{112}.\sqrt{38}} = 0.644$$

കർഷകർ വിദ്യാലയത്തിൽ പഠിച്ച വർഷങ്ങളും വിളവിന്റെ വാർഷികഅളവും തമ്മിലുള്ള സഹബന്ധം പോസിറ്റീവ് ആണ്. ഇവിടെ r-ന്റെ മൂല്യം വളരെ വലുതാണ്. കർഷകരുടെ വിദ്യാഭ്യാസത്തിന് ചെലവഴിക്കുന്ന വർഷങ്ങളുടെ എണ്ണം കൂടുന്തോറും വിളവിൽ വർധനവ് ഉണ്ടാകുന്നതായി കാണുന്നു. കർഷകരുടെ വിദ്യാഭ്യാസത്തിന്റെ പ്രാധാന്യത്തെയാണ് ഇവിടെ അടിവരയിടുന്നത്. സൂത്രവാക്യം 3 ഉപയോഗിച്ച്

$$r = \frac{\sum XY - \frac{\left(\sum X\right)\left(\sum Y\right)}{N}}{\sqrt{\sum X^2 - \frac{\left(\sum X\right)^2}{N}}.\sqrt{\sum Y^2 - \frac{\left(\sum Y\right)^2}{N}}} \quad \ldots (3)$$

താഴെപ്പറയുന്ന പദപ്രയോഗങ്ങളുടെ മൂല്യം കണക്കാക്കേണ്ടതുണ്ട്.

$$\sum XY, \sum X^2, \sum Y^2$$

സൂത്രവാക്യം 3-ലേക്ക് മൂല്യങ്ങൾ നൽകിയാൽ r-ന്റെ മൂല്യം ലഭിക്കുന്നു.

r-ന്റെ വ്യത്യസ്ത മൂല്യങ്ങളെ നമുക്ക് വ്യാഖ്യാനിക്കാം. ഇംഗ്ലീഷ്, കണക്ക് എന്നീ രണ്ടു വിഷയങ്ങളിലെ മാർക്കിന്റെ സഹബന്ധഗുണാങ്കം 0.1 ആണെങ്കിൽ, സഹബന്ധത്തിന്റെ സ്വഭാവം ശക്തമല്ലാത്ത പോസിറ്റീവ് സഹബന്ധമാണ്. ഇംഗ്ലീഷിൽ ഉയർന്ന മാർക്ക് നേടിയ കുട്ടികൾക്ക് സാംഖ്യകത്തിൽ താരതമ്യേന കുറഞ്ഞ മാർക്കാകും ലഭിച്ചിട്ടുണ്ടാവുക.

r-ന്റെ മൂല്യം 0.9 ആയിരിക്കുമ്പോൾ കുട്ടികൾ ഇംഗ്ലീഷിലും സാംഖ്യകത്തിലും വ്യത്യാസമൊന്നും കൂടാതെ ഉയർന്ന മാർക്ക് നേടുന്നു.

പട്ടിക 7.1

കർഷകരുടെ വിദ്യാഭ്യാസവർഷങ്ങളും വിളവിന്റെ വാർഷികഅളവും തമ്മിലുള്ള സഹബന്ധഗുണാങ്കം (r)

വിദ്യാഭ്യാസ വർഷങ്ങൾ (X)	$(X \ \bar{X})$	$(X \ \bar{X})^2$	ഏക്കർ പ്രതിവാർഷിക വിളവ് (y) ('000രൂപയിൽ)	$(Y \ \bar{Y})$	$(Y \ \bar{Y})^2$	$(X \ \bar{X})(Y \ \bar{Y})$
0	–6	36	4	–3	9	18
2	–4	16	4	–3	9	12
4	–2	4	6	–1	1	2
6	0	0	10	3	9	0
8	2	4	10	3	9	6
10	4	16	8	1	1	4
12	6	36	7	0	0	0
$\Sigma X - 42$	$\Sigma(X \ \bar{X})^2 - 112$		$\Sigma Y - 49$		$\Sigma(Y \ \bar{Y})^2 - 38$	$\Sigma(X \ \bar{X})(Y \ \bar{Y}) - 42$

പ്രാദേശികകമ്പോളത്തിൽ എത്തുന്ന പച്ചക്കറിയുടെ അളവും അതിന്റെ വിലയും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം നെഗറ്റീവ് സഹബന്ധത്തിന് ഉദാഹരണമാണ്. ഇവ തമ്മിലുള്ള സഹബന്ധം $r = -0.9$ ആണെങ്കിൽ, പ്രാദേശികകമ്പോളത്തിൽ എത്തുന്ന പച്ചക്കറിയുടെ പ്രദാനം വർധിക്കുമ്പോൾ അതിന്റെ വില താഴുന്നു. $r = -0.1$ ആയിരുന്നെങ്കിൽ പച്ചക്കറിയുടെ പ്രദാനം വർധിച്ചാൽ വിലയിൽ കുറവുണ്ടാകുമായിരുന്നെങ്കിലും, $r = -0.9$ ആകുമ്പോഴുള്ള അത്ര കുറയുമായിരുന്നില്ല.

വിലക്കുറവിന്റെ വ്യാപ്തി r-ന്റെ കേവലമൂല്യത്തെ ആശ്രയിച്ചിരിക്കുന്നു. കമ്പോളത്തിൽ പച്ചക്കറിയുടെ പ്രദാനം വളരെ ഉയർന്നാലും r-ന്റെ മൂല്യം പൂജ്യമായിരുന്നെങ്കിൽ വിലയിൽ യാതൊരു കുറവും ഉണ്ടാകുമായിരുന്നില്ല. നല്ല വിപണനശൃംഖല വഴി ഉൽപ്പന്നങ്ങൾ മറ്റു വിപണികളിലേക്ക് കൈമാറ്റം ചെയ്യുമ്പോൾ പ്രദാനവർധനവിന് പരിഹാരം കാണാനുള്ള സാധ്യത ഉണ്ടാകുന്നു.

പ്രവർത്തനം

- താഴെക്കൊടുത്ത പട്ടിക നിരീക്ഷിച്ച് നടപ്പുവർഷ വിലയിലെ ദേശീയവരുമാനത്തിന്റെ വാർഷികവളർച്ചയും, മൊത്ത ആഭ്യന്തരസമ്പാദ്യവും (GDP യുടെ ശതമാനത്തിൽ) തമ്മിലുള്ള സഹബന്ധഗുണാങ്കം കണക്കാക്കുക.

പാദവ്യതിയാനരീതിയനുസരിച്ച് സഹബന്ധഗുണാങ്കം കണക്കാക്കൽ (Step Deviation Method to Calculate Correlation Coefficient)

ചരങ്ങളുടെ മൂല്യങ്ങൾ വളരെ വലുതാകുമ്പോൾ r-ന്റെ സവിശേഷതകൾ ഉപയോഗിച്ച് കണക്കുകൂട്ടലിന്റെ പ്രയാസം ഗണ്യമായി കുറയ്ക്കാം. അതായത്, r-ന്റെ മൂല്യം തോതിനേയോ (Scale) ഉൽഭവത്തേയോ (Origin) സ്വാധീനിക്കുന്നില്ല എന്നതാണ്. ഇത് പാദവ്യതിയാനരീതിയെന്നും അറിയപ്പെടുന്നു. X, Y എന്നീ ചരങ്ങളുടെ രൂപാന്തരം ഇതിൽ ഉൾപ്പെടുന്നു. $U = \frac{X-A}{h}; \frac{Y-B}{k}$

A, B എന്നിവ അഭ്യൂഹമാധ്യങ്ങളാണ്. h, k എന്നിവ പൊതുഘടകങ്ങളാണ്. അതിനാൽ, $r_{UV} = r_{XY}$

പട്ടിക 7.2

വർഷം	ദേശീയവരുമാനത്തിന്റെ വാർഷികവളർച്ച	മൊത്തം ആഭ്യന്തര സമ്പാദ്യം (GDP യുടെ ശതമാനത്തിൽ)
1992-93	14	24
1993-94	17	23
1994-95	18	26
1995-96	17	27
1996-97	16	25
1997-98	12	25
1998-99	16	23
1999-00	11	25
2000-01	8	24
2001-02	10	23

ഉറവിടം : സാമ്പത്തികസർവേ (2004–2005)

വിലസൂചികാങ്കവും പണപ്രദാനവും തമ്മിലുള്ള സഹബന്ധം വിശകലനം ചെയ്യുന്നതിലൂടെ ഇത് വ്യക്തമാക്കാം.

ഉദാഹരണം 2

വിലസൂചികാങ്കം	(X)	120	150	190	220	230
പണപ്രദാനം (കോടിരൂപയിൽ)	(Y)	1800	2000	2500	2700	3000

പാദവ്യതിയാനരീതി ഉപയോഗിച്ച് ഇത് വളരെ ലളിതമായി കണക്കാക്കാം.

A=100, h=10, B=1700, k=100 ആയാൽ, മാറ്റം വരുത്തിയ ചരങ്ങളുടെ പട്ടിക താഴെക്കൊടുക്കുന്നു.

പാദവ്യതിയാനരീതി ഉപയോഗിച്ച്, വിലസൂചികയും പണപ്രദാനവും തമ്മിലുള്ള സഹബന്ധഗുണാങ്കം കണക്കാക്കാം.

പട്ടിക 7.3

U $\left(\frac{X-100}{10}\right)$	V $\left(\frac{Y-1700}{100}\right)$	U^2	V^2	UV
2	1	4	1	2
5	3	25	9	15
9	8	81	64	72
12	10	144	100	120
13	13	169	169	169

$\sum U = 41; \sum V = 35; \sum U^2 = 423;$
$\sum V^2 = 343; \sum UV = 378$

ഈ മൂല്യങ്ങൾ സൂത്രവാക്യം 3-ൽ നൽകിയാൽ,

$$r = \frac{\sum UV - \frac{(\sum U)(\sum V)}{N}}{\sqrt{\sum U^2 - \frac{(\sum U)^2}{N}} \cdot \sqrt{\sum V^2 - \frac{(\sum V)^2}{N}}} \qquad (3)$$

$$r = \frac{378 - \frac{41 \times 35}{5}}{\sqrt{423 - \frac{(41)^2}{5}} \cdot \sqrt{343 - \frac{(35)^2}{5}}} = 0.98$$

വിലസൂചികയും പണപ്രദാനവും തമ്മിലുള്ള ശക്തമായ പോസിറ്റീവ് സഹബന്ധമാണ് പണനയത്തിന്റെ അടിസ്ഥാനം. പണപ്രദാനം കൂടുമ്പോൾ വിലസൂചികയും കൂടുന്നു.

പ്രവർത്തനം

- ഇന്ത്യൻ ജനസംഖ്യയുടേയും ദേശീയവരുമാനത്തിന്റേയും ചില ഉദാഹരണങ്ങൾ എടുത്ത് പാദവ്യതിയാനരീതി അനുസരിച്ച് അവ തമ്മിലുള്ള സഹബന്ധഗുണാങ്കം കണക്കാക്കുക.

സ്പിയർമാന്റെ റാങ്ക് സഹബന്ധം (Spearman's Rank Correlation)

ബ്രിട്ടീഷ് മനഃശാസ്ത്രജ്ഞനായ സി.ഇ. സ്പിയർമാൻ ആണ് സ്പിയർമാൻ റാങ്ക് സഹബന്ധം വികസിപ്പിച്ചെടുത്തത്. വില,വരുമാനം, തൂക്കം എന്നീ അളക്കാൻ പറ്റുന്ന ചരങ്ങൾക്ക് വിഭിന്നമായി, സംഖ്യാരീതിയിൽ അളക്കാൻ കഴിയാത്ത ചരങ്ങളുടെ കാര്യത്തിൽ ഈ രീതി ഉപയോഗിക്കുന്നു. ചരങ്ങളുടെ അളവുകൾ സംശയിക്കപ്പെടുമ്പോൾ, അവയുടെ സവിശേഷതകൾ കണക്കിലെടുത്ത് റാങ്കുകൾ നൽകുന്നത് കൂടുതൽ അർഥവത്താണ്. ഒരു ഗ്രാമത്തിലെ കുട്ടികളുടെ ഉയരവും തൂക്കവും തമ്മിലുള്ള സഹബന്ധഗുണാങ്കം കണക്കാക്കണമെന്ന സാഹചര്യം പരിഗണിക്കുക. അളവെടുക്കാനുള്ള സ്കെയിലോ ത്രാസോ ലഭ്യമല്ല. എങ്കിലും ഇവിടെ കുട്ടികളുടെ ഉയരത്തിനും തൂക്കത്തിനും അനുസരിച്ച് റാങ്ക് നൽകാവുന്നതാണ്.

സത്യസന്ധത, സൗന്ദര്യം തുടങ്ങിയ ഗുണാത്മകചരങ്ങളുടെ അളവുകൾ കൈകാര്യം ചെയ്യേണ്ട സാഹചര്യത്തിൽ അവയ്ക്ക് സ്ഥാനം അഥവാ റാങ്ക് നൽകുകയേ നിർവ്വാഹമുള്ളു. അതിലുപരി അറ്റമൂല്യങ്ങളുള്ള രണ്ടു ചരങ്ങളുടെ സഹബന്ധഗുണാങ്കം, അറ്റമൂല്യങ്ങളില്ലാത്ത രണ്ടു ചരങ്ങളുടെ സഹബന്ധം ഗുണാങ്കത്തിൽ നിന്നും വ്യത്യാസപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു. ഈ സാഹചര്യത്തിൽ റാങ്ക് സഹബന്ധം, കേവല സഹബന്ധത്തിനേക്കാൾ മെച്ചപ്പെട്ടതാണ്.

റാങ്ക് സഹബന്ധഗുണാങ്കവും, കേവല സഹബന്ധ ഗുണാങ്കവും ഒരേ വ്യാഖ്യാനമാണ് നൽകുന്നത്. റാങ്ക് സഹബന്ധ ഗുണാങ്കത്തിന്റെ സൂത്രവാക്യം രൂപപ്പെടുത്തുന്നത് കേവലസഹബന്ധഗുണാങ്കത്തിൽ നിന്നാണ്. ഇവിടെ വ്യക്തിഗത മൂല്യങ്ങൾക്ക് പകരം റാങ്ക് നൽകുന്നു. ഈ റാങ്കുകൾ ഉപയോഗിച്ച് സഹബന്ധം കണക്കാക്കുന്നു. ചരങ്ങൾക്ക് നൽകിയിരിക്കുന്ന റാങ്കുകൾ തമ്മിലുള്ള രേഖീയ ബന്ധത്തിന്റെ അളവാണ് ഈ ഗുണാങ്കം നൽകുന്നത്. അല്ലാതെ അവയുടെ മൂല്യമല്ല. ഇത് റാങ്കുകൾ തമ്മിലുള്ള പ്രൊഡക്റ്റ് മൊമെന്റ് സഹബന്ധമാണ്.

$$r_s = 1 - \frac{6\sum D^2}{n^3 - 1} \qquad \ldots(4)$$

n = ചരങ്ങളുടെ എണ്ണം

D = ചരങ്ങൾക്ക് നൽകിയിട്ടുള്ള റാങ്കുകൾ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം

ഒന്നിൽ കൂടുതൽ ചരങ്ങൾക്ക് ഒരേ റാങ്ക് വന്നാൽ സൂത്രവാക്യം,

$$r_s = 1 - \frac{6\left[\sum D^2 + \frac{(m_1^3 - m_1)}{12} + \frac{(m_2^3 - m_2)}{12} + \ldots\right]}{n(n^2 - 1)}$$

ഇവിടെ $m_1, m_2, \ldots$ എന്നിവ ആവർത്തിച്ചു വരുന്ന റാങ്കുകളുടെ എണ്ണവും, $\frac{(m_1^3 - m_1)}{12}$ എന്നത് യഥാക്രമം അവയുടെ തിരുത്തൽ ഘടകവുമാണ്. രണ്ടു ചരങ്ങളുടെ ഓരോ ആവർത്തനത്തിനും ഈ തിരുത്തൽ ആവശ്യമാണ്. ശ്രേണിയിലെ മൂന്ന് മൂല്യങ്ങൾ ആവർത്തിക്കുന്നുണ്ടെങ്കിൽ, ഓരോ ആവർത്തനമൂല്യത്തിനും തിരുത്തൽ വേണ്ടി വരും. ഓരോ തവണയും m_1 എന്നത് മൂല്യം ആവർത്തിക്കുന്നതിന്റെ എണ്ണത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

കേവലസഹബന്ധഗുണാങ്കത്തിന്റെ എല്ലാ സവിശേഷതകളും ഇവിടെയും ബാധകമാണ്. പിയേഴ്സൺന്റെ സഹബന്ധ ഗുണാങ്കത്തിലേതു പോലെ, r-ന്റെ മൂല്യം +1 നും -1 നും ഇടയിലായിരിക്കും. വലുപ്പക്രമത്തിൽ വിന്യസിച്ചിട്ടുള്ള ഒരു ശ്രേണിയിലെ ഇനങ്ങളുടെ മൂല്യത്തിന്റെ ആദ്യ വ്യത്യാസം മിക്കവാറും സ്ഥിരമായിരിക്കില്ല. സാധാരണയായി ദത്തങ്ങൾ കേന്ദ്രമൂല്യത്തോട് ഏകദേശം അടുത്തായിരിക്കും. ആദ്യവ്യത്യാസം സ്ഥിരമാണെങ്കിൽ r-ഉം r_s-ഉം തുല്യമായിരിക്കും തുടർച്ചയായ മൂല്യങ്ങളുടെ വ്യത്യാസമാണ് ആദ്യവ്യത്യാസം. ചരങ്ങളിൽ അറ്റമൂല്യങ്ങൾ ഉൾപ്പെട്ടിട്ടുണ്ടെങ്കിൽ, സ്പിയർമാന്റെ റാങ്ക് സഹബന്ധഗുണാങ്കമാണ് കാൾ പിയേഴ്സിന്റെ ഗുണാങ്കത്തെക്കാൾ മെച്ചപ്പെട്ടത് (സാധാരണയായി r_s, r-നേക്കാൾ കുറവോ തുല്യമോ ആയിരിക്കും $r_s \le r$).

റാങ്ക്സഹബന്ധം കണക്കാക്കുന്നതിനുള്ള മൂന്നു സാഹചര്യങ്ങൾ വിശദീകരിക്കാം

1. റാങ്ക് (Rank) നൽകിയിട്ടുണ്ടെങ്കിൽ
2. റാങ്കുകൾ നൽകിയിട്ടില്ലെങ്കിൽ ദത്തങ്ങളിൽ നിന്നും റാങ്ക് കണ്ടെത്തേണ്ടതുണ്ട്
3. റാങ്കുകൾ ആവർത്തിച്ച് വന്നിട്ടുണ്ടെങ്കിൽ

അവസ്ഥ 1

റാങ്കുകൾ നൽകിയിട്ടുണ്ടെങ്കിൽ (When the Ranks are Given)

ഉദാഹരണം 3

അഞ്ചുപേർ അടങ്ങിയ സൗന്ദര്യമത്സരത്തിൽ മൂന്ന് വിധികർത്താക്കൾ വിലയിരുത്തുന്നു. സൗന്ദര്യത്തിന്റെ പൊതുധാരണയിൽ ഏറ്റവും അടുത്തുള്ള സമീപനം ഏതു വിധികർത്താക്കൾക്കാണുള്ളത് എന്ന് നമുക്ക് കണ്ടെത്തേണ്ടതുണ്ട്.

വിധികർത്താക്കൾ	മത്സരാർത്ഥികൾ				
	1	2	3	4	5
A	1	2	3	4	5
B	2	4	1	5	3
C	1	3	5	2	4

മൂന്നു ജോഡി വിധികർത്താക്കൾ ഉള്ളതിനാൽ മൂന്നു തവണ റാങ്ക്സഹബന്ധം കണക്കുകൂട്ടേണ്ടതുണ്ട്. സൂത്രവാക്യം 4 ഉപയോഗിച്ച് നോക്കാം

$$r_s = 1 - \frac{6\sum D^2}{n^3 - n} \qquad \ldots(4)$$

A, B തമ്മിലുള്ള റാങ്ക്സഹബന്ധം

A	B	D	D^2
1	2	–1	1
2	4	–2	4
3	1	2	4
4	5	–1	1
5	3	2	4
ആകെ			14

സൂത്രവാക്യത്തിലേക്ക് മൂല്യങ്ങൾ നൽകിയാൽ,

$$r_s = 1 - \frac{6\sum D^2}{n^3 - n} \qquad \ldots(4)$$

$$= 1 - \frac{6 \times 14}{5^3 - 5} = 1 - \frac{824}{120} = 1 - 0.7 = 0.3$$

A, C തമ്മിലുള്ള റാങ്ക് സഹബന്ധം

A	C	D	D^2
1	1	0	0
2	3	–1	1
3	5	–2	4
4	2	2	4
5	4	1	1
ആകെ			10

സൂത്രവാക്യം നാലിലേക്ക് മൂല്യങ്ങൾ നൽകിയാൽ റാങ്ക്സഹബന്ധം 0.5 എന്ന് കിട്ടുന്നു. അതുപോലെ B,C എന്നീ വിധി കർത്താക്കളുടെ ദത്തങ്ങളുടെ റാങ്ക് സഹ ബന്ധം –0.4 എന്ന് കിട്ടുന്നു. ഇതുപ്രകാരം, വിധികർത്താക്കളായ A, C എന്നിവരുടെ സൗന്ദര്യത്തിന്റെ പൊതുധാരണ വളരെ അ ടുത്താണെന്നും, B യും C യും തമ്മിൽ വളരെ വ്യത്യസ്ത അഭിരുചികളുള്ളവരുമാ ണെന്നും കാണാം.

അവസ്ഥ 2

റാങ്കുകൾ നൽകിയിട്ടില്ലെങ്കിൽ (When the Ranks are Not Given),

ഉദാഹരണം 4

സാംഖ്യകം, സാമ്പത്തികശാസ്ത്രം എന്നീ വിഷയങ്ങളിൽ 5 കുട്ടികൾ നേടിയ മാർ ക്കിന്റെ ശതമാനം താഴെക്കൊടുക്കുന്നു. ഇ വയുടെ റാങ്ക് കണക്കാക്കി റാങ്ക് സഹബ ന്ധം കാണുക

വിദ്യാർ ഥികൾ	സാംഖ്യക ത്തിലെ മാർക്ക്) (X	സാമ്പത്തിക ശാസ്ത്രത്തിലെ മാർക്ക് (Y)
	(X)	(Y)
A	85	60
B	60	48
C	55	49
D	65	50
E	75	55

വിദ്യാർഥി	സാംഖ്യകത്തിലെ റാങ്ക് (R_1)	സാമ്പത്തിക ശാസ്ത്രത്തിലെ റാങ്ക് (R_2)
	(R_X)	(R_Y)
A	1	1
B	4	5
C	5	4
D	3	3
E	2	2

റാങ്ക് നിശ്ചയിച്ചു നൽകൽ പൂർണമാ യാൽ, സൂത്രവാക്യം 4 ഉപയോഗിച്ച് റാങ്ക്സ ഹബന്ധം കണക്കാക്കുന്നു.

അവസ്ഥ 3

റാങ്കുകൾ ആവർത്തിച്ചിട്ടുണ്ടെങ്കിൽ (When the Ranks are Repeated),

ഉദാഹരണം 5

X, Y എന്നിവയുടെ മൂല്യങ്ങൾ താഴെ നൽ കിയിരിക്കുന്നു.

X	Y
1200	75
1150	65
1000	50
990	100
800	90
780	85
760	90
750	40
730	50
700	60
620	50
600	75

റാങ്ക് സഹബന്ധം കണക്കാക്കുന്നതിന് ശ്രേ ണിയിലെ ഇനങ്ങൾക്ക് റാങ്കുകൾ (ranks) നൽകേണ്ടതുണ്ട്. ആവർത്തിച്ചു വരുന്ന

ഇനങ്ങൾക്ക് പൊതുവായ റാങ്കുകൾ നൽകണം. ഇനങ്ങളുടെ മൂല്യത്തിൽ ചെറിയ വ്യത്യാസം ഉണ്ടാകുമ്പോൾ അവയുടെ റാങ്കുകളുടെ ശരാശരി ആണ് പൊതു റാങ്കായി നൽകുന്നത്. അടുത്ത ഇനത്തിന് നേരത്തെ നൽകിയ റാങ്കിന്റെ അടുത്ത റാങ്ക് നൽകുന്നു.

റാങ്കുകൾ ആവർത്തിച്ചു വന്നാൽ സ്പിയർമാന്റെ റാങ്ക്സഹബന്ധം കണക്കാക്കുന്നതിനുള്ള സൂത്രവാക്യം താഴെക്കൊടുക്കുന്നു.

$$r_s = 1 - \frac{6\left[\sum D^2 + \frac{(m_1^3 - m_1)}{12} + \frac{(m_2^3 - m_2)}{12} + \ldots\right]}{n(n^3 - 1)}$$

m_1, m_2 ...... എന്നിവ റാങ്കിന്റെ ആവർത്തിച്ച എണ്ണം കാണിക്കുന്നു. $\frac{(m_1^3 - m_1)}{12}$ എന്നത് അതിന്റെ യോജിച്ച തിരുത്തൽ ഘടകങ്ങളുമാണ്.

$\frac{3^3 - 3}{12} + \frac{2^3 - 2}{12} = \frac{30}{12} = 2.5$ ഈ മൂല്യങ്ങൾ സൂത്രവാക്യത്തിലേക്ക് നൽകിയാൽ

$$r = 1 - \frac{6(198 + 2.5)}{12^3 - 12} = (1 - 0.70)$$

$$= 0.30$$

X, Y ചരങ്ങൾ തമ്മിൽ പോസിറ്റീവ് റാങ്ക് സഹബന്ധമാണുള്ളത്.

X, Y ചരങ്ങൾ ഒരേ ദിശയിലാണ് നീങ്ങുന്നത്. എങ്കിലും അവ തമ്മിൽ തീവ്രത കുറഞ്ഞ സഹബന്ധമാണുള്ളത്.

X-ന്റെ റാങ്ക്	Y-യുടെ റാങ്ക്	Deviation in Ranks	D^2
1	5.5	4.5	20.25
2	7	5	25.00
3	10	7	49.00
4	1	3	9.00
5	2.5	2.5	6.25
6	4	2	4.00
7	2.5	4.5	20.25
8	12	–4	16.00
9	10	–1	1.00
10	8	2	4.00
11	10	1	1.00
12	5.5	6.5	42.25
			198.00

പ്രവർത്തനം

- നിങ്ങളുടെ പത്ത് സഹപാഠികൾക്ക് 9,10 ക്ലാസുകളിൽ ലഭിച്ച മാർക്കുകൾ ശേഖരിക്കുക. അവ തമ്മിലുള്ള റാങ്ക് സഹബന്ധം കണക്കാക്കുക. നിങ്ങൾക്ക് ലഭിച്ച ദത്തങ്ങൾ ആവർത്തിക്കുന്നില്ലെങ്കിൽ, ആവർത്തിച്ച് റാങ്കുകൾ വരുന്ന മറ്റൊരു കൂട്ടം ദത്തങ്ങൾ ശേഖരിക്കുക. റാങ്ക് സഹബന്ധത്തേക്കാൾ ഉത്തമം കേവലസഹബന്ധമാണെന്ന് തോന്നുന്ന സാഹചര്യങ്ങൾ ഏതെല്ലാമെന്ന് കണ്ടെത്തുക. ദത്തങ്ങൾ കൃത്യമായി കണക്കുകൂട്ടിയിട്ടും കേവലസഹബന്ധത്തേക്കാൾ റാങ്ക്സഹബന്ധമാണ് ഉത്തമമെന്ന് നിങ്ങൾ കരുതുന്നുണ്ടോ? ഇവയുടെ തെരഞ്ഞെടുപ്പിൽ എപ്പോഴാണ് നിങ്ങൾ നിസ്സംഗത പാലിക്കുന്നത്? ക്ലാസിൽ ചർച്ച ചെയ്യൂ.

4. ഉപസംഹാരം

രണ്ടുചരങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം പഠിക്കാനുള്ള ചില ഉപാധികളെ കുറിച്ച് നമ്മൾ ചർച്ച ചെയ്തു, പ്രത്യകിച്ച് രേഖീയബന്ധത്തെപ്പറ്റി. സ്കാറ്റർ ഡയഗ്രം രണ്ടു ചരങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധത്തിന്റെ ചിത്രാവതരണമാണ്. ഇത് രേഖീയബന്ധത്തെ പ്രതിപാദിക്കുന്നില്ല. കാൾപിയേഴ്സന്റെ സഹബന്ധഗുണാങ്കവും സ്പിയർമാന്റെ റാങ്ക്സഹബന്ധവും രണ്ടു ചരങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള രേഖീയബന്ധത്തെ കണക്കാക്കാൻ ഉപയോഗിക്കുന്നു. ചില ചരങ്ങൾ പൂർണമായും അളക്കാൻ കഴിയാത്തവയാണെങ്കിൽ റാങ്ക്സഹബന്ധം ഉപയോഗിക്കുന്നു. എന്നാൽ ഈ അളവുകൾ കാര്യകാരണബന്ധം സൂചിപ്പിക്കുന്നില്ല. പകരം ഒരു ചരം മാറുമ്പോൾ മറ്റു ബന്ധപ്പെട്ട ചരങ്ങൾക്കുണ്ടാകുന്ന മാറ്റത്തിന്റെ ദിശയെപ്പറ്റിയുള്ള ധാരണയും മാറ്റത്തിന്റെ തീവ്രതയും മാത്രമേ സഹബന്ധത്തിൽനിന്നും അറിയാൻ കഴിയൂ.

സംഗ്രഹം

രണ്ട് ചരങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധത്തെക്കുറിച്ച് സഹബന്ധവിശകലനം പഠിക്കുന്നു.

- സ്കാറ്റർഡയഗ്രം രണ്ടു ചരങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധത്തിന്റെ ചിത്രാവതരണമാണ്.
- കാൾ പിയേഴ്സന്റെ സഹബന്ധഗുണാങ്കം (r) രണ്ടു ചരങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള രേഖീയബന്ധത്തെ സംഖ്യാപരമായി കണക്കാക്കുന്നു. r ന്റെ മൂല്യം –1 നും +1 നും ഇടയിലാണ്.
- ചില ചരങ്ങൾ പൂർണമായും അളക്കാൻ കഴിയാത്തവയാണെങ്കിൽ സ്പിയർമാന്റെ റാങ്ക്സഹബന്ധം ഉപയോഗിച്ച് ചരങ്ങളുടെ രേഖീയബന്ധത്തെ സംഖ്യാപരമായി കണക്കാക്കാം.
- ആവർത്തിച്ചുവരുന്ന റാങ്കുകൾക്ക് തിരുത്തൽഘടകങ്ങൾ ആവശ്യമാണ്.
- സഹബന്ധം കാര്യകാരണബന്ധം ഉൾക്കൊള്ളുന്നില്ല. ഇത് സഹവ്യതിയാനം മാത്രമാണ് സൂചിപ്പിക്കുന്നത്.

അഭ്യാസങ്ങൾ

1. അടി അളവിൽ ഉയരവും കിലോ അളവിൽ തൂക്കവും ഉള്ള ദത്തങ്ങളുടെ സഹബന്ധഗുണാങ്കത്തിന്റെ ഏകകം എന്നത്
   a. കിലോഗ്രാം/അടി,
   b. ശതമാനം,
   c. നിലവിലില്ല.

2. കേവലസഹബന്ധഗുണാങ്കത്തിന്റെ വ്യാപ്തി
   a. പൂജ്യം മുതൽ അനന്തമാണ്,
   b. −1 മുതൽ +1 വരെ,
   c. നെഗറ്റീവ്അനന്തത മുതൽ അനന്തത വരെ.
3. r_{xy} പോസിറ്റീവ് ആണെങ്കിൽ x, y ചരങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം എപ്രകാരമായിരിക്കും?
   a. y വർദ്ധിക്കുമ്പോൾ x വർധിക്കുന്നു,
   b. y കുറയുമ്പോൾ x വർധിക്കുന്നു,
   c. y വർധിക്കുമ്പോൾ x ന് യാതൊരു മാറ്റവുമില്ല.
4. $r_{xy} = 0$ ആണെങ്കിൽ x, y ചരങ്ങൾ
   a. രേഖീയമായി ബന്ധപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു,
   b. രേഖീയമായി ബന്ധമില്ല,
   c. സ്വതന്ത്രമാണ്.
5. താഴെപ്പറയുന്ന മൂന്ന് അളവുരീതിയിൽ ഏതാണ് എല്ലാത്തരം ബന്ധങ്ങളും കണക്കാക്കാൻ ഉപയോഗിക്കുന്നത്?
   a. കാൾപിയേഴ്സന്റെ സഹബന്ധഗുണാങ്കം,
   b. സ്പിയർമാന്റെ റാങ്ക്സഹബന്ധം,
   c. സ്കാറ്റർഡയഗ്രം.
6. കൃത്യമായി അളന്ന ദത്തങ്ങൾ ലഭ്യമാണെങ്കിൽ, കേവലസഹബന്ധഗുണാങ്കം
   a. റാങ്ക്സഹബന്ധഗുണാങ്കത്തേക്കാൾ കൂടുതൽ കൃത്യതയുള്ളത്,
   b. റാങ്ക്സഹബന്ധഗുണാങ്കത്തേക്കാൾ കൃത്യത കുറവുള്ളത്,
   c. റാങ്ക്സഹബന്ധഗുണാങ്കത്തെ പോലെ കൃത്യതയുള്ളത്.
7. ബന്ധം അളക്കുന്നതിനായി സഹവ്യതിയാന (covariance) ത്തെക്കാൾ നല്ലത് സഹബന്ധമാണ് (r). എന്തുകൊണ്ട്?
8. ദത്തങ്ങളുടെ തരം അനുസരിച്ച് −1 മുതൽ + 1 വരെയുള്ള പരിധിക്ക് പുറത്ത് r ന് നിൽക്കാൻ ആകുമോ?
9. സഹബന്ധം കാര്യകാരണബന്ധം ഉൾക്കൊള്ളുന്നുണ്ടോ?
10. റാങ്ക് സഹബന്ധം, കേവല സഹബന്ധത്തേക്കാൾ കൂടുതൽ കൃത്യമാകുന്നത് എപ്പോഴാണ്?
11. പൂജ്യം സഹബന്ധമെന്നാൽ സ്വതന്ത്രമാണ് എന്നതാണോ?

12. കേവലസഹബന്ധഗുണാങ്കം എല്ലാതരം ബന്ധങ്ങളേയും കണക്കാക്കുന്നുണ്ടോ?
13. നിങ്ങളുടെ പ്രാദേശികകമ്പോളത്തിൽ നിന്ന് അഞ്ചു തരം പച്ചക്കറികളുടെ വില ഒരാഴ്ചയിലെ എല്ലാ ദിവസവും ശേഖരിക്കുക. ദത്തങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് സഹബന്ധഗുണാങ്കം കണക്കാക്കുക. ഫലം വ്യാഖ്യാനിക്കുക.
14. നിങ്ങളുടെ സഹപാഠികളുടെ ഉയരം അളക്കുക. അവരുടെ അതേ ബഞ്ചിൽ ഇരിക്കുന്നവരുടെ ഉയരത്തെക്കുറിച്ച് ചോദിക്കുക. ഈ രണ്ട് ചരങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള സഹബന്ധഗുണാങ്കം കണക്കാക്കുക. ഫലം വ്യഖ്യാനിക്കുക.
15. കൃത്യമായി അളക്കാൻ ബുദ്ധിമുട്ടുള്ള ചില ചരങ്ങൾ രേഖപ്പെടുത്തുക.
16. r-ന്റെ മൂല്യം -1, 1, 0 എന്നാണെങ്കിൽ r-നെ വ്യാഖ്യാനിക്കുക.
17. റാങ്ക്സഹബന്ധഗുണാങ്കവും പിയേഴ്സന്റെ സഹബന്ധഗുണാങ്കവും തമ്മിൽ വ്യത്യാസപ്പെട്ടിരിക്കുന്നത് എന്തുകൊണ്ട്?
18. പുത്രന്മാരുടെയും അവരുടെ അച്ഛൻമാരുടെയും ഉയരങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള സഹബന്ധഗുണാങ്കം കണക്കാക്കുക.

X (അച്ഛൻമാരുടെ ഉയരം)	65	66	57	67	78	69	70	72
Y (പുത്രന്മാരുടെ ഉയരം)	76	56	65	68	72	72	69	71

ഉത്തരം (r = 0.603)

19 X,Y എന്നീ ചരങ്ങളുടെ സഹബന്ധഗുണാങ്കം കണക്കാക്കുക. ബന്ധത്തെപ്പറ്റി വ്യാഖ്യാനിക്കുക.

X	- 3	- 2	- 1	1	2	3
Y	9	4	1	1	4	9

(ഉത്തരം r =0)

20. X, Y ചരങ്ങളുടെ സഹബന്ധഗുണാങ്കം കണക്കാക്കി, ബന്ധത്തെപ്പറ്റി വ്യഖ്യാനിക്കുക.

X	1	3	4	5	7	8
Y	2	6	8	10	14	16

(ഉത്തരം r = 1)

പ്രവർത്തനം

- ഇന്ത്യയുടെ ദേശീയവരുമാനവും, കയറ്റുമതിയും തമ്മിലുള്ള സഹബന്ധം ചുരുങ്ങിയത് 10 നിരീക്ഷണങ്ങളുടെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ എല്ലാ സൂത്രവാക്യങ്ങളും ഉപയോഗിച്ച് കണക്കാക്കുക.