1. **સાબિત કરો :** $2\cos\frac{\pi}{13}\cos\frac{9\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}+\cos\frac{5\pi}{13}=0$

➡ ડા.બા. $= 2\cos\frac{\pi}{13}\cos\frac{9\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}+\cos\frac{5\pi}{13}$

$= \cos\left(\frac{9\pi}{13}+\frac{\pi}{13}\right)+\cos\left(\frac{9\pi}{13}-\frac{\pi}{13}\right)+\cos\frac{3\pi}{13}+\cos\frac{5\pi}{13}$

$= \cos\left(\frac{10\pi}{13}\right)+\cos\left(\frac{8\pi}{13}\right)+\cos\frac{3\pi}{13}+\cos\frac{5\pi}{13}$

$= \cos\left(\pi-\frac{3\pi}{13}\right)+\cos\left(\pi-\frac{5\pi}{13}\right)+\cos\frac{3\pi}{13}+\cos\frac{5\pi}{13}$

$= -\cos\frac{3\pi}{13}-\cos\frac{5\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}+\cos\frac{5\pi}{13}$

$= 0$

= જ.બા.

2. **સાબિત કરો :** $(\sin 3x+\sin x)\sin x+(\cos 3x-\cos x)\cos x=0$

➡ ડા.બા. $= (\sin 3x+\sin x)\sin x+(\cos 3x-\cos x)\cos x$

$= \left[2\sin\left(\frac{3x+x}{2}\right)\cos\left(\frac{3x-x}{2}\right)\right]\sin x+\left[-2\sin\left(\frac{3x+x}{2}\right)\sin\left(\frac{3x-x}{2}\right)\right]\cos x$

$= 2\sin 2x\cdot\cos x\cdot\sin x-2\sin 2x\cdot\sin x\cdot\cos x$

$= 2\sin 2x\cdot\sin x\cos x-2\sin 2x\cdot\sin x\cos x$

$= 0$

= જ.બા.

3. **સાબિત કરો :** $(\cos x+\cos y)^2+(\sin x-\sin y)^2=4\cos^2\frac{x+y}{2}$

➡ ડા.બા. $= (\cos x+\cos y)^2+(\sin x-\sin y)^2$

$= \left[2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)\right]^2+\left[2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\right]^2$

$= 4\cos^2\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos^2\left(\frac{x-y}{2}\right)+4\cos^2\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin^2\left(\frac{x-y}{2}\right)$

$= 4\cos^2\left(\frac{x+y}{2}\right)\left[\cos^2\left(\frac{x-y}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{x-y}{2}\right)\right]$

$= 4\cos^2\left(\frac{x+y}{2}\right)\quad(\because \cos^2\theta+\sin^2\theta=1)$

= જ.બા.

4. **સાબિત કરો :** $(\cos x-\cos y)^2+(\sin x-\sin y)^2=4\sin^2\frac{x-y}{2}$

➡ ડા.બા. $= (\cos x-\cos y)^2+(\sin x-\sin y)^2$

$= \left[-2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\right]^2+\left[2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\right]^2$

$$= 4\sin^2\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin^2\left(\frac{x-y}{2}\right) + 4\cos^2\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin^2\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$= 4\sin^2\left(\frac{x-y}{2}\right)\left[\sin^2\left(\frac{x+y}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{x+y}{2}\right)\right]$$

$$= 4\sin^2\left(\frac{x-y}{2}\right) \quad (\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1)$$

= જ.બા.

5. **સાબિત કરો : $\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x = 4\cos x \cos 2x \sin 4x$**

➡ ડા.બા. $= \sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x$

$$= (\sin 5x + \sin 3x) + (\sin 7x + \sin x)$$

$$= 2\sin\left(\frac{5x+3x}{2}\right)\cos\left(\frac{5x-3x}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{7x+x}{2}\right)\cos\left(\frac{7x-x}{2}\right)$$

$$= 2\sin 4x \cos x + 2\sin 4x \cos 3x$$

$$= 2\sin 4x\ [\cos 3x + \cos x]$$

$$= 2\sin 4x\left[2\cos\left(\frac{3x+x}{2}\right)\cos\left(\frac{3x-x}{2}\right)\right]$$

$$= 2\sin 4x\ [2\cos 2x \cos x]$$

$$= 4\cos x \cdot \cos 2x \cdot \sin 4x$$

= જ.બા.

6. **સાબિત કરો : $\dfrac{(\sin 7x + \sin 5x) + (\sin 9x + \sin 3x)}{(\cos 7x + \cos 5x) + (\cos 9x + \cos 3x)} = \tan 6x$**

➡ ડા.બા. $= \dfrac{(\sin 7x + \sin 5x) + (\sin 9x + \sin 3x)}{(\cos 7x + \cos 5x) + (\cos 9x + \cos 3x)}$

$$= \frac{2\sin\left(\frac{7x+5x}{2}\right)\cos\left(\frac{7x-5x}{2}\right)+2\sin\left(\frac{9x+3x}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{9x-3x}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{7x+5x}{2}\right)\cos\left(\frac{7x-5x}{2}\right)+2\cos\left(\frac{9x+3x}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{9x-3x}{2}\right)}$$

$$= \frac{2\sin 6x \cos x + 2\sin 6x \cos 3x}{2\cos 6x \cos x + 2\cos 6x \cos 3x}$$

$$= \frac{2\sin 6x\ [\cos x + \cos 3x]}{2\cos 6x\ [\cos x + \cos 3x]}$$

$$= \tan 6x$$

= જ.બા.

7. **સાબિત કરો : $\sin 3x + \sin 2x - \sin x = 4\sin x \cos\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}$**

➡ ડા.બા. $= \sin 3x + \sin 2x - \sin x$

$$= \sin 3x - \sin x + \sin 2x$$

$$= 2\cos\left(\frac{3x+x}{2}\right)\sin\left(\frac{3x-x}{2}\right) + 2\sin x \cos x$$

$$= 2\cos 2x \sin x + 2\sin x \cos x$$

$$= 2\sin x\ [\cos 2x + \cos x]$$

$$= 2\sin x\left[2\cos\left(\frac{2x+x}{2}\right)\cos\left(\frac{2x-x}{2}\right)\right]$$

$$= 4\sin x \cdot \cos\frac{3x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2}$$

$= 4\sin x \cdot \cos\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{3x}{2}$

8. $\sin\frac{x}{2}, \cos\frac{x}{2}$ અને $\tan\frac{x}{2}$ ની કિંમતો શોધો : $\tan x = -\frac{4}{3}$, x એ બીજા ચરણમાં છે.

➡ x એ બીજા ચરણમાં છે.

$\Rightarrow \frac{\pi}{2} < x < \pi$

$\Rightarrow \frac{\pi}{4} < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \frac{\pi}{2}$ પ્રથમ ચરણમાં છે.

હવે, $\tan x = \dfrac{2\tan\frac{x}{2}}{1 - \tan^2\frac{x}{2}}$

ધારો કે, $\tan\frac{x}{2} = A$ તથા $\tan x = -\frac{4}{3}$

$\therefore -\frac{4}{3} = \frac{2A}{1 - A^2}$

$\therefore -4 + 4A^2 = 6A$

$\therefore 4A^2 - 6A - 4 = 0$

$\therefore 2A^2 - 3A - 2 = 0$

$\therefore (A - 2)(2A + 1) = 0$

$\therefore A - 2 = 0$ અથવા $2A + 1 = 0$

$\therefore A = 2$ અથવા $A = -\frac{1}{2}$

$\therefore \tan\frac{x}{2} = 2$ અથવા $\tan\frac{x}{2} = -\frac{1}{2}$

પરંતુ $\frac{x}{2}$ પ્રથમ ચરણમાં હોવાથી $\tan\frac{x}{2} > 0$ થાય.

$\therefore \tan\frac{x}{2} = 2$

હવે, $\cos x = \dfrac{1 - \tan^2\frac{x}{2}}{1 + \tan^2\frac{x}{2}}$

$= \frac{1 - 4}{1 + 4} \quad \left(\because \tan\frac{x}{2} = 2\right)$

$= -\frac{3}{5}$

➡ x એ બીજા ચરણમાં છે.

$\Rightarrow \frac{\pi}{2} < x < \pi$

$\Rightarrow \frac{\pi}{4} < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \frac{\pi}{2}$ પ્રથમ ચરણમાં છે.

હવે, $\tan x = \dfrac{2\tan\frac{x}{2}}{1 - \tan^2\frac{x}{2}}$

ધારો કે, $\tan\frac{x}{2} = A$ તથા $\tan x = -\frac{4}{3}$

$\therefore -\frac{4}{3} = \frac{2A}{1 - A^2}$

$\therefore\ -4 + 4A^2 = 6A$

$\therefore\ 4A^2 - 6A - 4 = 0$

$\therefore\ 2A^2 - 3A - 2 = 0$

$\therefore\ (A - 2)(2A + 1) = 0$

$\therefore\ A - 2 = 0$ અથવા $2A + 1 = 0$

$\therefore\ A = 2$ અથવા $A = -\frac{1}{2}$

$\therefore\ \tan\frac{x}{2} = 2$ અથવા $\tan\frac{x}{2} = -\frac{1}{2}$

પરંતુ $\frac{x}{2}$ પ્રથમ ચરણમાં હોવાથી $\tan\frac{x}{2} > 0$ થાય.

$\therefore\ \tan\frac{x}{2} = 2$

હવે, $\cos x = \frac{1 - \tan^2\frac{x}{2}}{1 + \tan^2\frac{x}{2}}$

$= \frac{1 - 4}{1 + 4} \quad \left(\because \tan\frac{x}{2} = 2\right)$

$= -\frac{3}{5}$

9. $\sin\frac{x}{2}, \cos\frac{x}{2}$ **અને** $\tan\frac{x}{2}$ **ની કિંમતો શોધો :** $\cos x = -\frac{1}{3}$, x **એ ત્રીજા ચરણમાં છે.**

➡ x એ ત્રીજા ચરણમાં છે.

$\Rightarrow \pi < x < \frac{3\pi}{2}$

$\Rightarrow \frac{\pi}{2} < \frac{x}{2} < \frac{3\pi}{4}$

$\Rightarrow \frac{\pi}{2}$ દ્વિતીય ચરણમાં છે.

હવે, $2\sin^2\frac{x}{2} = 1 - \cos x$

$= 1 - \left(-\frac{1}{3}\right)$

$= 1 + \frac{1}{3}$

$= \frac{4}{3}$

$2\cos^2\frac{x}{2} = 1 + \cos x$

$= 1 - \frac{1}{3}$

$= \frac{2}{3}$

$\therefore\ \sin^2\frac{x}{2} = \frac{2}{3}$

$\therefore\ \sin\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\because \sin\frac{x}{2} > 0\right)$

$\therefore\ \sin\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

$\therefore\ \cos^2\frac{x}{2} = \frac{1}{3}$

$\therefore \cos\frac{x}{2} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \left(\because \cos\frac{x}{2} > 0\right)$

$\therefore\ \cos\frac{x}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

હવે, $\tan\frac{x}{2} = \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}$

$= -\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}$

$= -\sqrt{2} \quad \left(\because \tan\frac{x}{2} < 0\right)$

10. $\sin\frac{x}{2}$, $\cos\frac{x}{2}$ **અને** $\tan\frac{x}{2}$ **ની કિંમતો શોધો :** $\sin x = \frac{1}{4}$, x **એ બીજા ચરણમાં છે.**

➡ x એ બીજા ચરણમાં છે.

$\Rightarrow \frac{\pi}{2} < x < \pi$

$\Rightarrow \frac{\pi}{4} < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \frac{x}{2}$ પ્રથમ ચરણમાં છે.

હવે, $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$= 1 - \frac{1}{16}$

$= \frac{15}{16}$

$\therefore \cos x = -\frac{\sqrt{15}}{4}$ ($\because$ x એ બીજા ચરણમાં છે.)

$2\sin^2\frac{x}{2} = 1 - \cos x$

$= 1 + \frac{\sqrt{15}}{4}$

$= \frac{4 + \sqrt{15}}{4}$

$= \frac{8 + 2\sqrt{15}}{8}$

$\therefore \sin^2\frac{x}{2} = \frac{8 + 2\sqrt{15}}{16}$

$= \frac{(\sqrt{5} + \sqrt{3})^2}{16}$

$\therefore \sin\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{4}$ $\left(\because \sin\frac{x}{2} > 0\right)$

➡ x એ બીજા ચરણમાં છે.

$\Rightarrow \frac{\pi}{2} < x < \pi$

$\Rightarrow \frac{\pi}{4} < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \frac{x}{2}$ પ્રથમ ચરણમાં છે.

હવે, $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$= 1 - \frac{1}{16}$

$= \frac{15}{16}$

$\therefore \cos x = -\frac{\sqrt{15}}{4}$ ($\because$ x એ બીજા ચરણમાં છે.)

$2\sin^2\frac{x}{2} = 1 - \cos x$

$= 1 + \frac{\sqrt{15}}{4}$

$= \frac{4 + \sqrt{15}}{}$

$$4$$

$$= \frac{8 + 2\sqrt{15}}{8}$$

$$\therefore \sin^2\frac{x}{2} = \frac{8 + 2\sqrt{15}}{16}$$

$$= \frac{(\sqrt{5} + \sqrt{3})^2}{16}$$

$$\therefore \sin\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{4} \qquad \left(\because \sin\frac{x}{2} > 0\right)$$

11. **સાબિત કરો કે,** $\cot\frac{\pi}{24} = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{6}$

➡ સ્વપ્રયત્ને

12. **સાબિત કરો કે,** $\tan\frac{\pi}{16} = \sqrt{4 + 2\sqrt{2}} + \sqrt{2} + 1$

➡ સ્વપ્રયત્ને

13. **સાબિત કરો કે,** $4\sin 27^\circ = \sqrt{5 + \sqrt{5}} - \sqrt{3 - \sqrt{5}}$

➡ સ્વપ્રયત્ને

14. **જો α અને β એ સમીકરણ $a\cos\theta + b\cos\theta = c$ નાં બીજ હોય તો સાબિત કરો કે,**

$$\cos\alpha + \cos\beta = \frac{2ab}{a^2 + b^2} \text{ અને } \cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{c^2 - b^2}{a^2 + b^2}$$

➡ સ્વપ્રયત્ને

15. **જો α અને β એ સમીકરણ $a\cos\theta + b\cos\theta = c$ નાં બીજ હોય તો સાબિત કરો કે,**

$$\tan\alpha + \tan\beta = \frac{-2ac}{b^2 - c^2} \text{ અને } \tan\alpha \cdot \tan\beta = \frac{a^2 - c^2}{b^2 - c^2}$$

➡ સ્વપ્રયત્ને

16. **જો α અને β એ સમીકરણ $a\cos\theta + b\cos\theta = c$ નાં બીજ હોય તો સાબિત કરો કે,**

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{2ab}{a^2 + b^2}$$

➡ સ્વપ્રયત્ને

17. **જો $\cos\theta = a$ હોય તો $4x^2 - 4x + 1 = a^2$ નાં બીજ $\cos^2\frac{\theta}{2}$ અને $\sin^2\frac{\theta}{2}$ છે.**

➡ સ્વપ્રયત્ને

18. **સાબિત કરો કે,** $(2\cos\theta + 1)\ (2\cos\theta - 1)(2\cos 2\theta - 1)\ (2\cos 4\theta - 1) = 2\cos 8\theta + 1$

➡ સ્વપ્રયત્ને

19. **જો ΔABC કાટકોણ ત્રિકોણ હોય તો સાબિત કરો કે, $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 \Leftrightarrow \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2$**

➡ સ્વપ્રયત્ને

20. **સાબિત કરો કે,** $2\tan\beta + \cot\beta = \tan\alpha \Rightarrow 2\tan(\alpha - \beta) = \cot\beta$.

➡ સ્વપ્રયત્ને

21. **જો $\theta + \beta = \alpha$ અને $\sin\theta = k\sin\beta$ હોય તો સાબિત કરો કે,** $\tan\theta = \frac{k\sin\alpha}{1 + k\cos\alpha}$ **અને** $\tan\beta = \frac{\sin\alpha}{k + \cos\alpha}$

➡ સ્વપ્રયત્ને

22. **જો $a\sin\theta = b\sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) = c\sin\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right)$ તો સાબિત કરો કે, $ab + bc + ca = 0$.**

➡ સ્વપ્રયત્ને

23. **જો $\cos\alpha = \frac{-5}{13}, \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ અને $\tan\beta = \frac{4}{3}, \pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$ તો $P(\alpha + \beta)$ નું ચરણ નક્કી કરો.**

➥ ચતુર્થ ચરણ

24. ઉકેલો : $\sqrt{2}\sec\theta + \tan\theta = 1$

➥ $2n\pi - \frac{\pi}{4}, n \in Z$

25. ઉકેલો : $4\cos\theta - 3\sec\theta = \tan\theta$

➥ $n\pi + (-1)^n \alpha$, જ્યાં $\sin\alpha = \frac{-1+\sqrt{17}}{8}, n \in Z$ $n\pi + (-1)^n \beta$, જ્યાં $\sin\beta = \frac{-1-\sqrt{17}}{8}, n \in Z$

26. જો $\tan A = \frac{1}{7}$ અને $\tan B = \frac{1}{3}$ તો દર્શાવો કે, $\cos 2A = \sin 4B$.

➥ સ્વપ્રયત્ને

27. જો $\cos\alpha = \frac{3}{5}, \cos\beta = \frac{5}{13}, 0 \quad \alpha, \beta \quad \frac{\pi}{2}$ હોય તો $\sin^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ અને $\cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ નાં મૂલ્યો મેળવો.

➥ $\frac{1}{65}, \frac{64}{65}$

28. $\sin 6° \cdot \sin 42° \cdot \sin 66° \cdot \sin 78° = \frac{1}{16}$ સાબિત કરો.

➥ સ્વપ્રયત્ને

29. જો $\cos\theta = \frac{\cos\alpha \cos\beta}{1 - \sin\alpha \sin\beta}$ હોય તો સાબિત કરો કે, $\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\tan\frac{\alpha}{2} - \tan\frac{\beta}{2}}{1 + \tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}}$.

➥ સ્વપ્રયત્ને