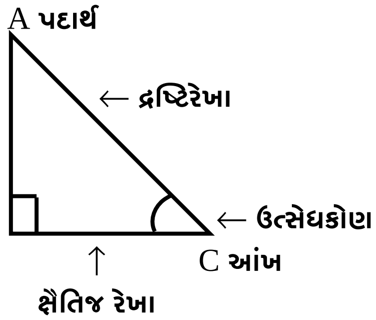
૯–ત્રિકોણમિતિના ઉપયોગ

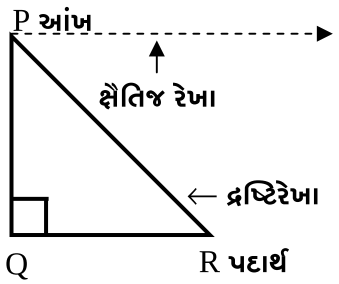
સંકલન : રજનીકાંત સી. ચાવડા
આચાર્યશ્રી – શ્રી મુરલીધર માધ્યમિક શાળા
દાતાર રોડ, જુનાગઢ. મો. ૯૪૨૭૪ ૧૨૨૩૧

❖ **આટલું સમજીએ અને યાદ રાખીએ :**

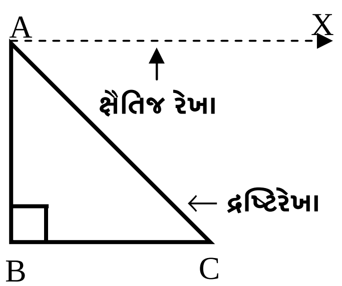
- ત્રિકોણમિતિનો ઉપયોગ ખગોળશાસ્ત્ર, ભૂગોળ તેમજ નૌકાયન જેવાં અનેક ક્ષેત્રોમાં થાય છે.
- પ્રત્યક્ષ માપન વિના વિવિધ વસ્તુઓની ઉંચાઇ તથા તેમના અંતર શોધવા માટે અભ્યાસ કરીશું.
- **દ્રષ્ટિરેખા :** નિરીક્ષકની આંખથી નિરીક્ષણ હેઠળના પદાર્થ સુધી લંબાવેલ રેખાને દ્રષ્ટિરેખા કહે છે.
- **ક્ષૈતિક રેખા :** નિરીક્ષકની આંખમાંથી નીકળતા અને પૃથ્વીની સપાટીને સમાંતર રેખાને ક્ષૈતિજ રેખા કહે છે.
- **ઉત્સેધકોણ :** દ્રષ્ટિરેખા અને ક્ષૈતિજ રેખાથી બનતો ખૂણો જેમાં નિરીક્ષણ હેઠળનો પદાર્થ ક્ષૈતિજ રેખાથી ઉપર હોય. અર્થાત્, એવી સ્થિતિ કે જ્યારે પદાર્થના નિરીક્ષણ માટે મસ્તકને ઊંચું કરવું પડે.



- **અવસેધકોણ :** જ્યારે નિરીક્ષણ હેઠળનો પદાર્થ ક્ષૈતિજ રેખાથી નીચે હોય, ત્યારે દ્રષ્ટિરેખા અને ક્ષૈતિજ રેખાથી બનતો ખૂણો. અર્થાત્, એવી સ્થિતિ કે જ્યારે પદાર્થના નિરીક્ષણ માટે આપણું મસ્તક નીચે નમાવવું પડે.



❖ **ઉત્સેધકોણ અને અવસેધકોણ**



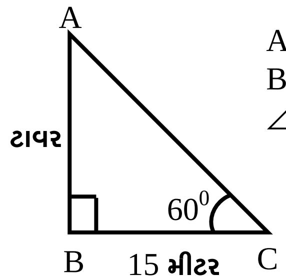
અહીં બે સમક્ષિતિજ રેખાઓની છેદિકા AC દ્વારા બનતા ખૂણા $\angle ACB$ અને $\angle XAC$ સમાન છે. ($\because$ યુગ્મકોણ). આથી બિંદુ C ને સાપેક્ષ પદાર્થ A નો ઉત્સેધકોણ તથા બિંદુ A ને સાપેક્ષ પદાર્થ C નો અવસેધકોણ સમાન છે.

❖ **અંતર અને ઊંચાઇના પ્રશ્નોના જવાબ મેળવવા.**

- રકમમાં આપેલ માહિતી મુજબ આકૃતિ દોરવી.
- આકૃતિનું વિવરણ કરવું.
- રકમમાં આપેલ માપની યાદી કરવી.
- શોધવાના (અજ્ઞાત) માપ માટે ધારવું.
- રકમમાં આપેલાં માપ તથા શોધવાના માપ માટે ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરોની મદદથી ગણતરી કરવી.

❖ રીત–૧ ❖

Ex. 1 જમીન પર એક ટાવર શિરોલંબ સ્થિતિમાં છે. તેના પાયાથી 15 મીટર દૂર રહેલા જમીન પરના એક બિંદુથી ટાવરની ટોચના ઉત્સેધકોણનું માપ 60^0 છે, તો ટાવરની ઊંચાઇ શોધો.



AB = ટાવર
BC = 15 મીટર
$\angle ACB = 60^0$

ΔABC કાટકોણ ત્રિકોણ છે.

$\Delta \tan 60^0 = \dfrac{AB}{AC}$

$\therefore \sqrt{3} = \dfrac{AB}{15}$

$\therefore AB = 15\sqrt{3}$ મીટર ← Ans.

Ex. 1 ની રીતે દાખલા ગણો.

(1) 1.5 મીટર ઊંચાઇવાળો એક નિરીક્ષક એક ચીમનીથી 28.5 મીટર દૂર ઊભેલ છે. તેની આંખથી ચીમનીની ટોચના ઉત્સેધકોણનું માપ 45^0 છે. ચીમનીની ઊંચાઇ કેટલી હશે?

(2) વાવાઝોડાના કારણે એક ઝાડ એવી રીતે ભાંગીને વળી જાય છે. જેથી તેમની ટોચ જમીન સાથે 30^0 માપનો ખૂણો બનાવે તેમ જમીનને સ્પર્શે છે. ઝાડની જમીનને સ્પર્શતી ટોચ અને ઝાડના થડ વચ્ચેનું અંતર 8 મીટર હોય, તો ઝાડની ઊંચાઇ શોધો.

(3) એક પતંગ જમીનથી 60 મીટરની ઉંચાઇ પર ઉડી રહી છે. આ પતંગની દોરીનો એક છેડો ક્ષણભર માટે જમીન પરના એક બિંદુ સાથે બાંધેલ છે. આ સ્થિતિમાં દોરીનો જમીન સાથેનો ઢાળ 60^0 છે. જો દોરીમાં કોઇ ઢીલ નથી તેમ માની લેવામાં આવે તો દોરીની લંબાઇ શોધો.

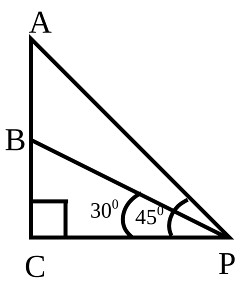
(4) **એક ઠેકેદારને બાળકોને રમવા માટે બગીચામાં બે લપસણી લગાવવાની છે. આ માટે તે** 5 **વર્ષથી ઓછી ઉંમરના બાળકો માટે જમીનથી ઉપરનો છેડો** 1.5 **મીટર રહે અને જમીન સાથે** 30^0 **નો ખૂણો બનાવે તેવી અને તેનાથી વધુ ઉંમરના બાળકો માટે** 3 **મીટર ઊંચાઇથી સીધો ઢાળ હોય તથા જમીન સાથે** 60^0 **નો ખૂણો બનાવતી હોય તેવી લપસણી પસંદ કરે છે. તો બંને લપસણીઓની લંબાઇ શોધો.**

❖ રીત–૨ ❖

Ex. 2 જમીન પરના એક બિંદુ P **થી એક** 10 **મીટર ઊંચી ઇમારતની ટોચનો ઉત્સેધકોણ** 30^0 **છે. ઇમારતની ટોચ પર એક ધ્વજ ફરકાવવામાં આવ્યો છે અને બિંદુ** P **થી આ ધ્વજસ્તંભની ટોચનો ઉત્સેધકોણ** 45^0 **છે. તો ધ્વજસ્તંભની લંબાઇ તથા ઇમારતથી બિંદુ** P **નું અંતર શોધો.** ($\sqrt{3} = 1.732$)

AB = **ધ્વજસ્તંભ,** BC = **ઇમારતની ઊંચાઇ** = 10 **મીટર**

$\angle APC = 45^0$, $\angle BPC = 30^0$



ΔBCP **કાટકોણ ત્રિકોણ છે.**

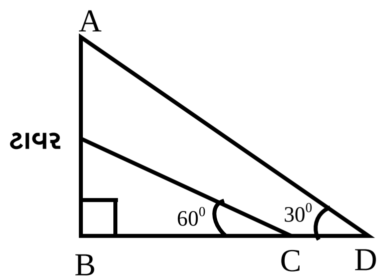
$\therefore \tan 30^0 = \dfrac{BC}{CP}$

$\therefore \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{10}{CP}$

$CP = 10\sqrt{3}$ **મીટર**

❖ રીત–૩ ❖

Ex. 3 સૂર્યના ઉત્સેધકોણનું માપ 60^0 **થી ઘટીને** 30^0 **થતા સમતલ જમીન પર ઉભેલ ટાવરના પડછાયાની લંબાઇમાં** 40 **મીટરનો વધારો થાય છે. તો આ ટાવરની ઊંચાઇ શોધો.**



AB = **ટાવર**

CD = 40 **મીટર**

$\angle ACB = 60^0$

$\angle ADB = 30^0$

ΔABC **કાટકોણ ત્રિકોણ છે.**

$\therefore \tan 60^0 = \dfrac{AB}{BC}$

$\sqrt{3} = \dfrac{AB}{BC} \;\; \therefore BC = \dfrac{AB}{\sqrt{3}}$ .... (1)

ΔADB **કાટકોણ ત્રિકોણ છે.**

$\tan 30^0 = \dfrac{AB}{BD} \qquad \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{AB}{BC + CD}$

$\therefore BC + CD = \sqrt{3}AB$

$BC + 40 = \sqrt{3}AB$

$BC = \sqrt{3}AB - 40$ .... (2)

પરીણામ (1) **અને** (2) **સરખાવતા**

$\dfrac{AB}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}AB - 40$

$\therefore AB = \sqrt{3}(\sqrt{3}AB - 40) = 3AB - 40\sqrt{3}$

$\therefore 2AB = 40\sqrt{3}$

$\therefore AB = 20\sqrt{3} \leftarrow$ Ans.

$\therefore$ **બિંદુ** P **થી ઇમારતનું અંતર** = $10\sqrt{3}$ **મીટર**

ΔACP **કાટકોણ ત્રિકોણ છે.**

$\therefore \tan 45^0 = \dfrac{AC}{CP}$

$1 = \dfrac{AB + BC}{10\sqrt{3}}$

$\therefore AB + BC = 10\sqrt{3}$

$\therefore AB + 10 = 10\sqrt{3}$

$\therefore AB = 10\sqrt{3} - 10$

$= 10(\sqrt{3} - 1)$

$= 10(1.732 - 1)$

$= 10(0.732)$

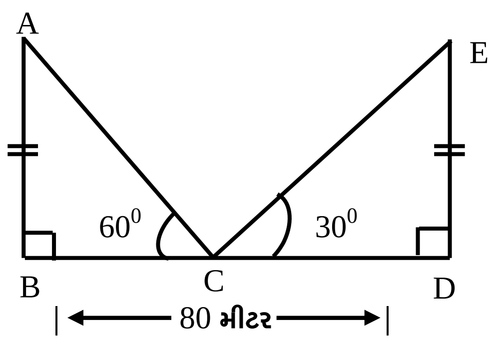
$\therefore AB = 7.32$ **મીટર (ધ્વજદંડની લંબાઇ)**

Ex. 3 ની રીતે ગણો.

(5) **જમીન પર આવેલ એક બિંદુથી** 20 **મીટર ઊંચી ઇમારતની ટોચ પર રહેલા એક સંચાર ટાવરના તળીયા અને ટોચના ઉત્સેધકોણના માપ અનુક્રમે** 45^0 **અને** 60^0 **છે. તો ટાવરની ઉંચાઇ શોધો.**

(6) 1.6 **મીટર ઊંચી એક પ્રતિમા એક ઊંચી બેઠક પર ગોઠવેલ છે. જમીન પરના એક બિંદુથી પ્રતિમાની ટોચના ઉત્સેધકોણનું માપ** 60^0 **અને બેઠકની ટોચના ઉત્સેધકોણનું માપ** 45^0 **છે. તો બેઠકની ઊંચાઇ શોધો.**

Ex. 4 એક 80 **મીટર પહોળા માર્ગની બંને બાજુએ સમાન ઊંચાઇના બે સ્તંભ શિરોલંબ સ્થિતિમાં છે. માર્ગ પર વચ્ચે આવેલ કોઇ એક બિંદુએથી બંને સ્તંભની ટોચના ઉત્સેધકોણનાં માપ** 60^0 **અને** 30^0 **જણાય છે. તો દરેક સ્તંભની ઊંચાઇ શોધો તથા બંને સ્તંભનું નિરીક્ષણ બિંદુથી અંતર શોધો.**



AB = ED = **સ્તંભની ઉંચાઇ** = ?

$m\angle ACB = 60^0$

$m\angle ECD = 30^0$

CD = ?, BC = ?

ΔABC **કાટકોણ ત્રિકોણ છે.**

$\tan 60^0 = \frac{AB}{BC}$ $\therefore \sqrt{3} = \frac{AB}{BC}$

$\therefore BC = \frac{AB}{\sqrt{3}}$ .... (1)

Δ CDE કાટકોણ ત્રિકોણ છે.

$\tan 30^0 = \frac{ED}{CD}$

$\therefore \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{AB}{CD}$

$\therefore CD = \sqrt{3}AB$ .... (2)

પરિણામ (1) અને (2) નો સરવાળો કરતાં

$BC + CD = \frac{AB}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}AB$

$80 = \frac{AB}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}AB$

$\therefore 80\sqrt{3} = AB + 3AB$

$\therefore 4AB = 80\sqrt{3}$

$\therefore AB = 20\sqrt{3}$ મીટર Ans.

હવે AB ની કિંમત પરિણામ (1) માં મૂકતાં

$BC = \frac{20\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

$\therefore$ BC = 20 મીટર

$\therefore$ CD = BD - BC

= 80 - 20

= 60 મીટર ← Ans.

Ex. 4 ની રીતે ગણો.

(7) નહેરના એક કિનારા પર ટીવીનો ટાવર શિરોલંબ ઉભો કરવામાં આવેલ છે. ટાવરની સામેના બીજા કિનારા પર રહેલા એક બિંદુથી ટાવરની ટોચનો ઉત્સેધકોણ 60^0 છે. ટાવરના તળીયા અને નિરીક્ષણ બિંદુને જોડતી રેખા પર આવેલ અને નિરીક્ષણ બિંદુથી 20 મીટર દૂર બીજા એક બિંદુથી ટાવરની ટોચના ઉત્સેધકોણનું માપ 30^0 છે. ટાવરની ઊંચાઇ અને નહેરની પહોળાઇ શોધો.

(8) ટાવરના તળીયામાંથી પસાર થતી રેખા પર તળીયાથી 4 અને 9 મીટર દૂર આવેલા બે બિંદુથી ટાવરની ટોચના ઉત્સેધકોણના માપ છે. તો સાબિત કરો કે ટાવરની ઊંચાઇ 6 મીટર છે.

(9) દરિયાની સપાટીથી 75 મીટર ઊંચી દીવાદાંડી પરથી અવલોકન કરતાં, દરિયામાં રહેલા બે વહાણના અવસેધકોણ 30^0 અને 45^0 માલૂમ પડે છે. જો એક વહાણ બીજાની બરાબર પાછળ હોય અને બંને વહાણ દિવાદાંડીની એક જ બાજુ પર આવેલ હોય, તો બંને વહાણ વચ્ચેનું અંતર શોધો.

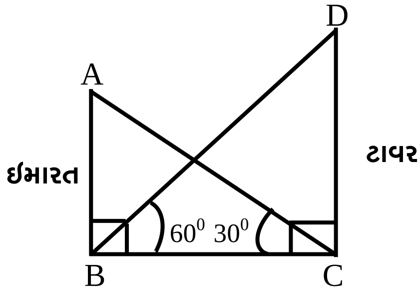
(10) એક સુરેખ માર્ગ ટાવર તરફ જાય છે. ટાવરની ટોચ પર રહેલ એક વ્યક્તિ, ટાવર તરફ અચળ ઝડપથી આવતી એક મોટરકારના અવસેધકોણનું માપ 30^0 નોંધે છે. 6 સેકન્ડ પછી આ કારના અવસેધકોણનું માપ 60^0 થાય છે, તો કારને ટાવર સુધી પહોંચતાં કેટલો સમય લાગશે?

Ex. 4 ની રીતે ગણો.

(11) 100 મીટર પહોળા માર્ગની બાજુએ સમાન ઊંચાઇના બે સ્તંભ શિરોલંબ સ્થિતિમાં છે. માર્ગ પર વચ્ચે આવેલ એક બિંદુએથી બંને સ્તંભની ટોચના ઉત્સેધકોણના માપ 60^0 અને 30^0 જણાય છે. તો નિરિક્ષણ બિંદુનું નજીકના સ્તંભથી અંતર અને દરેક સ્તંભની ઊંચાઇ શોધો.

Ex. 5 મિશ્ર દાખલા

એક ટાવરના તળીયાથી એક ઇમારતની ટોચના ઉત્સેધકોણનું માપ 30^0 છે અને ઇમારતના તળિયાથી ટાવરની ટોચના ઉત્સેધકોણનું માપ 60^0 છે. જો ટાવરની ઊંચાઇ 50 મીટર હોય તો ઇમારતની ઊંચાઇ શોધો.



AB = ઇમારત, CD = ટાવર = 50 મીટર

$\angle ACB = 30^0$, $\angle BDC = 60^0$

ΔBCD કાટકોણ ત્રિકોણ છે.

$\tan 60^0 = \frac{CD}{BC}$

$\sqrt{3} = \frac{50}{BC}$

$\therefore BC = \frac{50}{\sqrt{3}}$

ΔABC કાટકોણ ત્રિકોણ છે.

$\tan 30^0 = \frac{AB}{BC}$

$\therefore \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{AB}{\frac{50}{\sqrt{3}}}$

$\therefore \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}AB}{50}$

$\therefore 50 = \sqrt{3}.\sqrt{3}.AB$

$\therefore$ 50 = 3 AB

$\therefore$ AB = $\frac{50}{3}$ મીટર

ઇમારતની ઊંચાઇ ← Ans.

Ex. 5 ની રીતે ગણો. (મિશ્ર)

(12) 7 મીટર ઊંચી ઇમારત પરથી એક કેબલ ટાવરની ટોચનો ઉત્સેધકોણ 60^0 અને ટાવરના તળિયાનો અવસેધકોણ 45^0 છે, તો ટાવરની ઊંચાઇ શોધો.

(13) નદી પર રહેલા પુલના એક બિંદુથી નદીના બંને કિનારાના અવસેધકોણના માપ અનુક્રમે 30^0 અને 45^0 માલુમ પડે છે. જો નદીની સપાટીથી પુલની ઊંચાઇ 3 મીટર હોય તો નદીની પહોળાઇ શોધો.

(14) એક બહુમાળી ઈમારતની ટોચ પરથી અવલોકન કરતાં એક 8 મીટર ઈમારતની ટોચ અને તળીયાના અવસેધકોણના માપ અનુક્રમે 30^0 અને 45^0 માલુમ પડે તો બહુમાળી ઈમારતની ઊંચાઈ તથા બે ઈમારત વચ્ચેનું અંતર શોધો.

❖ મહાવરાના દાખલા ❖

(1) h મીટર ઊંચી ઈમારતની ટોચ પરથી જમીન પરની વસ્તુના અવસેધકોણનું માપ θ જણાય છે. તો ઈમારતથી વસ્તુનું અંતર મીટરમાં જણાવો.

(2) જમીન પરના બિંદુ P પરથી ટાવરની ટોચના ઉત્સેધકોણનું માપ 45^0 છે. જો બિંદુ P અને ટાવર વચ્ચેનું અંતર a અને ટાવરની ઊંચાઈ b હોય તો a અને b ના માપ સરખા હશે કે નાના મોટા?

(3) 3 મીટર લાંબી એક નીસરણીનો નીચેનો છેડો દીવાલથી 1.5 મીટર દૂર રહે તે રીતે દીવાલ પર ટેકવી છે, તો નિસરણી જમીન સાથે કેટલા માપનો ખૂણો બનાવે?

(4) એક ટાવરની ઊંચાઈ $50\sqrt{3}$ મીટર છે. તેના તળીયેથી 50 મીટર દૂર આવેલ બિંદુએથી તેની ટોચના ઉત્સેધકોણનું માપ શોધો.

(5) ટાવરની ઊંચાઈ અને તેના પડછાયાની લંબાઈનો ગુણોત્તર $1:\sqrt{3}$ છે, તો સૂર્યના ઉત્સેધકોણનું માપ શોધો.

(6) 18 મીટર અને 12 મીટર ઊંચાઈવાળા બે સ્તંભની ટોચ વચ્ચે એક તાર બાંધેલ છે. તાર સમક્ષિતિજ રેખા સાથે 30^0 માપનો ખૂણો બનાવે, તો તારની લંબાઈ શોધો.

(7) એક ટાવરના પડછાયાની લંબાઈ ટાવરની લંબાઈ કરતાં $\sqrt{3}$ ગણી હોય, તો તેનો સૂર્ય સાથેનો ખૂણો શોધો.

(8) 75 મીટર ઊંચા એક ટાવરની ટોચ પરથી એક ગાડીના અવસેધકોણનું માપ 30^0 છે. ટાવરથી ગાડીનું અંતર શોધો.

(9) 150 મીટર ઊંચા એક ટાવરની ટોચ પરથી એક ગાડીના અવસેધકોણનું માપ 30^0 છે. ટાવરથી ગાડીનું અંતર શોધો.

(10) એક ટાવરની ઊંચાઈ તેના પડછાયાની લંબાઈ કરતાં $\sqrt{3}$ ગણી હોય તો તેનો ઉત્સેધકોણ શોધો.

(11) 800 મીટરનો એક લાંબો પુલ ખીણના બે છેડાને જોડે છે. ખીણની તળેટીમાં પુલની નીચે એક મંદિર આવેલું છે. મંદિરની ટોચના પુલના બે છેડેથી મળતા અવસેધકોણના માપ 30^0 અને 60^0 છે. તો મંદિરની ટોચની પુલની ઊંચાઈ શોધો.

(12) એક ટાવરની ટોચ પરથી એક બહુમાળી મકાનની ટોચ અને તળીયાના અવસેધકોણના માપ અનુક્રમે 30^0 અને 60^0 છે. જો બહુમાળી મકાનની ઊંચાઈ 100 મીટર હોય તો, ટાવરની ઊંચાઈ શોધો.

(13) h જેટલી શિરોલંબ ઊંચાઈ પર ઉડી રહેલા જેટ વિમાનમાંથી જમીન પર રહેલી બે ટેન્કના અવસેધકોણના માપ ∝ અને β (∝ > β) માલુમ પડે છે. તો બે ટેન્ક વચ્ચેનું અંતર $\frac{h(\tan\propto - \tan\beta)}{\tan\propto . \tan\beta}$ છે. તેમ સાબિત કરો.

(14) ટાવરના તળીયામાંથી પસાર થતી રેખા પર તળીયાથી a અને b મીટર દૂર આવેલા બે બિંદુઓથી ટાવરની ટોચના ઉત્સેધકોણના માપ કોટિકોણના માપ છે. તો સાબિત કરો કે ટાવરની ઊંચાઈ $\sqrt{ab}$ છે.

❖ જવાબ ❖

(1) 30 મીટર (2) $8\sqrt{3}$ મીટર (3) $40\sqrt{3}$ મીટર
(4) 3 મીટર, $2\sqrt{3}$ મીટર (5) $20(\sqrt{3}-1)$ મીટર
(6) $0.8(\sqrt{3}+1)$ મીટર
(7) ટાવરની ઉંચાઈ નહેરની પહોળાઈ 10 મીટર $10\sqrt{3}$ મીટર
(8) 6 મીટર (9) $75(\sqrt{3}-1)$ મીટર (10) 3 સેકન્ડ
(11) સ્તંભની ઉંચાઈ $25(\sqrt{3}+1)$ મીટર નજીકના સ્તંભનું અંતર 25 મીટર (12) $7(\sqrt{3}+1)$ મીટર (13) $3(\sqrt{3}+1)$ મીટર (14) બહુમાળી ઈમારતની ઉંચાઈ $4(\sqrt{3}+3)$ મીટર, બે ઈમારતો વચ્ચેનું અંતર $4(\sqrt{3}+3)$ મીટર

---

(1) h cotθ (2) a=b (3) 60^0 (4) 60^0 (5) 30^0
(6) 12 મીટર (7) 30^0 (8) $25\sqrt{3}$ મીટર (9) $50\sqrt{3}$ મીટર
(10) 60^0 (11) 346 મીટર (12) 150 મીટર