अध्याय

8 रैखिक समीकरण

Linear Equation

रैखिक बहुपद वाली एक ऐसी समीकरण जिसमें चर की घात एक हो, वह समीकरण 'रैखिक समीकरण' कहलाती है। एक रैखिक समीकरण में तब कोई प्रभाव नहीं पड़ता है यदि समीकरण के दोनों पक्षों में समान संख्या जोड़ी अथवा घटाई जाए या दोनों पक्षों को समान शून्योत्तर संख्या से गुणा या भाग किया जाए।

रैखिक समीकरण प्रायः दो प्रकार की होती हैं

एक चर वाली रैखिक समीकरण
Linear Equation in One Variable

जिस रैखिक बहुपद समीकरण में चरों की संख्या एक होती है, उसे एक चर वाली रैखिक समीकरण कहते हैं।

जैसे $2x + 3 = 7,\ y + 7 = 10$

दो चर वाली रैखिक समीकरण
Linear Equation in Two Variables

जिस रैखिक बहुपद समीकरण में चरों की संख्या दो होती है, उसे दो चर वाली रैखिक समीकरण या द्विचर समीकरण कहते हैं।

जैसे $3x + 4y = 7,\ 4x + 3y = 9$

रैखिक समीकरण के चरों का मान ज्ञात करने की विधियाँ
Methods to Calculate the Value of Variables of Linear Equations

रैखिक समीकरण के चरों के मान ज्ञात करने की दो विधियाँ हैं, *जो निम्नवत् हैं*

1. **विलोपन विधि** Elimination Method

इस विधि के निम्न चरण हैं

***चरण* 1** दिए गए समीकरणों के गुणांकों से एक उचित संख्या की इस प्रकार गुणा करते हैं कि दोनों समीकरणों के किसी एक चर के गुणांक बराबर हो जाएँ।

***चरण* 2** चरण 1 से प्राप्त समीकरणों को घटाने या जोड़ने पर कोई एक चर नष्ट हो जाता है तथा दूसरे चर का मान प्राप्त हो जाता है।

***चरण* 3** प्राप्त चर के मान को किसी एक समीकरण में रखने पर दूसरे चर का मान प्राप्त हो जाता है।

2. **प्रतिस्थापन विधि** Substitution Method

माना दो समीकरण, $ax + by = n$

तथा $cx + dy = m$ है, तब $x = \dfrac{bm - dn}{cb - ad}$ तथा $y = \dfrac{am - cn}{ad - cb}$

साधित **उदाहरण**

1. जल से पूर्णतया भरे एक पात्र का भार 40 किग्रा है। यदि इसे आधा भरा जाए, तो इस पात्र का भार 30 किग्रा होगा। रिक्त पात्र का वजन बताएँ।

(1) 10 किग्रा (2) 15 किग्रा
(3) 20 किग्रा (4) 25 किग्रा
(5) 30 किग्रा

हल *(3)* माना पात्र में जल का भार x किग्रा तथा पात्र का भार y किग्रा है। तब

प्रश्नानुसार, $x + y = 40$ ...(i)

तथा $\frac{x}{2} + y = 30$ ...(ii)

समी (i) में से समी (ii) को घटाने पर, $x - \frac{x}{2} = 40 - 30$

$\Rightarrow \frac{x}{2} = 10 \Rightarrow x = 20$ किग्रा

समी (i) से, $20 + y = 40 \Rightarrow y = 40 - 20 = 20$ किग्रा

2. यदि दो संख्याओं का अन्तर 3 है एवं उनके वर्ग का अन्तर 39 है, तो बड़ी संख्या है

(1) 8 (2) 9 (3) 12 (4) 13
(5) 5

हल *(1)* माना वे दो संख्याएँ क्रमशः a (बड़ी संख्या) और b (छोटी संख्या) है।

तब प्रश्नानुसार, $a - b = 3$ ...(i)

तथा $a^2 - b^2 = 39 \Rightarrow (a + b)(a - b) = 39$

$\therefore a + b = 13$ ...(ii)

समी (i) और समी (ii) से, $a = 8$ तथा $b = 5$

www.classnotes.in

अभ्यास प्रश्न

1. यदि $(x - y), (w + z)$ से 6 अधिक तथा $(x + y), (w - z)$ से 3 कम हो, तो $(x - w)$ का मान होगा

(1) 0.5 (2) 1.0 (3) 1.5
(4) 2.0 (5) 2 : 5

2. तीन संख्याओं में पहली संख्या दूसरी की दोगुनी और दूसरी संख्या तीसरी संख्या की तीन गुनी है। यदि उनका औसत 100 हो, तो उनमें सबसे बड़ी संख्या होगी

(1) 120 (2) 150 (3) 180
(4) 300 (5) 200

3. यदि किसी संख्या के 60% में से 60 को घटाने पर शेषफल भी 60 आता हो, तो संख्या होगी

(1) 120 (2) 150 (3) 180
(4) 200 (5) 210

4. दो संख्याओं का योग और गुणनफल क्रमश: 12 और 35 है, तब उनके व्युत्क्रमों का योग क्या होगा?

(1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{1}{5}$ (3) $\frac{12}{35}$
(4) $\frac{35}{12}$ (5) $\frac{12}{5}$

5. तीन संख्याएँ जो परस्पर असहभाज्य हैं, इस प्रकार हैं कि प्रथम दो संख्याओं का गुणनफल 551 है तथा अन्तिम दो संख्याओं का गुणनफल 1073 है। तीनों संख्याओं का योग है

(1) 75 (2) 81 (3) 85
(4) 89 (5) 92

6. किसी प्राकृतिक संख्या के वर्ग के तीन गुने में से उस संख्या के चार गुने को घटाने पर प्राप्त संख्या उस संख्या से 50 अधिक है। वह संख्या है

(1) 4 (2) 5 (3) 10
(4) 6 (5) 8

7. दो धनात्मक संख्याओं का अन्तर 3 है। यदि उनके वर्गों का योग 369 हो, तो उन संख्याओं का योग है

(1) 81 (2) 33 (3) 27
(4) 25 (5) 45

8. दो अंकों वाली एक संख्या इस प्रकार है कि दहाई वाला अंक, इकाई वाले अंक से 2 कम है। इस संख्या के तीगुने में उस संख्या, जो अंकों के आपस में बदलने से प्राप्त होती है, के 6/7 को जोड़ने पर 108 प्राप्त होता है। संख्या के अंकों का योग है

(1) 8 (2) 9 (3) 6
(4) 7 (5) 10

9. तीन संख्याओं में से, दूसरी संख्या पहली की दोगुनी है तथा तीसरी संख्या की तीन गुनी है। यदि दोनों संख्याओं का औसत 44 है, तो पहली और तीसरी संख्याओं का अन्तर है

(1) 24 (2) 18 (3) 2
(4) 6 (5) 12

10. किसी कार्यशाला में कार्य करने वाले सभी श्रमिकों का औसत वेतन ₹ 8000 है। इनमें से 7 तकनीशियनों का औसत वेतन ₹ 12000 तथा शेष श्रमिकों का औसत वेतन ₹ 6000 है। इस कार्यशाला में कार्य करने वाले श्रमिकों की कुल संख्या है

(1) 20 (2) 21 (3) 23
(4) 22 (5) 24

11. दो संख्याओं का योग 42 है तथा उनका गुणनफल 437 है। तब उन संख्याओं में निरपेक्ष अन्तर है

(1) 3 (2) 5 (3) 13
(4) 7 (5) 4

12. किसी संख्या को जब क्रमिक रूप से 4 और 5 से भाग दिया जाता है, तो शेषफल क्रमश: 1 और 4 आते हैं। जब इसे क्रमिक रूप से 5 से, 4 से भाग दिया जाए तो शेषफल क्रमश: होंगे

(1) 4, 1 (2) 3, 2 (3) 2, 3
(4) 1, 2 (5) 4, 3

13. उन दो क्रमागत सम संख्याओं का योग क्या है, जिनके वर्गों का अन्तर 84 है?

(1) 38 (2) 34 (3) 40
(4) 46 (5) 42

14. विभाजन के किसी प्रश्न में भाजक, भागफल का चार गुना है तथा शेषफल का तीन गुना है। यदि शेषफल 4 है, तो भाज्य है

(1) 36 (2) 40 (3) 12
(4) 30 (5) 25

15. एक संख्या दो अंकों से बनी है। यदि अंकों के स्थान बदल दिए जाएँ और इस प्रकार प्राप्त नई संख्या को पहले वाली संख्या में जोड़ा जाए, तो परिणामी संख्या निम्न से भाज्य होगी

(1) 11 (2) 5 (3) 3
(4) 9 (5) 13

16. तीन संख्याएँ इस प्रकार हैं कि पहली संख्या दूसरी संख्या से दोगुनी है और तीसरी संख्या की आधी है। यदि तीनों संख्याओं का औसत 56 हो, तो पहली संख्या और तीसरी संख्या का अन्तर है

(1) 12 (2) 20 (3) 24
(4) 48 (5) 26

17. दो धनात्मक संख्याओं के वर्गों का योग 100 है तथा उनके वर्गों का अन्तर 28 है। इन संख्याओं का योग हैं

(1) 12 (2) 13 (3) 14
(4) 15 (5) 19

18. यदि किसी भिन्न के हर में 1 जोड़ दिया जाए, तो वह $\frac{1}{2}$ हो जाती है। यदि उसके अंश में 1 जोड़ दिया जाए, तो वह 1 हो जाती है। भिन्न के अंश व हर का गुणनफल है

(1) 6 (2) 10 (3) 12
(4) 14 (5) 2

19. एक व्यक्ति अपनी आय का $\frac{1}{4}$ भाग खाने पर, $\frac{2}{3}$ भाग मकान के किराए पर तथा शेष ₹ 630 अन्य वस्तुओं पर खर्च करता है। उसका मकान का किराया है

(1) ₹ 5040 (2) ₹ 3520 (3) ₹ 4890
(4) ₹ 4458 (5) ₹ 4228

20. 10 कुर्सियों का मूल्य 4 मेजों के मूल्य के बराबर है। 15 कुर्सियों और 2 मेजों का कुल मूल्य ₹ 4000 है। 12 कुर्सियों और 3 मेजों का कुल मूल्य होगा

(1) ₹ 3750 (2) ₹ 3840
(3) ₹ 3500 (4) ₹ 3900
(5) ₹ 3996

उत्तरमाला

1. (3)	**2.** (3)	**3.** (4)	**4.** (3)	**5.** (3)	**6.** (2)	**7.** (3)	**8.** (3)	**9.** (5)	**10.**
11. (5)	**12.** (3)	**13.** (5)	**14.** (2)	**15.** (1)	**16.** (4)	**17.** (3)	**18.** (1)	**19.** (1)	**20.**

संकेत एवं हल

1. प्रश्नानुसार,

$x - y - w - z = 6$ ...(i)

तथा $w - z - x - y = 3$ ...(ii)

समी (i) व (ii) को हल करने पर,

$$2(x - w) = 3 \Rightarrow x - w = \frac{3}{2} = 1.5$$

2. माना तीसरी संख्या $= x$

$\therefore$ दूसरी संख्या $= 3x$

तथा पहली संख्या $= 6x$

प्रश्नानुसार,

$$\frac{x + 3x + 6x}{3} = 100 \Rightarrow x = \frac{300}{10} = 30$$

$\therefore$ सबसे बड़ी संख्या $= 6 \times 30 = 180$

3. माना संख्या $= x$

$\therefore$ प्रश्नानुसार,

$$\frac{x \times 60}{100} - 60 = 60 \Rightarrow x = \frac{120 \times 100}{60} = 200$$

4. माना संख्याएँ x तथा y है।

$\therefore$ $x + y = 12$ ...(i)

तथा $xy = 35$ ...(ii)

अत: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x + y}{xy} = \frac{12}{35}$

5. 551 तथा 1073 का म. स. =29

$\therefore$ पहली संख्या तथा दूसरी संख्या = 29, 19

दूसरी तथा तीसरी संख्या = 29, 37

$\therefore$ तीनों संख्याओं का योग $= 19 + 29 + 37 = 85$

6. माना संख्या $= x$

प्रश्नानुसार,

$$3x^2 - 4x = x + 50$$

$\Rightarrow 3x^2 - 5x - 50 = 0$

$\Rightarrow 3x^2 - 15x + 10x - 50 = 0$

$\Rightarrow 3x(x - 5) + 10(x - 5) = 0$

$\Rightarrow (x - 5)(3x + 10) = 0$

$\Rightarrow x = 5 \quad (\because x \neq \frac{-10}{3})$

7. माना संख्याएँ x तथा y हैं।

$\therefore$ $x - y = 3$ ...(i)

तथा $x^2 + y^2 = 369$ ...(ii)

$\therefore$ $(x - y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy$

$9 = 369 - 2xy$

$2xy = 369 - 9 = 360$

$\Rightarrow 2xy = 360$

अत: $x + y = \sqrt{x^2 + y^2 + 2xy}$

$= \sqrt{369 + 360}$

$= \sqrt{729} = 27$

8. माना इकाई का अंक $= x$

तथा दहाई का अंक $= y$

$\therefore$ संख्या $= 10y + x$

प्रश्नानुसार, $x - y = 2$ ...(i)

तथा $3(10y + x) + \frac{6}{7}(10x + y) = 108$

$\Rightarrow 210y + 21x + 60x + 6y = 108 \times 7$

$\Rightarrow 216y + 81(y + 2) = 108 \times 7$ [समी (i) से]

$\Rightarrow 216y + 81y + 162 = 756$

$\Rightarrow 297y = 594 \Rightarrow y = 2$

$\therefore$ $x = 4$

अत: अभीष्ट योग $= x + y = 4 + 2 = 6$

9. माना पहली संख्या $= 3x$

तथा दूसरी संख्या $= 6x$

तथा तीसरी संख्या $= 2x$

प्रश्नानुसार,

$$44 = \frac{3x + 6x + 2x}{3}$$

$\Rightarrow x = \frac{44 \times 3}{11} = 12$

$\therefore$ अभीष्ट अन्तर $= 3x - 2x = x = 12$

10. माना श्रमिकों की कुल संख्या $= x$

$\therefore$ श्रमिकों के वेतनों का योग $= 6000x$

तथा तकनीशियनों के वेतनों का योग $= 12000 \times 7 =$ ₹84000

$\therefore$ $8000 \times (x + 7) = 6000x + 84000$

$\Rightarrow 8000x + 56000 = 6000x + 84000$

$\Rightarrow 2000x = 28000$

$\Rightarrow x = \frac{28000}{2000} = 14$

$\therefore$ सभी श्रमिकों की संख्या $= 14 + 7 = 21$

11. प्रश्नानुसार,

$x + y = 42$ ...(i)

$xy = 437$ ...(ii)

$\therefore (x - y) = \sqrt{(x + y)^2 - 4(xy)} = \sqrt{(42)^2 - (4 \times 437)}$

$\Rightarrow x - y = \sqrt{16} = 4$

13. $x - y = 2$ ...(i)

तथा $x^2 - y^2 = 84$ ...(ii)

$\Rightarrow (x - y)(x + y) = 84$

$\Rightarrow (x + y) = \frac{84}{2} = 42$

14. $\because$ शेषफल $= 4$

$\therefore$ भाजक $= 12$

तथा भागफल $= \frac{\text{भाजक}}{4} = 3$

$\therefore$ भाज्य $= (12 \times 3) + 4 = 40$

15. माना संख्या $= 10x + y$

तथा परिवर्तन के पश्चात् नई संख्या $= 10y + x$

$\therefore 10x + y + 10y + x = 11x + 11y = 11(x + y)$

उपरोक्त से स्पष्ट है कि योग 11 से विभाज्य होगा।

16. माना पहली संख्या $= 2x$

तब दूसरी संख्या $= x$

तथा तीसरी संख्या $= 4x$

प्रश्नानुसार,

$$56 = \frac{2x + x + 4x}{3}$$

$\Rightarrow \quad 168 = 7x$

$\Rightarrow \quad x = 24$

अभीष्ट अन्तर $= 4x - 2x = 2x = 2 \times 24 = 48$

17. प्रश्नानुसार,

$$x^2 + y^2 = 100 \quad \text{...(i)}$$

तथा $\quad x^2 - y^2 = 28 \quad$ ...(ii)

समी (i) व (ii) को हल करने पर,

$$x = 8, \ y = 6$$

$\therefore$ अभीष्ट योग $= x + y = 8 + 6 = 14$

18. माना भिन्न $= \frac{x}{y}$

प्रश्नानुसार,

$$\frac{x}{y+1} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow \quad 2x - y = 1 \quad$ ...(i)

तथा $\quad \frac{x+1}{y} = 1$

$\Rightarrow \quad x - y = -1 \quad$ ...(ii)

समी (i) व (ii) को हल करने पर,

$$x = 2, \ y = 3$$

$\therefore$ अभीष्ट गुणनफल $= 2 \times 3 = 6$

19. माना व्यक्ति की आय $=$ ₹x

प्रश्नानुसार, $\quad \frac{x}{4} + \frac{2x}{3} + 630 = x$

$\Rightarrow \quad x - \frac{x}{4} - \frac{2x}{3} = 630$

$\Rightarrow \quad \frac{12x - 3x - 8x}{12} = 630$

$\Rightarrow \quad x = 630 \times 12 = 7560$

$\therefore$ मकान का किराया $= \frac{2}{3} \times 7560$

$=$ ₹5040

20. माना 1 कुर्सी का मूल्य $=$ ₹x

तथा 1 मेज का मूल्य $=$ ₹ y

प्रश्नानुसार, $10x = 4y$

$\Rightarrow \quad 5x = 2y \quad$ ...(i)

तथा $\quad 15x + 2y = 4000$

$\Rightarrow \quad 15x + 5x = 4000 \quad$ [समी (i) से]

$\Rightarrow \quad x = \frac{4000}{20} = 200$

$\therefore$ 1 कुर्सी का मूल्य $=$ ₹200

तथा 1 मेज का मूल्य $= \frac{5 \times 200}{2} =$ ₹500

$\therefore$ 12 कुर्सियों व 3 मेजों का मूल्य $= 12x + 3y$

$= 12 \times 200 + 3 \times 500$

$= 2400 + 1500$

$=$ ₹3900

www.classroomnotes.in