मुद्रत पृष्ठों की संख्या : 16

अनुक्रमांक

नाम

131/1 **334(PY)**

2017

गणित

प्रथम प्रश्नपत्र

(आव्यूह, सारणिक, रैखिक असमिकाएँ, प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन तथा निर्देशांक ज्यामिति)

समय : तीन घण्टे 15 मिनट] [पूर्णांक : 50

निर्देश : प्रारम्भ के 15 मिनट परीक्षार्थियों को प्रश्नपत्र पढ़ने के लिए निर्धारित हैं ।

Instruction : First 15 minutes are allotted for the candidates to read the question paper.

नोट :
i) इस प्रश्नपत्र में कुल **आठ** प्रश्न हैं।
ii) **सभी** प्रश्न अनिवार्य हैं।
iii) प्रत्येक प्रश्न के प्रारम्भ में स्पष्टतः लिख दिया गया है कि उसके कितने खण्ड हल करने हैं।

iv) प्रश्नों के अंक उनके सम्मुख अंकित हैं।

v) प्रथम प्रश्न से आरम्भ कीजिए और अन्त तक करते जाइए।

vi) जो प्रश्न न आता हो, उस पर समय नष्ट मत कीजिए।

Note : i) There are in all *eight* questions in this question paper.

ii) *All* questions are compulsory.

iii) In the beginning of each question, the number of parts to be attempted has been clearly mentioned.

iv) Marks allotted to the questions are indicated against them.

v) Start from the first question and proceed to the last one.

vi) Do not waste your time over a question you cannot solve.

1. निम्नलिखित में से किन्हीं **चार** खण्डों को हल कीजिए :

क) यदि $\begin{bmatrix} -x & +y & +z \\ x & -y & +z \\ x & +y & -z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ तो,

x, y, z का मान ज्ञात कीजिए। 1

ख) $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ का मुख्य मान ज्ञात कीजिए। 1

ग) बिन्दुओं $P(2, 4, -6)$ तथा $Q(-5, 2, 7)$ के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए। 1

घ) हल कीजिए : $|3x-2| \le \frac{1}{2}$. 1

ङ) परवलय $y^2 = 12x$ पर वह बिन्दु ज्ञात कीजिए जिसकी कोटि, भुज की तिगुनी है। 1

1. Attempt any *four* parts of the following :

a) If $\begin{bmatrix} -x & +y & +z \\ x & -y & +z \\ x & +y & -z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ then find

the values of x, y, z. 1

b) Find the principal value of $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$. 1

c) Find the distance between the points $P(2, 4, -6)$ and $Q(-5, 2, 7)$. 1

d) Solve : $|3x - 2| \leq \frac{1}{2}$. 1

e) Find the point on the parabola $y^2 = 12x$ whose ordinate is thrice of abscissa. 1

2. निम्नलिखित में से किन्हीं **चार** खण्डों को हल कीजिए :

क) असमिका $\frac{x}{2} < \frac{5x-2}{3} - \frac{7x-3}{5}$ को हल कीजिए तथा उन्हें संख्या रेखा पर आलेखित कीजिए। 2

ख) हल कीजिए : $\sin^{-1}\frac{5}{x} + \sin^{-1}\frac{12}{x} = \frac{\pi}{2}$. 2

ग) सिद्ध कीजिए कि रेखा $x\cos\theta + y\sin\theta = a$ वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ को स्पर्श करती है। 2

घ) अतिपरवलय $x^2 + 2x - y^2 + 5 = 0$ की उत्केन्द्रता ज्ञात कीजिए। 2

ङ) सिद्ध कीजिए कि आव्यूह

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$ एक विषम

सममित आव्यूह है। 2

2. Attempt any *four* parts of the following :

a) Solve the inequality

$\frac{x}{2} < \frac{5x-2}{3} - \frac{7x-3}{5}$ and draw on the number line. 2

b) Evaluate : $\sin^{-1}\frac{5}{x} + \sin^{-1}\frac{12}{x} = \frac{\pi}{2}$. 2

c) Prove that the line $x\cos\theta + y\sin\theta = a$ be the tangent of circle $x^2 + y^2 = a^2$. 2

d) Find the eccentricity of the hyperbola $x^2 + 2x - y^2 + 5 = 0$. 2

e) Prove that the matrix

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$ is a skew-symmetric matrix. 2

3. निम्नलिखित में से किन्हीं **चार** खण्डों को हल कीजिए :

क) यदि $A=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ हो तो सिद्ध कीजिए कि $A^2-5A+7I=0$, जहाँ I इकाई आव्यूह है। 2

ख) यदि किसी दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ के लघु अक्ष के सिरों को नाभियों से मिलाने वाली सरल रेखाओं के मध्य कोण 90° हो, तो उत्केन्द्रता ज्ञात कीजिए। 2

ग) सिद्ध कीजिए कि

$2\tan^{-1}x=\cos^{-1}\left[\frac{1-x^2}{1+x^2}\right]$. 2

घ) सिद्ध कीजिए कि वृत्त

$x^2+y^2+2ax+c=0$ तथा

$x^2+y^2+2by+c=0$ एक दूसरे को

स्पर्श करेंगे, यदि $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{c}$. 2

ङ) सिद्ध कीजिए कि $\begin{vmatrix} 1 & x & y+z \\ 1 & y & z+x \\ 1 & z & x+y \end{vmatrix} = 0$. 2

3. Attempt any *four* parts of the following :

a) If $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, then prove that $A^2 - 5A + 7I = 0$, where I be the identity matrix. 2

b) If the angle between the straight lines joining foci and the ends of minor axis of the ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ is 90°, find eccentricity. 2

c) Prove that

$$2\tan^{-1} x = \cos^{-1}\left[\frac{1-x^2}{1+x^2}\right].$$ 2

d) Prove that the circles

$x^2 + y^2 + 2ax + c = 0$ and

$x^2 + y^2 + 2by + c = 0$ will touch

each other, if $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{c}$. 2

e) Prove that $\begin{vmatrix} 1 & x & y+z \\ 1 & y & z+x \\ 1 & z & x+y \end{vmatrix} = 0$. 2

4. निम्नलिखित में से किन्हीं **तीन** खण्डों को हल कीजिए :

क) निम्नलिखित असमिका निकाय को आलेखीय विधि से हल कीजिए :

$3x + 4y \le 60,\ x + 3y \le 30$

$x \ge 0,\ y \ge 0.$ 3

ख) सिद्ध कीजिए कि

$$\cos^{-1}\left[\frac{1-a^2}{1+a^2}\right] - \cos^{-1}\left[\frac{1-b^2}{1+b^2}\right] = 2\tan^{-1}\left[\frac{a-b}{1+ab}\right].$$ 3

ग) अतिपरवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी नाभियाँ (6, 4) एवं (– 4, 4) हैं तथा उत्केन्द्रता 2 है। 3

घ) सिद्ध कीजिए कि किसी वर्ग आव्यूह को एक सममित एवं एक विषम सममित आव्यूह के योगफल के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। 3

4. Attempt any *three* parts of the following :

a) Solve the following system of linear inequalities graphically :

$3x + 4y \le 60,\ x + 3y \le 30$

$x \ge 0,\ y \ge 0.$ 3

b) Prove that

$$\cos^{-1}\left[\frac{1-a^2}{1+a^2}\right] - \cos^{-1}\left[\frac{1-b^2}{1+b^2}\right] = 2\tan^{-1}\left[\frac{a-b}{1+ab}\right].$$ 3

c) Find the equation of hyperbola, whose foci are (6, 4) and (– 4, 4) and eccentricity is 2. 3

d) Prove that any square matrix can be expressed as the sum of a symmetric and a skew-symmetric matrix. 3

5. निम्नलिखित में से किन्हीं **तीन** खण्डों को हल कीजिए :

क) सिद्ध कीजिए कि

$$\begin{vmatrix} a^2 & a^2-(b-c)^2 & bc \\ b^2 & b^2-(c-a)^2 & ca \\ c^2 & c^2-(a-b)^2 & ab \end{vmatrix} =$$

$$(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)(a^2+b^2+c^2).$$

3

ख) बिन्दुओं $(4, 8, 10)$ और $(6, 10, -8)$ को मिलाने वाली रेखा खण्ड को yz-तल जिस अनुपात में विभक्त करता है, उसे ज्ञात कीजिए।

3

ग) यदि रेखा $lx + my + n = 0$ अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ का स्पर्शी है तो सिद्ध कीजिए कि $a^2l^2 - b^2m^2 = n^2$. 3

घ) सिद्ध कीजिए कि परवलय $y^2 = 4ax$ का अर्द्ध नाभिलम्ब किसी नाभीय जीवा के खण्डों का हरात्मक माध्य होता है। 3

5. Attempt any *three* parts of the following :

a) Prove that

$$\begin{vmatrix} a^2 & a^2 - (b-c)^2 & bc \\ b^2 & b^2 - (c-a)^2 & ca \\ c^2 & c^2 - (a-b)^2 & ab \end{vmatrix} =$$

$$(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)(a^2+b^2+c^2).$$

3

b) Find the ratio in which the line joining the points $(4, 8, 10)$ and $(6, 10, -8)$ is divided by yz-plane.

3

c) If line $lx+my+n=0$, be tangent of hyperbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ then prove that $a^2l^2-b^2m^2=n^2$. 3

d) Prove that the semi-latus rectum of the parabola $y^2=4ax$ is the harmonic mean between the segments of any focal chord of the parabola. 3

6. निम्नलिखित में से किसी **एक** खण्ड को हल कीजिए :

क) यदि $\cos^{-1}x+\cos^{-1}y+\cos^{-1}z=\pi$ तो सिद्ध कीजिए कि

$x^2+y^2+z^2+2xyz=1$. 4

ख) क्रेमर नियम की सहायता से निम्नलिखित समीकरण निकाय को हल कीजिए :

$3x+y+z=2$

$2x-4y+3z=-1$

$4x+y-3z=-11$. 4

6. Solve any *one* part of the following :

a) If $\cos^{-1} x + \cos^{-1} y + \cos^{-1} z = \pi$

then prove that

$x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$. 4

b) Solve the following equations by Cramer's rule :

$3x + y + z = 2$

$2x - 4y + 3z = -1$

$4x + y - 3z = -11$. 4

7. निम्नलिखित में से किसी **एक** खण्ड को हल कीजिए :

क) प्रारम्भिक संक्रिया का उपयोग करके व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$ 4

ख) सिद्ध कीजिए कि

$$\begin{vmatrix} x & x^2 & 1+x^3 \\ y & y^2 & 1+y^3 \\ z & z^2 & 1+z^3 \end{vmatrix}$$

$$= (1+xyz)(x-y)(y-z)(z-x)$$

4

7. Solve any *one* part of the following :

a) Find the inverse of the following matrix using elementary operations :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$ 4

b) Prove that

$$\begin{vmatrix} x & x^2 & 1+x^3 \\ y & y^2 & 1+y^3 \\ z & z^2 & 1+z^3 \end{vmatrix}$$

$$= (1+xyz)(x-y)(y-z)(z-x)$$

4

8. निम्नलिखित में से किसी **एक** खण्ड को हल कीजिए :

क) सिद्ध कीजिए की रेखा $y = mx$ द्वारा दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ पर अन्तःखण्डित जीवा की लम्बाई $2ab\sqrt{\frac{1+m^2}{a^2m^2+b^2}}$ है। 4

ख) सिद्ध कीजिए कि दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ की स्पर्शियों से अक्षों के बीच कटे हुए भागों के मध्य बिन्दुओं का बिन्दुपथ $\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} = 4$ है। 4

8. Attempt any *one* part of the following :

a) Prove that the length of intercept chord by line $y = mx$ on ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ is $2ab\sqrt{\frac{1+m^2}{a^2m^2+b^2}}$. 4

b) Prove that the locus of the mid-points of the portion of the tangents to the ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ intercepted between the axes is

$$\frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{y^2}=4.$$ 4

334(PY)-1,35,000