9

लघुगणक
(Logarithm)

9.01 प्रस्तावना (Introduction)

गणित के माध्यम से समस्याओं को हल करते समय कई बार हमें ऐसे व्यंजकों को काम में लेना होता है जिसमें बड़ी संख्याओं का गुणा, भाग या परिमेय घातों का प्रयोग होता है। सामान्य प्रचलित विधि से इनको हल करने में समय अधिक लगता है तथा अशुद्धियाँ रहने की आशंका रहती है। गणित के विद्वानों ने इस ओर ध्यान दिया तथा जॉन नैपियर (John Napier) ने 1614 ई. में लघुगणक की संकल्पना दी। लघुगणक का प्रयोग कर गुणा, भाग अथवा घातांकों से युक्त समस्याओं को क्रमशः योग, व्यवकलन व गुणन में परिवर्तित कर लिया जाता है। परिणामतः जटिल समस्याओं का सरलता से तथा अपेक्षाकृत कम समय में ही हल करना सम्भव हो जाता है। इस अध्याय में हम लघुगणक के विभिन्न नियमों का अध्ययन करेंगे तथा कई व्यवहारिक समस्याओं में इनका प्रयोग कर लघुगणक तकनीक के महत्व को जानेंगे।

9.02 लघुगणक (Logarithm)

हम जानते हैं कि समान संख्याओं के सतत गुणन जैसे $2 \times 2 \times 2 = 8$ को संक्षेप में 2^3 भी लिखते हैं।

संख्या 2^3 में 2 को आधार (base) तथा 3 को घातांक (Index) कहते हैं।

व्यापक रूप में यदि तीन संख्याओं a, x तथा n के मध्य संबंध $a^x = n$ हो तो a आधार तथा x घातॉंक कहलाता है।

परिभाषा : यदि a और n वास्तविक धन संख्याएँ हों (जबकि $a \neq 1$) तथा $a^x = n$ (घातॉंक रूप), तब घातॉंक x को आधार a पर n का लघुगणक कहते हैं। इसे $\log_a n = x$ (लघुगणकीय रूप) लिख कर व्यक्त करते हैं।

अतः $a^x = n \iff \log_a n = x, \quad [a > 0,\ a \neq 1,\ n > 0]$

टिप्पणी: (i) यहाँ log को logarithm के 'संक्षिप्त रूप' से व्यक्त किया है।

(ii) 0 तथा ऋणात्मक संख्याओं के लघुगणक के मान वास्तविक (Real) नहीं होते। यदि $k < 0$ तो $\log_a k$ काल्पनिक होगा।

(iii) $\log_a 1 = 0$, जहाँ $0 < a < 1$ या $a > 1$

(iv) $\log_a a = 1$, जहाँ $0 < a < 1$ या $a > 1$

(v) आगे के अध्ययन में लघुगणक का आधार सदैव $a > 0$ तथा $a \neq 1$ देखेंगे।

घातॉंकीय रूप को लघुगणकीय रूप तथा लघुगणकीय रूप को घातॉंकीय रूप में लिखने के उदाहरण नीचे दिए गए हैं :

उदाहरण 1: निम्नलिखित संख्याओं के घातांकीय रूप को लघुगणकीय रूप में लिखिए।

(i) $3^4 = 81$ (ii) $2^{-5} = 1/32$ (iii) $(81)^{\frac{1}{4}} = 3$

हलः (i) $3^4 = 81$ का लघुगणकीय रूप है $\log_3 81 = 4$.

(ii) $2^{-5} = \frac{1}{32}$ का लघुगणकीय रूप है $\log_2\left(\frac{1}{32}\right) = -5$.

(iii) $(81)^{\frac{1}{4}} = 3$ का लघुगणकीय रूप है $\log_{81} 3 = \frac{1}{4}$.

उदाहरण 2: निम्नलिखित संख्याओं के लघुगणकीय रूप को घातांकीय रूप में परिवर्तित कीजिए।

(i) $\log_7 1 = 0$ (ii) $\log_{128} 2 = \frac{1}{7}$ (iii) $\log_{10} 1000 = 3$

हलः (i) $\log_7 1 = 0$ का घाताँकीय रूप है $7^0 = 1$.

(ii) $\log_{128} 2 = \frac{1}{7}$ का घाताँकीय रूप है $128^{1/7} = 2$.

(iii) $\log_{10} 1000 = 3$ का घाताँकीय रूप है $10^3 = 1000$.

टिप्पणीः $\log_m 1 = \log_n 1 = 0 \left(m \neq n\right)$

प्रश्नमाला 9.1

निम्नलिखित को लघुगणकीय रूप में लिखिए [प्रश्न संख्या 1 से 6]

1. $2^6 = 64$
2. $10^4 = 10000$
3. $2^{10} = 1024$
4. $5^{-2} = \frac{1}{25}$
5. $10^{-3} = 0 \cdot 001$
6. $4^{3/2} = 8$

निम्नलिखित को घाताँकीय रूप में लिखिए [प्रश्न संख्या 7 से 12]

7. $\log_5 25 = 2$
8. $\log_3 729 = 6$
9. $\log_{10} 0 \cdot 001 = -3$
10. $\log_{10} 0 \cdot 1 = -1$
11. $\log_3 \left(\frac{1}{27}\right) = -3$
12. $\log_{\sqrt{2}} 4 = 4$
13. यदि $\log_{81} x = \frac{3}{2}$ हो तो x का मान ज्ञात कीजिए।
14. यदि $\log_{125} p = 1/6$ हो तो p का मान ज्ञात कीजिए।
15. यदि $\log_4 m = 1 \cdot 5$ हो तो m का मान ज्ञात कीजिए।
16. सिद्ध कीजिए $\log_4 \left[\log_2 \left\{\log_2 \left(\log_3 81\right)\right\}\right] = 0$

9.03 लघुगणक के मूल नियम (Fundamental laws of logarithms):

नियम 1. दो संख्याओं के गुणनफल का लघुगणक, उनके अलग–अलग लघुगणक के योगफल के बराबर होता है, अर्थात्

$$\log_a MN = \log_a M + \log_a N.$$

उपपत्ति : मान लीजिए

$$M = a^x$$

$\therefore$ $\log_a M = x$ (i)

तथा $N = a^y$

$\therefore$ $\log_a N = y$ (ii)

अब $MN = a^x \times a^y$

या $MN = a^{(x+y)}$ (iii)

(iii) में लघुगणक की परिभाषा का उपयोग करने पर

$$\log_a MN = x + y$$

या $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$ [(i) और (ii) से]

नियम 1 को व्यापक रूप में निम्न प्रकार लिखा जा सकता है :

$$\log_a \left(A \times B \times C \times D \times \cdots \times Z\right) = \log_a A + \log_a B + \log_a C + \cdots + \log_a Z.$$

टिप्पणी : व्यापक रूप में $\log_a \left(M + N + P\right) \neq \log_a M + \log_a N + \log_a P$

परन्तु यदि $M + N + P = MNP$ हो, तो

$$\log_a \left(M + N + P\right) = \log_a M + \log_a N + \log_a P$$

नियम 2. किसी भिन्न का लघुगणक उस भिन्न के अंश के लघुगणक में से हर का लघुगणक घटाने पर प्राप्त होता है, अर्थात्

$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$$

उपपत्ति : मान लीजिए

$M = a^x$ $\quad \therefore \quad$ $\log_a M = x$ (i)

तथा $N = a^y$ $\quad \therefore \quad$ $\log_a N = y$ (ii)

अब $\dfrac{M}{N} = \dfrac{a^x}{a^y} = a^{(x-y)}$ (iii)

(iii) में लघुगणक की परिभाषा का उपयोग करने पर

$$\log_a (M/N) = (x-y)$$

या $\log_a (M/N) = \log_a M - \log_a N,$ [(i) और (ii) से]

टिप्पणी : $\log_a (M-N) \neq \log_a M - \log_a N$

नियम 3. किसी भी घातांक (पूर्णांक अथवा भिन्नात्मक) वाली संख्या का लघुगणक, घातांक और उस संख्या के लघुगणक के गुणनफल के बराबर होता है,

अर्थात् $\log_a M^N = N \log_a M$

उपपत्ति : मान लीजिए

$M = a^x$ $\quad \therefore \quad$ $\log_a M = x$ (i)

अब $M^N = \left(a^x\right)^N$

या $M^N = a^{Nx}$ (ii)

(ii) में लघुगणक की परिभाषा का उपयोग करने पर

$\log_a M^N = Nx$

या $\log_a M^N = N \log_a M,$ [(i) से]

N के भिन्न होने पर, माना $M = \dfrac{p}{q}$

तब $\log_a M^{(p/q)} = \dfrac{p}{q} \log_a M$

नियम 4. आधार $a > 1$ पर, शून्य का लघुगणक $-\infty$ और आधार $0 < a < 1$ पर यह $+\infty$ होता है, अर्थात्

$\log_a 0 = -\infty,$ यदि $a > 1$ **तथा** $\log_a 0 = +\infty,$ यदि $0 < a < 1$

उपपत्ति : हम जानते हैं कि $3^{-\infty} = \dfrac{1}{3^{\infty}} = \dfrac{1}{\infty} = 0$

अतः यदि $a^x = 0$ और $a > 1$, तो $x = -\infty$

अर्थात् $a > 1$ हो तो $a^{-\infty} = 0$

अतः लघुगणक की परिभाषा से

$\log_a 0 = -\infty$ (जहाँ $a > 1$)

इसी प्रकार हम जानते हैं कि

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\infty} = \frac{1}{3^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

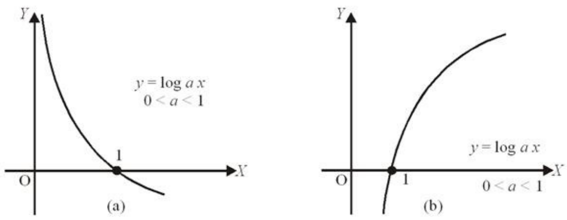
अतः यदि $a^x = 0$ और $a < 1$, तो $x = +\infty$

अर्थात् $a < 1$ हो, तो $a^{+\infty} = 0$

अतः लघुगणक की परिभाषा से

$$\log_a 0 = +\infty \quad (\text{जहाँ } a < 1)$$

टिप्पणीः इसे ग्राफ के माध्यम से निम्न प्रकार व्यक्त कर समझा जा सकता हैः



चित्र 9.01

नियम 5. सिद्ध करना $M = a^{\log_a M}$

उपपत्ति : मान लीजिए आधार a पर M का लघुगणक x है तब लघुगणक की परिभाषा से

$$\log_a M = x \qquad \text{या} \qquad a^x = M$$

अब $M = a^x$ में x का मान रखने पर

$$M = a^{\log_a M}$$

विशेष स्थिति में a के स्थान पर e लेने पर

$$M = e^{\log_e M}$$

9.04 आधार परिवर्तन सूत्र (Base changing formula)

सिद्ध करना : $\log_b M = \dfrac{\log_a M}{\log_a b}$

उपपत्ति : मान लीजिए $\log_b M = x \quad \therefore \quad M = b^x$ (i)

तथा $\log_a b = y \quad \therefore \quad b = a^y$ (ii)

अब (i) से $M = b^x = \left(a^y\right)^x$ [(ii) से]

या $M = \left(a^y\right)^x$ या $M = a^{xy}$

या $\log_a M = xy$ (परिभाषा से)

या $\log_a M = \log_b M \times \log_a b$ [(i) व (ii) से]

अतः $\log_b M = \dfrac{\log_a M}{\log_a b}$

सिद्ध करना : $\log_b a \times \log_a b = 1$

उपपत्ति : मान लीजिए $\log_b a = x$ (i)

$\therefore$ $b^x = a$

या $b = a^{1/x}$

या $\log_a b = 1/x$ (परिभाषा से) (ii)

अब (i) एवं (ii) से $\log_b a \times \log_a b = x \times 1/x = 1$

टिप्पणी : जिनमें आधार नहीं दर्शाया जाता है वहाँ लघुगणक का आधार 10 मान कर हल किया जाता है।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 3: सिद्ध कीजिए : $\log 540 = 2\log 2 + 3\log 3 + \log 5.$

हल : वाम पक्ष $= \log 540$

$= \log\left(2^2 \times 3^3 \times 5\right)$

$= \log 2^2 + \log 3^3 + \log 5$

$= 2\log 2 + 3\log 3 + \log 5 =$ दक्षिण पक्ष

उदाहरण 4: सिद्ध कीजिए : $\log(1+2+3) = \log 1 + \log 2 + \log 3$

हल : वाम पक्ष $= \log(1+2+3)$

$= \log 6$

$= \log(1 \times 2 \times 3)$

$= \log 1 + \log 2 + \log 3 =$ दक्षिण पक्ष

उदाहरण 5: यदि $\log_{10} 2 = 0\cdot3010$ और $\log_{10} 3 = 0\cdot4771$ हो तो निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए।

(i) $\log_{10} 5$ (ii) $\log_{10} 24$ (iii) $\log_{10} 8/9$

हल : (i) $\log_{10} 5 = \log_{10}\dfrac{5\times 2}{2} = \log_{10}\dfrac{10}{2} = \log_{10} 10 - \log_{10} 2 = 1 - 0\cdot3010 = \cdot6990$

(ii) $\log_{10} 24 = \log_{10}\left(2^3 \times 3\right) = 3\log_{10} 2 + \log_{10} 3$

$= 3(0\cdot3010) + 0\cdot4771 = 0\cdot9030 + 0\cdot4771 = 1\cdot3801$

(iii) $\log_{10} 8/9 = \log_{10} 8 - \log_{10} 9 = \log_{10} 2^3 - \log_{10} 3^2 = 3\log_{10} 2 - 2\log_{10} 3$

$= 3(0\cdot3010) - 2(0\cdot4771) = \cdot9030 - 0\cdot9542 = -0\cdot0512$

उदाहरण 6. सिद्ध कीजिए : $4\log\dfrac{24}{25} - 16\log\dfrac{9}{10} + 7\log\dfrac{81}{80} = \log 5.$

हल : वाम पक्ष $= 4\log\dfrac{24}{25} - 16\log\dfrac{9}{10} + 7\log\dfrac{81}{80}$

$= 4(\log 24 - \log 25) - 16(\log 9 - \log 10) + 7(\log 81 - \log 80)$

$= 4\log 24 - 4\log 25 - 16\log 9 + 16\log 10 + 7\log 81 - 7\log 80$

$= 4\log\left(2^3 \times 3\right) - 4\log 5^2 - 16\log 3^2 + 16\log(2\times 5) + 7\log 3^4 - 7\log\left(2^4 \times 5\right)$

$= 4\left\{\log 2^3 + \log 3\right\} - 8\log 5 - 32\log 3 + 16(\log 2 + \log 5) + 28\log 3 - 7\left(\log 2^4 + \log 5\right)$

$= 12\log 2 + 4\log 3 - 8\log 5 - 32\log 3 + 16\log 2 + 16\log 5 + 28\log 3 - 28\log 2 - 7\log 5$

$= 28\log 2 - 28\log 2 + 32\log 3 - 32\log 3 + 16\log 5 - 15\log 5$

$= \log 5 =$ दक्षिण पक्ष

उदाहरण 7. निम्नलिखित समीकरण का हल ज्ञात कीजिए :

$$\log(x+1)+\log(x-1)=\log 11+2\log 3.$$

हल : $\log(x+1)+\log(x-1)=\log 11+2\log 3$

या $\log\{(x+1)(x-1)\}=\log 11+\log 3^2$

या $\log\left(x^2-1\right)=\log 11+\log 9$

या $\log\left(x^2-1\right)=\log(11\times 9)$

या $\log\left(x^2-1\right)=\log 99$

या $x^2-1=99$

या $x^2=100$

$\therefore$ $x=10$ $\qquad (\because x>0)$

उदाहरण 8: सिद्ध कीजिए :

$$\log_b a\times\log_c b\times\log_a c=1.$$

हल : सभी लघुगणकों को समान आधार e में बदलने पर

$$\log_b a=\frac{\log_e a}{\log_e b};\ \log_c b=\frac{\log_e b}{\log_e c};\ \log_a c=\frac{\log_e c}{\log_e a}$$ $[\because\ 6=1\times 2\times 3]$

अतः वाम पक्ष $=\dfrac{\log_e a}{\log_e b}\times\dfrac{\log_e b}{\log_e c}\times\dfrac{\log_e c}{\log_e a}$

$=1=$ दक्षिण पक्ष

प्रश्नमाला 9.2

(इस प्रश्नमाला के उन प्रश्नों में जिनमें आधार नहीं दर्शाया गया है उनमें लघुगणक का आधार 10 मान कर हल करना है।)

1. सिद्ध कीजिए : $\log 630=\log 2+2\log 3+\log 5+\log 7$.

2. सिद्ध कीजिए : $\log\dfrac{9}{14}+\log\dfrac{35}{24}-\log\dfrac{15}{16}=0$

3. सिद्ध कीजिए : $\log 10+\log 100+\log 1000+\log 10000=10$.

4. यदि $\log 2=0\cdot 3010,\ \log 3=0\cdot 4771,\ \log 7=0\cdot 8451$ तथा $\log 11=1\cdot 0414$ तो निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए:

   (i) $\log 36$ (ii) $\log\dfrac{42}{11}$ (iii) $\log\left(\dfrac{11}{7}\right)^5$

   (iv) $\log 70$ (v) $\log\dfrac{121}{120}$ (vi) $\log 5^{1/3}$

5. निम्नलिखित समीकरण से x का मान ज्ञात कीजिए :

   $\log_x 4+\log_x 16+\log_x 64=12.$

6. समीकरण $\log(x+1)-\log(x-1)=1$ का हल ज्ञात कीजिए।

7. मान ज्ञात कीजिए : $3^{2-\log_3 4}$.

8. निम्नलिखित प्रश्नों का हल एक पद के रूप में लिखिए :

   (i) $\log 2+1$ (ii) $\log 2x+2\log x$

9. सिद्ध कीजिए :

   (i) $\log_5 3\cdot\log_3 4\cdot\log_2 5=2.$ (ii) $\log_a x\times\log_b y=\log_b x\times\log_a y.$

9.05 लघुगणक की पद्धतियाँ (System of logarithms):

लघुगणक का आधार कोई भी राशि हो सकती है, परन्तु e तथा 10 आधार वाली दो पद्धतियाँ सर्वाधिक उपयोग में लायी जाती है।

(i) स्वाभाविक या नैपियर की लघुगणक पद्धति
(Natural or Napierian system of logarithm) :

इस पद्धति का नाम गणितज्ञ नैपियर के नाम पर रखा गया है। इसमें आधार 'e' लिया जाता है, जहाँ e निम्न अनन्त श्रेणी का योग है

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{1\times 2\times 3} + \cdots = 2\cdot 71828183 \text{ (लगभग)}$$

इसका प्रयोग उच्च गणितीय गणनाओं तथा सैद्धान्तिक खोजों के समय किया जाता है परन्तु प्रायोगिक तथा व्यवहारिक संख्यात्मक गणनाओं में यह अनुपयोगी है क्योंकि e असम्मेय राशि है।

(ii) साधारण या ब्रिग की लघुगणक पद्धति
(Common or Brigg's system of logarithm) :

इस पद्धति में लघुगणक का आधार 10 लिया जाता है। जब आधार दिया हुआ नहीं होता तब हम 10 को ही आधार मान कर लघुगणक का प्रयोग करते हैं। साधारण लघुगणक का उपयोग समस्त व्यवहारिक संख्यात्मक गणनाओं में अधिक किया जाता है। ब्रिग ने सर्व प्रथम 10 के आधार पर लघुगणक सारणी (Logarithmic Table) तैयार की। इसलिए इसको ब्रिग पद्धति भी कहते है।

टिप्पणी : सभी प्रायोगिक गणनाओं में जहाँ आधार नहीं दिया गया हो वहाँ इसे 10 माना जाता है।

9.06 नैपियर लघुगणक तथा साधारण लघुगणक में संबंध
(Relation between Napierian logarithm and common logarithm) :

$$\log_{10} n = \log_e n \times \frac{1}{\log_e 10}, \text{ [आधार परिवर्तन नियम से]}$$

परन्तु $\log_e 10 = 2\cdot 30258509$

$\therefore$ $$\frac{1}{\log_e 10} = \frac{1}{2\cdot 30258509} = 0\cdot 43429448$$

अतः $\log_{10} n = 0\cdot 43429448 \times \log_e n$

9.07 लघुगणकों का पूर्णांश एवं भिन्नांश
(Characteristic and mantissa of the logarithms):

प्रत्येक संख्या का लघुगणक दो संख्याओं का योगफल होता है जिनमें एक संख्या पूर्णांक तथा दूसरी भिन्नात्मक या दशमलव में होती है, जैसे

$$\log 532 = 2 + \cdot 7259 = 2\cdot 7259$$

दशमलव से पूर्व पूर्ण संख्या को पूर्णांश (Characteristic) तथा दशमलव के पश्चात् की संख्या को अपूर्णांश या भिन्नांश (Mantissa) कहते हैं। अतः यहाँ पूर्णांश 2 तथा भिन्नांश 7259 है।

टिप्पणी :

(i) पूर्णांश धनात्मक या ऋणात्मक संख्या हो सकती है जबकि भिन्नांश को सदैव धनात्मक रखा जाना चाहिए। भिन्नांश यदि ऋणात्मक है तो इसको धनात्मक बनाने के लिए पूर्णांश में से एक कम करके इसे भिन्नांश में जोड़ा जाता है।

(ii) यदि पूर्णांश ऋणात्मक है तो इसके ऊपर बार चिह्न लगाकर दर्शाया जाता है।

उदाहरण 9: यदि $\log 142 = 2\cdot 1523$ तो पूर्णांक भाग 2 को पूर्णांश तथा दशमलव भाग $\cdot 1523$ को भिन्नांश कहेंगे।

उदाहरण 10: यदि $\log M = -2\cdot 1423$ है तो इसका पूर्णांश ज्ञात करने के लिए पहले भिन्नांश को धनात्मक बनाया जाना चाहिए। यह निम्न प्रकार से किया जाना चाहिए :

$$-2\cdot 1423 = -2 - \cdot 1423 = (-2-1) + (1 - \cdot 1423) = -3 + \cdot 8577$$

अतः यहाँ पूर्णांश -3 तथा भिन्नांश $\cdot 8577$ है।

टिप्पणीः रेखिका चिह्न (ऋणात्मक पूर्णांश के लिए) : उपर्युक्त उदाहरण 10 में पूर्णांश ऋणात्मक है अतः इसे $\overline{3}\cdot 8577$ के रूप में लिखा जाना चाहिए एवं इसे रेखिका (Bar) 3 दशमलव 8577 पढ़ा जाना चाहिए। अतः $\log M = -2\cdot 1423$ के स्थान पर $\log M = \overline{3}\cdot 8577$ लिखा जाना चाहिए।

9.08 किसी संख्या के लघुगणक का पूर्णांश ज्ञात करने की विधि
(Method of find the of logarithm of a number)

(i) **1 या इससे बड़ी संख्या के लघुगणक का पूर्णांश :** घातांक के नियम से हम जानते हैं कि

$$10^0 = 1 \quad \therefore \quad \log_{10} 1 = 0$$
$$10^1 = 10 \quad \therefore \quad \log_{10} 10 = 1$$
$$10^2 = 100 \quad \therefore \quad \log_{10} 100 = 2$$
$$10^3 = 1000 \quad \therefore \quad \log_{10} 1000 = 3$$

उपर्युक्त परिणामों से स्पष्ट है कि 1 और 10 के मध्य की संख्याओं के लघुगणक 0 और 1 के मध्य होंगे, अर्थात् पूर्णांक में एक अंक रखने वाली संख्या के लघुगणक $0+$ एक धनात्मक भिन्न होगी जिसमें पूर्णांश 0 है। 10 और 100 के मध्य की संख्याओं के लघुगणक 1 और 2 के मध्य होंगे, अर्थात् पूर्णांश 1 होगा। इसी प्रकार 100 और 1000 के मध्य की संख्याओं के लघुगणक 2 और 3 के मध्य होंगे, अर्थात् पूर्णांश 2 होगा।

इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि 1 या इससे बड़ी किसी संख्या के लघुगणक का पूर्णांश सदैव धनात्मक होता है एवं संख्या के लघुगणक का पूर्णांक भाग के अंको की संख्या से एक कम होता है। जैसे लघुगणक के पूर्णांक भाग में n अंक हैं तो इसका पूर्णांश $(n-1)$ होगा।

उदाहरणार्थ : संख्या $42\cdot 5$ के पूर्णांक भाग (42) में दो अंक हैं अतः इसके लघुगणक अर्थात् $\log 42\cdot 5$ पूर्णांश $2-1=1$ होगा। इसी प्रकार $\log 425\cdot 23$ का पूर्णांश $3-1=2$ होगा।

(ii) **0 से बड़ी और 1 से छोटी संख्याओं के लघुगणक का पूर्णांश :**

हम जानते हैं कि

$$10^0 = 1 \quad \therefore \quad \log_{10} 1 = 0$$
$$10^{-1} = \frac{1}{10} = \cdot 1 \quad \therefore \quad \log_{10} \cdot 1 = -1$$
$$10^{-2} = \frac{1}{100} = \cdot 01 \quad \therefore \quad \log_{10} \cdot 01 = -2$$
$$10^{-3} = \frac{1}{1000} = \cdot 001 \quad \therefore \quad \log_{10} \cdot 001 = -3$$

इस प्रकार 1 से कम किसी धनात्मक संख्या के लघुगणक का पूर्णांश सदैव ऋणात्मक एवं दशमलव बिन्दु और प्रथम सार्थक अंक के मध्य आए हुए शून्य की संख्याओं से एक अधिक होता है, जैसे दशमलव व प्रथम सार्थक अंक के मध्य n शून्य आयें तो इसके लघुगणक का पूर्णांश $-(n+1)$ या $(\overline{n+1})$ होगा।

उदाहरणार्थ : $\log 0\cdot 035$ का पूर्णांश -2 तथा $\log 0\cdot 00035$ का पूर्णांश -4 होगा।

टिप्पणीः सार्थक अंक (Significant digit): दशमलव बिन्दु के पश्चात् शून्येतर संख्या से पहले के अथवा अंत के सभी शून्यों को हटा देने पर जो अंक बचते है वे सार्थक अंक कहलाते है, जैसे $\cdot 000123$ अथवा $\cdot 123000$ में सार्थक अंक 123 हैं। तथा 1 प्रथम सार्थक अंक है।

अब यदि 1 से छोटी धन संख्याओं जैसे $0\cdot 0003$ अथवा $0\cdot 007294$ का लघुगणक ज्ञात करना हो तो हम देखते हैं कि

$$\log 0\cdot 0003 = \log\frac{3}{10000} = \log\left(3\times 10^{-4}\right)$$

$$= \log 10^{-4} + \log 3$$

$$= -4 + 0\cdot 4771 = \bar{4}\cdot 4771 \qquad [\log 3 = 0.4771 \text{ सारणी * से}]$$

और $$\log 0\cdot 007294 = \log\frac{7\cdot 294}{1000} = \log\left(7\cdot 294\times 10^{-3}\right)$$

$$= \log 10^{-3} + \log 7\cdot 294 = -3 + 0\cdot 8629$$

$$= \bar{3}\cdot 8629 \qquad [\log 7.294 = 0.86291 \text{ सारणी * से}]$$

पूर्णांश ज्ञात करने की क्रिया विधिः

(i) यदि दी गई संख्या दशमलव भिन्न में न हो तो इसमें परिवर्तित करें।

(ii) यदि (i) में प्राप्त संख्या 1 से बड़ी या बराबर हो तो पूर्णांश को लिए सूत्र होगा :
पूर्णांश = (दशमलव बिन्दु के बाईं ओर अंको की संख्या) -1

(iii) यदि (i) में प्राप्त संख्या 1 से छोटी एवं धनात्मक हो तो पूर्णांश के लिए सूत्र होगा :
पूर्णांश = $-$ [(दशमलव बिन्दु और प्रथम सार्थक अंक के मध्य शून्यों की संख्या) + 1]

9.09 किसी संख्या के लघुगणक का भिन्नांश ज्ञात करने की विधि

(Method to find the maintissa of logarithm of a number)

किसी संख्या के लघुगणक का भिन्नांश ज्ञात करने के लिए हम लघुगणक सारणी (Logarithm table) को प्रयोग में लाते है। यह सारणी पुस्तक के अन्त में **परिशिष्ट 'अ'** पर दी गई है।

लघुगणक सारणी की विशेषताएँ:

लघुगणक सारणी की निम्नलिखित विशेषताएँ होती हैं :

(1) इनमें किसी संख्या के लघुगणक के भिन्नांश ही होते हैं।

(2) सारणी के तीन भाग होते हैं :

(i) **प्रथम स्तम्भ :** इसमें 10 से 99 तक की संख्याएँ होती हैं।

(ii) **अगले दस स्तम्भ :** इसका प्रतिनिधित्व 0,1,2,..., 9 तक की संख्याएँ करती हैं।

(iii) **माध्य अन्तर के स्तम्भ :** अन्त के तीन स्तम्भ जो प्रत्येक तीन उपस्तम्भों में विभक्त होते हैं एवं इनका प्रतिनिधित्व 1,2,3; 4,5,6 तथा 7,8,9 संख्याएँ करती हैं।

भिन्नांश ज्ञात करने की क्रिया विधि :

भिन्नांश ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित क्रिया विधि का प्रयोग करते है, इसे एक उदाहरण $\log 38\cdot 56$ के माध्यम से स्पष्ट किया गया है।

(i) दी गई संख्या में यदि कोई दशमलव है तो उसे हटा दें अतः यहाँ नयी संख्या 3856 हो जाएगी।

(ii) चरण (i) से प्राप्त संख्या के प्रथम दो अंकों से बनी संख्या सारणी के बाँयी ओर प्रथम स्तम्भ में देखते है । यहाँ यह संख्या 38 है अतः प्रथम स्तम्भ में हम 38 पर पहुँचते हैं।

(iii) चरण (i) में प्राप्त संख्या के तीसरे अंक 5 को सारणी के अगले दस स्तम्भों में देखते हैं।

(iv) संख्या 38 की पंक्ति तथा अंक 5 का स्तम्भ जहाँ मिलते हैं उस मान को लिख लेते हैं यहाँ पर यह मान 5855 है।

(v) चरण (i) में प्राप्त आनुपातिक संख्या के चौथे अंक 6 को सारणी के दांयी ओर दी गई माध्य अन्तरिकी संख्याओं में देखते हैं।

(vi) संख्या 38 की पंक्ति तथा अनुपातिक अंक 6 के स्तम्भ जहां परस्पर मिलते हैं वह मान 7 हैं।

(vii) इस प्रकार चरण (iv) तथा (vi) में प्राप्त संख्याओं का योग 5855+ 7= 5862 है। दशमलव बिन्दु के पश्चात् यह संख्या लिखने पर हमें अभीष्ट भिन्नांश प्राप्त होता है
अतः $\log 38\cdot 56$ का भिन्नांश $\cdot 5862$ है।

टिप्पणीः

(i) उपर्युक्त परिणाम से स्पष्ट है कि भिन्नाँश के लिए प्राप्त संख्या के बाईं ओर दशमलव बिन्दु लगाते हैं।

(ii) यदि जिस संख्या का लघुगणक ज्ञात करना है वह एक अंक की हो तो उसके आगे शून्य लिख कर उसका भिन्नाँश ज्ञात करते हैं। उदाहरणार्थ $\log 3$ का भिन्नाँश ज्ञात करना है तो हम $\log 30$ या $\log 300$ का भिन्नांश सारणी से ज्ञात करते हैं। यही $\log 3$ का भिन्नाँश होगा।

(iii) यदि किसी लघुगणक में चार सार्थक अंकों से अधिक अंक हो तो चार अंकों की लघुगणक सारणी का उपयोग करते समय
- (क) आगे के अंक 5 से कम होने पर छोड़ देते हैं।
- (ख) आगे के अंक 5 या अधिक होने पर पूर्व के अंक में 1 जोड़कर लिख देते हैं।
  अतः प्राप्त चार अंकों की संख्या से भिन्नाँश ज्ञात करते हैं।

(iv) किसी संख्या का लघुगणक ज्ञात करने के लिए :
- (क) अनुच्छेद 9.08 में बतायी गयी विधि से पूर्णांश ज्ञात करते हैं।
- (ख) अनुच्छेद 9.09 में बतायी गयी विधि से भिन्नांश ज्ञात करते हैं।
  जैसे $38\cdot56$ का पूर्णांश 1 तथा भिन्नाँश $\cdot5862$ है।
  अतः $\log 38\cdot56 = 1\cdot5862$

(v) एक जैसी संख्याओं के लघुगणकों के भिन्नाँश समान होते है। उदाहरणार्थ 2834, $28\cdot34$ और $0\cdot002834$ के पूर्णांश तो क्रमशः 3, 1 और -3 है परन्तु सभी का भिन्नाँश $\cdot4524$ ही होगा।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 11: नीचे दी गयी संख्याओं के लघुगणक के पूर्णांश ज्ञात कीजिए :

(i) 5970 (ii) $125\cdot35$ (iii) $2\cdot5795$ (iv) $0\cdot7598$ (v) $0\cdot0074$

हल :

(i) संख्या 5970 में 4 अंक है अतः इसके लघुगणक का पूर्णांश $4-1=3$ होगा।

(ii) संख्या $125\cdot35$ में पूर्णांक 125 है जिसमें 3 अंक है। अतः संख्या 125.35 के लघुगणक का पूर्णांश $3-1=2$ होगा।

(iii) संख्या $2\cdot5795$ में पूर्णांक 2 है जो कि एक ही अंक है अतः लघुगणक में पूर्णांश $1-1=0$ होगा।

(iv) संख्या $0\cdot7595$ में दशमलव बिन्दु तथा प्रथम सार्थक अंक 7 के मध्य एक भी शून्य नहीं है अतः इस संख्या के लघुगणक का पूर्णांश $-(0+1)=-1$ या $\overline{1}$ होगा।

(v) संख्या $0\cdot0074$ में दशमलव बिन्दु तथा प्रथम सार्थक अंक 7 के मध्य 2 शून्य है अतः इस संख्या के लघुगणक का पूर्णांश $-(2+1)=-3$ या $\overline{3}$ होगा।

उदाहरण 12: लघुगणक की सारणी की सहायता से निम्नलिखित संख्याओं का लघुगणक ज्ञात कीजिएः

(i) 25794 (ii) $5\cdot3498$ (iii) $0\cdot3582$ (iv) $0\cdot003$ (v) $0\cdot000125$

हल :

(i) संख्या 25794 में 5 अंक है अतः $\log 25794$ का पूर्णांश $=5-1=4$ होगा।

दी गई संख्या के प्रथम दो अंको 25 के संगत पंक्ति तथा तीसरे अंक 7 के संगत स्तम्भ परस्पर जहाँ मिलते हो वह मान 4099 है। अब चौथा अंक 9 जो अनुपातिक अंक है (तथा उसके आगे का अंक 4 जो कि 5 से कम होने के कारण इसे छोड़ा जा सकता है) के संगत स्तम्भ तथा अंक 25 के संगत पंक्ति परस्पर जहाँ मिलते हो वह मान 15 है।

$\therefore \quad 4099+15 = 4114$

अतः उपर्युक्त संख्या के लघुगणक का भिन्नांश $=\cdot4114$

$\therefore \quad \log 25794 = 4\cdot4114$

(ii) $\log 5\cdot3498$ के लिए पूर्णांक $= 1-1 = 0$

स्पष्टतः इसका पूर्णांश 0 है तथा हमें यहाँ पाँच अंक दिए गए हैं जबकि हमें चार अंको वाली सारणी से इसका मान ज्ञात करना है अतः पाँचवा अंक 5 से अधिक होने के कारण चौथे अंक में एक जोड़ने पर यह 10 हो जाता है, अतः चौथा अंक शून्य तथा तीसरा अंक 4 से 1 अधिक होकर 5 हो जाएगा इस प्रकार हमें $5\cdot350$ का लघुगणक ज्ञात करना है। अब लघुगणक सारणी में 53 वाली पंक्ति में एवं

शीर्ष 5 वाले स्तम्भ के कटान बिन्दु देखने पर यह 7284 आता है। अतः इसका भिन्नांश $\cdot 7284$ होगा

$\therefore \quad \log 5\cdot 3498 = 0\cdot 7284$

(iii) $\log(0\cdot 3582)$ के लिए पूर्णांश $= -(0+1) = -1 = \bar{1}$

भिन्नांश $= \cdot(5539+2) = \cdot 5541$

$\therefore \quad \log 0\cdot 3582 = \bar{1}\cdot 5541$

(iv) $\log 0\cdot 003$ के लिए पूर्णांश $= -(2+1) = -3 = \bar{3}$

भिन्नांश $= \cdot(4771)$

$\therefore \quad \log 0\cdot 003 = \bar{3}\cdot 4771$

(v) $\log 0\cdot 000125$ के लिए पूर्णांश $= -(3+1) = -4 = \bar{4}$

भिन्नांश $= \cdot(0969) = \cdot 0969$

$\therefore \quad \log 0\cdot 000125 = \bar{4}\cdot 0969$

प्रश्नमाला 9.3

1. निम्नलिखित संख्याओं के लघुगणक के पूर्णांश ज्ञात कीजिए:

(i) 1270	(ii) 20·125	(iii) 7·985	(iv) 431·5
(v) 0·02	(vi) 0·02539	(vii) 70	(viii) 0·000287
(ix) 0·005	(x) 0·00003208	(xi) 0·000485	(xii) 0·007
(xiii) 0·0005309			

2. लघुगणक सारणी का प्रयोग कर निम्नलिखित संख्याओं के लघुगणक ज्ञात कीजिए:

(i) 2813	(ii) 400	(iii) 27·28	(iv) 9
(v) 0·678	(vi) 0·0035	(vii) 0·08403	(viii) 0·000287
(ix) 1·234	(x) 0·00003258	(xi) 0·000125	(xii) 0·00003208

9.10 प्रति लघुगणक तथा इनकी सारणी (Antilogarithms and their tables):

लघुगणक की विपरीत क्रिया को प्रतिलघुगणक कहते है। इस प्रकार एक धनात्मक संख्या n किसी अन्य संख्या m का प्रतिलघुगणक होती है, यदि $\log n = m$ अर्थात् n, m का प्रतिलघुणक होता है तो $n = \text{anti}\log m \Leftrightarrow \log n = m.$

(i) $\log 300 = 2\cdot 4771 \Leftrightarrow \text{antilog } 2\cdot 4771 = 300$

(ii) $\log 432\cdot 5 = 2\cdot 6360 \Leftrightarrow \text{antilog } 2\cdot 6360 = 432\cdot 5$

(iii) $\log 0\cdot 1257 = \bar{1}\cdot 0993 \Leftrightarrow \text{antilog}\left(\bar{1}\cdot 0993\right) = 0\cdot 1257$

(iv) $\log 0\cdot 000425 = \bar{4}\cdot 6284 \Leftrightarrow \text{antilog}\left(\bar{4}\cdot 6284\right) = 0\cdot 0004250$

लघुगणक सारणी से भी लघुगणक ज्ञात करने की विपरीत प्रक्रिया अपना कर प्रतिलघुगणक ज्ञात किए जा सकते हैं। परन्तु सरलता एवं शीघ्रता से प्रतिलघुगणक ज्ञात करने की दृष्टि से **परिशिष्ट ''ब''** में प्रतिलघुगणक सारणी दी गई है।

इस सारणी के प्रथम स्तम्भ में ·00 से ·99 तक की संख्याएँ दी गयी हैं तथा अन्य स्तम्भ लघुगणक की भांति ही दिए गए हैं।

प्रतिलघुगणक ज्ञात करने की क्रिया विधि :

(i) दी गयी संख्या के पूर्णांश भाग को छोड़ते हुए दशमलव भिन्न के प्रथम दो अंकों के संगत प्रतिलघुगणक सारणी में पंक्ति का चयन करते हैं।

(ii) चरण (i) में चयनित पंक्ति में उस संख्या को देखते हैं जो दशमलव भिन्न के तीसरे अंक के संगत शीर्ष वाले स्तम्भ में हो।

(iii) चरण (i) में चयन की गई पंक्ति में ही उस संख्या को देखते है जो दशमलव भिन्न के चौथे अंक के संगत शीर्ष वाले अनुपातिक अन्तर के स्तम्भ में है। इस संख्या को चरण (ii) में प्राप्त संख्या में जोड़ देते हैं।

(iv) अब दी गई संख्या के पूर्णांशः पर ध्यान देंगे। यदि यह पूर्णांश धनात्मक, माना n है तो चरण (iii) में प्राप्त संख्या के $(n+1)$ अंकों के पश्चात् दशमलव बिन्दु लगाएँगे।

यदि पूर्णांश ऋणात्मक, माना $\bar{n}$ है तो दशमलव बिन्दु के दाईं और $(n-1)$ शून्य लिख कर उसके पश्चात् चरण (iii) में प्राप्त संख्या को लिखेंगे।

टिप्पणी : जिस संख्या का प्रति लघुगणक ज्ञात करना है वह ऋणात्मक हो तो इसके दशमलव भिन्न वाले भाग को धनात्मक बनाने के लिए इसमें 1 जोड़ कर पूर्णांश भाग में से 1 घटा देंगे। इस प्रकार प्राप्त संख्या का ही हम प्रतिलघुगणक ज्ञात करते हैं।

उदाहणार्थ : $-3\cdot6432$ में दशमलव भिन्न $-0\cdot6432$ ऋणात्मक है अतः हम $-3\cdot6432$ को नीचे लिखे रूप में परिवर्तित करेंगे :

$$-3\cdot6432=-3-1+1-0\cdot6432=-4+0\cdot3568=\bar{4}\cdot3568$$

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 13: $3\cdot7523$ का प्रति लघुगणक ज्ञात कीजिए।

हल :

(i) दी गयी संख्या का भिन्नाँश ·7523 है।

(ii) प्रतिलघुगणक सारणी में बायी ओर के प्रथम स्तम्भ में ·75 के संगत पंक्ति तथा तीसरे अंक 2 के संगत शीर्ष वाले स्तम्भ की उभयनिष्ठ संख्या 5649 है।

(iii) अनुपातिक अंतर में 3 के नीचे इसी पंक्ति में संख्या 4 है।

(iv) चरण (ii) तथा (iii) की संख्याओं का योग $=5649+4=5653$

(v) दी गई संख्या का पूर्णांश 3 है अतः संख्या का प्रति लघुगणक 4 अंको वाली संख्या होगी।

(vi) चरण (iv) में प्राप्त संख्या चार अंको की संख्या बनाने के लिए उपयुक्त स्थान का दशमलव बिन्दु लगाकर इसे $5653\cdot0$ लिखेंगे।

अतः antilog $3\cdot7523=5653\cdot0$

उदाहरण 14: antilog $\bar{2}\cdot0258$ ज्ञात कीजिए।

हल :

(i) दी गई संख्या का भिन्नाँश ·0258 है।

(ii) ·02 की पंक्ति तथा शीर्ष 5 वाले स्तम्भ की उभयनिष्ठ संख्या 1059 है।

(iii) इसी पंक्ति में वह संख्या जो शीर्ष 8 वाले अनुपातिक अंतर के स्तम्भ में हो, 2 है।

(iv) $\therefore\ 1059+2=1061.$

(v) दी गई संख्या का पूर्णांश $\bar{2}$ है अतः $2-1=1.$

अर्थात् दशमलव बिन्दु के दांयी ओर एक शून्य लगाकर उसके आगे चरण (iv) से प्राप्त संख्या ·01061 लिखते हैं।

उदाहरण 15: $\log x=0\cdot5428$ हो तो x का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $\log x=0\cdot5428$

या $x=\text{antilog } 0\cdot5428$

$=3\cdot489$

प्रश्नमाला 9.4

1. निम्न लिखित संख्याओं का प्रति लघुगणक ज्ञात कीजिए।

(i) 1·3210 (ii) 2·4127 (iii) 0·084

(iv) $\bar{1}\cdot301$ (v) $\bar{3}\cdot2462$ (vi) $\bar{2}\cdot0258$

2. मान ज्ञात कीजिए।

(i) antilog 3·1234 (ii) antilog $\bar{2}\cdot5821$ (iii) antilog 0·3

(iv) antilo 2·466

3. निम्नलिखित में x का मान ज्ञात कीजिए।

(i) $\log x=\bar{2}\cdot6727$ (ii) $\log x=0\cdot452$

विविध उदाहरण

उदाहरण 16: यदि $\text{antilog } 1\cdot4339 = 27\cdot16$ हो तो $\text{antilog } \bar{2}\cdot4339$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : चूँकि $1\cdot4339$ तथा $\bar{2}\cdot4339$ के भिन्नाँश समान हैं।

अतः दोनों संख्याओं के antilog एक जैसे अंको वाली संख्याएँ होंगी।

अब जिस संख्या के लघुगणक का पूर्णांश $\bar{2}$ है तब antilog में दशमलव बिन्दु के बाद एक शून्य होगा।

अतः अभीष्ट $\text{antilog } \bar{2}\cdot4339 = \cdot02716$ होगा।

उदाहरण 17: यदि $\log 0\cdot723 = \bar{1}\cdot8591$ हो तो $\sqrt[3]{72\cdot3}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : माना $x = \sqrt[3]{72\cdot3}$

$\therefore \quad \log x = \log(72\cdot3)^{1/3}$ या $\log x = \frac{1}{3}\log(72\cdot3)$

या $\log x = \frac{1}{3}(1\cdot8591)$ $[\because \log 0\cdot723$ तथा $\log 7\cdot23$ के भिन्नांश समान हैं$]$

या $\log x = 0\cdot6197$

या $x = \text{antilog}(\cdot6197)$ $\therefore$ $x = 4\cdot166$

उदाहरण 18: $\log\left(\frac{2^3\times3}{5^2\times7^3}\right)$ को लघुगणक के योग और अन्तर के रूप में लिखिए।

हल : $\log\left(\frac{2^3\times3}{5^2\times7^3}\right) = \log\left(2^3\times3\right) - \log\left(5^2\times7^3\right)$

$$= \log 2^3 + \log 3 - \log 5^2 - \log 7^3$$
$$= 3\log 2 + \log 3 - 2\log 5 - 3\log 7$$

उदाहरण 19: यदि $\log_{\sqrt{8}} b = 3\frac{1}{3}$ हो तो b का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $\log_{\sqrt{8}} b = 3\frac{1}{3}$ $\Rightarrow$ $\left(\sqrt{8}\right)^{\frac{10}{3}} = b$

$\Rightarrow \quad b = \left(2^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{10}{3}} = 2^{\left(\frac{10}{3}\right)\left(\frac{3}{2}\right)} = 2^5 = 32$ अतः $b = 32$ होगा।

उदाहरण 20: यदि $\frac{\log a}{b-c} = \frac{\log b}{c-a} = \frac{\log c}{a-b}$ सिद्ध कीजिए: $a^a\cdot b^b\cdot c^c = 1$

हल : माना $\frac{\log a}{b-c} = \frac{\log b}{c-a} = \frac{\log c}{a-b} = k$

तब $\log a = k(b-c)$, $\log b = k(c-a)$ और $\log c = k(a-b)$

अतः $a\log a + b\log b + c\log c = a\cdot k(b-c) + b\cdot k(c-a) + ck(a-b) = 0$

$\therefore \quad \log a^a + \log b^b + \log c^c = 0$

$\log a^a b^b c^c = \log 1$ या $a^a\cdot b^b\cdot c^c = 1$ $[\because \log 1 = 0]$

विविध प्रश्नमाला–9

1. $\log_{\sqrt{2}} x = 4$ हो तो x का मान होगा :

(A) $4^{\sqrt{2}}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) 4 (D) $4\times\sqrt{2}$

2. $\log_x 243 = 2\cdot5$ हो तो x का मान होगा :

(A) 9 (B) 3 (C) 1 (D) 81

3. $\log(1+2\times3)$ का मान है :

(A) $2\log 3$ (B) $\log 1\cdot\log 2\cdot\log 3$ (C) $\log 1+\log 2+\log 3$ (D) $\log 7$

4. $\log(m+n)$ का मान है :

(A) $\log m+\log n$ (B) $\log mn$ (C) $\log m\times\log n$ (D) इनमें से कोई नहीं

5. $\log_b a\cdot\log_c b\cdot\log_a c$ का मान है :

(A) 0 (B) $\log abc$ (C) 1 (D) $\log\left(b^a\cdot c^b\cdot a^c\right)$

6. यदि $a>1$ तो $\log_a 0$ का मान है :

(A) $-\infty$ (B) ∞ (C) 0 (D) 1

7. यदि $a<0$ तो $\log_a 0$ का मान है :

(A) $-\infty$ (B) ∞ (C) 0 (D) 1

8. $\log_a b$ का अन्य रूप है :

(A) a^b (B) b^a (C) $\frac{1}{\log_b a}$ (D) $\log_b a$

9. संख्या $\log_2 7$ है :

(A) पूर्णांक (B) परिमेय (C) अपरिमेय (D) अभाज्य

10. यदि $a=\log_3 5$ तथा $b=\log_7 25$ तब सही विकल्प है :

(A) $a<b$ (B) $a>b$ (C) $a=b$ (D) इनमें से कोई नहीं

11. यदि $\log_2 x+\log_2(x-1)=1$ हो, तो x का मान लिखिए।

12. यदि $\log(a-b)=\log a-\log b$ हो तो a का मान b के पदों में क्या होगा ?

13. यदि $\frac{1}{\log_a x}+\frac{1}{\log_c x}=\frac{2}{\log_b x}$ हो, तो a, b तथा c में परस्पर संबंध बताइए।

14. यदि $\log 2=0\cdot3010$ हो, तो $\log 200$ का मान लिखिए।

15. $\log 0\cdot001$ का मान लिखिए।

16. यदि $\log 7=0\cdot8451$ और $\log 3=0\cdot4771$ हो, तो $\log(21)^5$ का मान लिखिए।

17. $\log 6+2\log 5+\log 4-\log 3-\log 2$ का मान लिखिए।

18. यदि $\frac{\log 144}{\log 12}=\log x$ हो, तो x का मान लिखिए।

19. सिद्ध कीजिए : $\log_{10}\tan 1^0\cdot\log_{10}\tan 2^0\ldots\ldots\log_{10}\tan 89^0=0$

20. सिद्ध कीजिए : $\log_3 4\cdot\log_4 5\cdot\log_5 6\cdot\log_6 7\cdot\log_7 8\cdot\log_8 9=2$

21. यदि $\log 52\cdot04 = 1\cdot7163$, $\log 80\cdot65 = 1\cdot9066$ और $\log 9\cdot753 = 0\cdot9891$ हो, तो $\log\dfrac{52\cdot04\times80\cdot65}{9\cdot753}$ का मान ज्ञात कीजिए।

22. यदि $\log 32\cdot9 = 1\cdot5172$, $\log 568\cdot1 = 2\cdot7544$ और $\log 13\cdot28 = 1\cdot1232$ हो, तो $\log\dfrac{(13\cdot28)^3}{32\cdot9\times568\cdot1}$ का मान ज्ञात कीजिए।

23. यदि $\log 2 = 0\cdot3010$ और $\log 3 = 0\cdot4771$ हो, तो $\log(0\cdot06)^6$ का मान ज्ञात कीजिए।

24. सिद्ध कीजिए : $\log\left(\dfrac{x^y y^x}{z^x x^z}\right) = x(\log y - \log z) + (y-z)\log x.$

25. $\log\dfrac{11^3}{5^7\times7^5}$ को लघुगणक के योग और अन्तर के रूप में लिखिए।

26. (a) यदि antilog $1\cdot5662 = 36\cdot83$ हो, तो निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए :

   (i) antilog $\overline{1}\cdot5662$ (ii) antilog $2\cdot5662$ (iii) antilog $\overline{2}\cdot5662$

   (b) antilog $(\log x)$ का मान ज्ञात कीजिए।

27. $(17)^{\frac{1}{2}}$ ज्ञात कीजिए जबकि $\log 17 = 1\cdot2304$ और antilog $0\cdot6152 = 4\cdot123$ हो।

28. $\log_{10} 3 = 0\cdot4771$ हो तो $\log_{10} 0\cdot027$ का मान ज्ञात कीजिए।

29. लघुगणक सारणियों के प्रयोग से $\dfrac{520\cdot4\times8\cdot065}{97\cdot53}$ का मान ज्ञात कीजिए।

30. $\log x - \log(x-1) = \log 3$ हो, तो x का मान ज्ञात कीजिए।

महत्वपूर्ण बिन्दु

1. यदि $a^x = n$ हो तो $\log_a n = x$ $[a>0,\ a\neq 1,\ n>0]$
2. $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$
3. $\log_a \dfrac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$
4. $\log_a (M)^N = N\log_a M$
5. $\log_a a = 1$
6. $\log_a 1 = 0$
7. $\log_a M = \log_b M \times \log_a b$
8. $\log_b a \times \log_a b = 1$
9. $\log_a 0 = -\infty$, यदि $a>1$
10. $\log_a 0 = +\infty$, यदि $a<1$
11. $M = e^{\log_e M}$
12. $\log_{10} n = \log_e n \times 0\cdot43429$
13. लघुगणक की विपरीत क्रिया प्रतिलघुगणक कहलाती है।
14. $m = \log n \Leftrightarrow n = \text{antilog } m$
15. antilog $(\log n) = n$

उत्तरमाला

प्रश्नमाला 9.1

1. $\log_2 64=6$ 2. $\log_{10} 10000=4$ 3. $\log_2 1024=10$

4. $\log_5\left(\frac{1}{25}\right)=-2$ 5. $\log_{10} 0\cdot001=-3$ 6. $\log_4 8=\frac{3}{2}$

7. $5^2=25$ 8. $3^6=729$ 9. $10^{-3}=0\cdot01$

10. $10^{-1}=0\cdot1$ 11. $3^{-3}=\frac{1}{27}$ 12. $\left(\sqrt{2}\right)^4=4$

13. 729 14. $\sqrt{5}$ 15. 8

प्रश्नमाला 9.2

4. (i) $1\cdot5562$ (ii) $0\cdot5818$ (iii) $0\cdot9815$ (iv) $1\cdot8451$ (v) $0\cdot0037$ (vi) 0.2330

5. 2 6. $1\frac{2}{9}$ 7. $2\frac{1}{4}$ 8. (i) $\log 20$ (ii) $\log 2x^3$

प्रश्नमाला 9.3

1. (1) 3 (ii) 1 (iii) 0 (iv) 2 (v) $\overline{2}$ (vi) $\overline{2}$
(vii) 1 (viii) $\overline{4}$ (ix) $\overline{3}$ (x) $\overline{5}$ (xi) $\overline{4}$ (xii) $\overline{3}$
(xiii) $\overline{4}$

1. (1) 3.4492 (ii) 2.6021 (iii) 1.4359 (iv) 0.9542 (v) $\overline{1}.8312$
(vi) $\overline{3}.5441$ (vii) $\overline{2}.9245$ (viii) $\overline{4}.4579$ (ix) 0.0913 (x) $\overline{5}.5130$
(xi) $\overline{4}.0969$ (xii) $\overline{5}.5062$

प्रश्नमाला 9.4

1. (i) $20\cdot94$ (ii) $258\cdot6$ (iii) $1\cdot213$ (iv) $0\cdot2000$ (v) $0\cdot001763$ (vi) 0.01061
2. (i) $1328\cdot0$ (ii) $0\cdot03820$ (iii) $1\cdot995$ (iv) $2\cdot924$
3. (i) $0\cdot04707$ (ii) $2\cdot831$

विविध प्रश्नमाला 9

1. (C) 2. (A) 3. (D) 4. (D) 5. (C) 6. (A) 7. (B)
8. (C) 9. (C) 10. (A)

11. 2 12. $\frac{b^2}{b-1}$ 13. $b^2=ac$

14. $2\cdot3010$ 15. $\overline{3}$ या -3 16. $6\cdot611$

17. 2 18. 100 21. $2\cdot6338$

22. $-0\cdot9020$ या $\overline{1}\cdot0980$ 23. $-7\cdot3314$ या $\overline{8}\cdot6686$

25. $3\log 11-7\log 5-5\log 7$

26. (a) (i) $0\cdot3683$ (ii) $368\cdot3$ (iii) $0\cdot03683$ (b) x

27. $4\cdot123$ 28. $\overline{2}\cdot4313$ 29. $43\cdot03$ 30. $\frac{3}{2}$