પ્રશ્નપત્રનું પરિરૂપ : I (CBSE)

ગણિત : ધોરણ XII

સમય : 3 કલાક
મહત્તમ ગુણ : 100

પ્રશ્નપત્રના ભિન્ન-ભિન્ન વિભાગો ઉપર ગુણભાર નીચે પ્રમાણે છે :

(A) પ્રશ્નના પ્રકરણ પ્રમાણે ગુણભાર :

ક્રમ	એકમ	ગુણ
1.	સંબંધ અને વિધેય	10
2.	બીજગણિત	13
3.	કલન ગણિત	44
4.	સદિશ અને ત્રિપરિમાણીય ભૂમિતિ	17
5.	સુરેખ આયોજન	06
6.	સંભાવના	10
કુલ		**100**

(B) પ્રશ્નના પ્રકાર પ્રમાણે ગુણભાર :

ક્રમ	પ્રશ્નનો પ્રકાર	પ્રત્યેક પ્રશ્નના ગુણ	પ્રશ્નોની સંખ્યા	કુલ ગુણ
1.	બહુવિકલ્પી પ્રશ્નો/હેતુલક્ષી પ્રશ્નો/અતિ ટૂંકજવાબી પ્રશ્નો	01	10	10
2.	ટૂંક જવાબી પ્રશ્નો	04	12	48
3.	વિસ્તૃત પ્રશ્નો	06	07	42
કુલ			**29**	**100**

(C) વિકલ્પોનું આયોજન :

બધા પ્રશ્નો ફરજિયાત છે. ચાર ગુણવાળા ચાર પ્રશ્નોમાં આંતરિક વિકલ્પ અને છ ગુણવાળા બે પ્રશ્નોમાં આંતરિક વિકલ્પનો પ્રબંધ કરેલ છે.

રૂપરેખા

એકમ/પ્રશ્નનો પ્રકાર	બહુવિકલ્પી/ અતિ ટૂંક જવાબી પ્રશ્નો	ટૂંક જવાબી પ્રશ્નો	વિસ્તૃત પ્રશ્નો	કુલ
સંબંધ અને વિધેય	-	4 (1)	6 (1)	10 (2)
બીજગણિત	3 (3)	4 (1)	6 (1)	13 (5)
કલન ગણિત	4 (4)	28 (7)	12 (2)	44 (13)
સદિશ અને ત્રિપરિમાણીય ભૂમિતિ	3 (3)	8 (2)	6 (1)	17 (6)
સુરેખ આયોજન	–	–	6 (1)	6 (1)
સંભાવના	–	4 (1)	6 (1)	10 (2)
કુલ	**10 (10)**	**48 (12)**	**42 (7)**	**100 (29)**

વિભાગ A

વિધાન સત્ય બને તે રીતે આપેલા ચાર વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી ક્રમાંક 1 થી 3 વાળા પ્રશ્નોના ઉત્તર આપો :

1. જો $\begin{bmatrix} x+y \\ x-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, તો (x, y) = ...

(A) (1, 1) (B) (1, –1) (C) (–1, 1) (D) (–1, –1)

2. (–2, 4), (2, k) અને (5, 4) શિરોબિંદુઓવાળા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ 35 ચોરસ એકમ હોય, તો k નું મૂલ્ય = ...

(A) 4 (B) –2 (C) 6 (D) –6

3. વક્ર $y^2 = 4x$ ના .... બિંદુએ સ્પર્શરેખાનું સમીકરણ $y = x + 1$ છે.

(A) (1, 2) (B) (2, 1) (C) (1, –2) (D) (–1, 2)

4. જેના ઘટકો

$$a_{ij} = \begin{cases} \dfrac{|-3\hat{i} + \hat{j}|}{2}, & i \neq j \\ (i+j)^2, & i = j \end{cases}$$ થી મળે તેવો 2 × 2 શ્રેણિક રચો.

5. $tan^{-1}(e^x)$ નું x ના વિશે $x = 0$ આગળ વિકલન કરી વિકલિતનું મૂલ્ય શોધો.

6. જો રેખાનું કાર્તેઝિય સમીકરણ $\frac{x-3}{2} = \frac{y+2}{-5} = \frac{z-6}{3}$ હોય, તો તે રેખાનું સદિશ સમીકરણ શોધો.

7. $\int_{-\pi}^{\pi} (sin^{83}x + x^{123})\, dx$ નું મૂલ્ય શોધો.

વિધાન સત્ય બને તે રીતે ક્રમાંક 8 થી 10 વાળા પ્રશ્નોની ખાલી જગ્યા પૂરો :

8. $\int \frac{sin\ x + cos\ x}{\sqrt{1 + sin\ 2x}}\, dx$ = ...

9. જો $\vec{a} = 2\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k}$ અને $\vec{b} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \lambda\hat{k}$ પરસ્પર લંબ હોય, તો λ = ...

10. $\vec{a} = \hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$ નો $\hat{b} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k}$ પરનો પ્રક્ષેપ .... છે.

વિભાગ B

11. સાબિત કરો : $cot^{-1}\left\{\frac{\sqrt{1+sin\ x} + \sqrt{1-sin\ x}}{\sqrt{1+sin\ x} - \sqrt{1-sin\ x}}\right\} = \frac{x}{2},\ 0 < x < \frac{\pi}{2}$

અથવા

જો $sin^{-1}x + sin^{-1}2x = \frac{\pi}{3}$, $x > 0$ હોય, તો સમીકરણનો x વિશે ઉકેલ મેળવો.

12. નિશ્ચાયકના ગુણધર્મોનો ઉપયોગ કરી, સાબિત કરો :

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ q+r & r+p & p+q \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

13. વિધેય $f(x) = |x + 1| + |x + 2|$ નું $x = -1$ અને $x = -2$ આગળ સાતત્ય ચર્ચો.

14. જો $x = 2\cos\theta - \cos 2\theta$ અને $y = 2\sin\theta - \sin 2\theta$ હોય, તો $\theta = \frac{\pi}{2}$ આગળ $\frac{d^2y}{dx^2}$ શોધો.

અથવા

જો $x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x} = 0$ હોય, તો સાબિત કરો કે, $\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{(1+x)^2}$, $-1 < x < 1$

15. એક શંકુનો વ્યાસ 10 સેમી અને ઊંડાઈ 10 સેમી છે. તેમાં 4 ઘન સેમી/મિનિટના દરે પાણી રેડવામાં આવે છે. જ્યારે પાણીની ઊંડાઈ 6 સેમી થાય ત્યારે પાણીના સ્તરનો વધવાનો દર શોધો.

અથવા

વિધેય $f(x) = x^3 + \frac{1}{x^3}$, $x \neq 0$ જે અંતરાલમાં (i) વધે, (ii) ઘટે તે અંતરાલ શોધો.

16. $\int \frac{3x-2}{(x+3)(x+1)^2}\, dx$ શોધો.

અથવા

$\int \left(\log(\log x) + \frac{1}{(\log x)^2} \right) dx$ શોધો.

17. $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x}\, dx$ નું મૂલ્ય શોધો.

18. x-અક્ષ પર કેન્દ્રવાળા અને ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થતાં બધાં જ વર્તુળોનું વિકલ સમીકરણ શોધો.

19. વિકલ સમીકરણ $x^2y\, dx - (x^3 + y^3)\, dy = 0$ ઉકેલો.

20. જો $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c}$, $\vec{a} \neq \vec{0}$ અને $\vec{b} \neq \vec{c}$ હોય, તો સાબિત કરો કે કોઈક અચળ λ માટે $\vec{b} = \vec{c} + \lambda\vec{a}$.

21. રેખાઓ $\vec{r} = (\lambda-1)\hat{i} + (\lambda+1)\hat{j} - (1+\lambda)\hat{k}$ અને $\vec{r} = (1-\mu)\hat{i} + (2\mu-1)\hat{j} + (\mu+2)\hat{k}$ વચ્ચેનું લઘુતમ અંતર શોધો.

22. 52 પત્તાંમાંથી એક પત્તું ખોવાઈ ગયું છે. પત્તાંના ઢગમાં વધેલાં પત્તાંમાંથી બે પત્તાં ખેંચવામાં આવ્યાં અને તે બંને લાલનાં મળ્યાં. ખોવાયેલું પત્તું લાલનું હોય તેની સંભાવના શોધો.

વિભાગ C

23. બે શ્રેણિકો A અને B નીચે પ્રમાણે છે :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ અને } B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -4 \\ -4 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

ચકાસો કે AB = BA = 6I. I એ 3 કક્ષાનો એકમ શ્રેણિક છે અને તે પરથી સમીકરણ સંહતિ $x - y = 3$, $2x + 3y + 4z = 17$ અને $y + 2z = 7$ નો ઉકેલ મેળવો.

24. ગણ $\mathbf{R} - \{-1\}$, પર દ્વિક્ક્રિયા નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત છે :

પ્રત્યેક $a, b \in \mathbf{R} - \{-1\}$ માટે $a * b = a + b + ab$.

સાબિત કરો કે $\mathbf{R} - \{-1\}$ પર $*$ સમક્રમી છે. $*$ માટે તટસ્થ ઘટક શોધો અને સાબિત કરો કે $\mathbf{R} - \{-1\}$ માં પ્રત્યેક ઘટકના વ્યસ્તનું અસ્તિત્વ છે.

25. સાબિત કરો કે જ્યારે ત્રિકોણ સમદ્વિભુજ હોય, ત્યારે આપેલા કર્ણવાળા કાટકોણ ત્રિકોણની પરિમિતિ મહત્તમ છે.

26. સંકલનની રીતનો ઉપયોગ કરી રેખાઓ

$2x + y = 4$, $3x - 2y = 6$ અને $x - 3y + 5 = 0$ થી ઘેરાયેલા પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

અથવા

$\int_1^4 (2x^2 - x)dx$ નું મૂલ્ય સરવાળાના લક્ષથી મેળવો.

27. બિંદુ (2, 3, 7) થી સમતલ $3x - y - z = 7$ પરના લંબપાદના યામ શોધો. લંબઅંતર પણ શોધો.

અથવા

રેખાઓ $\vec{r} = \hat{i} + \hat{j} + \lambda(\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k})$ અને $\vec{r} = \hat{i} + \hat{j} + \mu(-\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k})$ ને સમાવતા સમતલનું સમીકરણ મેળવો. વળી, બિંદુ (1, 1, 1) થી આ સમતલનું અંતર શોધો.

28. 52 પત્તાંના ઢગમાંથી એક પછી એક એમ બે પત્તાં પુરવણી વગર ખેંચવામાં આવે છે. રાજાના પત્તાંની પસંદગીની સંખ્યાનું સંભાવના વિતરણ શોધો. વિતરણનો મધ્યક અને વિચરણ પણ શોધો.

29. એક આહારવિદ્ બે પ્રકારની ખાદ્યવસ્તુનું એવી રીતે મિશ્રણ કરવા માગે છે કે, જેથી મિશ્રણમાં વિટામિન A નું ઓછામાં ઓછું પ્રમાણ 8 એકમ અને વિટામિન C નું ઓછામાં ઓછું પ્રમાણ 10 એકમ હોય. ખાદ્યસામગ્રી 'I' માં વિટામિન A નું પ્રમાણ 2 એકમ/કિગ્રા અને વિટામિન C નું પ્રમાણ 1 એકમ/કિગ્રા છે. ખાદ્યસામગ્રી 'II' માં વિટામિન A નું પ્રમાણ 1 એકમ/કિગ્રા અને વિટામિન C નું પ્રમાણ 2 એકમ/કિગ્રા છે. ખાદ્યસામગ્રી 'I' ની ખરીદકિંમત ₹ 50 પ્રતિ કિગ્રા અને ખાદ્યસામગ્રી 'II' ની ખરીદકિંમત ₹ 70 પ્રતિ કિગ્રા છે. આ મિશ્રણનું મૂલ્ય ન્યૂનતમ થાય તે રીતે આ કૂટપ્રશ્નને સુરેખ આયોજનના સૂત્રરૂપે રચી આલેખથી તેનો ઉકેલ શોધો.

ગુણપ્રદાન યોજના

વિભાગ A

1. C
2. D
3. A
4. $\begin{bmatrix} 4 & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} & 16 \end{bmatrix}$
5. $\frac{1}{2}$
6. $\vec{r} = (3\hat{i} - 2\hat{j} + 6\hat{k}) + \lambda(2\hat{i} - 5\hat{j} + 3\hat{k})$, જ્યાં λ અચળ છે.
7. 0
8. $x + c$
9. $\lambda = -2$
10. $\frac{+1}{7}$ $\qquad 1 \times 10 = 10$

વિભાગ B

11. ડા.બા. $= cot^{-1}\left\{\frac{\sqrt{1+sin\,x} + \sqrt{1-sin\,x}}{\sqrt{1+sin\,x} - \sqrt{1-sin\,x}}\right\}$

$$= cot^{-1}\left\{\frac{\sqrt{\left(cos\frac{x}{2}+sin\frac{x}{2}\right)^2}+\sqrt{\left(cos\frac{x}{2}-sin\frac{x}{2}\right)^2}}{\sqrt{\left(cos\frac{x}{2}+sin\frac{x}{2}\right)^2}-\sqrt{\left(cos\frac{x}{2}-sin\frac{x}{2}\right)^2}}\right\} \qquad 1\frac{1}{2}$$

$$= cot^{-1}\left\{\frac{\left|cos\frac{x}{2}+sin\frac{x}{2}\right|+\left|cos\frac{x}{2}-sin\frac{x}{2}\right|}{\left|cos\frac{x}{2}+sin\frac{x}{2}\right|-\left|cos\frac{x}{2}-sin\frac{x}{2}\right|}\right\}$$

$$= cot^{-1}\left\{\frac{cos\frac{x}{2}+sin\frac{x}{2}+cos\frac{x}{2}-sin\frac{x}{2}}{cos\frac{x}{2}+sin\frac{x}{2}-cos\frac{x}{2}+sin\frac{x}{2}}\right\} \left[0<\frac{x}{2}<\frac{\pi}{4} \Rightarrow cos\frac{x}{2} > sin\frac{x}{2} > 0 \text{ હોવાથી}\right] \qquad 1\frac{1}{2}$$

$$= cot^{-1}\left\{\frac{2\,cos\frac{x}{2}}{2\,sin\frac{x}{2}}\right\} = cot^{-1}\left\{cot\frac{x}{2}\right\} = \frac{x}{2} \qquad \left(0<\frac{x}{2}<\frac{\pi}{4}\right) \qquad 1$$

અથવા

$$\sin^{-1}x + \sin^{-1}2x = \frac{\pi}{3}$$

$$\therefore \quad \sin^{-1}2x = \frac{\pi}{3} - \sin^{-1}x$$

$$\therefore \quad 2x = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \sin^{-1}x\right)$$ 1

$$= \sin\frac{\pi}{3}\cos(\sin^{-1}x) - \cos\frac{\pi}{3}\sin(\sin^{-1}x)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-\sin^2(\sin^{-1}x)} - \frac{1}{2}x$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2}x$$

$$\therefore \quad 4x = \sqrt{3}\sqrt{1-x^2} - x,$$

$$5x = \sqrt{3}\sqrt{1-x^2}$$ $1\frac{1}{2}$

$$\therefore \quad 25x^2 = 3(1 - x^2)$$

$$\therefore \quad 28x^2 = 3$$

$$\therefore \quad x^2 = \frac{3}{28}$$

$$\therefore \quad x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}$$ 1

આથી, $x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}$ ($x > 0$ આપ્યું છે.)

આમ, $x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}$ આપેલા સમીકરણનો ઉકેલ છે. $\frac{1}{2}$

12. ધારો કે, $\Delta = \begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ q+r & r+p & p+q \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix}$

$C_1 \rightarrow C_1 + C_2 + C_3$ નો ઉપયોગ કરતાં,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2(a+b+c) & c+a & a+b \\ 2(p+q+r) & r+p & p+q \\ 2(x+y+z) & z+x & x+y \end{vmatrix}$$ 1

$$= 2\begin{vmatrix} a+b+c & c+a & a+b \\ p+q+r & r+p & p+q \\ x+y+z & z+x & x+y \end{vmatrix}$$

$C_2 \to C_2 - C_1$ અને $C_3 \to C_3 - C_1$ નો ઉપયોગ કરતાં,

$$\Delta = 2\begin{vmatrix} a+b+c & -b & -c \\ p+q+r & -q & -r \\ x+y+z & -y & -z \end{vmatrix} \qquad 1\frac{1}{2}$$

$C_1 \to C_1 + C_2 + C_3$ કરતાં અને C_2 તથા C_3 માંથી (–1) સામાન્ય લેતાં,

$$\Delta = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} \qquad 1\frac{1}{2}$$

13. વિકલ્પ 1 : જ્યારે, $x < -2$

$f(x) = |x + 1| + |x + 2| = -(x + 1) - (x + 2) = -2x - 3$

વિકલ્પ 2 : જ્યારે, $-2 \le x < -1$

$f(x) = -x - 1 + x + 2 = 1$ 1

વિકલ્પ 3 : જ્યારે, $x \ge -1$

$f(x) = x + 1 + x + 2 = 2x + 3$

આમ,

$$f(x) = \begin{cases} -2x-3 & ; \quad x<-2 \\ 1 & ; \quad -2\le x<-1 \\ 2x+3 & ; \quad x\ge -1 \end{cases}$$

હવે, $x = -2$ ની ડાબી બાજુથી, $\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^-} (-2x-3) = 4 - 3 = 1$

અને $x = -2$ ની જમણી બાજુથી, $\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+} 1 = 1$

વળી, $f(-2) = |-2 + 1| + |-2 + 2| = |-1| + |0| = 1$

આમ, $\lim_{x\to -2^-} f(x) = f(-2) = \lim_{x\to -2^+} f(x)$ $1\frac{1}{2}$

$\therefore$ $x = -2$ આગળ વિધેય f સતત છે.

હવે, $x = -1$ ની ડાબી બાજુથી, $\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} 1 = 1$

અને $x = -1$ ની જમણી બાજુથી, $\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} (2x+3) = 1$ $1\frac{1}{2}$

વળી, $f(-1) = |-1 + 1| + |-1 + 2| = 1$

આમ, $\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^-} f(x) = f(-1)$

$\therefore$ $x = -1$ આગળ વિધેય f સતત છે.

આથી, આપેલું વિધેય બંને બિંદુઓ $x = -1$ અને $x = -2$ આગળ સતત છે.

નોંધ : $|x + 1|$ તથા $|x + 2|$ એ R માં સતત છે. આથી કોઈ ગણતરી જરૂરી નથી.

14. $x = 2cos\,\theta - cos\,2\theta$ અને $y = 2sin\,\theta - sin\,2\theta$

આથી, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \dfrac{cos\,\theta - cos\,2\theta}{sin\,2\theta - sin\,\theta} = \dfrac{-2\,sin\frac{3\theta}{2}\,sin\left(\frac{-\theta}{2}\right)}{2\,cos\frac{3\theta}{2}\,sin\frac{\theta}{2}} = tan\dfrac{3\theta}{2}$ $1\frac{1}{2}$

બંને બાજુએ x ના વિશે વિકલન કરતાં,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3}{2}sec^2\frac{3\theta}{2} \times \frac{d\theta}{dx}$$

$$= \frac{3}{2}\,sec^2\frac{3\theta}{2} \times \frac{1}{2(sin\,2\theta - sin\,\theta)} = \frac{3}{4}\,sec^2\frac{3\theta}{2} \times \frac{1}{2\,cos\,\frac{3\theta}{2}\,sin\,\frac{\theta}{2}}$$

$$= \frac{3}{8}\,sec^3\frac{3\theta}{2}\,cosec\,\frac{\theta}{2}$$ $1\frac{1}{2}$

આમ, $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ આગળ $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{3}{8}\,sec^3\dfrac{3\pi}{4}\,cosec\,\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{-3}{2}$ 1

અથવા

$$x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x} = 0$$

$\therefore \quad x\sqrt{1+y} = -\,y\sqrt{1+x}$

બંને બાજુએ વર્ગ કરતાં,

$x^2(1 + y) = y^2(1 + x)$

$\therefore \quad (x + y)\,(x - y) = -y\,x\,(x - y)$ 1

$\therefore \quad x + y = -x\,y$ એટલે કે, $y = \dfrac{-x}{1+x}$ $\left(\text{અથવા } y = -1 + \dfrac{1}{(1+x)}.\ \text{આથી } \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-1}{(1+x)^2}\right)$ 2

$\therefore \quad \dfrac{dy}{dx} = -\left\{\dfrac{(1+x)\cdot 1 - x(0+1)}{(1+x)^2}\right\} = \dfrac{-1}{(1+x)^2}$ 1

નોંધ : જો $x = y$ હોય, તો $2x\sqrt{1+x} = 0$

$\therefore \quad x = 0$ અથવા $x = -1$, પરંતુ $x \neq -1$

આમ, વિધેય $\{(0, 0)\}$ રહે. વિકલનનો પ્રશ્ન જ ન રહે.

15. ધારો કે, OAB શંકુ છે અને કોઈ પણ સમય t માટે LM એ પાણીનું સ્તર દર્શાવે છે.

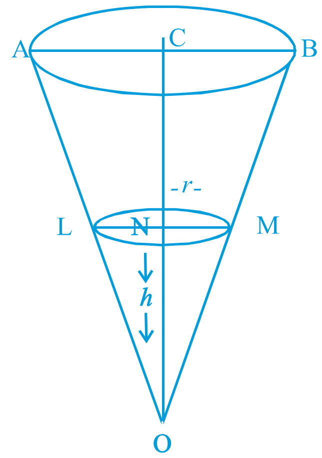
ધારો કે, ON $= h$ અને MN $= r$

AB $= 10$ સેમી, OC $= 10$ સેમી અને $\dfrac{dV}{dt} = 4$ સેમી^{3} /મિનિટ જ્યાં, V એ શંકુ OLM નું કદ દર્શાવે છે.

Δ ONM ~ Δ OCB થશે.

$\therefore \quad \frac{MN}{CB} = \frac{ON}{OC}$ અથવા $\frac{r}{5} = \frac{h}{10} \Rightarrow r = \frac{h}{2}$ 1

હવે, $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ .... (i)



આકૃતિ 1.1

(i) માં $r = \frac{h}{2}$ મૂકતાં, $1\frac{1}{2}$

$V = \frac{1}{12}\pi h^3$

t ના વિશે વિકલન કરતાં,

$$\frac{dV}{dt} = \frac{3\pi h^2}{12}\frac{dh}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{4}{\pi h^2}\frac{dV}{dt}$$

આથી, જ્યારે $h = 6$ સેમી તથા $\frac{dV}{dt} = 4$ સેમી^{3}/ મિનિટ, $\frac{dh}{dt} = \frac{4}{9\pi}$ સેમી/મિનિટ $1\frac{1}{2}$

અથવા

$f(x) = x^3 + \frac{1}{x^3}$

$\therefore \quad f'(x) = 3x^2 - \frac{3}{x^4}$ 1

$$= \frac{3(x^6-1)}{x^4} = \frac{3(x^2-1)(x^4+x^2+1)}{x^4}$$

$x^4 + x^2 + 1 > 0$ અને $x^4 > 0$ હોવાથી, f વધતું વિધેય થવા માટે,

$x^2 - 1 > 0$ આવશ્યક છે. $1\frac{1}{2}$

$\therefore \quad x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

$(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ માં f વધતું વિધેય છે.

(ii) f ઘટતું વિધેય હોય, તો $f'(x) < 0$

$\therefore \quad x^2 - 1 < 0$

$\therefore \quad (x - 1)(x + 1) < 0$

[$x \neq 0$, f એ $x = 0$ માટે વ્યાખ્યાયિત નથી.] $1\frac{1}{2}$

આમ, $(-1, 0) \cup (0, 1)$ માં f ઘટતું વિધેય છે.

16. ધારો કે, $\frac{3x-2}{(x+3)(x+1)^2} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$ 1

માટે, $3x - 2 = A(x+1)^2 + B(x+1)(x+3) + C(x+3)$

x^2, x ના સહગુણક તથા અચળપદ સરખાવતાં,

$$A + B = 0,\ 2A + 4B + C = 3 \text{ અને } A + 3B + 3C = -2$$

આ સમીકરણોને ઉકેલતાં,

$$A = \frac{-11}{4},\quad B = \frac{11}{4} \text{ અને } C = \frac{-5}{2}$$ $1\frac{1}{2}$

$$\therefore \quad \frac{3x-2}{(x+3)(x+1)^2} = \frac{-11}{4(x+3)} + \frac{11}{4(x+1)} - \frac{5}{2(x+1)^2}$$

આથી, $$\int \frac{3x-2}{(x+3)(x+1)^2}\,dx = \frac{-11}{4}\int \frac{1}{x+3}\,dx + \frac{11}{4}\int \frac{1}{x+1}\,dx - \frac{5}{2}\int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx$$

$$= \frac{-11}{4}\log|x+3| + \frac{11}{4}\log|x+1| + \frac{5}{2(x+1)} + c_1$$ $1\frac{1}{2}$

અથવા

$$\int\left(\log(\log x) + \frac{1}{(\log x)^2}\right)dx$$

$$= \int \log(\log x)\,dx + \int \frac{1}{(\log x)^2}\,dx$$

ખંડશઃ સંકલનની રીતે $\log(\log x)$ નું સંકલન કરતાં,

$$\int \log(\log x)\,dx = x\log(\log x) - \int \frac{x}{(\log x)} \times \frac{1}{x}\,dx$$

$$= x\log(\log x) - \int \frac{1}{\log x}\,dx$$ $1\frac{1}{2}$

$$= x\log(\log x) - \left[\frac{x}{\log x} - \int x\left(\frac{-1}{(\log x)^2}\right) \times \frac{1}{x}\,dx\right]$$ 1

$$= x\log(\log x) - \frac{x}{\log x} - \int \frac{1}{(\log x)^2}\,dx$$

તેથી, $$\int\left(\log(\log x) + \frac{1}{(\log x)^2}\right)dx = x\log(\log x) - \frac{x}{\log x} + c$$ $1\frac{1}{2}$

17. ધારો કે, $I = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx$

$= \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)\sin(\pi - x)}{1+\cos^2(\pi - x)} dx$ $\left[\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx \text{ હોવાથી}\right]$

$= \int_0^{\pi} \frac{\pi \sin x}{1+\cos^2 x} dx - I$ 1

$\therefore \quad 2I = \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} dx$

ધારો કે, $\cos x = t$. $x = \pi \Rightarrow t = -1$, $x = 0 \Rightarrow t = 1$ અને $-\sin x\, dx = dt$

માટે, $2I = \pi \int_1^{-1} \frac{-dt}{1+t^2}$

$= \pi \int_{-1}^{1} \frac{dt}{1+t^2}$ $1\frac{1}{2}$

$= \pi \left[\tan^{-1} t\right]_{-1}^{1} = \pi\left[\tan^{-1}(1) - \tan^{-1}(-1)\right]$

$= \pi\left[\frac{\pi}{2}\right] = \frac{\pi^2}{2}$ $1\frac{1}{2}$

$I = \frac{\pi^2}{4}$

18. ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થતા અને x-અક્ષ પર કેન્દ્રવાળા વર્તુળનું સમીકરણ

$(x-a)^2 + y^2 = a^2$ ... (i) $1\frac{1}{2}$

x ના વિશે વિકલન કરતાં,

$2(x-a) + 2y\frac{dy}{dx} = 0$

$\therefore \quad x + y\frac{dy}{dx} = a$

(i) માં a નું મૂલ્ય મૂકતાં, $1\frac{1}{2}$

$\left(y\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = \left(x + y\frac{dy}{dx}\right)^2$

$\therefore \quad (x^2 - y^2) + 2xy\frac{dy}{dx} = 0$ 1

19. $x^2 y\,dx - \left(x^3 + y^3\right) dy = 0$ આપેલ વિકલ સમીકરણ છે.

$\therefore \quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 y}{x^3 + y^3}$ ...(1)

$y = vx$ લેતાં, $\dfrac{dy}{dx} = v + x\dfrac{dv}{dx}$ 1

માટે $v + x\dfrac{dv}{dx} = \dfrac{vx^3}{x^3 + v^3 x^3}$

$\therefore \quad v + x\dfrac{dv}{dx} = \dfrac{v}{1+v^3}$

$\therefore \quad x\dfrac{dv}{dx} = \dfrac{-v^4}{1+v^3}$

$\therefore \quad \displaystyle\int \frac{1+v^3}{v^4}\,dv = -\int \frac{dx}{x}$ 1

તેથી, $\displaystyle\int \frac{1}{v^4}\,dv + \int \frac{1}{v}\,dv = -\int \frac{dx}{x}$ 1

આથી, $\dfrac{-1}{3v^3} + \log|v| = -\log|x| + c$

$\therefore \quad \dfrac{-x^3}{3y^3} + \log|y| = c$, વિકલ સમીકરણનો ઉકેલ છે. 1

20. હવે, $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c}$

$\therefore \quad \vec{a} \times \vec{b} - \vec{a} \times \vec{c} = \vec{0}$

$\therefore \quad \vec{a} \times (\vec{b} - \vec{c}) = \vec{0}$ 1

$\therefore \quad \vec{a} = \vec{0}$ અથવા $\vec{b} - \vec{c} = \vec{0}$ અથવા $\vec{a} \parallel (\vec{b} - \vec{c})$ 1

$\therefore \quad \vec{a} \parallel (\vec{b} - \vec{c})$ [$\vec{a} \neq \vec{0}$ અને $\vec{b} \neq \vec{c}$ હોવાથી]

કોઈક અચળ λ માટે, $\vec{b} - \vec{c} = \lambda \vec{a}$

$\therefore \quad \vec{b} = \vec{c} + \lambda \vec{a}$ 1

21. $\vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{b}$ અને $\vec{r} = \vec{c} + \mu\vec{d}$ રેખાઓ વચ્ચેનું લઘુતમ અંતર

$$D = \left|\frac{(\vec{c}-\vec{a})\cdot(\vec{b}\times\vec{d})}{|\vec{b}\times\vec{d}|}\right|$$

હવે આપેલાં સમીકરણ,

$\vec{r} = \left(-\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}\right) + \lambda\left(\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}\right)$ અને $r = \left(\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}\right) + \mu\left(-\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}\right)$

આથી, $\vec{c}-\vec{a} = 2\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$ $\frac{1}{2}$

અને $\vec{b}\times\vec{d} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3\vec{i} - 0\vec{j} + 3\vec{k}$ 1

$\therefore\ |\vec{b}\times\vec{d}| = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ $\frac{1}{2}$

તેથી, $D = \left|\frac{(\vec{c}-\vec{a})\cdot(\vec{b}\times\vec{d})}{|\vec{b}\times\vec{d}|}\right| = \left|\frac{6-0+9}{3\sqrt{2}}\right| = \frac{15}{3\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$. 2

22. ધારો કે, ઘટનાઓ E_1, E_2, E_3, E_4 અને A નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત છે :

E_1 = ખોવાયેલું પત્તું લાલનું છે.

E_2 = ખોવાયેલું પત્તું કાળીનું છે.

E_3 = ખોવાયેલું પત્તું ફૂલ્લીનું છે.

E_4 = ખોવાયેલું પત્તું ચોકટનું છે.

A = વધેલાં પત્તાંમાંથી બે લાલનાં પત્તાંની પસંદગી $\frac{1}{2}$

તેથી, $P(E_1) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$, $P(E_2) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$, $P(E_3) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$, $P(E_4) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$

$P(A|E_1)$ = લાલનું એક પત્તું ખોવાયું છે તેમ આપેલ હોય ત્યારે બે લાલનાં પત્તાંની પસંદગીની સંભાવના

$$= \frac{{}^{12}C_2}{{}^{51}C_2}$$

$P(A|E_2)$ = એક કાળીનું પત્તું ખોવાયું છે, તેમ આપેલ હોય ત્યારે બે લાલનાં પત્તાંની પસંદગીની સંભાવના

$$= \frac{{}^{13}C_2}{{}^{51}C_2}$$

તે જ પ્રમાણે, આપણને $P(A|E_3) = \frac{{}^{13}C_2}{{}^{51}C_2}$ અને $P(A|E_4) = \frac{{}^{13}C_2}{{}^{51}C_2}$ 1

બેયઝના પ્રમેય પરથી,

માંગેલી સંભાવના $= P(E_1 | A)$

$$= \frac{P(E_1)\,P(A|E_1)}{P(E_1)\,P(A|E_1)+P(E_2)\,P(A|E_2)+P(E_3)\,P(A|E_3)\;+P(E_4)\,P(A|E_4)}$$ 1

$$= \frac{\frac{1}{4}\,\frac{{}^{12}C_2}{{}^{51}C_2}}{\frac{1}{4}\times\frac{{}^{12}C_2}{{}^{51}C_2}+\frac{1}{4}\,\frac{{}^{13}C_2}{{}^{51}C_2}+\frac{1}{4}\,\frac{{}^{13}C_2}{{}^{51}C_2}+\frac{1}{4}\times\frac{{}^{13}C_2}{{}^{51}C_2}}$$ 1

$$= \frac{{}^{12}C_2}{{}^{12}C_2+{}^{13}C_2+{}^{13}C_2+{}^{13}C_2}$$

$$= \frac{66}{66+78+78+78} = \frac{11}{50}$$

વિભાગ C

23. $AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & -4 \\ -4 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = 6\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 6I$ 1

તે જ પ્રમાણે, $BA = 6I$, આથી, $AB = 6I = BA$

$AB = 6I$, $A^{-1}(AB) = 6A^{-1}I$ 1

તેથી, $IB = 6A^{-1}$, એટલે કે $A^{-1} = \frac{1}{6}B = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & 2 & -4 \\ -4 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ $1\frac{1}{2}$

આપેલ સમીકરણ સંહતિને $AX = C$ લખી શકાય.

$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 3 \\ 17 \\ 7 \end{bmatrix}$

આપેલ સંહતિ $AX = C$ નો ઉકેલ $X = A^{-1}C$ થાય. $\frac{1}{2}$

$$\therefore \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & 2 & -4 \\ -4 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 17 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 6+34-28 \\ -12+34-28 \\ 6-17+35 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$ 2

આથી, $x = 2$, $y = -1$ અને $z = 4$

24. સમક્રમી : કોઈ પણ $a, b \in \mathbf{R} - \{-1\}$ માટે $a * b = a + b + ab$ અને $b * a = b + a + ba$.

પરંતુ $\mathbf{R} - \{-1\}$ પર સરવાળા અને ગુણાકારના ક્રમના નિયમ પરથી,

$a + b + ab = b + a + ba$ થાય.

$\therefore \quad a * b = b * a$ 2

આથી, $\mathbf{R} - \{-1\}$ પર $*$ સમક્રમી છે.

તટસ્થ ઘટક : ધારો કે, e તટસ્થ ઘટક છે.

પ્રત્યેક $a \in \mathbf{R} - \{-1\}$ માટે, $a * e = e * a$

$\therefore \quad a + e + ae = a$ અને $e + a + ea = a$

માટે $e\,(1+a) = 0$. $a \neq -1$ હોવાથી $e = 0$

આમ, $\mathbf{R} - \{-1\}$ પર વ્યાખ્યાયિત $*$ માટે 0 તટસ્થ ઘટક છે.

વ્યસ્ત : ધારો કે, $a \in \mathbf{R} - \{-1\}$ અને a નો વ્યસ્ત b છે. 2

$a * b = e = b * a$

$\therefore \quad a * b = 0 = b * a$ $(e = 0)$

$\therefore \quad a + b + ab = 0$

$\therefore \quad b = \frac{-a}{a+1} \in \mathbf{R}$ ($a \neq -1$ હોવાથી)

તથા $\frac{-a}{a+1} \neq -1$. આમ, $b = \frac{-a}{a+1} \in \mathbf{R} - \{-1\}$ 2

આથી, $\mathbf{R} - \{-1\}$ ના પ્રત્યેક ઘટકના વ્યસ્તનું અસ્તિત્વ છે અને ઘટક a નો વ્યસ્ત $\frac{-a}{a+1}$ છે.

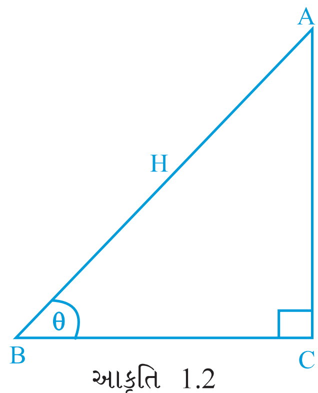
25. ધારો કે, H એ કર્ણ AB છે અને કર્ણ તથા કાટકોણ ત્રિકોણ ABC ના આધાર વચ્ચેનો ખૂણો θ છે.

આથી, પાયો = BC = $H\cos\theta$ અને લંબ = AC = $H\sin\theta$

કાટકોણ ત્રિકોણની પરિમિતિ = p

$= H + H\cos\theta + H\sin\theta$

પરિમિતિ, મહત્તમ અથવા ન્યૂનતમ માટે, $\frac{dp}{d\theta} = 0$



આકૃતિ 1.2

$\Rightarrow H(0 - \sin\theta + \cos\theta) = 0$, અર્થાત્ $\theta = \frac{\pi}{4}$ $\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ 2

હવે, $\left(\frac{d^2p}{d\theta^2}\right) = -H\cos\theta - H\sin\theta$ 1

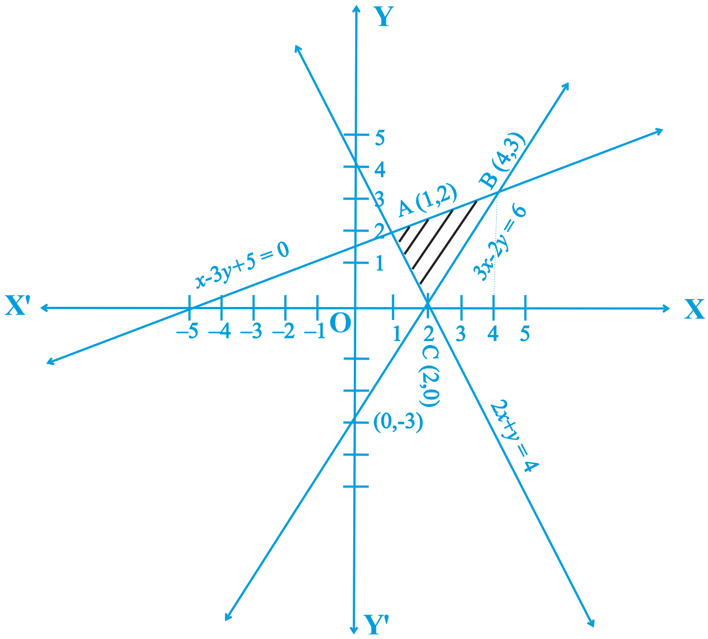
$\Rightarrow \left(\frac{d^2p}{d\theta^2}\right)_{\theta=\frac{\pi}{4}} = -H\left[\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right] = -\sqrt{2}H < 0$ 1

આમ, $\theta = \frac{\pi}{4}$ આગળ p મહત્તમ છે.

$\theta = \frac{\pi}{4}$ માટે, આધાર $H\,cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{H}{\sqrt{2}}$ અને લંબ $= \frac{H}{\sqrt{2}}$ 1

આથી, જ્યારે કાટકોણ ત્રિકોણની પરિમિતિ મહત્તમ થાય, ત્યારે ત્રિકોણ સમદ્વિબાજુ હોય. 1

26.



આકૃતિ 1.3

A(1, 2), B(4, 3) અને C(2, 0) આપેલી રેખાઓનાં છેદબિંદુઓ છે. 1

આથી, માંગેલું ક્ષેત્રફળ

$$= \int_1^4 \left(\frac{x+5}{3}\right) dx - \int_1^2 (4-2x)\, dx - \int_2^4 \left(\frac{3x-6}{2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{3}\left[\left(\frac{x^2}{2} + 5x\right)\right]_1^4 - \left[\left(4x-x^2\right)\right]_1^2 - \left[\left(\frac{3}{4}x^2 - 3x\right)\right]_2^4$$ $2\frac{1}{2}$

$$= \frac{1}{3}\left[\left(\frac{16}{2} + 20\right) - \left(\frac{1}{2} + 5\right)\right] - \left[(8-4)-(4-1)\right] - \left[(12-12) - (3-6)\right]$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{45}{2} - 1 - 3 = \frac{7}{2}$$ ચોરસ એકમ 1

અથવા

$$I = \int_1^4 (2x^2 - x)\, dx$$

$$= \int_1^4 f(x)\, dx$$ 1

$$= \lim_{h \to 0} \left[f(1) + f(1+h) + f(1+2h) + ... + f\left(1+(n-1)h\right)\right] \quad ...(i)$$

જ્યાં, $h = \frac{4-1}{n}$ એટલે કે, $nh = 3$

હવે, $f\left(1+\overline{n-1}h\right) = 2\left(1+(n-1)h\right)^2 - \left(1+(n-1)h\right)$

$= 2\left(1+(n-1)^2 h^2 + 2(n-1)h\right) -1\ (1 + (n - 1)\ h) = 2(n-1)^2 h^2 + 3(n-1)h + 1$

તેથી, $f(1) = 2\cdot 0^2 h^2 + 3\cdot 0\cdot h + 1$, $f(1+h) = 2\cdot 1^2 h^2 + 3\cdot 1\cdot h + 1$

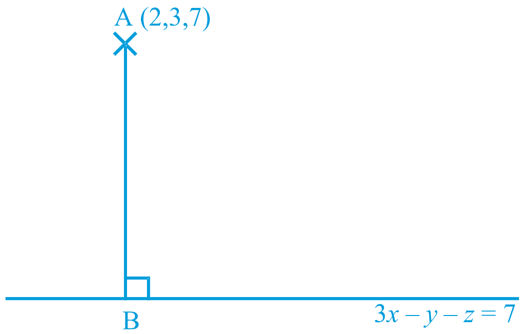
$f(1+2h) = 2\cdot 2^2 h^2 + 3\cdot 2\cdot h + 1$ $1\frac{1}{2}$

આમ, $I = \lim\limits_{h\to 0} h\left[n + 2\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}h^2 + \frac{3n(n-1)(nh-h)}{2}\right]$

$= \lim\limits_{h\to 0} hn + \frac{2(nh)(nh-h)(2nh-h)}{6} + \frac{3(nh)(nh-h)}{2}$ 2

$= \lim\limits_{h\to 0} \left\{3 + \frac{2(3)(3-h)(6-h)}{6} + \frac{3(3)(3-h)}{2}\right\} = \frac{69}{2}$ $1\frac{1}{2}$

27.



આકૃતિ 1.4

આપેલા સમતલને લંબ રેખા AB નું સમીકરણ

$\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-7}{-1} = \lambda$ (ધારો) $1\frac{1}{2}$

માટે, A માંથી સમતલ $3x - y - z = 7$ પર દોરેલા લંબના લંબપાદ B ના યામ કોઈક $\lambda \in R$ માટે,

$(3\lambda+2, -\lambda+3, -\lambda+7)$ $1\frac{1}{2}$

$B(3\lambda+2, -\lambda+3, -\lambda+7)$ સમતલ $3x - y - z = 7$ પર આવેલું હોવાથી,

$3(3\lambda + 2) - (-\lambda+3) - (-\lambda+7) = 7 \Rightarrow \lambda = 1$ 2

આમ, B = (5, 2, 6) અને અંતર AB = (લંબની લંબાઈ)

$\sqrt{(2-5)^2+(3-2)^2+(7-6)^2} = \sqrt{11}$ એકમ

આથી, લંબપાદના યામ (5, 2, 6) અને લંબની લંબાઈ = $\sqrt{11}$ 1

અથવા

આપેલી રેખાઓ

$\vec{r} = \hat{i} + \hat{j} + \lambda\left(\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}\right)$ ...(i)

અને $\vec{r} = \hat{i} + \hat{j} + \mu\left(-\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}\right)$ ...(ii)

રેખા (i) બિંદુ (1, 1, 0) માંથી પસાર થાય છે અને તેના દિક્ગુણોત્તર 1, 2, –1 છે. $\frac{1}{2}$

રેખા (ii) બિંદુ (1, 1, 0) માંથી પસાર થાય છે અને તેના દિક્ગુણોત્તર –1, 1, –2 $\frac{1}{2}$

રેખાઓ (i) અને (ii) માંગેલા સમતલમાં આવેલી હોવાથી, સદિશો 1

$\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ અને $\vec{c} = -\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ સમતલને સમાંતર છે. 1

આથી, માંગેલ સમતલ સદિશ $\vec{b} \times \vec{c}$ ને લંબ છે અને

$$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -3\hat{i} + 3\hat{j} + 3\hat{k}$$

આથી, માંગેલા સમતલનું સમીકરણ

$$(\vec{r} - \vec{a}) \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$$ 1

$$\therefore \left[\vec{r} - (\hat{i} + \hat{j})\right] \cdot \left(-3\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k}\right) = 0$$

$\Rightarrow \vec{r} \cdot (-\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) = 0$ અને તેનું કાર્તેઝિય સ્વરૂપ $-x + y + z = 0$

(1, 1, 1) થી સમતલનું અંતર

$$\frac{|1(-1) + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1|}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ એકમ}$$ 2

28. ધારો કે, X રાજાનાં બે પત્તાં ખેંચવાની સંખ્યા દર્શાવે છે, નોંધીશું કે X એ 0, 1, 2 કિંમત લઈ શકે તેવો યાદચ્છિક ચલ છે.

$$P(X = 0) = P(\text{રાજા ન મળે}) = \frac{{}^{48}C_2}{{}^{52}C_2} = \frac{\frac{48!}{2!(48-2)!}}{\frac{52!}{2!(52-2)!}} = \frac{48 \times 47}{52 \times 51} = \frac{188}{221}$$ 1

P (X = 1) = P (એક રાજા અને એક રાજા ન હોય.)

$$= \frac{{}^{4}C_1 \times {}^{48}C_1}{{}^{52}C_2} = \frac{4 \times 48 \times 2}{52 \times 51} = \frac{32}{221}$$ 1

અને $P(X = 2) = P$ (બે રાજા) $= \frac{{}^{4}C_2}{{}^{52}C_2} = \frac{4 \times 3}{52 \times 51} = \frac{1}{221}$ 1

આમ, X નું સંભાવના વિતરણ

X	0	1	2
P(X)	$\frac{188}{221}$	$\frac{32}{221}$	$\frac{1}{221}$

1

હવે, X નો મધ્યક $= E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(x_i)$

$$= 0 \times \frac{188}{221} + 1 \times \frac{32}{221} + 2 \times \frac{1}{221} = \frac{34}{221}$$

વળી, $E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 P(x_i)$

$$= 0^2 \times \frac{188}{221} + 1^2 \times \frac{32}{221} + 2^2 \times \frac{1}{221} = \frac{36}{221}$$

હવે, વિચરણ $= E(X^2) - [E(X)^2] = \frac{36}{221} - \left(\frac{34}{221}\right)^2 = \frac{6800}{(221)^2}$ 1

આથી, પ્રમાણિત વિચલન $= \sqrt{\text{વિચરણ}} = \frac{\sqrt{6800}}{221} = 0.37$ 1

29. ધારો કે મિશ્રણમાં ખાદ્યસામગ્રી I, x કિગ્રા અને ખાદ્યસામગ્રી II, y કિગ્રા છે.

આમ, $2x + y \geq 8$

$x + 2y \geq 10$

$x, y \geq 0$ પરથી, 2

આપણે $Z = 50x + 70y$ ને ન્યૂનતમ કરવાનું છે.

ઉપરની અસમતાઓથી બનતો શક્ય ઉકેલનો પ્રદેશ અસીમિત પ્રદેશ છે. શક્ય ઉકેલના પ્રદેશનાં શિરોબિંદુઓ

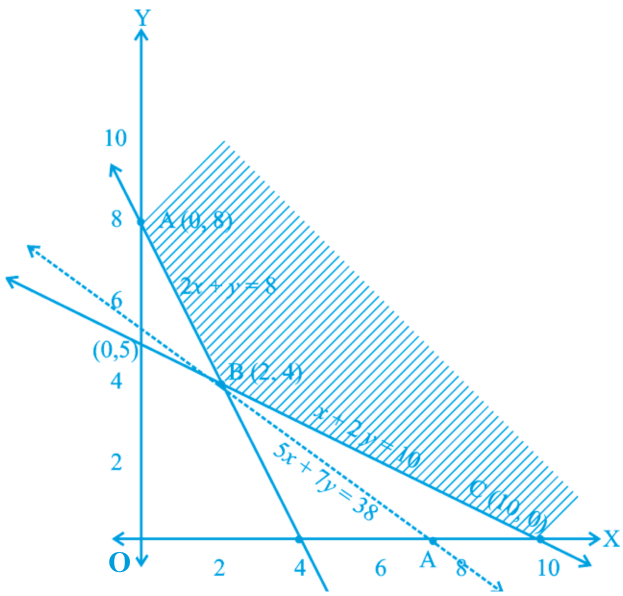
A(0, 8), B(2, 4), C(10, 0) $\frac{1}{2}$

હવે, A(0, 8) આગળ $Z = 50 \times 0 + 70 \times 8$

$= 560$ $2\frac{1}{2}$

B(2, 4) આગળ $Z = 380$

C(10, 0) આગળ $Z = 500$



આકૃતિ 1.5

શક્ય ઉકેલનો પ્રદેશ અસીમિત હોવાથી, આપણે $50x + 70y < 380$

અર્થાત્ $5x + 7y < 38$ નો આલેખ દોરીશું. $\frac{1}{2}$

ખુલ્લા અર્ધતલનું કોઈ પણ બિંદુ શક્ય ઉકેલના પ્રદેશનું બિંદુ નથી. આથી, Z નું ન્યૂનતમ મૂલ્ય B(2, 4) આગળ 380 થશે. તેથી મિશ્રણનો ન્યૂનતમ ખર્ચ, એટલે કે ₹ 380 કરવા માટે આહારવિદે 2 કિગ્રા ખાદ્યસામગ્રી I અને 4 કિગ્રા ખાદ્યસામગ્રી II નું ઇષ્ટતમ મિશ્રણ બનાવવાની કુશળતા રાખવી જોઈશે. $\frac{1}{2}$

પ્રશ્નપત્ર II

વિભાગ A

પ્રશ્નો 1 થી 3 માં આપેલા ચાર વિકલ્પોમાંથી સાચો ઉત્તર પસંદ કરો :

1. જો $* : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $a * b = a + b^2$, વડે વ્યાખ્યાયિત દ્વિક્ક્રિયા હોય, તો $-2 * 5$ = ...

(A) -52 (B) 23 (C) 64 (D) 13

2. જો $sin^{-1} : [-1, 1] \to \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ એ એક વિધેય હોય, તો $sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ નું મૂલ્ય .... છે.

(A) $\frac{-\pi}{6}$ (B) $\frac{\pi}{6}$ (C) $\frac{5\pi}{6}$ (D) $\frac{7\pi}{6}$

નોંધ : અહીં sin^{-1} ની અન્ય શાખાનો ઉપયોગ કર્યો છે.

3. જો $\begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ પર હાર પ્રક્રિયા $R_1 \to R_1 - 2R_2$ બંને તરફ કરતાં .... મળે.

(A) $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

4. જો A એ 3 કક્ષાવાળો ચોરસ શ્રેણિક હોય અને $|A| = 5$, તો $|adj\ A|$ નું મૂલ્ય શોધો.

5. જો A અને B એ 3 કક્ષાવાળા ચોરસ શ્રેણિકો હોય અને $|A| = -1$ તથા $|B| = 4$, તો $|3(AB)|$ નું મૂલ્ય શોધો.

6. $\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^3\right] = \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2$ નું પરિમાણ .... છે.

નીચેના ક્રમાંક 7 અને 8 ના પ્રશ્નોમાં વિધાન સત્ય બને તે રીતે યોગ્ય ખાલી જગ્યા પૂરો :

7. વિકલ સમીકરણ $x\frac{dy}{dx} - y = x^2$ ના ઉકેલ માટેનો સંકલ્યકારક અવયવ .... છે.

8. $|\hat{i} - \hat{j}|^2$ નું મૂલ્ય .... છે.

9. સમતલો $3x + 4y - 7 = 0$ અને $6x + 8y + 6 = 0$ વચ્ચેનું લંબઅંતર શોધો.

10. જો $\vec{a}$ એ એકમ સદિશ હોય અને $(\vec{x} - \vec{a})\cdot(\vec{x} + \vec{a}) = 99$, તો $|\vec{x}|$ નું મૂલ્ય શોધો.

વિભાગ B

11. જો n એ નિશ્ચિત ધન પૂર્ણાંક છે અને R એ Z પરનો નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત સંબંધ છે :

$aRb \Leftrightarrow a - b$ એ નિશ્ચિત ધન પૂર્ણાંક n વડે વિભાજ્ય છે, $\forall a, b \in Z$ તો સાબિત કરો કે R એ સામ્ય સંબંધ છે.

12. સાબિત કરો કે, $cot^{-1}7 + cot^{-1}8 + cot^{-1}18 = cot^{-1}3$.

અથવા

ઉકેલો : $tan^{-1}(2+x) + tan^{-1}(2-x) = tan^{-1}\frac{2}{3}$ $\quad -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$.

13. x માટે ઉકેલો : $\begin{vmatrix} x+2 & x+6 & x-1 \\ x+6 & x-1 & x+2 \\ x-1 & x+2 & x+6 \end{vmatrix} = 0$

અથવા

જો A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ અને B = $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$, તો સાબિત કરો કે $(AB)' = B'A'$.

14. $f(x) = \begin{cases} \frac{k\cos 2x}{\pi - 4x}, & \text{જો } x \neq \frac{\pi}{4} \\ 5, & \text{જો } x = \frac{\pi}{4} \end{cases}$

f એ $x = \frac{\pi}{4}$ આગળ સતત હોય, તો k શોધો.

15. જો $y = e^{a\cos^{-1}x}$ હોય, તો સાબિત કરો કે $(1 - x^2)\frac{d^2y}{d^2x} - x\frac{dy}{dx} - a^2y = 0$.

16. $x = sin3t$, $y = cos2t$ વક્ર પરના $t = \frac{\pi}{4}$ માટેના બિંદુએ સ્પર્શકનું સમીકરણ મેળવો.

અથવા

જે અંતરાલમાં $f(x) = sin^4 x + cos^4 x$ ચુસ્ત વધતું અને જે અંતરાલમાં ચુસ્ત ઘટતું વિધેય હોય, તે અંતરાલો નક્કી કરો. $0 < x < \frac{\pi}{2}$

17. કિંમત શોધો : $\int_0^{\frac{\pi}{6}} sin^4x\, cos^3x\, dx$

18. કિંમત શોધો : $\int \frac{3x+1}{2x^2 - 2x + 3}dx$

અથવા

કિંમત શોધો : $\int x \cdot (\log x)^2 dx$

19. ઉકેલો : $2y\, e^{\frac{x}{y}}\, dx + (y - 2\, x e^{\frac{x}{y}})\, dy = 0$. વળી, પ્રારંભિક શરત $x = 0$ હોય, ત્યારે $y = 1$ પરથી વિકલ સમીકરણનો વિશિષ્ટ ઉકેલ શોધો.

20. જો $\vec{a} = 2\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ અને $\vec{c} = 2\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$ તો, $\vec{b} + \vec{c}$ નો $\vec{a}$ પરનો પ્રક્ષેપ શોધો.

21. (1, 2, –4) માંથી પસાર થતી અને રેખાઓ $\vec{r} = (8\hat{i} - 16\hat{j} + 10\hat{k}) + \lambda(3\hat{i} - 16\hat{j} + 7\hat{k})$ અને $\vec{r} = (15\hat{i} + 29\hat{j} + 5\hat{k}) + \mu(3\hat{i} + 8\hat{j} - 5\hat{k})$ બંનેને લંબરેખાનું સદિશ સમીકરણ મેળવો.

22. આપેલ ત્રણ સિક્કાઓ પૈકી એક અસમતોલ સિક્કાને ઉછાળતા 60 % પરિણામમાં કાંટો આવે છે, જ્યારે બીજા અસમતોલ સિક્કાને ઉછાળતા 75 % પરિણામમાં છાપ આવે છે અને ત્રીજો સિક્કો સમતોલ છે. આ ત્રણ સિક્કાઓ પૈકી એક સિક્કો યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરી ઉછાળતાં તેના પર છાપ આવે છે, તો પસંદ થયેલ સિક્કો સમતોલ હોવાની સંભાવના કેટલી ?

વિભાગ C

23. જો $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ હોય, તો A^{-1} શોધો અને તે પરથી સમીકરણ સંહતિ $4x + 2y + 3z = 2$, $x + y + z = 1$, $3x + y - 2z = 5$ નો ઉકેલ મેળવો.

અથવા

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ નો વ્યસ્ત શ્રેણિક પ્રાથમિક ક્રિયાઓનો ઉપયોગ કરી મેળવો.

24. આપેલ તિર્યક ઊંચાઈ અને મહત્તમ ઘનફળવાળા શંકુનો અર્ધશિર્ષકોણ $tan^{-1}\sqrt{2}$ છે તેમ સાબિત કરો.

25. સરવાળાના લક્ષ તરીકે $\int_1^3 (3x^2 + 2x + 5)\,dx$ મેળવો.

26. વર્તુળ $x^2 + y^2 = 4$ પરના $(1, \sqrt{3})$ બિંદુએ દોરેલા સ્પર્શક, અભિલંબ અને ધન x-અક્ષથી રચાતા ત્રિકોણના ત્રિકોણીય પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ સંકલનની મદદથી શોધો.

27. સમતલો $x + 3y + 6 = 0$ અને $3x - y - 4z = 0$ ના છેદમાંથી પસાર થતા તથા જેનું ઊગમબિંદુથી લંબઅંતર એક એકમ હોય તેવા સમતલનું સમીકરણ શોધો.

અથવા

બિંદુ (3, 4, 5) નું સમતલ $x + y + z = 2$ થી $2x = y = z$ રેખાને સમાંતર અંતર શોધો.

28. ચાર ખામીવાળા ગોળા આકસ્મિક રીતે છ ખામીરહિત ગોળા સાથે મિશ્ર થઈ ગયા છે. ફક્ત જોઈને ગોળો ખામીવાળો છે કે ખામીરહિત તે કહી શકાય તેમ નથી. ચાર ગોળાની પસંદગી યાદચ્છિક રીતે કરવામાં આવે, તો ખામીવાળા ગોળાની સંખ્યા માટેનું સંભાવના વિતરણ મેળવો.

29. એક ફર્નિચર ઉત્પાદક ત્રણ મશીન A, B અને C નો ઉપયોગ કરીને ખુરશી અને ટેબલનું ઉત્પાદન કરે છે. એક ખુરશીનું ઉત્પાદન કરવા માટે મશીન A ને 2 કલાક, મશીન B ને 1 કલાક અને મશીન C ને 1 કલાક લાગે છે. એક ટેબલનું ઉત્પાદન કરવા માટે મશીન A તથા B ને 1 કલાક અને મશીન C ને 3 કલાકની જરૂર પડે છે. ઉત્પાદકને એક ખુરશીના વેચાણ દ્વારા ₹ 30 નો નફો મળે છે, જ્યારે એક ટેબલના વેચાણ દ્વારા ₹ 60 નો નફો થાય છે. મશીન A એક અઠવાડિયામાં 70 કલાક, મશીન B 40 કલાક અને મશીન C 90 કલાક માટે પ્રાપ્ત છે. એક અઠવાડિયામાં કેટલી ખુરશી તથા કેટલા ટેબલનું ઉત્પાદન કરવું પડે કે જેથી મહત્તમ નફો મળે ? આ પ્રશ્નને સુરેખ આયોજનના પ્રશ્ન તરીકે આલેખની રીતે ઉકેલો.

ગુણ પ્રદાન યોજના

વિભાગ A

1. B	**2.** D	**3.** B	
4. 25	**5.** –108	**6.** 2	**7.** $\frac{1}{x}$
8. 2	**9.** 2 એકમ	**10.** 10	$1 \times 10 = 10$

વિભાગ B

11. (i) અહીં $a\text{R}a, \ \forall a \in Z$ કારણ કે $a - a = 0$ એ કોઈ પણ ધન પૂર્ણાંક n વડે વિભાજ્ય હોવાથી, R સ્વવાચક સંબંધ છે. 1

(ii) $a\text{R}b \Rightarrow a - b$ એ n વડે વિભાજ્ય છે. તેથી $b - a$ પણ n વડે વિભાજ્ય છે. તેથી $b\text{R}a$. આમ, R સંમિત સંબંધ છે. 1

(iii) જો $a\text{R}b$ અને $b\text{R}c$, $a, b, c, \in \mathbf{Z}$, તો કોઈક $p, q \in \mathbf{Z}$ માટે

$a - b = n\,p, \ b - c = n\,q$ 1

$\therefore \ a - c = n\,(p + q)$ અને તેથી $a\text{R}c$.

તેથી, R પરંપરિત સંબંધ છે. આમ, R એ સ્વવાચક, સંમિત અને પરંપરિત છે. 1

$\therefore$ R એ સામ્ય સંબંધ છે.

12. ડા.બા. $= tan^{-1}\frac{1}{7} + tan^{-1}\frac{1}{8} + tan^{-1}\frac{1}{18}$ 1

$$= tan^{-1}\frac{\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{8}} + tan^{-1}\frac{1}{18}$$

$$= tan^{-1}\left(\frac{15}{55}\right) + tan^{-1}\frac{1}{18}$$ 1

$$= tan^{-1}\frac{3}{11} + tan^{-1}\frac{1}{18}$$

$$= tan^{-1}\frac{\frac{3}{11}+\frac{1}{18}}{1-\frac{3}{11}\cdot\frac{1}{18}}$$ 1

$$= tan^{-1}\frac{65}{195}$$

$$= tan^{-1}\frac{1}{3} = cot^{-1}3 = \text{જ.બા.}$$ 1

અથવા

$$tan^{-1}(2 + x) + tan^{-1}(2 - x) = tan^{-1}\frac{2}{3}$$

$$\therefore \ tan^{-1}\frac{(2+x)+(2-x)}{1-(2+x)(2-x)} = tan^{-1}\frac{2}{3}$$ $1\frac{1}{2}$

$$\therefore \ \frac{4}{x^2-3} = \frac{2}{3}$$ $1\frac{1}{2}$

$\therefore \ x^2 = 9.$

તેથી $x = \pm 3$ 1

ચકાસો : નોંધ : (1) $(2 + x)(2 - x) = (4 - x^2) = -5 < 1$

(2) $4 - x^2 < 1 \Leftrightarrow x^2 > 3 \Rightarrow |x| > \sqrt{3}$ આવશ્યક છે.

13. અહીં, $\begin{vmatrix} x+2 & x+6 & x-1 \\ x+6 & x-1 & x+2 \\ x-1 & x+2 & x+6 \end{vmatrix} = 0$

$R_2 \to R_2 - R_1$, $R_3 \to R_3 - R_1$, કરતાં, $\begin{vmatrix} x+2 & x+6 & x-1 \\ 4 & -7 & 3 \\ -3 & -4 & 7 \end{vmatrix} = 0$ મળે. $1\frac{1}{2}$

$C_2 \to C_2 - C_1$, $C_3 \to C_3 - C_1$, કરતાં, $\begin{vmatrix} x+2 & 4 & -3 \\ 4 & -11 & -1 \\ -3 & -1 & 10 \end{vmatrix} = 0$ $1\frac{1}{2}$

$\therefore \ (x + 2)\ (-111) - 4(37) - 3(-37) = 0$ 1

ઉકેલતાં, $x = -\frac{7}{3}$

અથવા

$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -4 \\ 15 & 5 & -6 \end{pmatrix}$ 1

$\therefore$ ડા.બા. $= (AB)' = \begin{pmatrix} 7 & 15 \\ 3 & 5 \\ -4 & -6 \end{pmatrix}$ 1

જ.બા. $= B'\ A' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 15 \\ 3 & 5 \\ -4 & -6 \end{pmatrix}$ 2

$\therefore$ ડા.બા. = જ.બા.

14. અહીં, f એ $x = \frac{\pi}{4}$, આગળ સતત હોવાથી, $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} f(x) = 5$ થાય.

હવે, $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} f(x) = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{k \cdot \cos 2x}{\pi - 4x}$

$= \lim\limits_{y \to 0} \frac{k \cos 2\left(\frac{\pi}{4} - y\right)}{\pi - 4\left(\frac{\pi}{4} - y\right)}$, જ્યાં, $\frac{\pi}{4} - x = y$, 1

$= \lim\limits_{y \to 0} \frac{k \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2y\right)}{\pi - \pi + 4y}$ 1

$= \lim\limits_{y \to 0} \frac{(k \sin 2y)}{2 \cdot 2y} = \frac{k}{2}$ 1

$\therefore \ \frac{k}{2} = 5 \Rightarrow k = 10$ 1

15. $y = e^{a\cos^{-1}x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^{a\cos^{-1}x}\frac{(-a)}{\sqrt{1-x^2}}$ 1

$\therefore \quad \sqrt{1-x^2}\,\frac{dy}{dx} = -ay$ ...(i)

x ને સાપેક્ષ ફરી વિકલન કરતાં,

$\sqrt{1-x^2}\,\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\frac{dy}{dx} = -a\frac{dy}{dx}$

$\therefore \quad (1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = -a\sqrt{1-x^2}\,\frac{dy}{dx}$ $1\frac{1}{2}$

$= -a\,(-ay)$ [(i) પરથી]

$\therefore \quad (1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - a^2y = 0.$ $1\frac{1}{2}$

બીજી રીત :

$(1-x^2)\,y_1^2 = a^2 - y^2$

$(1-x^2)\,2y_1y_2 - 2xy_1^2 = 2a^2yy_1$

$(1-x^2)\,y_2 - xy_1 = a^2y$

$\left(y_1 = \frac{dy}{dx},\ y_2 = \frac{d^2y}{dx^2},\right)$

16. $\frac{dx}{dt} = 3\cos 3t, \ \frac{dy}{dt} = -2\sin 2t$ 1

$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{2\sin 2t}{3\cos 3t}$ અને $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{-2\sin\frac{\pi}{2}}{3\cos\frac{3\pi}{4}} = \frac{-2}{3\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ 1

વળી, $x = \sin 3t = \sin\frac{3\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ અને $y = \cos 2t = \cos\frac{\pi}{2} = 0.$

$\therefore$ સ્પર્શબિંદુ $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ છે. 1

તેથી, સ્પર્શકનું સમીકરણ, $y - 0 = \frac{2\sqrt{2}}{3}\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$\therefore \quad 2\sqrt{2}\,x - 3y - 2 = 0$ 1

અથવા

$f'(x) = 4\sin^3x\cos x - 4\cos^3x\sin x$

$= -4\sin x\cos x\,(\cos^2x - \sin^2x)$

$= -\sin 4x$ 1

$f'(x) = 0 \Rightarrow 4x = n\pi \Rightarrow x = \frac{n\pi}{4}$. વળી, $0 < x < \frac{\pi}{2}$

હવે, $0 < x < \frac{\pi}{4}$ હોવાથી $f'(x) < 0$ 1

$\therefore$ f એ $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ માં ચુસ્ત ઘટતું વિધેય છે. $1\frac{1}{2}$

તે જ પ્રમાણે, આપણે બતાવી શકીએ કે f એ $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ માં ચુસ્ત વધતું વિધેય છે. $1\frac{1}{2}$

17. $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^4 x \cos^3 x \, dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^4 x (1 - \sin^2 x) \cos x \, dx$ 1

$= \int_0^{\frac{1}{2}} t^4 (1 - t^2) \, dt$ ($\sin x = t$ લેતાં) 1

$= \int_0^{\frac{1}{2}} (t^4 - t^6) \, dt$

$= \left[\frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7}\right]_0^{\frac{1}{2}}$ 1

$= \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5 - \frac{1}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{1}{32}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{28}\right) = \frac{23}{4480}$ 1

18. $I = \int \frac{3x + 1}{2x^2 - 2x + 3} dx = \int \frac{\frac{3}{4}(4x-2) + \frac{5}{2}}{2x^2 - 2x + 3} dx$ 1

$= \frac{3}{4}\int \frac{4x - 2}{2x^2 - 2x + 3} dx + \frac{5}{4}\int \frac{1}{x^2 - x + \frac{3}{2}} dx$

$= \frac{3}{4} \log |2x^2 - 2x + 3| + \frac{5}{4}\int \frac{dx}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}$ $1\frac{1}{2}$

$= \frac{3}{4} \log |2x^2 - 2x + 3| + \frac{5}{4} \times \frac{2}{\sqrt{5}} \tan^{-1} \frac{2x - 1}{\sqrt{5}} + c$ $1\frac{1}{2}$

$= \frac{3}{4} \log |2x^2 - 2x + 3| + \frac{\sqrt{5}}{2} \tan^{-1} \frac{2x - 1}{\sqrt{5}} + c$

અથવા

$$I = \int x(\log x)^2 dx$$

$$= \int (\log x)^2\, x\, dx \qquad 1$$

$$= (\log x)^2 \frac{x^2}{2} - \int 2\log x \times \frac{1}{x} \times \frac{x^2}{2} dx \qquad \frac{1}{2}$$

$$= \frac{x^2}{2}(\log x)^2 - \int \log x \cdot x\, dx \qquad 1\frac{1}{2}$$

$$= \frac{x^2}{2}(\log x)^2 - \left[\log x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{1}{x}\cdot\frac{x^2}{2} dx\right] \qquad 1$$

$$= \frac{x^2}{2}(\log x)^2 - \frac{x^2}{2}\log x + \frac{x^2}{4} + c \qquad \frac{1}{2}$$

19. અહીં આપેલ વિકલ સમીકરણ

$\frac{dx}{dy} = \frac{2xe^{\frac{x}{y}} - y}{2y.e^{\frac{x}{y}}}$ સ્વરૂપે દર્શાવી શકાય. $\frac{1}{2}$

હવે, આદેશ $\frac{x}{y} = v$ લેતાં, $x = vy \Rightarrow \frac{dx}{dy} = v + y\frac{dv}{dy}$ $\frac{1}{2}$

$$\therefore \quad v + y\frac{dv}{dy} = \frac{2v\,ye^v - y}{2ye^v} = \frac{2ve^v - 1}{2e^v} \qquad \frac{1}{2}$$

$$y\frac{dv}{dy} = \frac{2ve^v - 1}{2e^v} - v \qquad 1$$

$$\therefore \quad 2e^v dv = -\frac{dy}{y}$$

$$\therefore \quad 2e^v = -\log|y| + c \qquad 1$$

$$\therefore \quad 2e^{\frac{x}{y}} = -\log|y| + c$$

હવે, $x = 0, \quad y = 1$

$\Rightarrow c = 2$

તેથી, વિકલ સમીકરણનો વિશિષ્ટ ઉકેલ $2e^{\frac{x}{y}} = -\log|y| + 2$ $\frac{1}{2}$

20. $\vec{b} + \vec{c} = (\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}) + (2\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}) = 3\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ 1

$\vec{a} = 2\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$

$(\vec{b} + \vec{c})$ નો $\vec{a}$ પરનો પ્રક્ષેપ $= \frac{(\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{6-2+1}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{5}{3}$ એકમ $\quad 1 + 1 + 1$

21. બંને રેખાઓને લંબ સદિશ

$$(3\hat{i}-16\hat{j}+7\hat{k}) \times (3\hat{i}+8\hat{j}-5\hat{k}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & -16 & 7 \\ 3 & 8 & -5 \end{vmatrix}$$ $1\frac{1}{2}$

$= 24\hat{i}+36\hat{j}+72\hat{k}$ અથવા $12(2\hat{i}+3\hat{j}+6\hat{k})$ 1

માંગેલ રેખાનું સમીકરણ

$\vec{r} = (\hat{i}+2\hat{j}-4\hat{k})+\lambda(2\hat{i}+3\hat{j}+6\hat{k})$ $1\frac{1}{2}$

22. ધારો કે ઘટના E_1: પ્રથમ અસમતોલ સિક્કો પસંદ થાય છે.

E_2: બીજો અસમતોલ સિક્કો પસંદ થાય છે.

E_3: ત્રીજો સમતોલ સિક્કો પસંદ થાય છે.

$P(E_1) = P(E_2) = P(E_3) = \frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}$

ઘટના A : સિક્કા પર છાપ આવે.

$\therefore \quad P(A \mid E_1) = \frac{40}{100}, \quad P(A \mid E_2) = \frac{75}{100}, \quad P(A \mid E_3) = \frac{1}{2}$ $1\frac{1}{2}$

$$P(E_3 \mid A) = \frac{P(E_3)P(A \mid E_3)}{P(E_1)P(A \mid E_1)+P(E_2)P(A \mid E_2)+P(E_3)P(A \mid E_3)}$$ $\frac{1}{2}$

$$= \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{40}{100}+\frac{1}{3}\cdot\frac{75}{100}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{10}{33}$$ $1\frac{1}{2}$

વિભાગ C

23. $|A| = 4(-3) - 1(-7) + 3(-1) = -12 + 7 - 3 = -8$ 1

$A_{11} = -3 \qquad A_{12} = 7 \qquad A_{13} = -1$ $1\frac{1}{2}$

$A_{21} = 5 \qquad A_{22} = -17 \qquad A_{23} = -1$

$A_{31} = -2 \qquad A_{32} = 2 \qquad A_{33} = 2$

$$\therefore \quad A^{-1} = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} -3 & 5 & -2 \\ 7 & -17 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$ $\frac{1}{2}$

આપેલ સમીકરણ સંહતિને નીચેના સ્વરૂપે લખી શકાય :

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$\therefore \; A' \cdot X = B \Rightarrow X = (A')^{-1} B$ 1

$$= (A^{-1})' B$$

$$\therefore \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{-1}{8}\begin{pmatrix} -3 & 7 & -1 \\ 5 & -17 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} -6 + 7 - 5 \\ 10 - 17 - 5 \\ -4 + 2 + 10 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} -4 \\ -12 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$ $1\frac{1}{2}$

$\therefore \quad x = \frac{1}{2}, \quad y = \frac{3}{2}, \quad z = -1$ $\frac{1}{2}$

અથવા

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A$$ $\frac{1}{2}$

$R_2 \rightarrow R_2 + R_1$ કરતાં $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A$ 1

$R_2 \rightarrow R_2 + 2R_3$ કરતાં $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A$ 1

$R_3 \rightarrow R_3 + 2R_2$ કરતાં $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} A$ 1

$R_1 \rightarrow R_1 + 2R_3$ કરતાં $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 10 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} A$ 1

$$R_1 \to R_1 - 2R_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} A$$ 1

$$\therefore \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$ $\frac{1}{2}$

24. ઘનફળ $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ $\frac{1}{2}$

$l^2 = h^2 + r^2$ $1\frac{1}{2}$

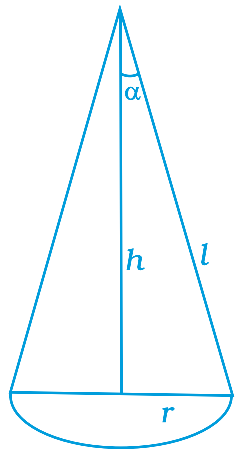
$V = \frac{1}{3}\pi (l^2 - h^2)\ h = \frac{1}{3}\pi (l^2 h - h^3)$ $\frac{1}{2}$

$\frac{dV}{dh} = \frac{\pi}{3}(l^2 - 3h^2) = 0$ $1\frac{1}{2}$

$l = \sqrt{3}h,\ r = \sqrt{2}h$

$tan\, \alpha = \frac{r}{h} = \sqrt{2}$

$\alpha = tan^{-1}\sqrt{2}$



આકૃતિ 2.1

$\frac{d^2V}{dh^2} = -2\pi h < 0$ 1

$\therefore$ ઘનફળ મહત્તમ થશે.

25. $I = \int_1^3 (3x^2 + 2x + 5)\, dx = \int_1^3 f(x)\, dx$

$= \lim_{h \to o} h\left[f(1) + f(1+h) + f(1+2h) + ... + f(1+(n-1)h)\right]$ ... (i) 1

જ્યાં, $h = \frac{3-1}{n} = \frac{2}{n}$

હવે, $f(1) = 3 + 2 + 5 = 10$

$f(1+h) = 3 + 3h^2 + 6h + 2 + 2h + 5 = 10 + 8h + 3h^2$

$f(1+2h) = 3 + 12h^2 + 12h + 2 + 4h + 5 = 10 + 8 \cdot 2 \cdot h + 3 \cdot 2^2 \cdot h^2$ $1\frac{1}{2}$

$f(1+(n-1)h) = 10 + 8(n-1)\ h + 3(n-1)^2 \cdot h^2$

$I = \lim_{n \to \infty} h\left[10n + 8h\frac{n(n-1)}{2} + 3h^2 \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}\right]$ $1\frac{1}{2}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n}\left[10n + \frac{16}{n}\frac{n(n-1)}{2} + \frac{12}{n^2}\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}\right]$$

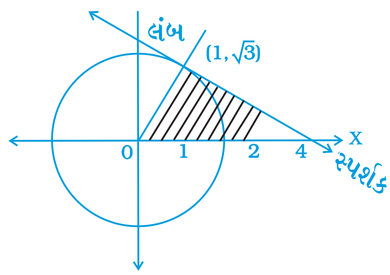
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n}\left[10n + 8(n-1) + \frac{2}{n}(n-1)(2n-1)\right]$$ $\frac{1}{2}$

$$= \lim_{n\to\infty} 2\left[10 + 8\left(1-\frac{1}{n}\right) + 2\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)\right]$$ 1

$$= 2\,[10 + 8 + 4] = 44$$ $\frac{1}{2}$

નોંધ : $n \to \infty$ એ શ્રેણીલક્ષની સંકલ્પના છે, જે અભ્યાસક્રમમાં નથી.

26. $x^2 + y^2 = 4$ ના $(1, \sqrt{3})$ આગળના સ્પર્શકનું સમીકરણ $x + \sqrt{3}y = 4$



આકૃતિ 2.2

$\therefore\ y = \frac{4-x}{\sqrt{3}}$ છે. 1

અભિલંબનું સમીકરણ $y = \sqrt{3}x$ 1

$\therefore$ માંગેલ ક્ષેત્રફળ $= \int_0^1 \sqrt{3}\,x\,dx + \int_1^4 \frac{4-x}{\sqrt{3}}\,dx$ 1

$$= \left(\sqrt{3}\,\frac{x^2}{2}\right)_0^1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(4x - \frac{x^2}{2}\right)_1^4$$ 1

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\left[8 - \frac{7}{2}\right] = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$ ચો.એકમ 2

27. માંગેલ સમતલનું સમીકરણ

$(x + 3y + 6) + \lambda\,(3x - y - 4z) = 0$ $1\frac{1}{2}$

$\therefore\ (1 + 3\lambda)\,x + (3 - \lambda)\,y - 4\lambda\,z + 6 = 0$ $\frac{1}{2}$

ઊગમબિંદુથી સમતલનું લંબઅંતર $1\frac{1}{2}$

$$\frac{6}{\sqrt{(1+3\lambda)^2 + (3-\lambda)^2 + (-4\lambda)^2}} = 1$$

અથવા $36 = 1 + 9\lambda^2 + 6\lambda + 9 + \lambda^2 - 6\lambda + 16\lambda^2$

અથવા $26\lambda^2 = 26 \Rightarrow \lambda = \pm 1$

$\therefore$ માંગેલ સમતલનાં સમીકરણો

$4x + 2y - 4z + 6 = 0$ અને $-2x + 4y + 4z + 6 = 0$ $1\frac{1}{2}$

અથવા $2x + y - 2z + 3 = 0$ અને $x - 2y - 2z - 3 = 0$ 1

અથવા

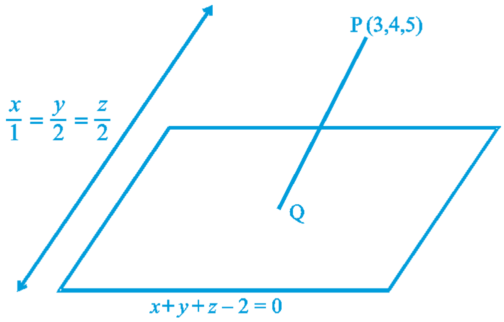
આપેલ રેખાનું સમીકરણ $2x = y = z$ એટલે, $\frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$

અથવા $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{2}$ 1

રેખા PQ નું સમીકરણ 2

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-5}{2} = \lambda$$ 1

$Q(\lambda+3,\ 2\lambda+4,\ 2\lambda+5)$ સમતલ પર છે. $1\frac{1}{2}$



આકૃતિ 2.3

તેથી, $\lambda + 3 + 2\lambda + 4 + 2\lambda + 5 - 2 = 0$ $1\frac{1}{2}$

અથવા $5\lambda = -10$. તેથી $\lambda = -2$.

તેથી, Q ના યામ (1, 0, 1) થશે. P(3, 4, 5) છે.

$\therefore \quad PQ = \sqrt{4+16+16} = 6$ એકમ

28. ધારો કે, x એ ખામીવાળા ગોળાની સંખ્યા દર્શાવે છે. 1

$$P(X=0) = \frac{^6C_4}{^{10}C_4} = \frac{6\cdot5\cdot4\cdot3}{10\cdot9\cdot8\cdot7} = \frac{1}{14}$$ 1

$$P(X=1) = \frac{^6C_3\ ^4C_1}{^{10}C_4} = \frac{6\cdot5\cdot4\cdot4}{10\cdot9\cdot8\cdot7}\ 4 = \frac{8}{21}$$ 1

$$P(X=2) = \frac{^6C_2\ ^4C_2}{^{10}C_4} = \frac{6\cdot5\cdot4\cdot3}{10\cdot9\cdot8\cdot7}\cdot6 = \frac{3}{7}$$ 1

$$P(X=3) = \frac{^6C_1\ ^4C_3}{^{10}C_4} = \frac{6\cdot4\cdot3\cdot2}{10\cdot9\cdot8\cdot7}\cdot4 = \frac{4}{35}$$ 1

$$P(X=4) = \frac{^4C_4}{^{10}C_4} = \frac{4\cdot3\cdot2\cdot1}{10\cdot9\cdot8\cdot7} = \frac{1}{210}$$ 1

X	0	1	2	3	4
P(X)	$\frac{1}{14}$	$\frac{8}{21}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{35}$	$\frac{1}{210}$

1

29. ધારો કે, એક અઠવાડિયામાં x નંગ ખુરશી અને y નંગ ટેબલનું ઉત્પાદન કરવામાં આવે છે.

તેથી આપણે,

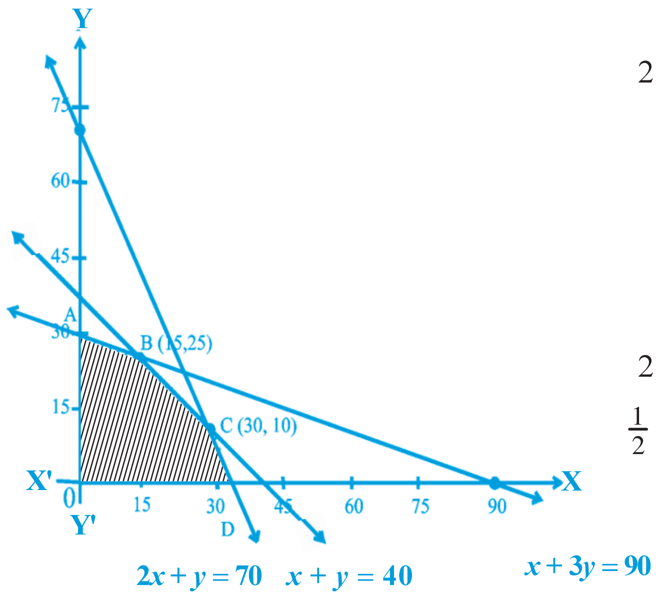
$2x + y \le 70$ 2

$x + y \le 40$

$x + 3y \le 90$

$x \ge 0,\ y \ge 0$ શરતોને અધીન.

P = 30 x + 60 y નું મૂલ્ય મહત્તમ કરીશું.



આકૃતિ 2.4

શક્ય ઉકેલ પ્રદેશનાં શિરોબિંદુઓ, 2

A(0,30), B(15, 25), C(30,10), D(35, 0) $\frac{1}{2}$

A આગળ, P = 30 (60) = 1800

B આગળ, P = 30 (15 + 50) = 1950

C આગળ, P = 30 (30 + 20) = 1500

D આગળ, P = 30 (35) = 1050

$\therefore$ 15 ખુરશી અને 25 ટેબલનું ઉત્પાદન કરે તો, P મહત્તમ મળે. $1\frac{1}{2}$

(શક્ય ઉકેલનો પ્રદેશ સીમિત છે.)