ઉદાહરણ 21 :

(i) જો $b_{yx} = 0.85$, $u = x - 15$ અને $v = y - 20$ હોય, તો b_{vu}ની કિંમત શોધો.

(ii) જો $u = \frac{x-5}{3}$, $v = \frac{y-8}{5}$ અને $b_{yx} = 0.9$ હોય, તો b_{vu}ની કિંમત શોધો.

(iii) જો $u = 10(x - 4.5)$, $v = \frac{y-50}{10}$ અને $b_{yx} = 0.25$ હોય, તો b_{vu}ની કિંમત શોધો.

(iv) જો $u = 5(x - 40)$, $v = 2(y - 18)$ અને $b_{yx} = 1.6$ હોય, તો b_{vu}ની કિંમત શોધો.

ઉપર્યુક્ત બધા જ પ્રશ્નોના ઉકેલ માટે નિયતસંબંધાંકના નીચેના ગુણધર્મનો ઉપયોગ કરીશું :

- જો $u = x - A$ અને $v = y - B$ હોય, તો $b_{yx} = b_{vu}$
- જો $u = \frac{x-A}{c_x}$ અને $v = \frac{y-B}{c_y}$ હોય, તો $b_{yx} = b_{vu} \cdot \frac{c_y}{c_x}$

(i) $u = x - 15 = x - A$ અને $v = y - 20 = y - B$ હોવાથી

$\therefore\ b_{vu} = b_{yx} = 0.85$ જ થાય.

(ii) $u = \frac{x-5}{3} = \frac{x-A}{c_x}$ અને $v = \frac{y-8}{5} = \frac{y-B}{c_y}$ હોવાથી

$b_{yx} = b_{vu} \cdot \frac{c_y}{c_x} \quad \therefore\ b_{vu} = b_{yx} \cdot \frac{c_x}{c_y} = 0.9 \times \frac{3}{5} = 0.54$ થાય.

(iii) $u = 10(x - 4.5) = \frac{x-4.5}{\frac{1}{10}} = \frac{x-A}{c_x}$ અને $v = \frac{y-50}{10} = \frac{y-B}{c_y}$ હોવાથી

$b_{yx} = b_{vu} \cdot \frac{c_y}{c_x} \quad \therefore\ b_{vu} = b_{yx} \cdot \frac{c_x}{c_y} = 0.25 \times \frac{\left(\frac{1}{10}\right)}{10} = 0.25 \times \frac{1}{100} = 0.0025$ થાય.

(iv) જો $u = 5(x - 40) = \frac{x-40}{\frac{1}{5}} = \frac{x-A}{c_x}$ અને $v = 2(y - 18) = \frac{y-18}{\frac{1}{2}} = \frac{y-B}{c_y}$ હોવાથી

$b_{yx} = b_{vu} \cdot \frac{c_y}{c_x} \quad \therefore\ b_{vu} = b_{yx} \cdot \frac{c_x}{c_y} = 1.6 \times \frac{\left(\frac{1}{5}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)} = 1.6 \times \frac{2}{5} = 0.64$ થાય.

3.8 નિયતસંબંધના ઉપયોગમાં રાખવી પડતી સાવચેતી

આપણે જાણીએ છીએ કે નિયતસંબંધ એ બે સહસંબંધિત ચલ વચ્ચેનો વિધેયાત્મક સંબંધ છે અને તેથી તેના પરથી સાપેક્ષ ચલની કિંમતનું અનુમાન કરી શકાય છે. વ્યાવહારિક ક્ષેત્રો જેવાં કે અર્થશાસ્ત્ર, વેપાર, ઉદ્યોગો, શિક્ષણ, મનોવિજ્ઞાન, સમાજશાસ્ત્ર, તબીબી, આયોજન વગેરેમાં નિર્ણય-ઘડતર માટે નિયતસંબંધ ખૂબ ઉપયોગી છે. નિયતસંબંધનો ખૂબ બહોળા પ્રમાણમાં ઉપયોગ થાય છે પરંતુ તેના ઉપયોગમાં કેટલીક સાવચેતી રાખવી જરૂરી છે.

(1) સાપેક્ષ ચલના અનુમાનની વિશ્વસનીયતા નિશ્ચાયકતાના આંક $\left(R^2\right)$ પરથી ચકાસી શકાય છે. તેથી આપણે નિશ્ચાયકતાના આંક પરથી નિયતસંબંધ સુરેખ છે તે ચકાસ્યા બાદ જ મેળવેલ અનુમાનનો ઉપયોગ કરવો જોઈએ.

(2) નિયતસંબંધના અભ્યાસમાં ધ્યાનમાં રાખવી જરૂરી અન્ય બાબત એ છે કે, વિકીર્ણ આકૃતિ કે ન્યૂનતમ વર્ગોની રીત પરથી મળતા નિયતસંબંધનો ઉપયોગ નિરપેક્ષ ચલની આપેલી કિંમતોથી બહુ દૂરની કિંમતો માટે ન થવો જોઈએ.

દા.ત., જો કોઈ માહિતી પરથી વરસાદ અને ઘઉંની ઊપજ વચ્ચે ગાઢ પ્રમાણમાં સહસંબંધ જોવા મળે તો કહી શકાય કે, જેમ વરસાદ વધે તેમ ઘઉંની ઊપજ પણ વધે. હવે આપેલી માહિતી પરથી મેળવેલ નિયતસંબંધનો ઉપયોગ વરસાદની કોઈ કિંમત પરથી તેને અનુરૂપ ઘઉંની ઊપજનું અનુમાન મેળવવું હોય તો તે કિંમત માહિતીમાં વરસાદની આપેલી કિંમતોની આસપાસ નજીકની હોય તો જ ઘઉંની ઊપજનું યોગ્ય અનુમાન મળી શકે છે. જો ખૂબ વધુ વરસાદ પડે તો પાકને નુકસાન થાય અને તેથી ઘઉંની ઊપજ ઘટી પણ શકે છે. આવા સમયે ઉપર્યુક્ત નિયતસંબંધ પરથી સાપેક્ષ ચલ (ઊપજ)નું અનુમાન ખોટું પડી શકે છે.

સારાંશ

- અભ્યાસ હેઠળના બે ચલ વચ્ચે કાર્ય-કારણનો સંબંધ છે તે પૂર્વધારણા લઈ નિયતસંબંધનો અભ્યાસ કરવામાં આવે છે.
- નિયતસંબંધ : બે સંબંધિત ચલો વચ્ચેનો વિધેયાત્મક સંબંધ.
- સુરેખ નિયતસંબંધ : બે સંબંધિત ચલો વચ્ચેનો એવો વિધેયાત્મક સંબંધ કે જેમાં ચલની કિંમતોમાં (લગભગ) અચળ પ્રમાણમાં ફેરફાર થતો હોય એટલે કે તે સંબંધ કોઈ સુરેખા દ્વારા નિશ્ચિત કરી શકાય.
- નિયતસંબંધ પરથી નિરપેક્ષ ચલની કોઈ જ્ઞાત કિંમત માટે તેને અનુરૂપ સાપેક્ષ ચલની કિંમતનું અનુમાન થઈ શકે છે.
- નિયત સંબંધાંક : નિરપેક્ષ ચલની કિંમતમાં એક એકમ ફેરફાર કરવાથી સાપેક્ષ ચલની કિંમત થતો અંદાજિત ફેરફાર. તેને નિયતસંબંધ રેખાનો ઢાળ પણ કહે છે.
- ત્રુટિ : સાપેક્ષ ચલની કિંમતના અનુમાનમાં થતી ભૂલ.
- નિશ્ચાયકતાનો આંક : સાપેક્ષ ચલ Y ની અવલોકિત કિંમતો અને તેની અનુમાનિત કિંમતો વચ્ચેનો સહસંબંધાંકનો વર્ગ. બે ચલોના કિસ્સામાં તેની કિંમત નિરપેક્ષ ચલ X અને સાપેક્ષ ચલ Y વચ્ચેના સહસંબંધાંકના વર્ગ જેટલી જ થાય છે.
- નિશ્ચાયકતાના આંક પરથી સાપેક્ષ ચલ Y માં થતા કુલ ફેરફારમાંથી કેટલું ચલન નિયતસંબંધ રેખા દ્વારા સમજાવી શકાય તે જાણી શકાય છે અને નિયતસંબંધ મોડલની વિશ્વસનીયતા પણ જાણી શકાય છે.
- નિયતસંબંધનો ઉપયોગ નિરપેક્ષ ચલની આપેલી કિંમતોથી બહુ દૂરની કિંમતો માટે ન થવો જોઈએ.

સૂત્રોની યાદી :

નિયતસંબંધ રેખાનું સમીકરણ

$\hat{y} = a + bx$

જ્યાં, $b = b_{yx} =$ નિયતસંબંધાંક

(1) $b = \dfrac{\Sigma(x-\bar{x})(x-\bar{x})}{\Sigma(x-\bar{x})^2}$

(2) $b = \dfrac{n\Sigma xy-(\Sigma x)(\Sigma y)}{n\Sigma x^2-(\Sigma x)^2}$

(3) $b = \dfrac{n\Sigma uv-(\Sigma u)(\Sigma v)}{n\Sigma u^2-(\Sigma u)^2}$ અહીં, $u = x - A$ અને $v = y - B$

(4) $b = \dfrac{n\Sigma uv-(\Sigma u)(\Sigma v)}{n\Sigma u^2-(\Sigma u)^2} \times \dfrac{c_y}{c_x}$ અહીં, $u = \dfrac{x-A}{c_x}$ અને $v = \dfrac{y-B}{c_y}$

(5) $b = r \cdot \dfrac{s_y}{s_x}$

(6) $b = \dfrac{Cov(x, y)}{s_x^2}$

(7) $a = \bar{y} - b\bar{x}$

(8) નિશ્ચાયકતાનો આંક $R^2 = \left[r(y, \hat{y})\right]^2 = \left[r(x, y)\right]^2 = r^2$

સ્વાધ્યાય 3

વિભાગ A

નીચે આપેલ બહુવિકલ્પ પ્રશ્નો માટે સાચા વિકલ્પની પસંદગી કરો :

1. નીચેના પૈકી કયો વિકલ્પ, બે ચલ વચ્ચેનો વિધેયાત્મક સંબંધ દર્શાવે છે ?

(a) સહસંબંધ (b) નિયતસંબંધ (c) મધ્યક (d) વિચરણ

2. નિયતસંબંધની શ્રેષ્ઠ અન્વાયોજિત રેખા કઈ રીતથી મેળવાય છે ?

(a) ન્યૂનતમ વર્ગોની રીત (b) કાર્લ પિયર્સનની રીત

(c) મહત્તમ વર્ગોની રીત (d) બાઉલીની રીત

3. પ્રચલિત સંકેતમાં b_{yx} એટલે શું ?

(a) અંતઃખંડ (b) સાપેક્ષ ચલ

(c) X ની કિંમતમાં એક એકમનો ફેરફાર કરવાથી Y ની કિંમતમાં થતો અંદાજિત ફેરફાર

(d) Y ની કિંમતમાં એક એકમનો ફેરફાર કરવાથી X ની કિંમતમાં થતો અંદાજિત ફેરફાર

4. નીચેના પૈકી કયો વિકલ્પ સાચો છે ?

(a) $b_{yx} = r \cdot \frac{s_x}{s_y}$ (b) $b_{yx} = r \cdot \frac{s_y^2}{s_x^2}$ (c) $b_{yx} = \frac{Cov(x, y)}{s_y^2}$ (d) $b_{yx} = r \cdot \frac{s_y}{s_x}$

5. નિયતસંબંધ રેખા કયા બિંદુમાંથી હંમેશાં પસાર થાય છે ?

(a) $(\bar{x}, \bar{y})$ (b) $(0, \bar{y})$ (c) $(\bar{x}, 0)$ (d) $(0, 0)$

6. Y ની X પરની નિયતસંબંધ રેખાના કિસ્સામાં અનુમાનની ત્રુટિ e શું થાય ?

(a) $y - \hat{y}$ (b) $\hat{x} - \hat{y}$ (c) $x - \hat{x}$ (d) $\hat{y} - \hat{x}$

7. જો વસ્તુનું વેચાણ એ તેના જાહેરાત ખર્ચ પર આધાર રાખે તો કઈ નિયતસંબંધ રેખાનો ઉપયોગ થાય ?

(a) જાહેરાત-ખર્ચની વેચાણ પરની નિયતસંબંધ રેખા

(b) જાહેરાત-ખર્ચની જાહેરાત-ખર્ચ પરની નિયતસંબંધ રેખા

(c) વેચાણની જાહેરાત-ખર્ચ પરની નિયતસંબંધ રેખા

(d) વેચાણની વેચાણ પરની નિયતસંબંધ રેખા

8. નીચેના પૈકી Y ની X પરની નિયતસંબંધ રેખા કઈ છે ?

(a) $\hat{y} = a + bx + cx^2$ (b) $\hat{x} = c + by$ (c) $\hat{y} = a + bx$ (d) $\hat{y} = a + bx^2$

9. સહસંબંધાંક (r)ની કઈ કિંમત માટે નિયતસંબંધાંકની કિંમત શૂન્ય થાય છે ?

(a) 1 (b) –1 (c) $\frac{1}{2}$ (d) 0

10. બે ચલ વચ્ચેના નિયતસંબંધના અભ્યાસમાં નિશ્ચાયકતાનો આંક એટલે શું ?

(a) બે પ્રમાણિત વિચલનોનો ગુણાકાર (b) સહસંબંધાંકનો વર્ગ

(c) સહવિચરણનો વર્ગ (d) બે વિચરણોનો ગુણાકાર

11. જો Y ની X પરની નિયતસંબંધ રેખા $\hat{y} = 10 + 3x$ હોય તો $X = 20$ માટે Y ની કિંમતનું અનુમાન કેટલું થાય ?

(a) 13 (b) 60 (c) 70 (d) 203

12. જો Y ની X પરની નિયતસંબંધ રેખા $2x + 3y - 50 = 0$ હોય તો b_{yx}ની કિંમત કેટલી થાય ?

(a) $\frac{3}{2}$ (b) $-\frac{3}{2}$ (c) $-\frac{2}{3}$ (d) 2

13. Y ની X પરની નિયતસંબંધ રેખા $\hat{y} = 30 - 1.5x$ છે. જો $\bar{x} = 10$ હોય તો $\bar{y}$ ની કિંમત કેટલી થાય ?

(a) 28.5 (b) 20 (c) 15 (d) 45

14. જો $u = \frac{x-15}{10}$ અને $v = \frac{y-50}{2}$ હોય અને $b_{yx} = 7.5$ હોય તો b_{vu} ની કિંમત કેટલી થાય ?

(a) 7.5 (b) 1.5 (c) 37.5 (d) 150

15. જો $r = 0.8$ હોય તો સાપેક્ષ ચલના કુલ ચલનનો કેટલા ભાગ નિયતસંબંધ મૉડેલ દ્વારા સમજાવી શકાય છે ?

(a) 80 % (b) 64 % (c) 36 % (d) 20 %

વિભાગ B

નીચેના પ્રશ્નોના એક વાક્યમાં જવાબ આપો :

1. સુરેખ નિયતસંબંધની વ્યાખ્યા આપો.
2. નિયતસંબંધાંકની વ્યાખ્યા આપો.
3. સુરેખ નિયતસંબંધ મૉડેલ જણાવો.
4. નિયતસંબંધ રેખાના સંદર્ભમાં ત્રુટિ એટલે શું ?
5. નિયતસંબંધની શ્રેષ્ઠ અન્વાયોજિત રેખા મેળવવા માટેની રીતનું નામ જણાવો.
6. નિયતસંબંધાંક શેના પરિવર્તનથી સ્વતંત્ર છે ?
7. નિયતસંબંધાંક શેના પરિવર્તનથી સ્વતંત્ર નથી ?
8. જો કોઈ નિદર્શ બિંદુ અન્વાયોજિત રેખા પર પડતું હોય તો ત્રુટિની કિંમત કેટલી થાય ?
9. માપ (સ્કેલ)ના પરિવર્તનથી જો x અને y બંને ચલની કિંમતો બમણી કરવામાં આવે, તો નિયતસંબંધાંક બદલાશે ?
10. જો $r = 0.5, s_x = 2, s_y = 4$ હોય, તો નિયતસંબંધાંક b_{yx}ની કિંમત કેટલી થશે ?
11. નિયતસંબંધ રેખા $\hat{y} = 31.5 + 1.85x$ પરથી $X = 10$ માટે Yની કિંમતનું અનુમાન કરો.
12. જો $y = a + bx$, જ્યાં $b > 0$ એ Y અને X વચ્ચેનો સંબંધ દર્શાવે તો r ની કિંમત કેટલી થાય ?
13. જો $y = 5 - 3x$ એ Y અને X વચ્ચેનો સંબંધ દર્શાવે તો r ની કિંમત કેટલી થાય ?

વિભાગ C

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

1. નિયતસંબંધ રેખા $\hat{y} = a + bx$ માં અચળાંકો a અને b ને શું કહે છે ?
2. નિયતસંબંધ રેખા $\hat{y} = 23.2 - 1.2x$ ના અન્વાયોજનમાં એક અવલોકન (6, 17)નો ઉપયોગ થયો હોય, તો $X = 6$ માટે Yની અનુમાનિત કિંમતની ત્રુટિ શોધો.
3. જો $\bar{x} = 30, \bar{y} = 20$ અને $b = 0.6$ હોય, તો Y ની X પરની નિયતસંબંધ રેખાનો અંતઃખંડ શોધો અને તે રેખાનું સમીકરણ લખો.
4. જો $b_{yx} = 5$ હોય તો તેનું અર્થઘટન શું થાય ?
5. જો $b = 1.5, r = 0.8$ અને X નું પ્રમાણિત વિચલન 1.6 હોય, તો Y નું પ્રમાણિત વિચલન શોધો.
6. જો Yની X પરની નિયતસંબંધ રેખા પરનો નિયતસંબંધાંક 0.6 હોય તથા X અને Y ના પ્રમાણિત વિચલન અનુક્રમે 5 અને 3 હોય તો નિશ્ચાયકતાનો આંક શોધો.
7. જો Y ની X પરની નિયતસંબંધ રેખા $\hat{y} = 35 + 2x$ અને $Cov(x, y) = 50$ હોય તો Xનું પ્રમાણિત વિચલન શોધો.
8. અગાઉના પ્રશ્ન (7)માં આપેલી નિયતસંબંધ રેખા માટે જો Y ની કિંમતમાં 10 એકમો વધારવા હોય તો X ની કિંમતમાં કેટલા એકમોનો વધારો કરવો પડે ?
9. જો $\bar{x} = 10, \bar{y} = 25, \Sigma(x-10)(y-25) = 120$ અને $\Sigma(x-10)^2 = 100$ હોય, તો Y ની X પરની નિયતસંબંધ રેખા માટે a અને b ની કિંમત મેળવો.
10. નિયતસંબંધ રેખાના એક અભ્યાસમાંથી મળતી માહિતીમાં જો $b_{yx} = 0.75, u = 6(x-20)$ અને $v = 2(y-15)$ હોય તો b_{vu}ની કિંમત કેટલી થાય ?

વિભાગ D

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

1. યોગ્ય ઉદાહરણ આપી 'બે ચલ વચ્ચે કાર્ય-કારણનો સંબંધ છે'એ વિધાન સમજાવો તેમજ નિરપેક્ષ અને સાપેક્ષ ચલ વ્યાખ્યાયિત કરો.

2. નિયતસંબંધ રેખાના અન્વાયોજન માટેની વિકીર્ણ આકૃતિની રીત સમજાવો અને તેની મર્યાદા જણાવો.

3. નિયતસંબંધ રેખાના અન્વાયોજન માટેની ન્યૂનતમ વર્ગોની રીત સમજાવો.

4. નિયતસંબંધની ઉપયોગિતા જણાવો.

5. નિયતસંબંધાંકના ગુણધર્મો જણાવો અને નિયતસંબંધ રેખા હંમેશાં કયા બિંદુમાંથી પસાર થાય છે તે જણાવો.

6. સમજાવો : નિશ્ચાયકતાનો આંક

7. નિયતસંબંધના ઉપયોગમાં રાખવી પડતી સાવચેતી જણાવો.

8. જો બે સંબંધિત ચલ X અને Y માટે $\Sigma(x-\bar{x})^2 = 80, \Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y}) = 60, \bar{x} = 8, \bar{y} = 10$ હોય, તો Y ની X પરની નિયતસંબંધ રેખા મેળવો.

9. જો $\bar{x} = 30, \bar{y} = 50, r = 0.8$ અને X અને Y ના પ્રમાણિત વિચલન અનુક્રમે 2 અને 5 હોય, તો Y ની X પરની નિયતસંબંધ રેખા મેળવો.

10. જો Y ની X પરની નિયતસંબંધ રેખા $\hat{y} = 11 + 3x$ અને $s_x : s_y = 3:10$ હોય, તો નિશ્ચાયકતાનો આંક શોધો અને Y માં થતા કુલ ચલનમાંથી કેટલું ચલન નિયતસંબંધ મૉડેલ પરથી સમજાવી શકાય છે તે જણાવો.

11. જો પ્રચલિત સંકેતોમાં $n = 7, \Sigma u = 2, \Sigma v = 25, \Sigma u^2 = 160$ અને $\Sigma uv = 409$ હોય તો Yની X પરની નિયતસંબંધ રેખાનો નિયતસંબંધાંક શોધો અને તેનું અર્થઘટન કરો.

12. જો $b_{yx} = 0.8$ હોય તો નીચેના u અને v માટે b_{vu} ની કિંમત શોધો :

(i) $u = x - 105$ અને $v = y - 90$

(ii) $u = \frac{x-1400}{100}$ અને $v = \frac{y-750}{50}$

(iii) $u = 10(x - 4.6)$ અને $v = y - 75$

13. એક દ્વિચલ માહિતી માટે નીચે મુજબનાં પરિણામો મળે છે.

વીગત	x	y
અવલોકનોની સંખ્યા	8	
મધ્યક	100	100
મધ્યકમાંથી લીધેલા વિચલનોના વર્ગોનો સરવાળો	130	145
મધ્યકમાંથી લીધેલા વિચલનોના ગુણાકારોનો સરવાળો	115	

આ પરથી Y ની X પરની નિયતસંબંધ રેખા મેળવો.

વિભાગ E

નીચેનાના ઉકેલ મેળવો :

1. એક I.T. કંપનીના મૅનેજરે સાત માર્કેટિંગ એક્ઝિક્યુટિવના નોકરીના વર્ષ અને તેમની માસિક આવક વિશે નીચે મુજબ માહિતી એકઠી કરી.

નોકરીના વર્ષ	10	6	8	5	9	7	11
માસિક આવક (દસ હજાર ₹)	11	7	9	5	6	8	10

આ માહિતી પરથી માર્કેટિંગ એક્ઝિક્યુટિવની માસિક આવકની તેમની નોકરીના વર્ષ પરની નિયતસંબંધ રેખા મેળવો.

2. કોઈ એક વસ્તુ માટે ભાવ (₹માં) અને તેનો પુરવઠા (સો એકમોમાં)ની એકઠી કરેલી માહિતી નીચે મુજબ છે.

ભાવ (₹)	59	60	61	62	64	57	58	59
પુરવઠો (સો એકમો)	78	82	82	79	81	77	78	75

આ માહિતી પરથી પુરવઠાની ભાવ પરની નિયતસંબંધ રેખા મેળવો.

3. ઑનલાઈન શોપિંગની સગવડ આપતી એક કંપનીના છેલ્લા વર્ષના માસિક જાહેરાત-ખર્ચ અને વેચાણની વીગત પરથી નીચે મુજબ માહિતી મળે છે.

વીગત	જાહેરાત ખર્ચ (દસ હજાર ₹)	વેચાણ (લાખ ₹)
મધ્યક	10	90
પ્રમાણિત વિચલન	3	12
$r = 0.8$		

આ પરથી વેચાણની જાહેરાતના ખર્ચ પરની નિયતસંબંધ રેખા મેળવો.

4. સામાન્ય રીતે ઓછો વરસાદ પડતો હોય તેવા એક વિસ્તારમાં છેલ્લાં દસ વર્ષ દરમ્યાન પડેલા સરેરાશ વરસાદ અને કોઈ પાકની પ્રતિ એકર ઊપજની વીગત પરથી નીચેના પરિણામો મળે છે.

વીગત	વરસાદ (સેમી)	પાકની ઊપજ (કિગ્રા)
મધ્યક	18	970
પ્રમાણિત વિચલન	2	38
સહસંબંધાંક = 0.6		

આ પરથી જો સરેરાશ વરસાદ 20 સેમી હોય તો પાકની ઊપજ વિશે અનુમાન કરો.

5. એક મ્યુચ્યુઅલ ફંડ કંપનીએ છેલ્લાં સાત વર્ષમાં શૅરબજારમાં કરેલા રોકાણ (લાખ ₹માં) અને તેના તે રોકાણના છ માસ બાદ તેની બજારકિંમત (લાખ ₹માં)ની વીગતો નીચે મુજબ મળે છે.

વીગત	રોકાણ (લાખ ₹) x	છ માસ બાદ બજાર કિંમત (લાખ ₹) y
મધ્યક	40	50
વિચરણ	100	256
સહવિચરણ = 80		

આ માહિતી પરથી Y ની X પરની નિયત સંબંધ રેખા મેળવો અને કોઈ વર્ષમાં શૅરબજારમાં 45 લાખ ₹નું રોકાણ કરવામાં આવે તો છ માસ બાદ તેની બજાર કિંમત વિશે અનુમાન મેળવો.

વિભાગ F

નીચેનાના ઉકેલ મેળવો :

1. કોઈ વસ્તુની માંગ અને તેના ભાવ વિશે એકઠી કરેલી નીચેની માહિતી પરથી માંગની ભાવ પરની નિયતસંબંધ રેખા મેળવો. જો એ વસ્તુનો ભાવ ₹ 40 હોય તો તેની માંગ કેટલી હશે તેનો અંદાજ મેળવો.

ભાવ (₹)	38	36	37	37	36	38	39	36	38
માંગ (સો એકમો)	12	18	15	12	17	13	13	15	12

2. આઠ કારીગરોનો યંત્ર પર કામ કરવાનો અનુભવ (વર્ષમાં) અને તેમણે દર 100 એકમોમાં ઉત્પાદિત કરેલા ખામીરહિત એકમોને આધારે મેળવેલ દેખાવ મૂલ્ય (Performance Rating))ની વીગત નીચે મુજબ છે.

કારીગરનો અનુભવ (વર્ષ)	5	12	15	8	20	18	22	25
દેખાવ મૂલ્ય	80	82	85	81	90	90	95	97

આ પરથી દેખાવ મૂલ્યની અનુભવ પરની નિયતસંબંધ રેખા મેળવો અને જો કોઈ કારીગરનો અનુભવ 17 વર્ષ હોય, તો તેના દેખાવ મૂલ્યનો અંદાજ મેળવો.

3. છૂટક કામ કરી આવક મેળવતાં શ્રમજીવી કુટુંબોમાંથી પાંચ કુટુંબોની દૈનિક આવક (₹માં) અને તેમનો વપરાશ ખર્ચ (₹માં)નીચે મુજબ છે.

દૈનિક આવક (₹)	200	300	400	600	900
વપરાશ ખર્ચ (₹)	180	270	320	480	700

આ પરથી વપરાશ-ખર્ચની દૈનિક આવક પરની નિયતસંબંધ રેખા મેળવો. જો કોઈ કુંટુંબની દૈનિક આવક ₹ 500 હોય તો તેના વપરાશ-ખર્ચનું અનુમાન કરો.

4. જાહેરાત અભિયાનની અસર જાણવા એક પેઢી દ્વારા નીચે મુજબ માહિતી એકઠી કરવામાં આવી.

વર્ષ	1	2	3	4	5	6	7	8
જાહેરાત ખર્ચ (દસ હજાર ₹)	12	15	15	23	24	38	42	48
વેચાણ (કરોડ ₹)	5	5.6	5.8	7	7.2	8.8	9.2	9.5

આ પરથી વેચાણની જાહેરાત ખર્ચ પરની નિયતસંબંધ રેખા શોધો. જ્યારે જાહેરાત ખર્ચ ₹ 5,00,000 હોય ત્યારે થતા વેચાણનું અનુમાન મેળવો.

5. બાંધકામ ક્ષેત્રે આઠ જુદી-જુદી કાર્યરત કંપનીઓએ એક વર્ષમાં મેળવેલા કામની સંખ્યા અને તેના વાર્ષિક નફાની વીગતો નીચે મુજબ છે.

કામની સંખ્યા	2	5	9	12	6	4	8	10
વાર્ષિક નફો (લાખ ₹)	100	300	700	1000	350	250	700	750

આ પરથી વાર્ષિક નફાની કામની સંખ્યા પરની નિયતસંબંધ રેખા શોધો. સુરેખ નિયતસંબંધ મૉડેલની વિશ્વસનીયતા ચકાસો.

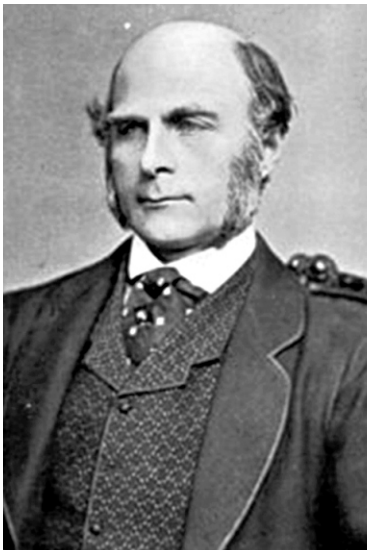
6. નીચે આપેલી માહિતી પરથી Y ની X પરની નિયતસંબંધ રેખા મેળવો અને $X = 30$ માટે Y ની કિંમતનો અંદાજ મેળવો.

$n = 10, \Sigma x = 250, \Sigma y = 300, \Sigma xy = 7900, \Sigma x^2 = 6500$

7. એક માહિતી માટે નીચે મુજબનાં પરિણામો મળે છે.

$n = 12, \Sigma x = 30, \Sigma y = 5, \Sigma x^2 = 670, \Sigma xy = 344$

પાછળથી એવું માલૂમ પડ્યું કે એક અવલોકનની જોડ (10, 14)ને બદલે (11, 4) લેવાઈ ગઈ હતી તો ઉપર્યુક્ત માપોને સુધારી તે પરથી Y ની X પરની નિયતસંબંધ રેખા મેળવો અને $X = 5$ માટે Y નું અનુમાન કરો.



Sir Francis Galton
(1822 –1911)

Sir Francis Galton was an English Victorian statistician, progressive, polymath, sociologist, psychologist, anthropologist, eugenicist, tropical explorer, geographer, inventor, meteorologist, protogeneticist and psychometrician. He was knighted in 1909.

Galton produced over 340 papers and books. He also created the statistical concept of correlation and widely promoted regression toward the mean. He was the first to apply statistical methods to the study of human differences and inheritance of intelligence, and introduced the use of questionnaires and surveys for collecting data on human communities, which he needed for genealogical and biographical works and for his anthropometric studies.

He was a pioneer in eugenics, coining the term itself and the phrase "nature versus nature". His book Hereditary Genius (1869) was the first social scientific attempt to study genius and greatness.

As an investigator of the human mind, he founded psychometrics (the science of measuring mental faculties) and differential psychology and the lexical hypothesis of personality. He devised a method for classifying fingerprints that proved useful in forensic science.

●

"Imperfect prediction, despite being imperfect can be valuable for decision making process."

– Michael Kattan

4

સામયિક શ્રેણી
(Time Series)

વિષયવસ્તુ :

4.1 સામયિક શ્રેણી : પ્રસ્તાવના, અર્થ, મહત્ત્વ, વ્યાખ્યા અને ઉપયોગો

4.2 સામયિક શ્રેણીના ઘટકો

4.3 સામયિક શ્રેણી - વલણ, વલણ માપવાની રીતો

4.3.1 આલેખની રીત

4.3.2 ન્યૂનતમ વર્ગોની રીત

4.3.3 ચલિત સરેરાશની રીત

4.1 સામયિક શ્રેણી (Time Series)

પ્રસ્તાવના

આંકડાશાસ્ત્રમાં બે સંબંધિત ચલોનો અભ્યાસ જુદી જુદી રીતે થાય છે. તે સંબંધિત ચલો પૈકી નિરપેક્ષ ચલ તરીકે સમય લઈને તેને આધારિત સાપેક્ષ ચલનો અભ્યાસ વિશિષ્ટ રીતે કરવામાં આવે છે. અર્થશાસ્ત્ર, સમાજશાસ્ત્ર તેમજ ધંધાકીય આંકડાશાસ્ત્રમાં સમય સાથે બદલાતી ચલની કિંમતો વિશેની માહિતીનો અભ્યાસ કરવામાં આવે છે. દા.ત., દેશની વસ્તી, ખેતીની પેદાશ, જથ્થાબંધ ભાવના આંક, બેરોજગારીના આંકડા, આયાત-નિકાસની માહિતી, કોઈ એક કારખાનાનું વાર્ષિક ઉત્પાદન, શૅરબજારના આંકડા, બૅન્કના વ્યાજદર, કોઈ શહેરનું દર કલાકે માપેલ તાપમાન વગેરે સમય સાથે રજૂ કરવામાં આવે છે. આ માહિતી સમય આધારિત હોવાથી તેને સામયિક શ્રેણી કહેવાય છે.

સામયિક શ્રેણીનો અર્થ

અમુક સમયાંતરે એકત્રિત કરેલી અને સમય અનુસાર ગોઠવવામાં આવતી આંકડાકીય માહિતીને સામયિક શ્રેણી કહેવાય છે. સામયિક શ્રેણીમાં સમય સાથે સંબંધિત ચલની કિંમતો હોય છે. આવા ચલની લાંબા ગાળાની કિંમતોનો અભ્યાસ કરવામાં આવે, તો તેના દ્વારા ભવિષ્યમાં આ ચલની કિંમત શું થશે તેનું અનુમાન મેળવી શકાય છે. આવા પૂર્વાનુમાનો ભવિષ્યનું આયોજન કરવામાં ખૂબ જ ઉપયોગી નીવડે છે. દા.ત., કોઈ વિસ્તારની વસ્તીના આંકડા દર્શાવતી સામયિક શ્રેણીનો અભ્યાસ કરવાથી તેમાં થતા ફેરફારોની દિશા, પ્રમાણ અને તરાહ (pattern) જાણી શકાય છે. આગામી સમયમાં આ વિસ્તારનાં લોકો માટે જરૂરી સાધનો, તબીબી સુવિધાઓ, રોજગારીની તકો, શિક્ષણ જેવી બાબતોનું આયોજન કરી શકાય છે. જુદી જુદી કંપનીઓના શૅરોના ભાવની સામયિક શ્રેણીનો અભ્યાસ કરવાથી કયા શૅરના ભાવમાં કેવા ફેરફારો થાય તે જાણી શકાય અને તેના આધારે રોકાણકારો શૅરોની લે-વેચ કરવાના નિર્ણયો લઈ શકે છે. જુદાં જુદાં સ્થળે અને સમયે માપેલા તાપમાન તેમજ વરસાદના આંકડા હવામાનમાં વૈશ્વિક સ્તરે કેવા ફેરફારો થાય છે તે દર્શાવે છે, જે પર્યાવરણ સંવર્ધન અંગેની નીતિ ઘડવામાં મદદરૂપ થાય છે. વર્તમાન સમયમાં બિઝનેસ ઍનાલિટિક્સની વિવિધ પદ્ધતિઓમાં પણ સામયિક શ્રેણીનો વ્યાપક પ્રમાણમાં ઉપયોગ થાય છે.

સામયિક શ્રેણીમાં એક નિશ્ચિત સમયાંતરે બદલાતા ચલની માહિતી દર્શાવવામાં આવે છે. સમયનું એકમ અભ્યાસ હેઠળના ચલ પર આધારિત રહે છે. દા.ત., વસ્તીના આંકડા દર દસ વર્ષે મળે, કુલ એકઠા કરેલ સેલ્સટેક્સની વાર્ષિક માહિતી મળે, બૅંકોના વ્યાજ ત્રિમાસિક ગણાય, દુકાનનો નફો માસિક લેવાય, બૅક્ટેરિયાની વૃદ્ધિ માટેનો સમય કલાકમાં હોય વગેરે.

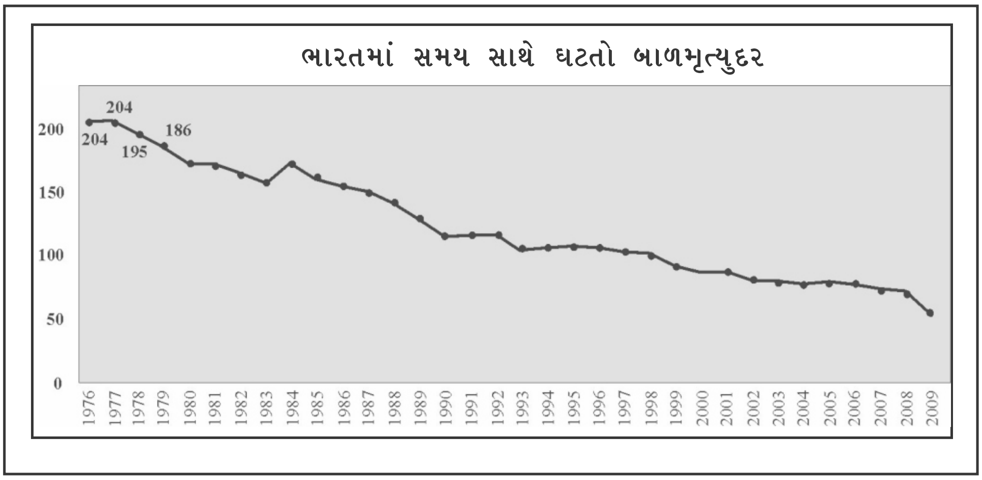
ઉદાહરણ સ્વરૂપે આપણે નીચેની સામયિક શ્રેણીઓ જોઈશું :

(1)

સમગ્રલક્ષી આધાર				(ટકાવારીમાં)
વર્ષ	**GDP વૃદ્ધિ**	**મૂડીરોકાણ વૃદ્ધિ**	**સરેરાશ WPI ફુગાવો**	**CAD (GDPની ટકાવારી)**
2002-03	4.0	–0.4	3.4	0
2003-04	8.1	10.6	5.5	0
2004-05	7.0	24.0	6.5	0.4
2005-06	9.5	16.2	4.5	1.2
2006-07	9.6	13.8	6.6	1.0
2007-08	9.3	16.2	4.7	1.3
2008-09	6.7	3.5	8.1	2.3
2009-10	8.6	7.7	3.8	2.8
2010-11	9.3	14.0	9.6	2.8
2011-12	6.2	4.4	8.9	4.2
2012-13	5.4*	2.3*	7.6**	4.7*
* એપ્રિલ-સપ્ટેમ્બર, ** એપ્રિલ-ડિસેમ્બર				

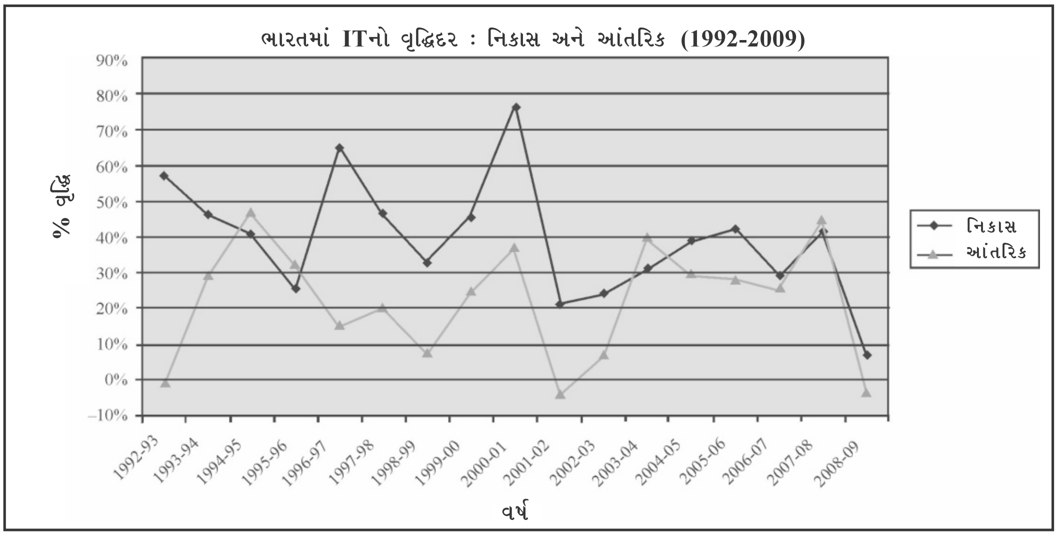
આ સામયિક શ્રેણી જુદાં જુદાં વર્ષોના સમગ્રલક્ષી આધારોની માહિતી આપે છે, જેમાં કુલ આંતરિક પેદાશ (GDP)ના ટકાવારી વૃદ્ધિ સાથે મૂડીરોકાણમાં થયેલ ટકાવારી વૃદ્ધિ, જથ્થાબંધ ભાવ સૂચક આંક (WPI) અને ચાલુ ખાતાની ખાધ (CAD)નો સમાવેશ થયેલ છે.

(2)



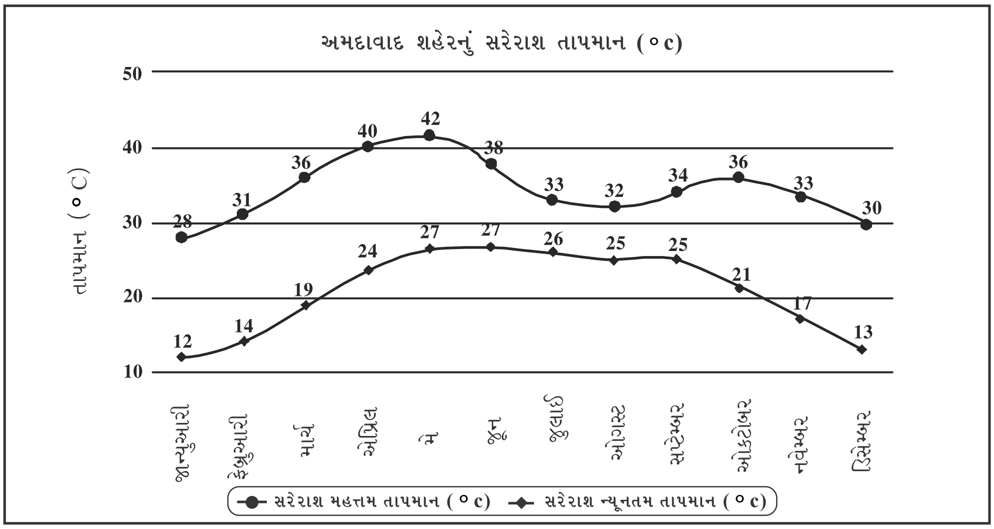
જુદાં જુદાં વર્ષોમાં ભારતમાં નવજાત શિશુઓનો મૃત્યુદર દર્શાવતી સામયિક શ્રેણી.

(3)



IT ક્ષેત્રનો વૃદ્ધિદર દર્શાવતી બે સામયિક શ્રેણીઓનો તુલનાત્મક અભ્યાસ

(4)



અમદાવાદ શહેરના માસિક સરેરાશ મહત્તમ અને ન્યૂનતમ તાપમાન દર્શાવતી સામયિક શ્રેણીઓ

સામયિક શ્રેણીનું મહત્ત્વ

આધુનિક યુગમાં વેપાર તેમજ ધંધાકીય પ્રવૃત્તિઓમાં વધતી અનિશ્ચિતતાના કારણે સામયિક શ્રેણી વડે એકઠી કરેલ માહિતી ખૂબ જ અગત્યની બને છે. નીચેનાં કારણોસર સામયિક શ્રેણીના અભ્યાસને મહત્ત્વ પ્રાપ્ત થાય છે.

(1) ભૂતકાળની માહિતી પરથી શ્રેણીની કિંમતમાં થતા ફેરફારોની દિશા અને તરાહ જાણી શકાય છે.

(2) શ્રેણીની કિંમતોમાં કેટલા પ્રમાણમાં ફેરફારો થાય છે તે પરથી ભવિષ્યમાં થતાં ફેરફારોનો અંદાજ મેળવી શકાય છે.

(3) ભવિષ્યની અંદાજિત કિંમતથી અગત્યના નિર્ણયો લઈ શકાય તેમજ ઉદ્યોગની કે સરકારની નીતિ ઘડવામાં સરળતા રહે છે.

(4) બે અથવા તેથી વધુ ઉદ્યોગપતિઓ અથવા સરકારી સંસ્થાઓ તેમના દ્વારા મેળવેલી સામયિક શ્રેણીની માહિતીનો તુલનાત્મક અભ્યાસ કરી શકે છે.

સામયિક શ્રેણીની વ્યાખ્યા

સામયિક શ્રેણીની વ્યાખ્યા નીચે મુજબ કરવામાં આવે છે :

'નિયત સમયે લેવામાં આવેલ અવલોકનોના સમૂહને **સામયિક શ્રેણી** કહે છે.'

સામાન્ય રીતે આ અવલોકનો સમાન સમયાંતરે લેવામાં આવે છે.

સામયિક શ્રેણીમાં સમયને નિરપેક્ષ ચલ તરીકે લેવાય છે તેને આપણે t વડે દર્શાવીશું અને તેની સાથે સંકળાયેલ સાપેક્ષ ચલને y_t વડે દર્શાવીશું. આમ, સમયના જુદા જુદા એકમો માટે આપેલ સામયિક શ્રેણીને નીચે મુજબ રજૂ કરીશું.

સમય t	1	2	3	...	n
ચલ y_t	y_1	y_2	y_3	...	y_n

સામયિક શ્રેણીના ઉપયોગો

સમય સાથે બદલાતા સામયિક શ્રેણીના ચલમાં આવતા ફેરફારો કોઈ એક વિશિષ્ટ કારણસર થતા નથી. સામયિક શ્રેણીનો ચલ અનેક પરિબળોને આધીન હોય છે અને તે બધાં પરિબળોની અસર આપેલ ચલ પર થતી હોય છે. દા.ત., જથ્થાબંધ બજારમાં ઘઉંનો ભાવ સમય સાથે બદલાતો હોય છે, જેનાં ઘણા જુદાં જુદાં કારણો હોઈ શકે છે. જેમકે, ઘઉંનું તે સમયનું ઉત્પાદન, ઘઉંની માંગ, ઉત્પાદિત માલ બજાર સુધી લાવવાનો ખર્ચ વગેરે. આમાંથી દરેક ઘટક અન્ય પરિબળો પર આધારિત હોય છે. જેમકે, ઘઉંનું ઉત્પાદન કેટલું થાય તેના પર તે સમયનું હવામાન, સિંચાઈની સુવિધા, તે સમયે વાપરેલ બિયારણ જેવી વિવિધ બાબતોની અસર થતી હોય છે. આવા પરિબળોની અસર સામયિક શ્રેણીના ચલની કિંમત પર જુદા જુદા પ્રકારે થાય છે જેનો અભ્યાસ કરવો જરૂરી હોય છે. સામયિક શ્રેણીનો આ રીતે વીગતવાર અભ્યાસ કરવામાં આવે તો તેને સામયિક શ્રેણીનું પૃથક્કરણ કહેવાય છે, જે નીચેના બે તબક્કામાં કરવામાં આવે છે :

(1) સામયિક શ્રેણીના ચલ પર અસર કરતાં વિવિધ પરિબળો ઓળખવા.

(2) આ પરિબળોને અલગ-અલગ તારવીને તેમાંથી આપેલ ચલ ઉપર દરેકની અસર કેટલા પ્રમાણમાં થાય છે તે નક્કી કરવું.

આ પ્રકારે કરવામાં આવેલ સામયિક શ્રેણીનું પૃથક્કરણ વેપાર, વિજ્ઞાન, સામાજિક અને રાજકીયક્ષેત્રે નીચે પ્રમાણે ઉપયોગી નીવડે છે :

(1) ભૂતકાળની પરિસ્થિતિ જાણી શકાય છે અને તે પરથી ચલનનો પ્રકાર અને માપ મેળવી શકાય છે.

(2) ચલની ભવિષ્યની કિંમતોનું આંકડાશાસ્ત્રીય રીતોની મદદથી અનુમાન મેળવી શકાય છે.

(3) મેળવેલ અનુમાનિત કિંમતના આધારે ભવિષ્ય માટે યોગ્ય નિર્ણયો લઈ શકાય છે. તેમજ કાર્યનું આયોજન કરી શકાય છે.

(4) જુદાં જુદાં સ્થળે અથવા સમયે આપેલ ચલમાં થતા ફેરફારોનો તુલનાત્મક અભ્યાસ કરી શકાય છે.

(5) ભૂતકાળની કિંમતો પરથી મેળવેલ અનુમાનિત કિંમતો અને વર્તમાન કિંમતોની તુલના કરીને જો કોઈ તફાવત જણાય તો તેનાં કારણો શોધી શકાય છે.

પ્રવૃત્તિ

તમારા શિક્ષકોની મદદથી તમારી શાળામાંથી છેલ્લાં 10 વર્ષમાં ધોરણ 12 માં પાસ થયેલ વિદ્યાર્થીઓની ટકાવારી વિશે માહિતી એકત્રિત કરો અને તેને સામયિક શ્રેણી વડે રજૂ કરો.

4.2 સામયિક શ્રેણીના ઘટકો (Components of Time Series)

આપણે જોયું કે સામયિક શ્રેણીના ચલ પર અનેક પરિબળોની સંયુક્ત અસર થાય છે અને તેથી ચલની કિંમતમાં ફેરફારો જોવા મળે છે. જુદી જુદી સામયિક શ્રેણીઓના નિરીક્ષણથી માલૂમ પડે છે કે ચલની કિંમતોના ફેરફારોમાં વિશિષ્ટ તરાહ હોય છે. તેને આધારે સામયિક શ્રેણીને નીચેના ઘટકોમાં વિભાજિત કરી શકાય.

(1) દીર્ઘકાલીન ઘટક અથવા વલણ (Long-term Component or Trend) : સામયિક શ્રેણીના ચલમાં ખૂબ લાંબા સમયગાળામાં જે ચલન જોવા મળે છે તે દીર્ઘકાલીન ઘટક અથવા વલણની અસર છે. સામાન્ય રીતે સામયિક શ્રેણીના ચલમાં સમય સાથે સતત વધારો કે ઘટાડો થતો માલૂમ પડે છે. આ સ્થિતિ વલણને કારણે ઉદ્‌ભવે છે. દા.ત., આંતરરાષ્ટ્રીય બજારમાં રૂપિયાનું ઘટતું મૂલ્ય, મોબાઈલ ફોનનો વધતો વપરાશ, દેશની વસ્તીનો વધારો, મૃત્યુદરમાં થતો ઘટાડો વગેરે. વલણમાં લાંબા સમયની વધઘટનો અભ્યાસ કરાતો હોવાથી સામયિક શ્રેણીના વચગાળાના ટૂંકા સમયની વધઘટોને ધ્યાનમાં લેવામાં આવતી નથી. અહીં, શ્રેણીની કિંમતોમાં એકંદરે કેવા ફેરફારો થાય છે તે ધ્યાનમાં લેવામાં આવે છે. જે પરિબળો હેઠળ આવા ફેરફારો થતા હોય તે ફેરફારોનો દર ધીમો હોય છે. દા.ત. ભારતમાં શિક્ષિતોની સંખ્યા વધતી જાય છે પણ આ બદલાવ છેલ્લાં 60-70 વર્ષમાં ધીમે-ધીમે થતો ગયો છે. સામાન્ય રીતે આવા ફેરફારોનાં કારણો એ સમાજમાં બદલાતી રૂઢિઓ, લોકોની પસંદગી કે રુચિમાં થયેલ ફેરફારો, ઉદ્યોગ-ધંધામાં બદલાતી ટૅક્નોલૉજી વગેરે હોય છે.

ખૂબ લાંબા સમયાંતરે સામયિક શ્રેણીનું વલણ સ્પષ્ટ થાય છે, જ્યાં 'લાંબો સમય' પૂર્ણતઃ સાપેક્ષ બાબત છે. ખેતીની પેદાશ કે ઔદ્યોગિક ઉત્પાદનમાં વલણ જાણવા માટે 10-15 વર્ષનો ગાળો લેવો પડે, જ્યારે ઇલેક્ટ્રૉનિક ઉપકરણના વેચાણમાં 4-5 વર્ષના ગાળામાં પણ વલણ સ્પષ્ટ થાય છે. જે શ્રેણીમાં ઉત્તરોત્તર સતત લગભગ અચળ વધારો કે ઘટાડો થતો હોય તેવા વલણને સુરેખ વલણ કહેવાય છે, જે સર્વસામાન્ય રીતે મોટા ભાગની સામયિક શ્રેણીઓમાં જોવા મળે છે. પણ અર્થશાસ્ત્ર અને વાણિજ્ય વેપારમાં એવી શ્રેણી જોવા મળે છે કે જેમાં કિંમતોનો વધવાનો કે ઘટવાનો દર અચળ રહેતો નથી. આવી શ્રેણીઓમાં શરૂઆતમાં કિંમતોનો વધવાનો દર બહુ ઓછો હોય છે જે ધીમે-ધીમે વધતો જાય છે. અમુક સમયાંતરે શ્રેણીની કિંમતો સ્થિર થતી હોય છે અને ત્યાર બાદ તે ધીમે-ધીમે ઘટતી જાય છે. આવી પરિસ્થિતિમાં શ્રેણીનું વલણ અસુરેખ અથવા વક્રીય છે તેમ કહેવાય છે.

સામયિક શ્રેણીના ચલ y_t માં વલણ દર્શાવતા ઘટકને આપણે 'T_t' વડે દર્શાવીશું.

(2) મોસમી ઘટક (Seasonal Component) : સામયિક શ્રેણીના ચલમાં ખૂબ જ ટૂંકા ગાળામાં જે લગભગ નિયમિત વધઘટો થાય છે તે મોસમી ઘટકની અસર છે. સામાન્ય રીતે, આ વધઘટોના પુનરાવર્તનનો ગાળો એક વર્ષથી ઓછો હોય છે. આ વધઘટોનો અભ્યાસ કરવા માટે સામયિક શ્રેણીની ટૂંકા ગાળાની કિંમતો પણ નોંધવી જરૂરી હોય છે. જો આપેલ ચલની વાર્ષિક કિંમતો પ્રાપ્ય હોય તો તેમાંથી મોસમી ઘટક વિશેની માહિતી મેળવવી અશક્ય હોય છે. સામયિક શ્રેણીમાં મોસમી ઘટક નીચે પ્રમાણે અસર કરે છે.

(i) કુદરતી પરિબળોની અસર : સામયિક શ્રેણીની કિંમતોમાં ઋતુ અથવા હવામાનના ફેરફારોને સંલગ્ન વધઘટો થાય છે. આવી વધઘટો લગભગ નિયમિત અંતરાલે થતી હોય છે. દા.ત., ઉનાળામાં પંખા, કૂલર કે એ.સી.ની માંગ વધે છે, તો શિયાળામાં ગરમ કપડાની માંગ વધે છે, ખેતરમાં નવો પાક તૈયાર થતા તેનો બજારભાવ ઘટે છે વગેરે.

(ii) માનવ સર્જિત પરિબળોની અસર : એક વર્ષથી ઓછા સમયગાળામાં થતી લગભગ નિયમિત વધઘટો તહેવારો, સમાજના રીતિરિવાજ, લોકોની આદતો વગેરેને કારણે આવતી હોય છે. દા.ત., લગ્નસરામાં આભૂષણોની ખરીદી વધે છે, ઉત્તરાયણ દરમિયાન પતંગોની માંગ રહે છે, સપ્તાહના અંતે સિનેમાગૃહો કે રેસ્ટોરન્ટોમાં ગ્રાહકોની સંખ્યા વધે છે, તહેવાર દરમિયાન કાપડ કે અન્ય ભેટ-વસ્તુઓની ખરીદીનું પ્રમાણ વધે છે વગેરે.

આ પ્રકારની વધઘટોનો આવર્તન ગાળો લગભગ નિશ્ચિત હોય છે, માટે તેને નિયમિત વધઘટો કહે છે. આ ફેરફારોનો સમય અને પ્રમાણ જ્ઞાત હોય તો તે વેપારીઓ, ઉત્પાદકોને મદદરૂપ થાય છે અને તેનાથી જથ્થાનું નિયંત્રણ કરીને વધુ નફો પ્રાપ્ત કરી શકાય છે.

સામયિક શ્રેણીના આ અલ્પકાલીન ઘટકને આપણે 'S_t' વડે દર્શાવીશું.

(3) ચક્રીય ઘટક (Cyclical Component) : સામયિક શ્રેણીમાં એક વર્ષથી વધુ સમયગાળામાં થતી લગભગ નિયમિત વધઘટ ચક્રીય ઘટકની અસર હોય છે. મોસમી ઘટક કરતાં આ ઘટકના લીધે થતાં ચલનમાં ઓછી નિયમિતતા હોય છે. આ વધઘટોના આવર્તનનો સમયગાળો 2 થી 10 વર્ષનો હોઈ શકે છે અને વિશિષ્ટ સંજોગોમાં તે 10-15 વર્ષનો પણ હોય છે. સંપૂર્ણ શ્રેણીનો સમય 40-50 વર્ષ કે તેથી વધુ હોય તો તેના પ્રમાણમાં ચક્રીય ઘટકના ચલનનો સમય ઓછો હોવાથી આ ઘટક પણ અલ્પકાલીન ઘટક તરીકે જ ઓળખવામાં આવે છે. ધંધાકીય પ્રવૃત્તિમાં આવતાં તેજી-મંદીના ચક્રો આ ચલનનું ઉદાહરણ છે. આ ચક્રો મંદી, વૃદ્ધિ, તેજી અને પડતી એવી ચાર સ્થિતિઓમાંથી પસાર થાય છે. વેપારને લગતી તેમજ આર્થિક બાબતોની જેમકે ઉત્પાદન, વસ્તુનો ભાવ, શૅરબજારમાં શૅરનો ભાવ, રોકાણ વગેરેની સામયિક શ્રેણીમાં આ પ્રકારની વધઘટો જોવા મળતી હોય છે. આ વધઘટોના પ્રમાણ અને સમયના અનુમાનના આધારે વેપારીઓ યોગ્ય આયોજન કરી શકે છે.

સામયિક શ્રેણીના આ ઘટકને 'C_t' વડે દર્શાવવામાં આવે છે.

(4) યાદચ્છિક અથવા અનિયમિત ઘટક (Random or Irregular Component) : સામયિક શ્રેણીના ચલની અલ્પકાલીન વધઘટોમાં મોસમી અને ચક્રીય એવા લગભગ નિયમિત ઘટકો ઉપરાંત અનિયમિત અથવા યાદચ્છિક ઘટકની અસર પણ જોવા મળે છે, જે ટૂંકા ગાળાની અસર છે. કોઈ આકસ્મિક કે અણધાર્યા કારણસર શ્રેણીની કિંમતો બદલાય તો તે ફેરફારોને યાદચ્છિક ચલન કહેવાય છે. આ ચલનનો સમયગાળો અને અસર નિશ્ચિત હોતા નથી. જે ચલનને વલણ, મોસમી ઘટક, ચક્રીય ઘટકમાંથી કોઈ પણ એક તરીકે નિર્દેશી ન શકાય તે ચલન યાદચ્છિક ઘટકની અસર હોય છે. આ વધઘટો સંપૂર્ણતઃ અનપેક્ષિત, અનિયમિત રીતે આવે છે. તેની આગાહી કરી શકાતી નથી, તેનું પુનરાવર્તન નિયત સમયે થતું નથી અને તેના ઉપર અંકુશ લાવી શકાતો નથી. આ ચલન ભૂકંપ, પૂર જેવી કુદરતી આપત્તિઓ અથવા યુદ્ધ, હડતાલ, રાજકીય ઊથલપાથલ જેવી માનવસર્જિત સમસ્યાઓને લીધે થાય છે. આ ઘટકને લીધે અનુમાનિત કિંમતમાં ત્રુટિ આવી શકે છે.

આ ઘટકને 'R_t' વડે દર્શાવાય છે.

સમય t પર આધારિત સામયિક શ્રેણીના ચલ y_tની કિંમત વલણ (T_t), મોસમી ઘટક (S_t), ચક્રીય ઘટક (C_t) અને યાદચ્છિક ઘટક (R_t)ના સંયુક્ત અસરથી નિશ્ચિત થાય છે. સામયિક શ્રેણીના યોગનીય મૉડેલ (Additive Model)માં આ સંબંધ નીચે મુજબ રજૂ કરવામાં આવે છે :

$$y_t = T_t + S_t + C_t + R_t$$

જો સામયિક શ્રેણીમાં ચલની વાર્ષિક કિંમતો આપી હોય તો તેમાં મોસમી ઘટક (S_t) દેખાશે નહિ. દરેક ઘટકની અસર શોધવા માટે સૌ પ્રથમ આપેલ y_tની કિંમતો પરથી વલણ (T_t) શોધવામાં આવે છે. તેને y_t માંથી બાદ કરતા બાકીનું ચલન અલ્પકાલીન ઘટક (S_t, C_t, R_t) દર્શાવે છે. ત્યારબાદ મોસમી ઘટક (જો પ્રાપ્ય હોય તો) અને ચક્રીય ઘટક શોધવામાં આવે છે. છેલ્લે, $R_t = y_t - (T_t + S_t + C_t)$ વડે યાદચ્છિક ઘટક શોધવામાં આવે છે. ભવિષ્યમાં ચલની અનુમાનિત કિંમત ($\hat{y}_t$) શોધવા માટે વલણની તે સમયની અનુમાનિત કિંમત શોધી, તેમાં ઉપર મુજબ મેળવેલ દરેક ઘટકની આપેલ સમય (t) માટેની અસર ઉમેરવામાં આવે છે.

પ્રવૃત્તિ

તમારા ઘરના વીજળીના બિલમાંથી પાછલા એક વર્ષ દરમિયાન થયેલ વીજળીના વપરાશના યુનિટની સામયિક શ્રેણી બનાવો. આ શ્રેણીના ચલમાં આવતી વધઘટો સામયિક શ્રેણીના કયા ઘટકની અસર છે તે ઓળખો.

4.3 વલણ માપવાની રીતો (Methods for Determining Trend)

વલણ એ સામયિક શ્રેણીનો મુખ્ય ઘટક છે. તેની કિંમત મેળવવા માટે નીચેની રીતોનો અભ્યાસ કરીશું :

4.3.1 આલેખની રીત (Graphical Method)

વલણ શોધવાની આ સૌથી સરળ રીત છે. અહીં નિરપેક્ષ ચલ એટલે કે સમય (t)ને X-અક્ષ પર અને સાપેક્ષ ચલ y_t ને Y-અક્ષ પર લઈ જુદાં જુદાં બિંદુઓનું આલેખન કરવામાં આવે છે. આ બધાં બિંદુઓને ક્રમશઃ રેખાખંડો વડે જોડવામાં આવે છે. આ પરથી ચલની કિંમતોની વધઘટ જોવા મળે છે. ત્યાર બાદ તે બિંદુઓની વચ્ચેથી પસાર થતો સરળ વક્ર અંદાજથી દોરવામાં આવે છે. આ વક્ર શ્રેણીમાંથી અલ્પકાલીન વધઘટોની અસર અવગણીને વલણ દર્શાવે છે. દોરેલ વક્ર લંબાવીને ભવિષ્યનાં અનુમાનો મેળવવામાં આવે છે.

આલેખની રીતના ગુણ અને મર્યાદા નીચે પ્રમાણે છે.

ગુણ :

(1) આ રીત સમજવામાં અને વાપરવામાં સરળ છે.

(2) કોઈ પણ ગાણિતિક સૂત્ર અથવા ગણતરી વગર વલણ જાણી શકાય છે.

(3) સુરેખ વલણ ન હોય તો પણ આ રીત વાપરી શકાય છે.

(4) વલણ મેળવવા માટે કયા પ્રકારના વક્રનું અન્વાયોજન કરવું તેનો અંદાજ આ રીતથી મેળવી શકાય.

મર્યાદા :

(1) જુદી જુદી વ્યક્તિઓ જુદા-જુદા વક્રો દોરે તેવી શક્યતા રહે છે. તેથી વલણ તેમજ અનુમાનોમાં એકરૂપતા રહેતી નથી.

(2) આ રીત ગાણિતિક ન હોવાથી અનુમાનિત કિંમતો સંપૂર્ણ રીતે ચોક્કસ હોતી નથી અને તેની વિશ્વસનીયતા કેટલી છે તે જાણી શકાતું નથી.

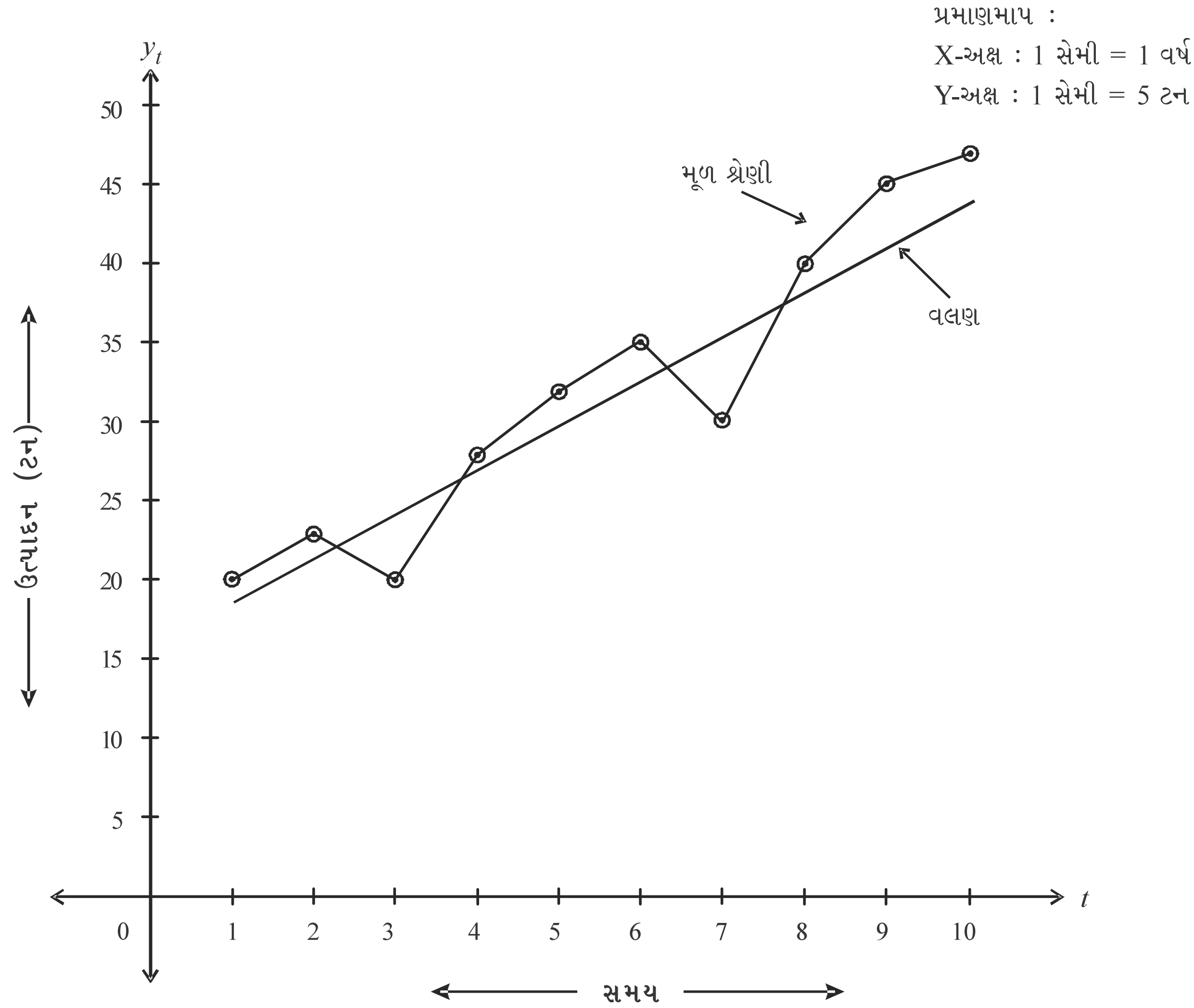
ઉદાહરણ 1 : એક કારખાનાનું વાર્ષિક ઉત્પાદન (ટનમાં) નીચે પ્રમાણે છે. આલેખની રીતે સુરેખ વલણ મેળવો.

વર્ષ	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
ઉત્પાદન (ટન)	20	23	20	28	32	35	30	40	45	47

આ માહિતીને આપણે નીચેની સામયિક શ્રેણી વડે રજૂ કરીશું :

સમય t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ઉત્પાદન (ટન) y_t	20	23	20	28	32	35	30	40	45	47

X-અક્ષ પર t ની અને Y-અક્ષ પર ઉત્પાદન y_t ની કિંમતો લેતાં આ બિંદુઓનું આલેખન કરીશું. બિંદુઓના તરાહને જોતા સુરેખ વલણ વધુ યોગ્ય જણાય છે.



બિંદુઓની વચ્ચેથી પસાર થતી સુરેખા વલણ દર્શાવે છે.

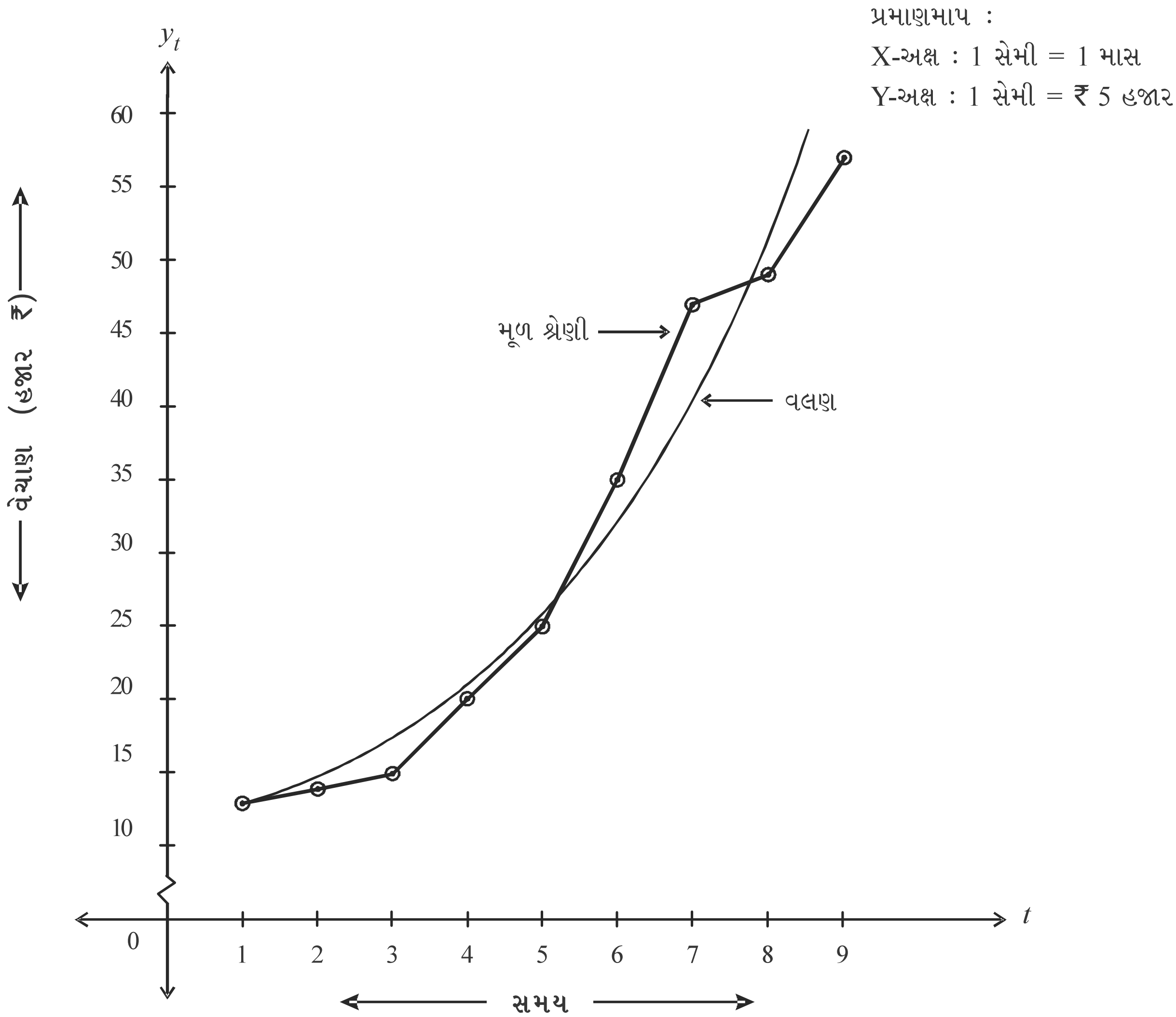
ઉદાહરણ 2 : એક કંપનીના માસિક વેચાણના (હજાર ₹માં) આંકડા નીચના કોષ્ટકમાં આપેલ છે. આલેખની રીતે વલણ મેળવો.

માસ	જાન્યુઆરી	ફેબ્રુઆરી	માર્ચ	એપ્રિલ	મે	જૂન	જુલાઈ	ઑગસ્ટ	સપ્ટેમ્બર
વેચાણ (હજાર ₹)	13	14	15	20	25	35	47	49	57

આ માહિતીની સામયિક શ્રેણી નીચે મુજબ લઈશું :

સમય t	1	2	3	4	5	6	7	8	9
વેચાણ (હજાર ₹) y_t	13	14	15	20	25	35	47	49	57

X-અક્ષ પર tની અને Y-અક્ષ પર વેચાણ y_tની કિંમતો લઈને બિંદુઓનું આલેખન કરીશું. તે પરથી આ માહિતી માટે વક્રીય વલણ વધુ યોગ્ય જણાય છે.



આલેખનાં બિંદુઓની વચ્ચેથી પસાર થતો વક્ર વલણ દર્શાવે છે.

સ્વાધ્યાય 4.1

1. દર વર્ષે જહાજોમાં માલ ભરવાની એક બંદરની ક્ષમતા (લાખ ટનમાં) વિશેની માહિતી નીચે આપેલ છે. આલેખની રીતે સુરેખ વલણ મેળવો.

વર્ષ	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
ક્ષમતા (લાખ ટન)	90	97	108	111	127	148	169	200

2. એક પર્યટન સ્થળે મુલાકાત માટે આવેલા પ્રવાસીઓની સંખ્યા (હજારમાં) નીચે પ્રમાણે છે. યોગ્ય આલેખ વડે શ્રેણીનું વલણ મેળવો.

વર્ષ	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
પ્રવાસીઓની સંખ્યા (હજાર)	5	7	10	14	30	41	50

3. એક રાજ્યમાં 0-6 વર્ષના બાળકોમાં 1000 છોકરાઓ સામે છોકરીઓની સંખ્યા (y_t)ની માહિતી નીચેના કોષ્ટકમાં આપેલ છે. આલેખની રીતે સુરેખ વલણ મેળવો.

વર્ષ	1961	1971	1981	1991	2001	2011
y_t	956	948	947	928	883	890

4. એક કંપનીના શૅરના બંધ ભાવની દસ દિવસોની માહિતી નીચેના કોષ્ટકમાં આપેલ છે. આલેખની રીતનો ઉપયોગ કરીને વલણ મેળવો.

દિવસ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
શૅરનો ભાવ (₹)	297	300	304	299	324	320	318	324	329	328

*

4.3.2 ન્યૂનતમ વર્ગોની રીત (Method of Least Squares)

આલેખની રીતની મર્યાદા તરીકે આપણે જોયું કે, ગાણિતિક પદ્ધતિનો ઉપયોગ ન કરવામાં આવે તો મેળવેલ વલણ અને તેના આધારે મેળવેલ અનુમાનો વ્યક્તિ સાપેક્ષ બદલાય છે અને તેની વિશ્વસનીયતા જાણી શકાતી નથી. જો સામયિક શ્રેણીનું સુરેખ વલણ ગાણિતિક રીતે શોધવું હોય તો આપણે વલણ દર્શાવતા ચોક્કસ સુરેખ સમીકરણની જરૂર પડશે. નિયતસંબંધના પ્રકરણમાં આપણે આપેલ માહિતી માટે સુરેખ સમીકરણનું અન્વાયોજન કરવાની ન્યૂનતમ વર્ગોની રીતનો અભ્યાસ કર્યો છે, જેનો ઉપયોગ આપણે સામયિક શ્રેણીનું સુરેખ વલણ શોધવા માટે કરીશું.

ધારો કે સમય t પર આધારિત સામયિક શ્રેણીનાં ચલ y_tની કિંમતો પ્રાપ્ય છે. તે બે વચ્ચેનો સંબંધ દર્શાવવા માટે સુરેખ મોડેલ $y_t = \alpha + \beta t + u_t$ (જ્યાં u_t એ વિક્ષેપ ચલ છે) લઈશું. તેનું અન્વાયોજન કરવા માટે ન્યૂનતમ વર્ગોની રીત વાપરીને y_tની અનુમાનિત કિંમતો $\hat{y}_t$ શોધીશું. આ માટે પ્રકરણ 3માં દર્શાવેલ રીત મુજબ સમીકરણ $\hat{y}_t = a + bt$નો ઉપયોગ કરીશું.

સરળતા ખાતર y_t માંથી અનુગ (suffix) tને અવગણતા આપણે $\hat{y} = a + bt$ લઈશું. અહીં, સાપેક્ષ ચલ y અને નિરપેક્ષ ચલ t છે.

ન્યૂનતમ વર્ગોની રીતથી a અને b નીચે મુજબ મળે છે :

$$b = \frac{n\Sigma ty - (\Sigma t)(\Sigma y)}{n\Sigma t^2 - (\Sigma t)^2} \quad \text{અને} \quad a = \overline{y} - b\overline{t},$$

જ્યાં n = અવલોકનોની સંખ્યા

આ રીતે મળતું સુરેખ સમીકરણ $\hat{y} = a + bt$ આપેલ માહિતી માટે શ્રેષ્ઠ સુરેખ સમીકરણ છે.

આ સુરેખ સમીકરણ વડે ભવિષ્યના સમય માટે વલણનું અનુમાન મેળવવામાં આવે છે.

નોંધ : વલણ મેળવવા માટે ન્યૂનતમ વર્ગોની રીતથી સુરેખ સમીકરણ ઉપરાંત અન્ય સમીકરણો જેવા કે બહુપદી, ઘાતાંકીય સમીકરણોનું પણ અન્વાયોજન કરી શકાય છે.

ન્યૂનતમ વર્ગોની રીતના ગુણ અને મર્યાદા નીચે પ્રમાણે છે.

ગુણ :

(1) આ રીત સંપૂર્ણ રીતે ગાણિતિક હોવાથી ભવિષ્યનાં અનુમાનો વ્યક્તિને સાપેક્ષ બદલાતા નથી.

(2) tની આપેલ દરેક કિંમત માટે વલણનું અનુમાન આ રીતથી મેળવી શકાય છે.

(3) વલણની કિંમતો સમીકરણમાંથી મેળવવામાં આવતી હોવાથી વચગાળાના સમય માટે પણ વલણનું અનુમાન મેળવી શકાય છે. દા.ત. બીજા અને ત્રીજા વર્ષના મધ્યમાં આવતા સમય માટે $t = 2.5$ લઈને તે સમયનું વલણનું અનુમાન મેળવી શકાય.

મર્યાદા :

(1) આ રીતથી વલણ શોધવા માટે લાંબી ગણતરી કરવી પડે છે.

(2) જો વલણ દર્શાવતા વક્રનું યોગ્ય સ્વરૂપ અને તેને અનુરૂપ સમીકરણનું અન્વાયોજન ન કરવામાં આવે તો મેળવેલ અનુમાનિત કિંમતોની વિશ્વસનીયતા ઓછી હોય છે.

ઉદાહરણ 3 : કમ્પ્યૂટર બનાવતી એક કંપનીનો નફો (લાખ ₹ માં) નીચે પ્રમાણે છે. આ માહિતી પરથી વલણ માટે ન્યૂનતમ વર્ગોની રીતે સુરેખ સમીકરણ શોધો અને વર્ષ 2017 માટે નફાનું અનુમાન મેળવો.

વર્ષ	2011	2012	2013	2014	2015
નફો (લાખ ₹)	31	35	39	41	44

અહીં, $n = 5$ વર્ષના નફાની કિંમતો આપેલ છે. તેથી આપણે આપેલ વર્ષોને અનુક્રમે $t = 1, 2, \dots, 5$ વડે દર્શાવીશું.

સુરેખ વલણનું અન્વાયોજન કરવાની ગણતરી

વર્ષ	**નફો** y	t	t^2	ty
2011	31	1	1	31
2012	35	2	4	70
2013	39	3	9	117
2014	41	4	16	164
2015	44	5	25	220
કુલ	**190**	**15**	**55**	**602**

$$\bar{t} = \frac{\Sigma t}{n} = \frac{15}{5} = 3, \qquad \bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{190}{5} = 38$$

$$b = \frac{n\Sigma ty - (\Sigma t)(\Sigma y)}{n\Sigma t^2 - (\Sigma t)^2}$$

$$= \frac{5 \times 602 - 15 \times 190}{5 \times 55 - (15)^2}$$

$$= \frac{3010 - 2850}{275 - 225}$$

$$= \frac{160}{50}$$

$$= 3.2$$

$$a = \bar{y} - b\bar{t}$$

$$= 38 - 3.2 \times 3$$

$$= 38 - 9.6$$

$$= 28.4$$

વલણનું સમીકરણ $\hat{y} = a + bt$

$$\therefore \ \hat{y} = 28.4 + 3.2\,t$$

વર્ષ 2017 માટે $t = 7$ લેવાશે.

$$\therefore \quad \hat{y} = 28.4 + 3.2 \times 7$$
$$= 28.4 + 22.4$$
$$= 50.8$$

$$\therefore \quad \hat{y} = ₹\ 50.8 \text{ લાખ}$$

આમ, વર્ષ 2017 માટે નફાની વલણની અનુમાનિત કિંમત ₹ 50.8 લાખ છે.

ઉદાહરણ 4 : એક જિલ્લાની પ્રાથમિક શાળાઓમાંથી ધોરણ 1 થી 5ના વિદ્યાર્થીઓ પૈકી અભ્યાસ છોડનાર વિદ્યાર્થીઓના દર (dropout rate) નીચે પ્રમાણે છે.

વર્ષ	2009 – 10	2010 – 11	2011 – 12	2012 – 13	2013 – 14	2014 – 15	2015 – 16
અભ્યાસ છોડનાર વિદ્યાર્થીઓનો દર	3.24	2.98	2.29	2.20	2.09	2.07	2.04

વલણ માટે સુરેખ સમીકરણનું અન્વાયોજન કરીને વર્ષ 2016-17 તેમજ 2017-18નાં વર્ષોમાં ધોરણ 1 થી 5ના વિદ્યાર્થીઓમાં અભ્યાસ છોડનાર વિદ્યાર્થીઓના દરનું અનુમાન મેળવો.

અહીં, $n = 7$ વર્ષની માહિતી આપેલ છે. તેથી આપણે આપેલ વર્ષો માટે અનુક્રમે $t = 1, 2, \ldots, 7$ લઈશું.

સુરેખ વલણનું અન્વાયોજન કરવાની ગણતરી

વર્ષ	અભ્યાસ છોડનાર વિદ્યાર્થીઓનો દર y	t	t^2	ty
2009-10	3.24	1	1	3.24
2010-11	2.98	2	4	5.96
2011-12	2.29	3	9	6.87
2012-13	2.20	4	16	8.80
2013-14	2.09	5	25	10.45
2014-15	2.07	6	36	12.42
2015-16	2.04	7	49	14.28
કુલ	**16.91**	**28**	**140**	**62.02**

$$\bar{t} = \frac{\Sigma t}{n} = \frac{28}{7} = 4, \qquad \bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{16.91}{7} = 2.4157 \simeq 2.42$$

$$b = \frac{n\Sigma ty - (\Sigma t)(\Sigma y)}{n\Sigma t^2 - (\Sigma t)^2}$$

$$= \frac{7 \times 62.02 - 28 \times 16.91}{7 \times 140 - (28)^2}$$

$$= \frac{434.14 - 473.48}{980 - 784}$$

$$= \frac{-39.34}{196}$$

$$= -0.2007$$

$$\simeq -0.2$$

$$a = \overline{y} - b\overline{t}$$

$$= 2.42 - (-0.2) \times 4$$

$$= 2.42 + 0.8$$

$$= 3.22$$

વલણનું સમીકરણ $\hat{y} = a + bt$

$$\therefore \hat{y} = 3.22 + (-0.2)\, t$$

$$= 3.22 - 0.2\, t$$

વર્ષ 2016-17 માટે $t = 8$ લેવાશે.

$$\therefore \hat{y} = 3.22 - 0.2 \times 8$$

$$= 3.22 - 1.6$$

$$= 1.62$$

વર્ષ 2017-18 માટે $t = 9$ લેવાશે.

$$\therefore \hat{y} = 3.22 - 0.2 \times 9$$

$$= 3.22 - 1.8$$

$$= 1.42$$

આમ, તે જિલ્લામાં વર્ષ 2016-17 અને 2017-18માં ધોરણ 1 થી 5માં અભ્યાસ છોડનાર વિદ્યાર્થીઓના દરનાં અનુમાનો અનુક્રમે 1.62 અને 1.42 હશે.

ઉદાહરણ5 : એક તાલુકાની વસ્તીના આંકડા (લાખમાં) નીચેના કોષ્ટકમાં આપેલ છે. તે પરથી સુરેખ વલણનાં સમીકરણનું અન્વાયોજન કરો અને આપેલ દરેક વર્ષ માટે વલણની કિંમત શોધો. 2021ના વર્ષની વસ્તી માટે વલણની કિંમતનું અનુમાન પણ મેળવો.

વર્ષ	1951	1961	1971	1981	1991	2001	2011
વસ્તી (લાખ)	15.1	16.9	18.7	20.1	21.6	25.7	27.1

અહીં, વસ્તીના આંકડા આપેલ હોવાથી તે દરેક દસકા સાથે સંકળાયેલ છે. આપેલ દરેક વર્ષ માટે અનુક્રમે $t = 1, 2, \dots, 7$ લઈશું. જેથી $n = 7$ થાય.

સુરેખ વલણનું અન્વાયોજન કરવાની ગણતરી

વર્ષ	વસ્તી (લાખ) y	t	t^2	ty	વલણની કિંમતો $\hat{y} = 12.66 + 2.02\ t$
1951	15.1	1	1	15.1	14.68
1961	16.9	2	4	33.8	16.7
1971	18.7	3	9	56.1	18.72
1981	20.1	4	16	80.4	20.74
1991	21.6	5	25	108	22.76
2001	25.7	6	36	154.2	24.78
2011	27.1	7	49	189.7	26.8
કુલ	**145.2**	**28**	**140**	**637.3**	

$\bar{t} = \frac{\Sigma t}{n} = \frac{28}{7} = 4$,　　$\bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{145.2}{7} = 20.7429 \simeq 20.74$

$$b = \frac{n\Sigma ty - (\Sigma t)(\Sigma y)}{n\Sigma t^2 - (\Sigma t)^2}$$

$$= \frac{7 \times 637.3 - 28 \times 145.2}{7 \times 140 - (28)^2}$$

$$= \frac{4461.1 - 4065.6}{980 - 784}$$

$$= \frac{395.5}{196}$$

$$= 2.0179$$

$$\simeq 2.02$$

$$a = \bar{y} - b\bar{t}$$

$$= 20.74 - 2.02 \times 4$$

$$= 20.74 - 8.08$$

$$= 12.66$$

વલણનું સમીકરણ　　$\hat{y} = a + bt$

$$\therefore \ \hat{y} = 12.66 + 2.02\ t$$

દરેક આપેલ વર્ષ માટે વલણની કિંમત શોધવા માટે અનુક્રમે $t = 1, 2, \ldots, 7$ લઈશું.

$t = 1$ મૂકતાં,

$$\hat{y} = 12.66 + 2.02 \times 1$$
$$= 12.66 + 2.02$$
$$= 14.68$$

$\therefore \quad \hat{y} = 14.68$ લાખ

આ પ્રમાણે $t = 2, 3, \ldots, 7$ મૂકતાં બાકીની વલણ કિંમતો શોધીને કોષ્ટકમાં દર્શાવીશું.

અહીં, જોઈ શકાય કે $\hat{y}$ ની કિંમતોમાં ક્રમશઃ 2.02 જેટલો વધારો થાય છે.

વર્ષ 2021 માટે $t = 8$ મૂકતાં,

$$\hat{y} = 12.66 + 2.02 \times 8$$
$$= 12.66 + 16.16$$
$$= 28.82$$

$\therefore \quad \hat{y} = 28.82$ લાખ

આમ, 2021ના વર્ષની વસ્તી માટે વલણની અનુમાનિત કિંમત 28.82 લાખ છે.

ઉદાહરણ **6 : એક કંપનીના માસિક વેચાણ (હજાર ₹ માં)ની માહિતી નીચે કોષ્ટકમાં આપેલ છે. સુરેખ વલણના સમીકરણનું અન્વાયોજન કરો અને તેને આલેખ વડે દર્શાવો. મેળવેલ સમીકરણનો ઉપયોગ કરીને ઑગસ્ટ માસના વેચાણનું અનુમાન શોધો.**

માસ	જાન્યુઆરી	ફેબ્રુઆરી	માર્ચ	એપ્રિલ	મે	જૂન
વેચાણ (હજાર ₹)	80	85	90	76	82	88

અહીં, $n = 6$ માસની માહિતી આપેલ છે. તેથી આપણે આપેલ માસ માટે અનુક્રમે $t = 1, 2, \ldots, 6$ લઈશું.

સુરેખ સમીકરણના અન્વાયોજનની ગણતરી

માસ	**વેચાણ y (હજાર ₹)**	t	t^2	ty	$\hat{y} = 81.79 + 0.49\,t$
જાન્યુઆરી	80	1	1	80	82.28
ફેબ્રુઆરી	85	2	4	170	82.77
માર્ચ	90	3	9	270	83.26
એપ્રિલ	76	4	16	304	83.75
મે	82	5	25	410	84.24
જૂન	88	6	36	528	84.73
કુલ	**501**	**21**	**91**	**1762**	

$\bar{t} = \frac{\Sigma t}{n} = \frac{21}{6} = 3.5, \qquad \bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{501}{6} = 83.5$

$$b = \frac{n\Sigma ty - (\Sigma t)(\Sigma y)}{n\Sigma t^2 - (\Sigma t)^2}$$

$$= \frac{6 \times 1762 - 21 \times 501}{6 \times 91 - (21)^2}$$

$$= \frac{10572 - 10521}{546 - 441}$$

$$= \frac{51}{105}$$

$= 0.4857$

$\simeq 0.49$

$a = \bar{y} - b\bar{t}$

$= 83.5 - 0.49 \times 3.5$

$= 83.5 - 1.715$

$= 81.785$

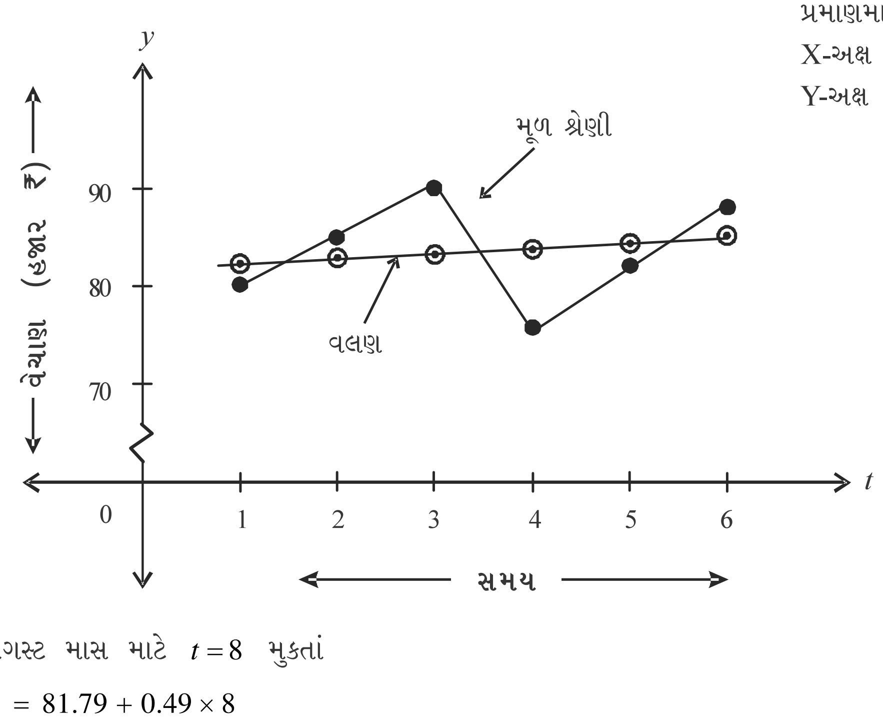
$\simeq 81.79$

વલણનું સમીકરણ $\hat{y} = a + bt$

$\therefore \hat{y} = 81.79 + 0.49\, t$

આ સમીકરણમાં ક્રમશઃ $t = 1, 2, \ldots, 6$ મૂકતાં $\hat{y}$ ની સંલગ્ન કિંમતો મળશે જે કોષ્ટકમાં દર્શાવીશું. આ વલણની કિંમતો અને આપેલ શ્રેણીની કિંમતોનો આલેખ નીચે મુજબ દોરી શકાય :

પ્રમાણમાપ :
X-અક્ષ : 1 સેમી = 1 માસ
Y-અક્ષ : 1 સેમી = ₹ 10 હજાર



હવે ઑગસ્ટ માસ માટે $t = 8$ મુકતાં

$\hat{y} = 81.79 + 0.49 \times 8$

$= 81.79 + 3.92$

$= 85.71$

$\therefore \hat{y} =$ ₹ 85.71 હજાર

આમ, ઑગસ્ટ મહિનામાં તે કંપનીના વેચાણનું અનુમાન ₹ 85.71 હજાર છે.

નોંધ : સુરેખ સમીકરણ ધરાવતી સુરેખા દોરવા માટે $\hat{y}$ ની બધી કિંમતો લેવાની જરૂરી નથી. $t = 1, 2, \dots, 6$ પૈકી કોઈ પણ બે કિંમતોની સંલગ્ન $\hat{y}$ ની કિંમતોને જોડતી સુરેખા વલણનું સમીકરણ આલેખમાં દર્શાવશે.

ઉદાહરણ 7 : એક સામયિક શ્રેણી માટે $n = 8$, $\Sigma y = 344$, $\Sigma ty = 1342$ હોય, તો વલણનું સુરેખ સમીકરણ મેળવો.

$n = 8$ હોવાથી $t = 1, 2, \dots, 8$ લેતા $\Sigma t = 1 + 2 + \dots + 8 = 36$ અને

$\Sigma t^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + 8^2 = 1 + 4 + \dots + 64 = 204$ થશે.

$$\bar{t} = \frac{\Sigma t}{n} = \frac{36}{8} = 4.5, \qquad \bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{344}{8} = 43$$

$$b = \frac{n\Sigma ty - (\Sigma t)(\Sigma y)}{n\Sigma t^2 - (\Sigma t)^2}$$

$$= \frac{8 \times 1342 - 36 \times 344}{8 \times 204 - (36)^2}$$

$$= \frac{10736 - 12384}{1632 - 1296}$$

$$= \frac{-1648}{336}$$

$$= -4.9048$$

$$\simeq -4.9$$

$$a = \bar{y} - b\bar{t}$$

$$= 43 - (-4.9) \times 4.5$$

$$= 43 + 22.05$$

$$= 65.05$$

સુરેખ સમીકરણ $\hat{y} = a + bt$

$$= 65.05 + (-4.9)\,t$$

$$= 65.05 - 4.9\,t$$

સ્વાધ્યાય 4.2

1. એક રાજ્યનાં જુદાં જુદાં વર્ષોના મૃત્યુદરની માહિતી નીચેના કોષ્ટકમાં આપેલ છે. વલણ શોધવા માટે સુરેખ સમીકરણનું અન્વાયોજન કરો અને તે પરથી વર્ષ 2017ના મૃત્યુદરનું અનુમાન મેળવો.

વર્ષ	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
મૃત્યુદર	7.6	6.9	7.1	7.3	7.2	6.9	6.9

2. કેન્દ્ર સરકારે જાહેર કરેલ કૉસ્ટ ઇન્ફ્લેશન ઇન્ડેક્ષ (CII) વિશેની માહિતી નીચે પ્રમાણે છે. આ આંકમાં 1981-82ને આધાર વર્ષ લીધેલું છે. આ માહિતી પરથી સુરેખ સમીકરણનું અન્વાયોજન કરીને વર્ષ 2015-16 માટે આ આંકનું અનુમાન મેળવો.

વર્ષ	2007 – 08	2008 – 09	2009 – 10	2010 – 11	2011 – 12	2012 – 13	2013 – 14	2014 – 15
CII	551	582	632	711	785	852	939	1024

3. એક શહેરમાં જુદાં જુદાં વર્ષમાં નોંધણી કરાયેલ દ્વિચક્રી વાહનોની સંખ્યા (હજારમાં) નીચે પ્રમાણે છે. તે પરથી વર્ષ 2016 તેમજ 2017 માટેની વાહનોની નોંધણીની સંખ્યાનાં અનુમાનો મેળવવા માટે સુરેખ સમીકરણના અન્વાયોજનની રીતનો ઉપયોગ કરો. દરેક વર્ષની વલણની કિંમતો પણ શોધો.

વર્ષ	2010	2011	2012	2013	2014	2015
વાહનોની સંખ્યા (હજાર)	69	75	82	91	101	115

4. ભારતમાં જુદી જુદી વસ્તી-ગણતરીમાં મળેલ માહિતી મુજબ લગ્ન સમયે સ્ત્રીઓની સરેરાશ ઉંમર (વર્ષમાં) નીચેના કોષ્ટકમાં દર્શાવેલ છે. આ માહિતી પરથી સુરેખ વલણના સમીકરણનું અન્વાયોજન કરીને તે આલેખ વડે દર્શાવો. સુરેખ સમીકરણ પરથી 2021ના વર્ષ માટે આપેલ ચલની કિંમતનું અનુમાન મેળવો.

વસ્તી ગણતરીનું વર્ષ	1971	1981	1991	2001	2011
લગ્ન સમયે સ્ત્રીઓની સરેરાશ ઉંમર (વર્ષ)	17.7	18.7	19.3	20.2	22.2

*

4.3.3 ચલિત સરેરાશની રીત (Method of Moving Averages)

ટૂંકા ગાળાની વધઘટોની અસર દૂર કરીને વલણ નક્કી કરવા માટે ચલિત સરેરાશની રીત ખૂબ જ ઉપયોગી નીવડે છે. ટૂંકા ગાળાની વધઘટો મોટા ભાગે નિયમિત હોય છે અને તેનું પુનરાવર્તન થતું હોય છે. ભૂતકાળના અનુભવથી અથવા અન્ય સાધનોથી આ વધઘટોના પુનરાવર્તનના સમયની જાણકારી મેળવી તેને અનુરૂપ સમયનાં અવલોકનોની સરેરાશ શોધવામાં આવે છે. સરેરાશ કિંમત કેન્દ્રસ્થાને હોવાથી અલ્પકાલીન વધઘટની અસરથી મુક્ત થયેલી કિંમતો મળે છે જે ચલનું વલણ દર્શાવે છે.

ધારો કે, આપેલ સામયિક શ્રેણીમાં સમય $t = 1, 2, \dots, n$ પર આધારિત ચલની કિંમતો અનુક્રમે $y_1, y_2, \dots, y_n$ છે અને તે શ્રેણીમાં અલ્પકાલીન (ચક્રીય) વધઘટોનો ગાળો 3 વર્ષનો છે. પ્રથમ ત્રણ અવલોકનો y_1, y_2, y_3 નો મધ્યક $\frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$ શોધી તેને આ ત્રણ કિંમતોના કેન્દ્રસ્થાને આવતી એટલે કે y_2 ની સામે મૂકવામાં આવે છે. ત્યાર બાદ ક્રમશઃ ત્રણ કિંમતો y_2, y_3, y_4 લઈને તેનો મધ્યક $\frac{y_2 + y_3 + y_4}{3}$ શોધી તેને કેન્દ્રસ્થાને એટલે કે y_3 ની સામે મૂકવામાં આવે છે. આ રીતે ચલની આપેલ કિંમતોમાંથી છેલ્લી કિંમત આવરી લેવાય ત્યાં સુધીના બધા મધ્યકો શોધવામાં આવે છે. આવી સરેરાશોને ત્રણ વર્ષીય ચલિત સરેરાશો કહેવાય છે જે વલણ દર્શાવે છે.

દરેક સામયિક શ્રેણીમાં સમયનું એકમ 'વર્ષ' હોય તેવું જરૂરી નથી અને ચલની કિંમતોની તરાહના પુનરાવર્તનનો સમયગાળો પણ ત્રણ વર્ષનો હોવો જરૂરી નથી. સમયના એકમ પ્રમાણે આપણે ચલિત સરેરાશોને દર્શાવીશું. દા.ત., 5 દિવસીય ચલિત સરેરાશો, ત્રિમાસિક સરેરાશો, 4 સપ્તાહની ચલિત સરેરાશો વગેરે. અત્યારે ચર્ચા માટે સમયનું એકમ 'વર્ષ' લઈશું.

દાખલાની ગણતરી કરતી વખતે સૌ પ્રથમ સરેરાશના સમયગાળાને અનુરૂપ ચલની કિંમતોના સરવાળા શોધવામાં આવે છે. ત્રણ વર્ષીય સરેરાશો માટે પ્રથમ સરવાળો $y_1 + y_2 + y_3$ મેળવ્યા બાદ બીજો સરવાળો અર્થાત્ $y_2 + y_3 + y_4$ શોધવા માટે ઉપર્યુક્ત સરવાળામાંથી y_1 ને બાદ કરી y_4 ઉમેરવામાં આવે છે. આ રીતે ક્રમશઃ બધા સરવાળા શોધીને દરેકને 3 વડે ભાગતા ત્રણ વર્ષીય ચલિત સરેરાશો મળશે.

નોંધ : ત્રણ વર્ષીય સરેરાશોમાં પ્રથમ સરેરાશ y_2 ની સામે લખવામાં આવે છે અને તેથી y_1 ની સામે ચલિત સરેરાશ અર્થાત્ તે સમયની વલણની કિંમત મળશે નહિ. તેમજ y_n ની સંલગ્ન વલણની કિંમત મેળવી શકાય નહિ.

ઉદાહરણ8 : કોઈ એક બૅન્કની એક શાખાના જુદા જુદા સપ્તાહમાં ખોલાયેલા ખાતાની સંખ્યા નીચે આપેલ છે. ત્રણ સપ્તાહની ચલિત સરેરાશોની રીતે વલણ શોધો.

સપ્તાહ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ખોલાયેલ ખાતાની સંખ્યા	26	27	26	25	22	24	25	23	22	21

ત્રણ સપ્તાહની ચલિત સરેરાશોની ગણતરી

સપ્તાહ t	ખોલાયેલ ખાતાની સંખ્યા y	ત્રણ સપ્તાહનો ચલિત સરવાળો	ત્રણ સપ્તાહની ચલિત સરેરાશ
1	26	—	—
2	27	$26 + 27 + 26 = 79$	$\frac{79}{3} = 26.33$
3	26	$79 - 26 + 25 = 78$	$\frac{78}{3} = 26$
4	25	$78 - 27 + 22 = 73$	$\frac{73}{3} = 24.33$
5	22	$73 - 26 + 24 = 71$	$\frac{71}{3} = 23.67$
6	24	$71 - 25 + 25 = 71$	$\frac{71}{3} = 23.67$
7	25	$71 - 22 + 23 = 72$	$\frac{72}{3} = 24$
8	23	$72 - 24 + 22 = 70$	$\frac{70}{3} = 23.33$
9	22	$70 - 25 + 21 = 66$	$\frac{66}{3} = 22$
10	21	—	—

ઉદાહરણ 9 : એક કારખાનાના વાર્ષિક ઉત્પાદન (ટનમાં)ની નીચેની માહિતી પરથી પાંચ વર્ષીય ચલિત સરેરાશોની રીતે વલણ મેળવો :

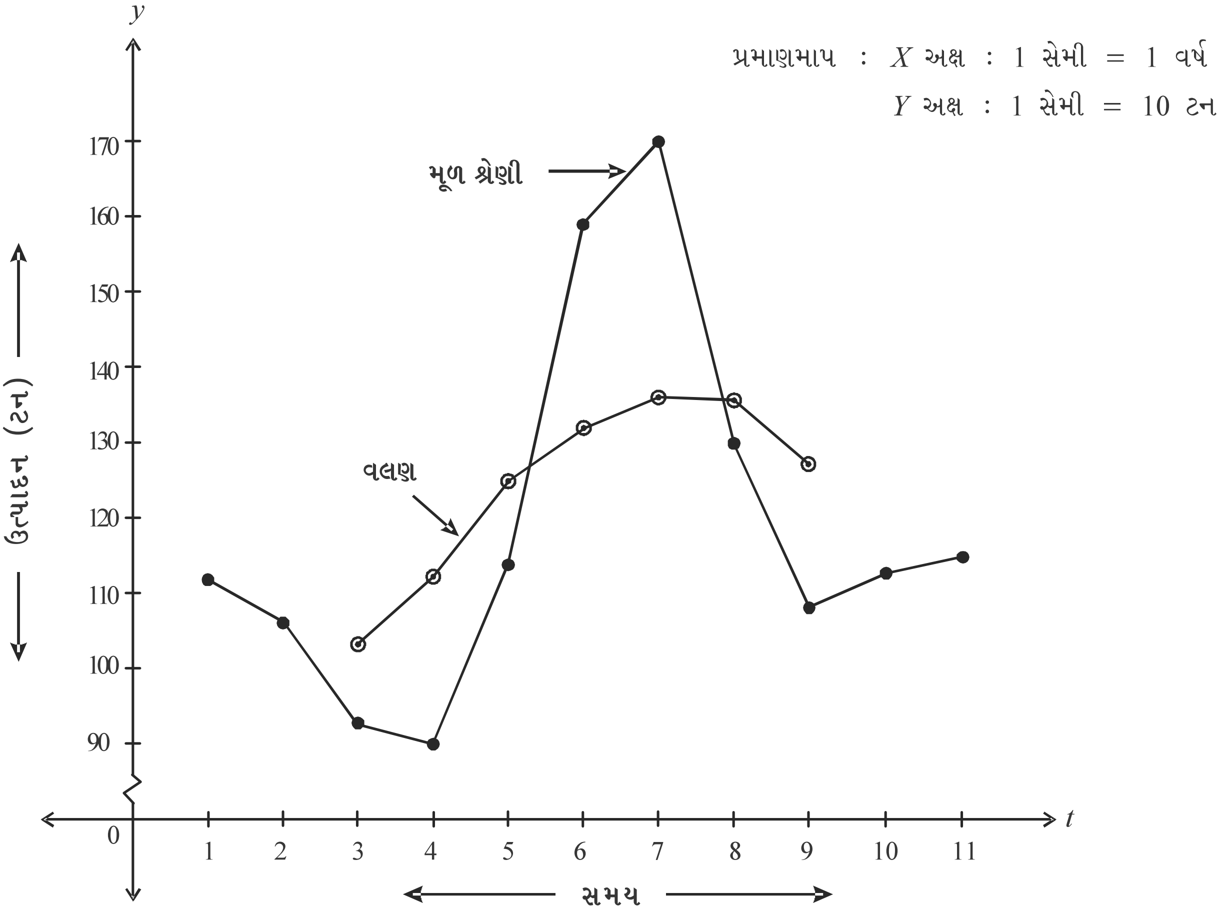
વર્ષ	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
ઉત્પાદન (ટન)	112	106	93	90	114	159	170	130	108	113	115

પાંચ વર્ષીય ચલિત સરેરાશોની ગણતરી

વર્ષ	ઉત્પાદન y	t	પાંચ વર્ષીય ચલિત સરવાળો	પાંચ વર્ષીય ચલિત સરેરાશ (વલણ)
2006	112	1	—	—
2007	106	2	—	—
2008	93	3	$112+106+93+90+114=515$	$\frac{515}{5}=103$
2009	90	4	$515-112+159=562$	$\frac{562}{5}=112.4$
2010	114	5	$562-106+170=626$	$\frac{626}{5}=125.2$
2011	159	6	$626-93+130=663$	$\frac{663}{5}=132.6$
2012	170	7	$663-90+108=681$	$\frac{681}{5}=136.2$
2013	130	8	$681-114+113=680$	$\frac{680}{5}=136$
2014	108	9	$680-159+115=636$	$\frac{636}{5}=127.2$
2015	113	10	—	—
2016	115	11	—	—

સમજૂતી માટે વધારાની માહિતી

ઉપર્યુક્ત રીતે મેળવેલ વલણ સમજવા માટે આપણે ચલની કિંમતો અને પાંચ વર્ષીય ચલિત સરેરાશો વડે મળેલ વલણ આલેખ દ્વારા દર્શાવીશું.



અહીં, બધી સરેરાશોમાંથી પસાર થતો વક્ર વલણ દર્શાવશે.

જો ચલિત સરેરાશોનો સમયગાળો એકી સંખ્યા જેવી કે 3, 5, 7, ... હોય, તો ઉપર મુજબ વલણ શોધવામાં આવે છે. પણ જો તે ગાળો બેકી સંખ્યામાં હોય તો ચલિત સરેરાશોની ગણતરી થોડી અઘરી બને છે.

ધારો કે ચાર વર્ષીય ચલિત સરેરાશો શોધવાની છે. પ્રથમ ચાર વર્ષીય સરેરાશ $\frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4}$ શોધવામાં આવશે. આ ચાર કિંમતોનું કેન્દ્રસ્થાન y_2 અને y_3 ની વચ્ચે હોવાથી આ સરેરાશને તે સ્થાને લખાશે. તે જ રીતે ક્રમશઃ $\frac{y_2 + y_3 + y_4 + y_5}{4}$, $\frac{y_3 + y_4 + y_5 + y_6}{4}$, ... ચલિત સરેરાશો શોધીને અનુક્રમે y_3 અને y_4 ની વચ્ચે, y_4 અને y_5 ની વચ્ચે, ... લખવામાં આવશે. આ બધી સરેરાશો બે વર્ષની વચ્ચે આવતી હોવાથી ફરી બબ્બે સરેરાશોની સરેરાશ શોધવામાં આવે છે અને તેને તે બે ચલિત સરેરાશોની વચ્ચે મૂકવામાં આવે છે. આમ, ઉપર દર્શાવેલ પ્રથમ અને બીજી સરેરાશોની સરેરાશ કિંમત y_3 ની સામે મૂકવામાં આવશે. આ રીતે મેળવેલ સરેરાશોને ચાર વર્ષીય ચલિત સરેરાશો કહેવામાં આવે છે. અહીં, સરેરાશ શોધવાની પ્રક્રિયા બે વખત કરવી પડે છે. આ ગણતરીને સરળ બનાવવા માટે ચાર વર્ષીય સરવાળા મેળવીને તે પરથી બબ્બે વર્ષના સરવાળા કરવામાં આવે છે. આ સરવાળા 8 કિંમતોના હોવાથી તેને 8 વડે ભાગતા આપણને ઉપર મુજબની ચાર વર્ષીય ચલિત સરેરાશો મળશે.

અલ્પકાલીન વધઘટોના પુનરાવર્તનનો સમય કોઈ પણ બેકી સંખ્યા હોય, તો ઉપર દર્શાવેલ રીત મુજબ પ્રથમ ચલિત સરવાળા, ત્યાર બાદ બબ્બેના સરવાળા મેળવીને ચલિત સરેરાશો શોધવામાં આવે છે.

ઉદાહરણ **10 :** એક દુકાનના માસિક વેચાણ (લાખ ₹માં)ની નીચેની માહિતી માટે ચાર માસના ચલિત સરેરાશો વડે વલણ શોધો.

માસ	માર્ચ	એપ્રિલ	મે	જૂન	જુલાઈ	ઑગસ્ટ	સપ્ટેમ્બર	ઓક્ટોબર	નવેમ્બર	ડિસેમ્બર
વેચાણ (લાખ ₹)	5	3	7	6	4	8	9	10	8	9

ચાર માસના ચલિત સરેરાશોની ગણતરી

માસ	વેચાણ (લાખ ₹) y	t	ચાર માસના ચલિત સરવાળા	બબ્બે કિંમતોના સરવાળા	ચાર માસની ચલિત સરેરાશ
માર્ચ	5	1		—	—
			—		
એપ્રિલ	3	2		—	—
			$5+3+7+6=21$		
મે	7	3		$21+20=41$	$\frac{41}{8}=5.13$
			$21-5+4=20$		
જૂન	6	4		$20+25=45$	$\frac{45}{8}=5.63$
			$20-3+8=25$		
જુલાઈ	4	5		$25+27=52$	$\frac{52}{8}=6.5$
			$25-7+9=27$		
ઑગસ્ટ	8	6		$27+31=58$	$\frac{58}{8}=7.25$
			$27-6+10=31$		
સપ્ટેમ્બર	9	7		$31+35=66$	$\frac{66}{8}=8.25$
			$31-4+8=35$		
ઓક્ટોબર	10	8		$35+36=71$	$\frac{71}{8}=8.88$
			$35-8+9=36$		
નવેમ્બર	8	9		—	—
			—		
ડિસેમ્બર	9	10		—	—

ચાર માસની ચલિત સરેરાશો સામયિક શ્રેણીનું વલણ દર્શાવે છે.

ચલિત સરેરાશની રીતના ગુણ અને મર્યાદા નીચે પ્રમાણે છે :

ગુણ :

(1) સરેરાશોનો ઉપયોગ કરીને આ રીતથી ટૂંકા ગાળાની અસર મહદંશે દૂર થાય છે અને શ્રેણીનું વલણ મળે છે.

(2) આ રીતમાં પ્રમાણમાં ઓછી અને સરળ ગણતરી હોવાથી તે સમજવામાં સહેલી છે.

મર્યાદા :

(1) જો ચલિત સરેરાશોનો ગાળો યોગ્ય રીતે પસંદ કરવામાં ન આવે, તો આ રીતથી મેળવેલ વલણ ચોક્કસ હોતું નથી.

(2) શરૂઆતનાં તેમજ અંતિમ અમુક સમય માટે આ રીતથી વલણનું અનુમાન મળતું નથી.

(3) ભવિષ્યના અનુમાન માટે કોઈ ચોક્કસ ગાણિતિક સૂત્ર મળતું નથી.

સ્વાધ્યાય 4.3

1. એક કંપનીના વેચાણ (દસ લાખ ₹ માં)ની નીચેની માહિતી પરથી ત્રણ વર્ષીય ચલિત સરેરાશો વડે વલણ મેળવો.

વર્ષ	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
વેચાણ (દસ લાખ ₹)	3	4	8	6	7	11	9	10	14	12

2. એક કંપનીના શૅરના વર્ષ 2016 દરમિયાન સરેરાશ માસિક બંધ ભાવની માહિતી નીચેના કોષ્ટકમાં આપેલ છે. ચાર માસના ચલિત સરેરાશો વડે વલણ મેળવો.

માસ	જાન્યુઆરી	ફેબ્રુઆરી	માર્ચ	એપ્રિલ	મે	જૂન	જુલાઈ	ઑગસ્ટ	સપ્ટેમ્બર	ઓક્ટોબર	નવેમ્બર	ડિસેમ્બર
શેરનો ભાવ ₹	253	231	350	261	262	266	263	261	281	278	278	272

3. એક વેપારીના જુદાં જુદાં વર્ષના નફા (લાખ ₹ માં)ની નીચે આપેલ માહિતી પરથી પાંચ વર્ષીય ચલિત સરેરાશોનો ઉપયોગ કરીને વલણ શોધો.

વર્ષ	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
નફો (લાખ ₹)	15	14	18	20	17	24	27	25	23

4. વર્ષના જુદા-જુદા ત્રિમાસિક (Q) ગાળામાં જથ્થાબંધ ભાવના સૂચક આંક નીચે પ્રમાણે મેળવેલ છે. ચાર ત્રિમાસની ચલિત સરેરાશો વડે શ્રેણીનું વલણ મેળવો.

વર્ષ	2013				2014				2015			
ત્રિમાસ	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
સૂચક આંક	110	110	125	135	145	152	155	168	131	124	132	153

*

સારાંશ

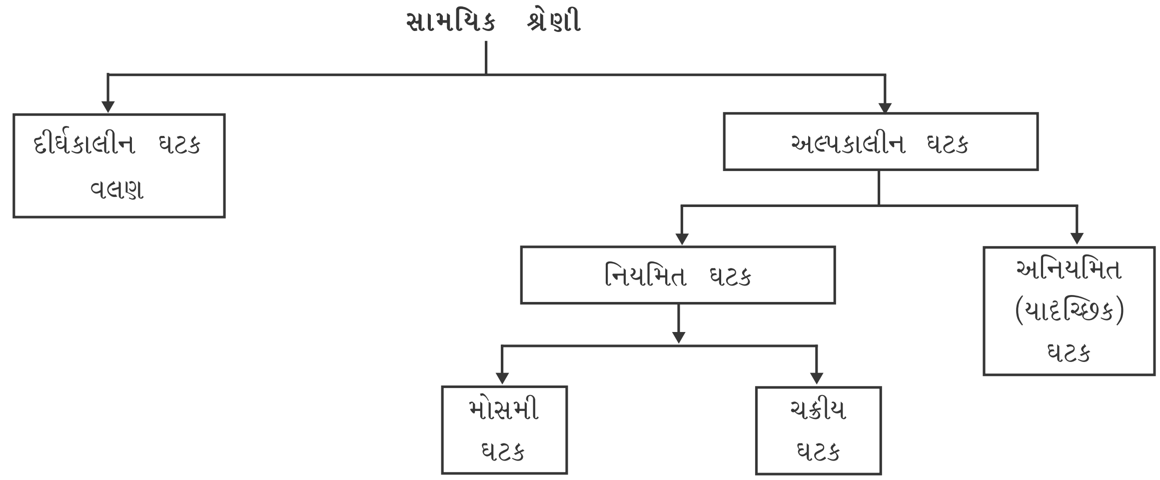
- સમય અનુસાર એકત્રિત કરેલી અને ગોઠવેલી માહિતીને સામયિક શ્રેણી કહે છે.
- આપેલ ચલની કિંમતના ભવિષ્યનાં અનુમાનો મેળવવા માટે સામયિક શ્રેણીનું પૃથક્કરણ કરવું જરૂરી છે.
- સામયિક શ્રેણીના ચલની કિંમત પર અસર કરતાં મુખ્ય ચાર ઘટકો છે :

  (1) દીર્ઘકાલીન ઘટક (વલણ) (2) મોસમી ઘટક

  (3) ચક્રીય ઘટક (4) યાદચ્છિક (અનિયમિત) ઘટક
- મોસમી વધઘટ, ચક્રીય વધઘટ અને યાદચ્છિક વધઘટોને કારણે શ્રેણીમાં અલ્પકાલીન ફેરફારો થાય છે.
- મોસમી અને ચક્રીય વધઘટો લગભગ નિયમિત રીતે પુનરાવર્તન પામતી હોય છે.
- સામયિક શ્રેણીનું વલણ માપવાની ત્રણ રીતો :

  (1) આલેખની રીત (2) ન્યૂનતમ વર્ગોની રીત (3) ચલિત સરેરાશની રીત

પ્રકરણની એક ઝલક



સૂત્રોની યાદી :

આપેલ માહિતી માટે ન્યૂનતમ વર્ગોની રીતે સુરેખ સમીકરણ $\hat{y} = a + bt$ નું અન્વાયોજન કરવા માટે

$$b = \frac{n\Sigma ty - (\Sigma t)(\Sigma y)}{n\Sigma t^2 - (\Sigma t)^2}, \qquad a = \bar{y} - b\bar{t}$$

સ્વાધ્યાય 4

વિભાગ A

નીચે આપેલ બહુવિકલ્પ પ્રશ્ન માટે સાચા વિકલ્પની પસંદગી કરો :

1. મોસમી ઘટકને કારણે સામયિક ચલમાં કયા પ્રકારના ફેરફારો થાય છે ?

(a) દીર્ઘકાલીન (b) અનિયમિત (c) નિયમિત (d) શૂન્ય પ્રમાણમાં

2. 'હડતાલને કારણે કોઈ એક કંપનીના ઉત્પાદનમાં થયેલો ઘટાડો' કઈ વધઘટ દર્શાવે છે ?

(a) યાદચ્છિક (b) વલણ (c) મોસમી (d) ચક્રીય

3. સુરેખ વલણ શોધવા માટે સુરેખ સમીકરણનું અન્વાયોજન કરવાની રીતનું નામ જણાવો.

(a) આલેખની રીત (b) ન્યૂનતમ વર્ગોની રીત

(c) ચલિત સરેરાશની રીત (d) આંશિક સરેરાશની રીત

4. સામયિક શ્રેણીનું યોગનીય મોડેલ કેવી રીતે દર્શાવાય છે ?

(a) $y_t = T_t + S_t + C_t - R_t$ (b) $y_t = T_t + S_t + C_t + R_t$

(c) $y_t = T_t \times S_t + C_t \times R_t$ (d) $y_t = S_t + C_t + R_t$

5. સામયિક શ્રેણીનો નિરપેક્ષ ચલ જણાવો.

(a) y_t (b) S_t (c) t (d) x_t

6. સામયિક શ્રેણીના કયા ઘટકનું અનુમાન મેળવવું અશક્ય હોય છે ?

(a) યાદૃચ્છિક ઘટક (b) વલણ (c) મોસમી ઘટક (d) ચક્રીય ઘટક

7. નીચેના પૈકી કયા ફેરફારો ચક્રીય ઘટકને લીધે છે તેમ કહેવાય ?

(a) શિયાળામાં વધતી સ્વેટરની માંગ

(b) શૅરબજારમાં ચાલતી મંદીના કારણે ઘટેલા શૅરના ભાવ

(c) અતિવૃષ્ટિને કારણે ખેતીની પેદાશમાં થયેલ ઘટાડો

(d) સતત ઘટતો મૃત્યુદર

8. જાન્યુઆરી 2016થી ડિસેમ્બર 2016 સુધીની સામયિક શ્રેણીમાંથી મેળવેલ વલણનું સમીકરણ $\hat{y} = 30.1 + 1.5\,t$ હોય તો એપ્રિલ 2016 માટે વલણની કિંમત શોધો.

(a) 30.1 (b) 34.6 (c) 36.1 (d) 33.1

9. નીચેનામાંથી કયા ફેરફારો મોસમી ઘટકની અસર છે ?

(a) ગ્રામ્ય વિસ્તારોમાંથી શહેર તરફ વધતું સ્થળાંતર

(b) શહેરના રસ્તા પર વધતી વાહનોની સંખ્યા

(c) શાળાના વૅકેશન દરમિયાન વધતી પર્યટકોની સંખ્યા

(d) કોઈ વિશિષ્ટ રોગચાળા દરમિયાન વધેલ મૃત્યુઆંક

10. વલણ શોધવાની કઈ રીતથી ટૂંકા ગાળામાં પુનરાવર્તન પામતી વધઘટોની અસર સૌથી સારી દૂર થાય છે ?

(a) આલેખની રીત (b) ન્યૂનતમ વર્ગોની રીત

(c) કાર્લ પિયર્સનની રીત (d) ચલિત સરેરાશની રીત

વિભાગ B

નીચેના પ્રશ્નોના એક વાક્યમાં જવાબ આપો :

1. ઘટતું વલણ હોય તેવી સામયિક શ્રેણીનું ઉદાહરણ આપો.

2. સામયિક શ્રેણી એટલે શું ?

3. સામયિક શ્રેણીના કયા ઘટકોને લીધે ચલમાં અલ્પકાલીન વધઘટ થાય છે ?

4. સામયિક શ્રેણીનું પૃથક્કરણ એટલે શું ?

5. સામયિક શ્રેણીના ચક્રીય ઘટકને કયા સંકેત વડે દર્શાવાય છે ?

6. સામયિક શ્રેણીમાં વલણ માપવાની રીતોનાં નામ લખો.

7. એક વર્ષથી ઓછા સમયમાં પુનરાવર્તન થતી વધઘટો કયા ઘટકની અસર દર્શાવે છે ?

8. સામયિક શ્રેણીના ઘટકોનાં નામ લખો.

9. વલણ શોધવા માટે ચલિત સરેરાશની રીત ક્યારે વધુ ઉપયોગી થાય છે ?

10. ચલ y ની 7 સપ્તાહની માહિતી પરથી અન્વાયોજન કરેલ સુરેખ સમીકરણ $\hat{y} = 25.1 - 1.3\,t$ હોય, તો આઠમા સપ્તાહની y ની કિંમતનું અનુમાન શોધો.

વિભાગ C

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

1. સામયિક શ્રેણીનું યોગનીય મોડેલ વર્ણવો.
2. ચક્રીય ઘટક એટલે શું ?
3. મોસમી ઘટક એ ચક્રીય ઘટકથી કઈ રીતે જુદી પડે છે ?
4. અનિયમિત ઘટક સમજાવો.
5. આલેખની રીતની મર્યાદાઓ જણાવો.
6. ચલિત સરેરાશનો અર્થ સમજાવો.
7. સામયિક શ્રેણીની વ્યાખ્યા આપો.
8. વલણ માપવાની ચલિત સરેરાશની રીતના ગુણ લખો.
9. વલણ માપવાની આલેખની રીત વર્ણવો.

વિભાગ D

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

1. સામયિક શ્રેણીનું મહત્ત્વ સમજાવો.
2. સામયિક શ્રેણીના પૃથક્કરણના ઉપયોગ જણાવો.
3. સામયિક શ્રેણીનું વલણ એટલે શું ? ઉદાહરણ સહિત સમજાવો.
4. મોસમી ઘટક પર ટૂંકનોંધ લખો.
5. ન્યૂનતમ વર્ગોની રીતે આપેલ માહિતી પરથી સુરેખ સમીકરણનું અન્વાયોજન કરવાની રીત સમજાવો.
6. ન્યૂનતમ વર્ગોની રીતના ગુણ અને મર્યાદાઓ જણાવો.
7. વલણ શોધવાની ચલિત સરેરાશની રીત વર્ણવો.
8. ચલિત સરેરાશની રીતની મર્યાદાઓ ચર્ચો.
9. નીચેની સામયિક શ્રેણી એક કારખાનાનું દૈનિક ઉત્પાદન દર્શાવે છે. આલેખની રીતે તેનું વલણ શોધો.

દિવસ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ઉત્પાદન (એકમો)	21	22	23	25	24	22	25	26	27	26

10. એક સામયિક શ્રેણીના ચલ (y) માટેની નીચેની માહિતી પરથી સુરેખ સમીકરણનું અન્વાયોજન કરો.

    $n = 4, \quad \Sigma y = 270, \quad \Sigma ty = 734$

11. એક વસ્તુની માંગ માટે એક સ્ટોરમાંથી એકત્રિત કરેલી માહિતી નીચે મુજબ છે. ત્રણ માસના ચલિત સરેરાશો વડે વલણ મેળવો.

માસ	જાન્યુઆરી	ફેબ્રુઆરી	માર્ચ	એપ્રિલ	મે	જૂન	જુલાઈ
માંગ (એકમો)	15	16	18	18	23	23	20

વિભાગ E

નીચેનાના ઉકેલ મેળવો :

1. એક કાપડ-ઉત્પાદકની તૈયાર કપડાંની નિકાસ (કરોડ ₹ માં)ની માહિતી નીચે દર્શાવેલ છે.

વર્ષ	2010	2011	2012	2013	2014	2015
નિકાસ (કરોડ ₹)	22	25	23	26	20	25

આ માહિતી માટે સુરેખ વલણનું અન્વાયોજન કરો અને 2017ના વર્ષની નિકાસ માટે વલણની કિંમતનું અનુમાન મેળવો.

2. પાછલાં 5 વર્ષોમાં એક વિમાન કંપનીના વિમાનોમાં પ્રવાસ કરેલ પ્રવાસીઓની સંખ્યા વિશે નીચેની માહિતી પ્રાપ્ય છે. સુરેખ વલણનું અન્વાયોજન કરીને વર્ષ 2016 માટે વલણની કિંમતનું અનુમાન કરો.

વર્ષ	2011	2012	2013	2014	2015
પ્રવાસીઓની સંખ્યા (હજાર)	45	47	44	40	38

3. એક સ્ટૉક ઍક્સચેન્જમાં નોંધાયેલ કોઈ એક કંપનીના શૅરના બંધભાવોની જુદા જુદા માસની માહિતી નીચેના કોષ્ટકમાં આપેલ છે. ત્રણ માસના ચલિત સરેરાશો વડે વલણ મેળવો.

માસ	2015 એપ્રિલ	મે	જૂન	જુલાઈ	ઑગસ્ટ	સપ્ટેમ્બર	ઑક્ટોબર	નવેમ્બર	ડિસેમ્બર	2016 જાન્યુઆરી
શૅરનો ભાવ (₹)	76	73	65	68	67	60	63	67	65	66

4. નીચેની માહિતી એક વસ્તુનું વેચાણ (હજાર ₹ માં) દર્શાવે છે. આલેખની રીતે વલણ મેળવો.

વર્ષ	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
વેચાણ (હજાર ₹)	200	216	228	235	230	232	236	235	230	233

5. એક રાજ્યના ખાદ્ય-તેલના વપરાશના જથ્થાના સૂચક આંક નીચેના કોષ્ટકમાં આપેલ છે. પાંચ વર્ષીય ચલિત સરેરાશોના આધારે વલણ શોધો.

વર્ષ	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
સૂચક આંક	115	121	119	120	117	119	120	118	116	124	125

વિભાગ F

નીચેનાના ઉકેલ મેળવો :

1. એક દેશના ખાંડ ઉત્પાદનની પાછલાં 6 વર્ષોની નીચે પ્રમાણે નોંધાયેલી માહિતી પરથી ન્યૂનતમ વર્ગોની રીતે ઉત્પાદનના વલણનું સુરેખ સમીકરણ મેળવો. વર્ષ 2016-17 તેમજ 2017-18 ના ઉત્પાદન માટે વલણનાં અનુમાનો શોધો.

વર્ષ	2009 – 10	2010 – 11	2011 – 12	2012 – 13	2013 – 14	2014 – 15
ખાંડ ઉત્પાદન (કરોડ ટન)	29.2	34.2	35.4	36.4	33.6	37.7

2. એક કૉલેજમાં અભ્યાસ કરતા વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા નીચેના કોષ્ટકમાં દર્શાવેલ છે. ચાર વર્ષીય ચલિત સરેરાશો વડે વલણ મેળવો.

વર્ષ	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા	332	317	357	392	402	405	410	427	405	438

3. નીચેના કોષ્ટકમાં એક રાજ્યનાં જુદાં જુદાં વર્ષોના જન્મદર આપેલ છે. આ માહિતી માટે સુરેખ વલણનું અન્વાયોજન કરો. વર્ષ 2016 અને 2017 ના જન્મદરનાં અનુમાનો પણ મેળવો.

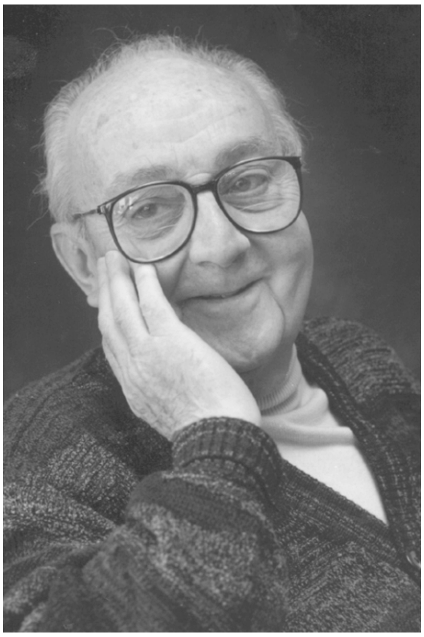
વર્ષ	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
જન્મદર	22.2	21.8	21.3	20.9	20.6	20.2	19.9

4. રેલવેના એક વિભાગમાં જુદાં જુદાં વર્ષોમાં થયેલ માલની હેરફેર વિશેની માહિતી નીચે આપેલ છે. સુરેખ સમીકરણનું અન્વાયોજન કરીને દરેક વર્ષની અનુમાનિત કિંમતો મેળવો અને તેને આલેખ વડે દર્શાવો. વર્ષ 2016 ની કિંમતનું અનુમાન પણ શોધો.

વર્ષ	2011	2012	2013	2014	2015
હેરફેર થયેલ માલ (ટન)	180	192	195	204	202

5. ક્રૂડ તેલના સાપ્તાહિક ભાવની (USD પ્રતિ બેરલમાં) માહિતી નીચેના કોષ્ટકમાં આપેલ છે. ચાર સપ્તાહની ચલિત સરેરાશોનો ઉપયોગ કરીને વલણ શોધો.

માસ	માર્ચ 2016				એપ્રિલ 2016				મે 2016			
સપ્તાહ	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
ક્રૂડ તેલનો ભાવ	35.92	38.50	39.44	39.46	36.79	39.72	40.36	43.73	45.92	44.66	46.21	48.45



George Edward Pelham Box
(1919 -2013)

George E. P. Box worked in the areas of quality control, time series analysis, design of experiments and Bayesian inference. He has been called "one of the great statistical minds of the 20th century." He has been associated with University at Raleigh (now North Carolina State University), Princeton University, University of Wisconsin–Mandison. Box has published numerous articles and papers and he is an author of many books. He is a recipient of prestigious honours, medals and was the president of American Statistical Association in 1978 and of the Institute of Mathematical Statistics in 1979. His name is associated with results in statistics such as Box–Jenkins models, Box–Cox transformations, Box–Behnken designs, and others. Box was elected a member of the American Academy of Arts and Sciences in 1974 and a Fellow of the Royal Society (FRS) in 1985.

●

જવાબો

સ્વાધ્યાય 1.1

1. (1) અચલ આધારે સૂચક આંક : 100, 103.27, 105.09, 106.55, 108, 113.82, 119.27, 125.45

(2) પરંપરિત આધારે સૂચક આંક : 100, 103.27, 101.76, 101.38, 101.37, 105.39, 104.79, 105.18

(3) સરેરાશ વેતનના આધારે સૂચક આંક : 91.36, 94.35, 96.01, 97.34, 98.67, 103.99, 108.97, 114.62

2. (1) અચલ આધારે સૂચક આંક : 100, 101.79, 105.36, 107.14, 110.71, 114.29,121.43, 128.57

(2) પરંપરિત આધારે સૂચક આંક : 100, 101.79, 103.51, 101.69, 103.33, 103.23, 106.25, 105.88

(3) સરેરાશ ભાવના આધારે સૂચક આંક : 96.55, 98.28, 101.72, 103.45, 106.90, 110.34, 117.24, 124.14

3. (1) અચલ આધારે સૂચક આંક : 100, 108.70, 112.78, 115.19, 119.44

(2) પરંપરિત આધારે સામાન્ય ભાવનો સૂચક આંક : 100, 108.70, 103.65,102.26, 103.71

4. n વસ્તુઓનો સામાન્ય આંક : 126.45, બળતણની વસ્તુઓના ભાવમાં સમગ્ર રીતે 26.45 % વધારો થયો છે.

સ્વાધ્યાય 1.2

1. અચલ આધારે સૂચક આંક : 100, 110, 104.5, 112.86, 135.43, 143.56, 157.92

2. પરંપરિત આધારે સૂચક આંક : 117.4, 100.51, 102.80, 103.13, 102.64, 102.49, 102.28

3. પરંપરિત આધારે સૂચક આંક : 100, 99.63, 99.26, 100, 103.73, 101.80, 100, 103.53, 100, 102.05

4. અચલ આધારે સૂચક આંક : 110, 123.2, 134.29, 145.03, 152.28, 169.03

સ્વાધ્યાય 1.3

1. $I = 307$, ખર્ચમાં 207 % વધારો થયો છે.

2. $I = 123.80$, ભાવમાં 23.80 % વધારો થયો છે.

3. $I_L = 126.72$, $I_P = 126.85$, $I_F = 126.78$

4. $I_L = 141.13$, $I_P = 140.15$, $I_F = 140.64$ **5.** $I_F = 142.57$ **6.** $I_P = 115.2$, $I_F = 115.14$

સ્વાધ્યાય 1.4

1. કૌટુંબિક અંદાજપત્રની રીતે સૂચક આંક = 135.64 અને કુલ ખર્ચ 35.64 % વધારો થયો છે. સરેરાશ ખર્ચપાત્ર માસિક આવક ₹ 20,346 થાય.

2. સૂચક આંક $I = 128.53$ અને 28.53 % કુલ ખર્ચ વધારો થયો છે.

3. સૂચક આંક $I = 132.51$ અને 32.51 % કુલ ખર્ચમાં વધારો થયો છે.

4. સૂચક આંક $I = 213.20$ અને 113.20 % કુલ ખર્ચમાં વધારો થયેલ છે.

5. કૌટુંબિક અંદાજપત્રની રીતે સૂચક આંક = 129.64 અને કુલ ખર્ચની રીતે સૂચક આંક $I = 129.64$ આમ, બંને સૂચક આંક સમાન છે.

સ્વાધ્યાય 1

વિભાગ A

1. (c)	**2.** (a)	**3.** (d)	**4.** (c)	**5.** (d)
6. (d)	**7.** (c)	**8.** (c)	**9.** (c)	**10.** (c)
11. (a)	**12.** (c)			

વિભાગ B

12. વિધાન ખોટું છે. તેલના ભાવનો સૂચક આંક 500 છે.

વિભાગ C

7. વાસ્તવિક વેતન ₹ 16,392.85 અને કામદારને થયેલ નુકસાન ₹ 1642.85 (ખરીદશક્તિ ઘટે.)

8. વાસ્તવિક વેતન ₹ 29166.67, 26666.67, 32307.69, 31250

9. વર્ષ 2015નો ફુગાવાનો દર : 2.03 %

10. 449.55

11. સરેરાશ માસિક ખર્ચપાત્ર આવક = ₹ 30,000

12. આવકનો સૂચક આંક = 125 **13.** ઉત્પાદનનો સૂચક આંક = 280 **14.** $I_p = 222.5$

વિભાગ D

7. 161.87

8. અચલ આધારે સૂચક આંક = 100, 111.11, 133.33, 144.44, 166.67, 222.22, 263.89

9. પરંપરિત આધારે સૂચક આંક = 100, 104, 100.96, 102.86, 100.93, 116.51

10. અચલ આધારે સૂચક આંક = 120, 108, 151.20, 189

11. પરંપરિત આધારે સૂચક આંક = 100, 112.5, 106.67, 114.58, 109.09, 116.67

12. સૂચક આંક = 226.6 **13.** $I_L = 166.67$, $I_p = 150$, $I_F = 158.12$ **14.** $I_p = 167.71$

વિભાગ E

1. સામાન્ય સૂચક આંક = 122.32 **2.** કુલ ખર્ચની રીતે સૂચક આંક = 149.41

3. કુલ ખર્ચની રીતે સૂચક આંક = 115.69

4. અચલ આધારે સૂચક આંક = 100, 118.75, 125, 131.25, 140.63, 187.5, 203.13; સરેરાશ ભાવના આધારે સૂચક આંક 91.43, 108.57, 114.29, 120, 128.57, 171.43, 185.71

5. ઔદ્યોગિક ઉત્પાદનનો સૂચક આંક I = 379.19

6. સૂચક આંક I = 126.79 અને ભાવમાં થયેલ વધારો 26.79 % છે.

7. વાસ્તવિક વેતન = 12,500, 10,000, 9268.29, 9090.91, 9361.7, 9615.38 નાણાંની ખરીદશક્તિ = ₹ 0.38

વિભાગ F

1. $I_L = 113.65$, $I_P = 113.94$, $I_F = 113.79$ અને કુલ ખર્ચમાં થયેલો વધારો 13.79 % છે.

2. $I_P = 191.53$, $I_F = 211.52$

3. $I_F = 84.84$

4. $I_L = 109.52$, $I_P = 110.29$, $I_F = 109.90$

5. કૌટુંબિક અંદાજપત્રની રીતે સૂચક આંક = 118.58 અને કુલ ખર્ચની રીતે સૂચક આંક = 118.58. આમ, બંને સૂચક આંક સરખા છે.

6. વર્ષ 2014 માટે સૂચક આંક $I_1 = 239.41$ અને વર્ષ 2015 માટે સૂચક આંક $I_2 = 253.44$; જીવનનિર્વાહ-ખર્ચમાં ચાલુ વર્ષે થયેલો વધારો 14.03 % છે. 2015ના ભાવ સૂચક આંકની ટકાવારી 5.86 % વધારો થયેલ છે અને વેતનમાં 5 % વધારો મેળવેલ છે. તેથી વેતનવધારો 0.86 % જેટલો ઓછો છે.

7. સૂચક આંક $I = 231.44$ અગાઉનું જીવનધોરણ ટકાવી રાખવા માટે ₹ 13,886.40 આવક હોવી જોઈએ.

8. ઔદ્યોગિક વસ્તુઓનો સૂચક આંક $= 100.10$, જે આધાર વર્ષની સરખામણીમાં 0.10 % વધારો સૂચવે છે.

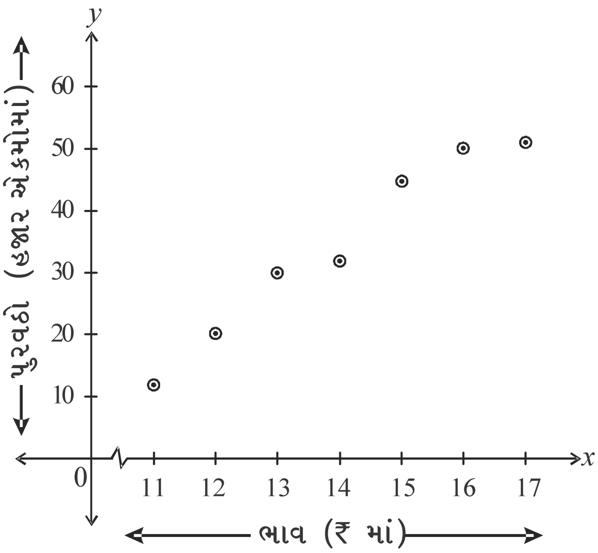
9. ભાર વધારા પહેલાંનો સૂચક આંક $I = 128.75$ ભારમાં થયેલ વધારા બાદનો સૂચક આંક $I = 129.34$.

10. જીવનનિર્વાહ-ખર્ચનો સૂચક આંક $= 196.35$ અને આધાર વર્ષની સરખામણીમાં (196.35 – 100) = 96.35 % વધારો થયેલ છે.

●

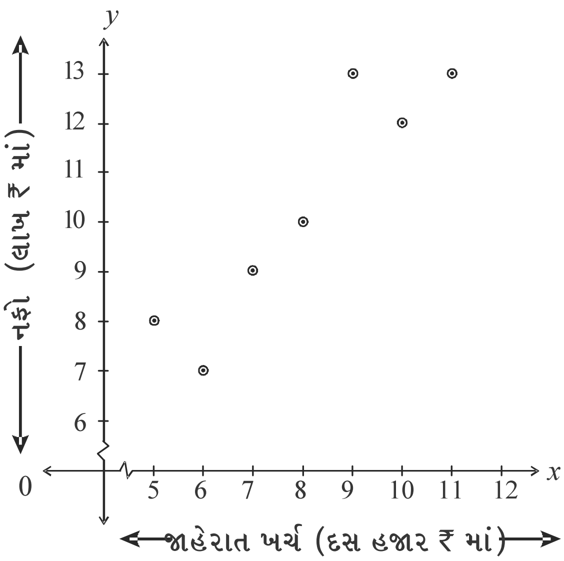
સ્વાધ્યાય 2.1

1.



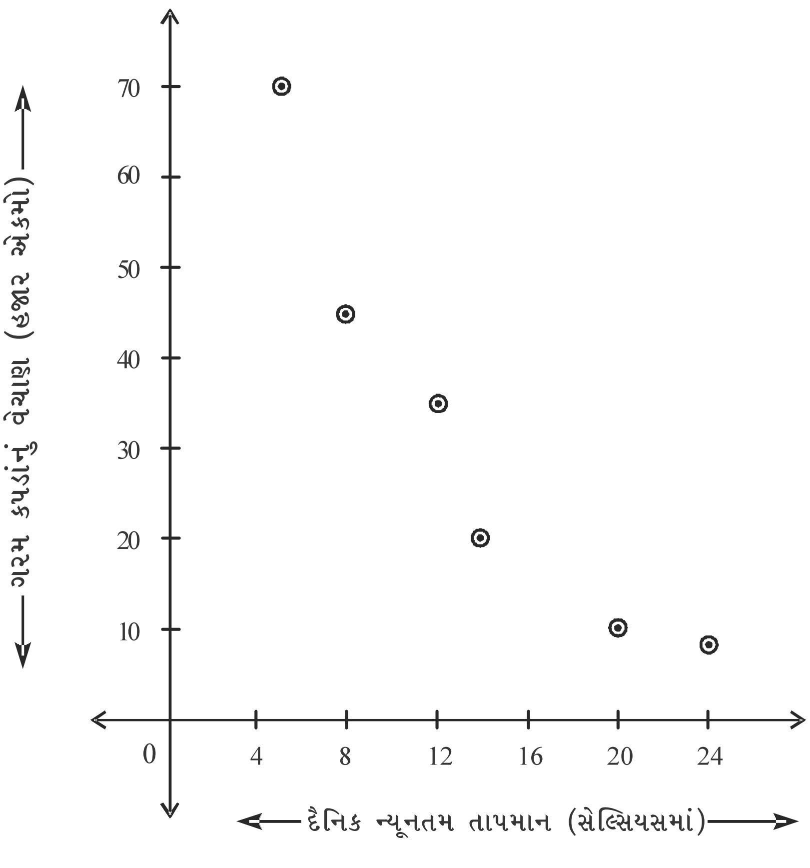
ભાવ અને પુરવઠા વચ્ચે આંશિક ધન સહસંબંધ છે.

2.



જાહેરાત ખર્ચ અને નફા વચ્ચે આંશિક ધન સહસંબંધ છે.

3.



દૈનિક ન્યૂનતમ તાપમાન અને ગરમ કપડાંના વેચાણ વચ્ચે આંશિક ઋણ સહસંબંધ છે.

સ્વાધ્યાય 2.2

1. $r = 0.81$ 2. $r = -0.90$ 3. $r = 0.90$ 4. $r = 0.24$ 5. $r = 0.82$

6. $r = -0.96$ 7. $r = 0.67$ 8. $r = -0.92$ 9. $r = 0.99$ 10. $r = 0.80$

11. $r = 0.84$ 12. $r = 0.5$ 13. $r = 0.8$ 14. (1) $r = 0.94$ (2) $r = 0.96$

15. $r = -0.55$

સ્વાધ્યાય 2.3

1. $r = 0.49$ 2. $r = 0.78$ 3. $r = 0.7$ 4. $r = 0.82$ 5. $r = 0.91$

6. $r = 0.90$ 7. $r = -0.30$ 8. સુધારેલ $\Sigma d^2 = 82.5$, $r = 0.26$

સ્વાધ્યાય 2

વિભાગ A

1. (c) 2. (a) 3. (d) 4. (b) 5. (c)

6. (d) 7. (b) 8. (b) 9. (b) 10. (c)

11. (a) 12. (b) 13. (c) 14. (c) 15. (a)

16. (b) 17. (b) 18. (a)

વિભાગ B

3. ધન 4. ધન 5. ઋણ 6. ઋણ 7. અર્થહીન સહસંબંધ

8. ઊગમબિંદુ પરિવર્તનથી r બદલાય નહિ તેથી $r = 0.4$ 10. $r = 0$ 11. ઋણ

વિભાગ C

11. $r = 0.67$ 12. $r = -0.54$ 13. $r = 0.27$

વિભાગ D

10. $r = 0.75$ 11. $r = 0$ 12. $r = -0.5$ 13. $r = 0.2$

વિભાગ E

1. $r = -0.81$ 2. $r = 0.43$ 3. $r = 0.79$ 4. $r = 0.77$ 5. $r = 0.54$

6. $r = 0.13$

વિભાગ F

1. $r = 0.99$ **2.** $r = -0.96$ **3.** $r = 0.88$ **4.** $r = 0.81$ **5.** $r = 0.38$

6. $r = 0.79$ **7.** $r = 0$ **8.** $r = 0.6$ **9.** $r = 0.3$ **10.** $r = 0.79$

11. સુધારેલ $\Sigma d^2 = 78$; $r = 0.53$ **12.** $r = 0.73$

●

સ્વાધ્યાય 3.1

1. $\hat{y} = 31.44 - 1.34x$ અને ભાવ x = 20 ₹ માટે માંગનું અનુમાન $\hat{y} = 4.64$ (સો એકમો)

2. $\hat{y} = 3.35 + 1.93x$ અને કાર વપરાશ સમય x = 5 વર્ષ માટે વાર્ષિક નિભાવ ખર્ચનું અનુમાન $\hat{y} = 13$ (હજાર ₹)

$\therefore$ ત્રુટિ $e = y - \hat{y} = 13 - 13 = 0$ (અહીં, x = 5 માટે y ની પ્રાપ્ત અવલોકિત કિંમત 13 કોષ્ટકમાં છે.)

3. $\hat{y} = 64.27 + 0.83x$ અને સરેરાશ વરસાદ x = 35 સેમી માટે પાકના ઉત્પાદનનું અનુમાન $\hat{y} = 93.32$ (ટન)

4. $\hat{y} = 69.7 + 1.13x$ અને કારીગરનો અનુભવ x = 7 વર્ષ હોય તો કાર્ય કૌશલ્ય આંકનું અનુમાન $\hat{y} = 77.61$

સ્વાધ્યાય 3.2

1. $\hat{y} = 54.84 + 2.52x$ અને ખાતરનો વપરાશ 300 કિગ્રા [$\therefore$ x = 30 (દસ કિગ્રા)] માટે કપાસના પાકનું અનુમાન $\hat{y} = 130.44$ (ક્વિન્ટલ/હેક્ટર)

2. $\hat{y} = 52.84 + 0.68x$ અને પિતાની ઊંચાઈ x = 170 સેમી માટે પુત્રની ઊંચાઈનું અનુમાન $\hat{y} = 168.44$ સેમી

3. $\hat{y} = 20.72 - 0.71x$ અને સમુદ્ર સપાટીથી ઊંચાઈ x = 7 હજાર ફૂટ હોય તો અસરકારક ઑક્સિજનની ટકાવારીનું અનુમાન $\hat{y} = 15.75$ %

4. $\hat{y} = -3495.7 + 327.73x$ અને વપરાશની જગ્યા x = 110 ચો મીટર માટે અંદાજિત માસિક ભાડું $\hat{y} = 32554.6$ ₹

5. $\hat{y} = 0.53 + 0.02x$ અને ગ્રાહકોની સંખ્યા x = 80 માટે વેચાણનું અનુમાન $\hat{y} = 2.13$ (હજાર ₹)

6. $\hat{y} = 7.6 + 0.29x$; x = નફો (લાખ ₹) અને y = વહીવટી ખર્ચ (લાખ ₹)

7. $\hat{y} = 53.72 + 1.54x$ અને વરસાદ x = 60 સેમી માટે મકાઈની ઊપજનું અનુમાન $\hat{y} = 146.12$ ક્વિન્ટલ

8. $\hat{y} = 8.74 + 1.02x$ અને ભાવ x = 16 ₹ માટે પુરવઠાનું અનુમાન $\hat{y} = 25.06$ (સો એકમો)

9. $\hat{y} = -4.8 + 0.15x$ અને દિવસનું મહત્તમ તાપમાન x = 42 સેલ્સિયસ માટે આઇસ્ક્રીમના વેચાણનું અનુમાન $\hat{y} = 1.5$ (લાખ ₹)

સ્વાધ્યાય 3

વિભાગ A

1. (b)	**2.** (a)	**3.** (c)	**4.** (d)	**5.** (a)
6. (a)	**7.** (c)	**8.** (c)	**9.** (d)	**10.** (b)
11. (c)	**12.** (c)	**13.** (c)	**14.** (c)	**15.** (b)

વિભાગ B

8. ત્રુટિ = 0

9. બંને ચલને 2 વડે ગુણીએ એટલે $c_x = \frac{1}{2}$ અને $c_y = \frac{1}{2}$ થાય. $\therefore$ નિયતસંબંધાંક બદલાશે નહિ.

10. $b_{yx} = 0.5 \times \frac{4}{2} = 1$ **11.** $\hat{y} = 50$ **12.** $r = 1$ **13.** $r = -1$

વિભાગ C

2. ત્રુટિ $e = 1$ **3.** $a = 2$ અને $\hat{y} = 2 + 0.6\,x$

4. $b_{yx} = 5$ એટલે કહી શકાય કે x ની કિંમતમાં 1 એકમનો વધારો થવાથી y ની કિંમતમાં અંદાજિત 5 એકમોનો વધારો થાય.

5. $s_y = 3$ **6.** $R^2 = 1$ **7.** $s_x = 5$ **8.** 5 એકમો

9. $b_{yx} = 1.2$ અને $a = 13$ **10.** $b_{vu} = b_{yx} \times \frac{c_x}{c_y} = 0.75 \times \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = 0.25$

વિભાગ D

8. $\hat{y} = 4 + 0.75\,x$ **9.** $\hat{y} = -10 + 2\,x$

10. $R^2 = 0.81$; y માં થતા કુલ ચલનમાંથી 81 % ચલન નિયતસંબંધ મૉડેલ પરથી સમજાવી શકાય છે.

11. $b_{yx} = 2.52$ એટલે કહી શકાય કે x ની કિંમતમાં 1 એકમનો વધારો થવાથી y ની કિંમતમાં અંદાજિત 2.52 એકમોનો વધારો થાય.

12. (i) $b_{vu} = 0.8$ (ii) $b_{vu} = 1.6$ (iii) $b_{vu} = 0.08$ **13.** $\hat{y} = 12 + 0.88\,x$

વિભાગ E

1. $\hat{y} = 2 + 0.75\,x$ **2.** $\hat{y} = 38.8 + 0.67\,x$ **3.** $\hat{y} = 58 + 3.2\,x$

4. $\hat{y} = 764.8 + 11.4\,x$ અને વરસાદ $x = 20$ સેમી માટે પાકનું અનુમાન $\hat{y} = 992.8$ કિગ્રા

5. $\hat{y} = 18 + 0.8\,x$ અને રોકાણ $x = 45$ લાખ ₹ માટે બજાર કિંમતનું અનુમાન $\hat{y} = 54$ (હજાર ₹)

વિભાગ F

1. $\hat{y} = 73.29 - 1.59\,x$ અને ભાવ x = 40 ₹ માટે માંગનું અનુમાન $\hat{y} = 9.69$ (સો એકમો)

2. $\hat{y} = 73.43 + 0.9\,x$ અને ભાવ x = 17 વર્ષ હોય તો દેખાવ આંકનું અનુમાન $\hat{y} = 88.73$

3. $\hat{y} = 34.8 + 0.74\,x$ અને દૈનિક આવક x = 500 ₹ હોય તો વપરાશ ખર્ચનું અનુમાન $\hat{y} = 404.8$ ₹

4. $\hat{y} = 3.73 + 0.13\,x$ અને જાહેરાત ખર્ચ x = 50 (દસ હજાર ₹) માટે વેચાણનું અનુમાન $\hat{y} = 10.23$ કરોડ ₹

5. $\hat{y} = -122.94 + 91.67\,x$ અને $R^2 = 0.97$ $\therefore$ નિયતસંબંધ મૉડેલ વિશ્વસનીય

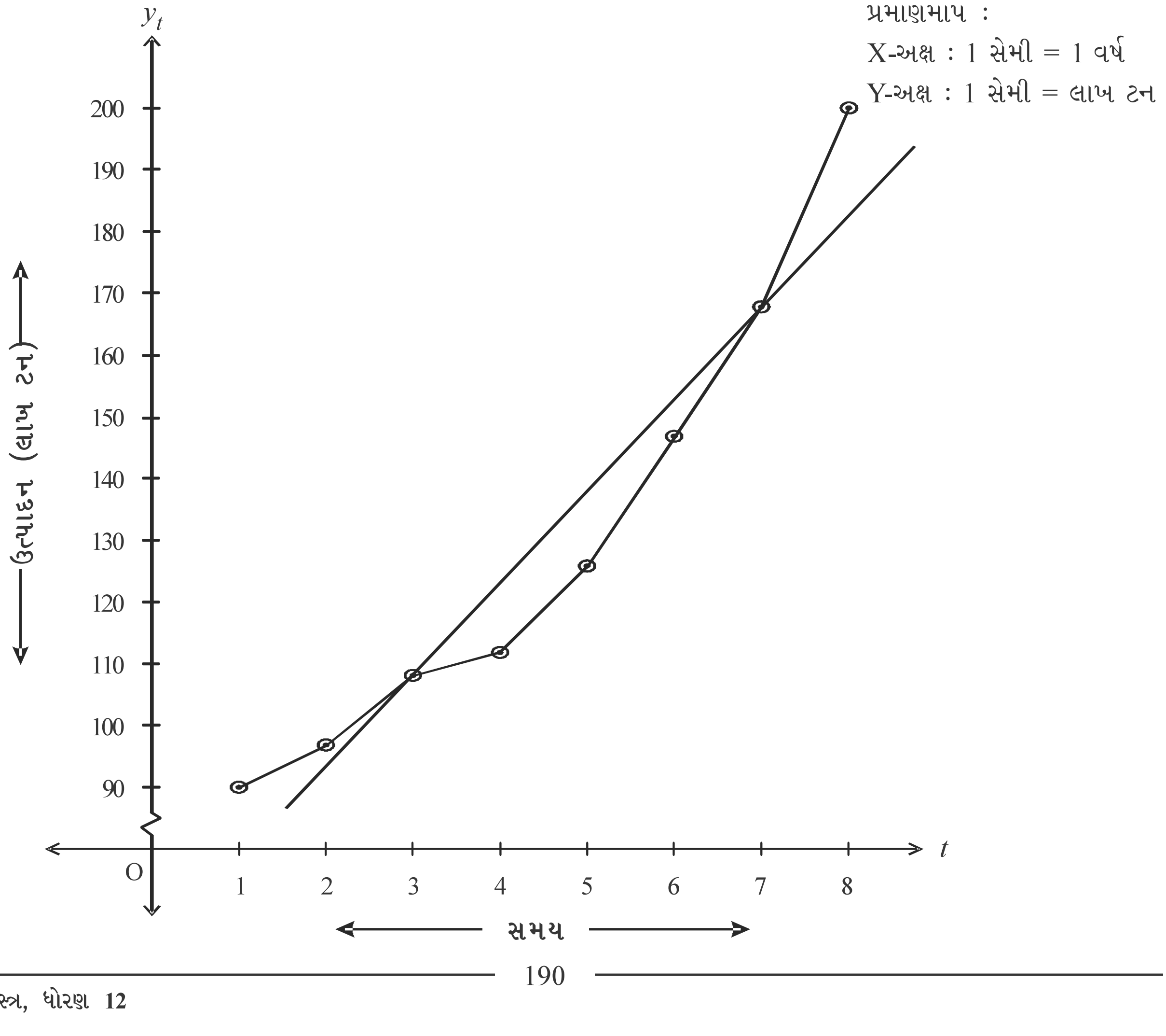
6. $\hat{y} = -10 + 1.6\,x$ અને x = 30 માટે $\hat{y} = 38$

7. $\hat{y} = -0.44 + 0.7\,x$ અને x = 5 માટે $\hat{y} = 3.06$

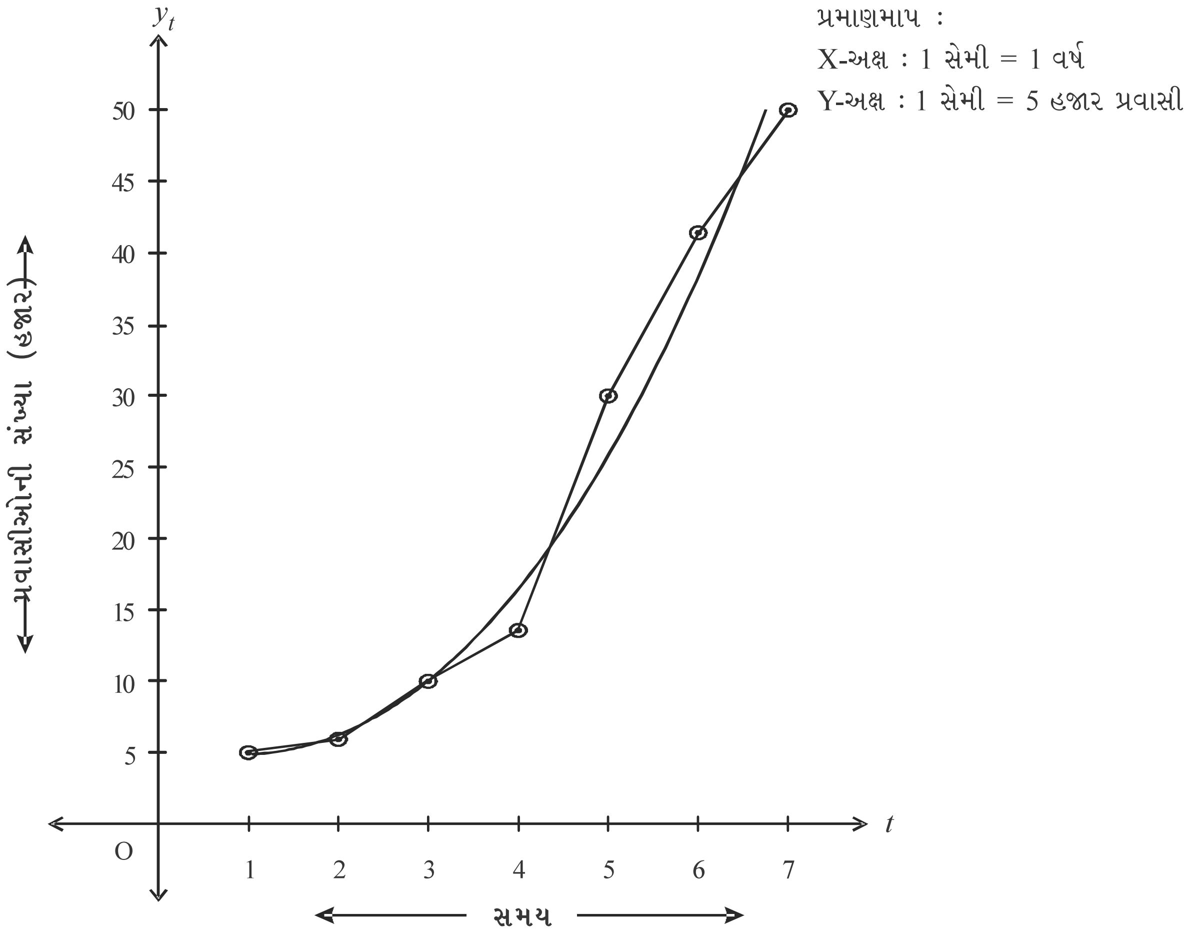
●

સ્વાધ્યાય 4.1

1.

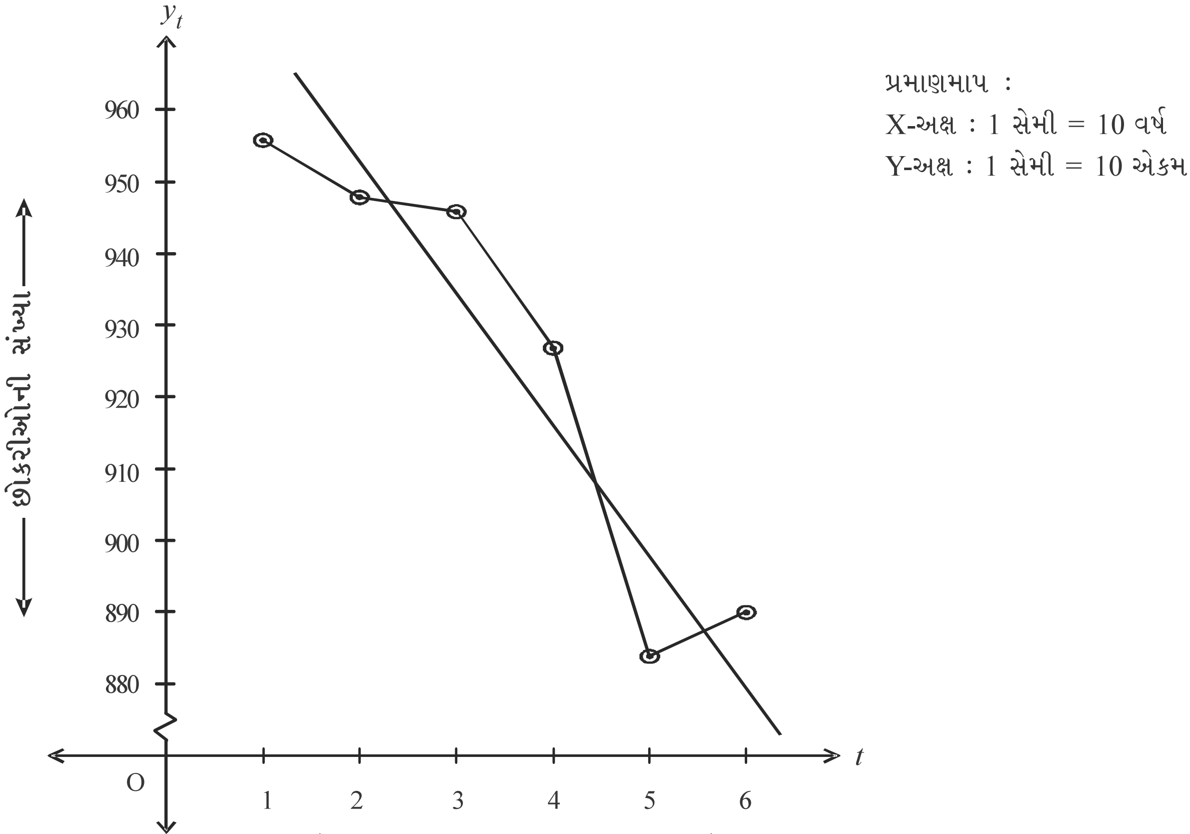


2.



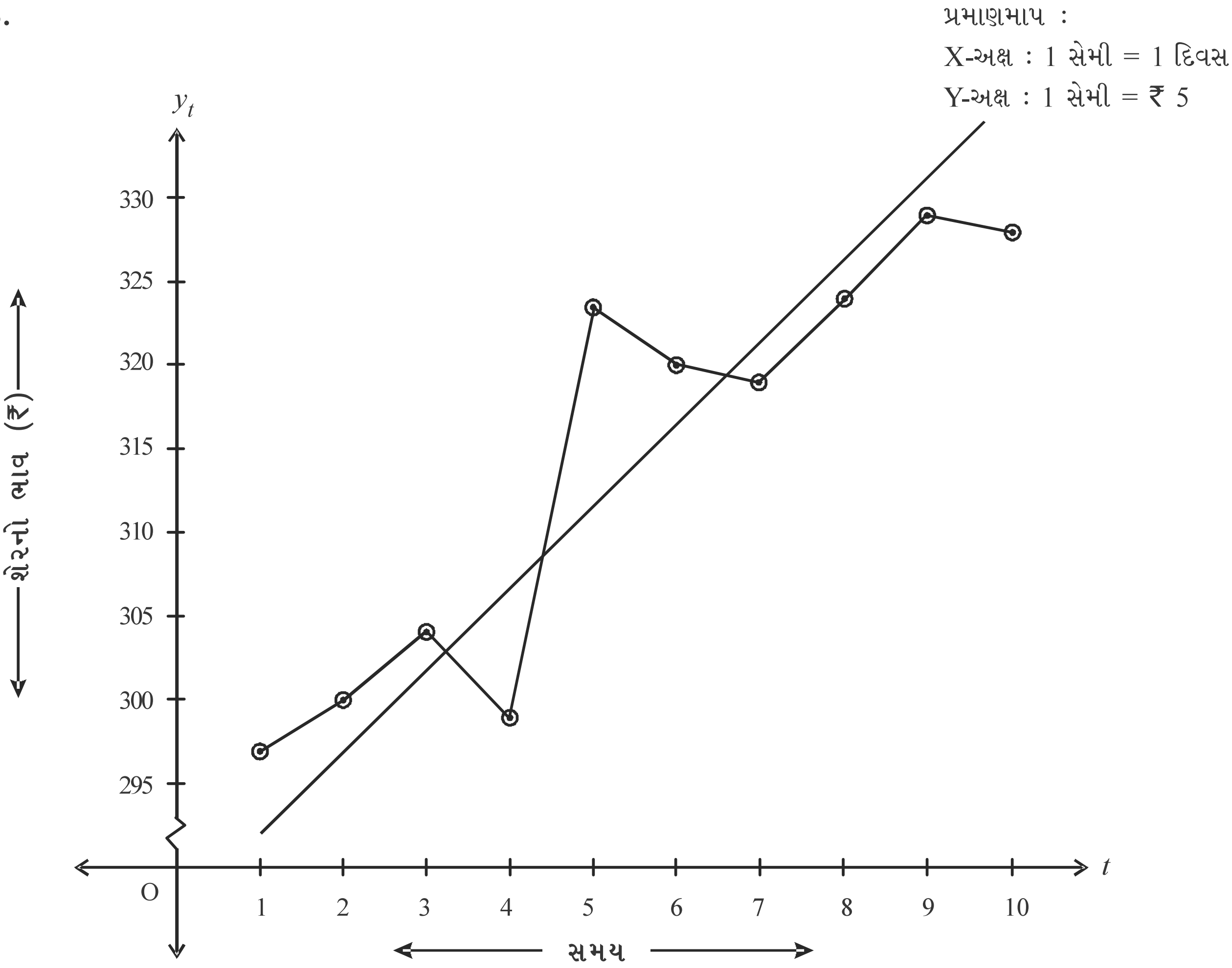
y_t
50
45
40
35
30
25
20
15
10
5
O
1
2
3
4
5
6
7
t
પ્રવાસીઓની સંખ્યા (હજાર)
સમય
પ્રમાણમાપ :
X-અક્ષ : 1 સેમી = 1 વર્ષ
Y-અક્ષ : 1 સેમી = 5 હજાર પ્રવાસી

3.



y_t
960
950
940
930
920
910
900
890
880
O
1
2
3
4
5
6
t
છોકરીઓની સંખ્યા
સમય
પ્રમાણમાપ :
X-અક્ષ : 1 સેમી = 10 વર્ષ
Y-અક્ષ : 1 સેમી = 10 એકમ

4.



સ્વાધ્યાય 4.2

1. $\hat{y} = 7.41 - 0.07\,t$, વર્ષ 2017 માટે $\hat{y} = 6.78$

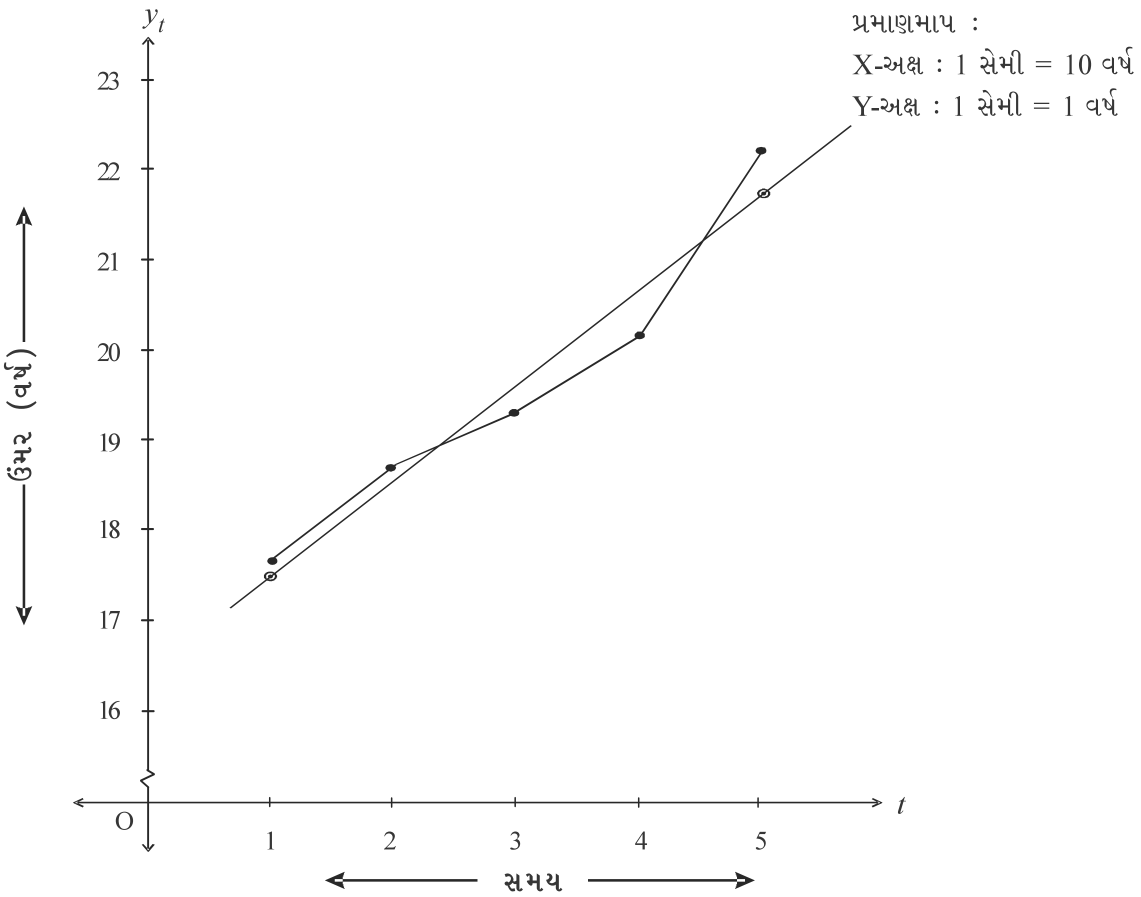
2. $\hat{y} = 447.2 + 69.4\,t$, વર્ષ 2015-16 માટે $\hat{y} = 1071.8$

3. $\hat{y} = 57.12 + 9.06\,t$, વર્ષ 2016 માટે $\hat{y} = 120.54$ હજાર

વર્ષ 2017 માટે $\hat{y} = 129.6$ હજાર

વર્ષ	2010	2011	2012	2013	2014	2015
વલણની અનુમાનિત કિંમતો (હજાર વાહનો)	66.18	75.24	84.3	93.36	102.42	111.48

4. $\hat{y} = 16.47 + 1.05\,t$, વર્ષ 2021 માટે $\hat{y} = 22.77$ વર્ષ



સ્વાધ્યાય 4.3

1.

વર્ષ	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
ત્રણ વર્ષીય ચલિત સરેરાશ	–	5	6	7	8	9	10	11	12	–

2.

માસ	જાન્યુ.	ફેબ્રુ.	માર્ચ	એપ્રિલ	મે	જૂન	જુલાઈ	ઑગસ્ટ.	સપ્ટે.	ઓક્ટો.	નવે.	ડિસે.
ચાર માસની ચલિત સરેરાશ	–	–	274.88	280.38	273.88	263	265.38	269.25	272.63	275.88	–	–

3.

વર્ષ	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
પાંચ વર્ષીય ચલિત સરેરાશ	–	–	16.8	18.6	21.2	22.6	23.2	–	–

4.

વર્ષ	2013				2014				2015			
ત્રિમાસ	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
ચાર ત્રિમાસની ચલિત સરેરાશ	–	–	124.38	134	143	150.88	153.25	148	141.63	136.88	–	–

સ્વાધ્યાય 4

વિભાગ A

1. (c) **2.** (a) **3.** (b) **4.** (b) **5.** (c)

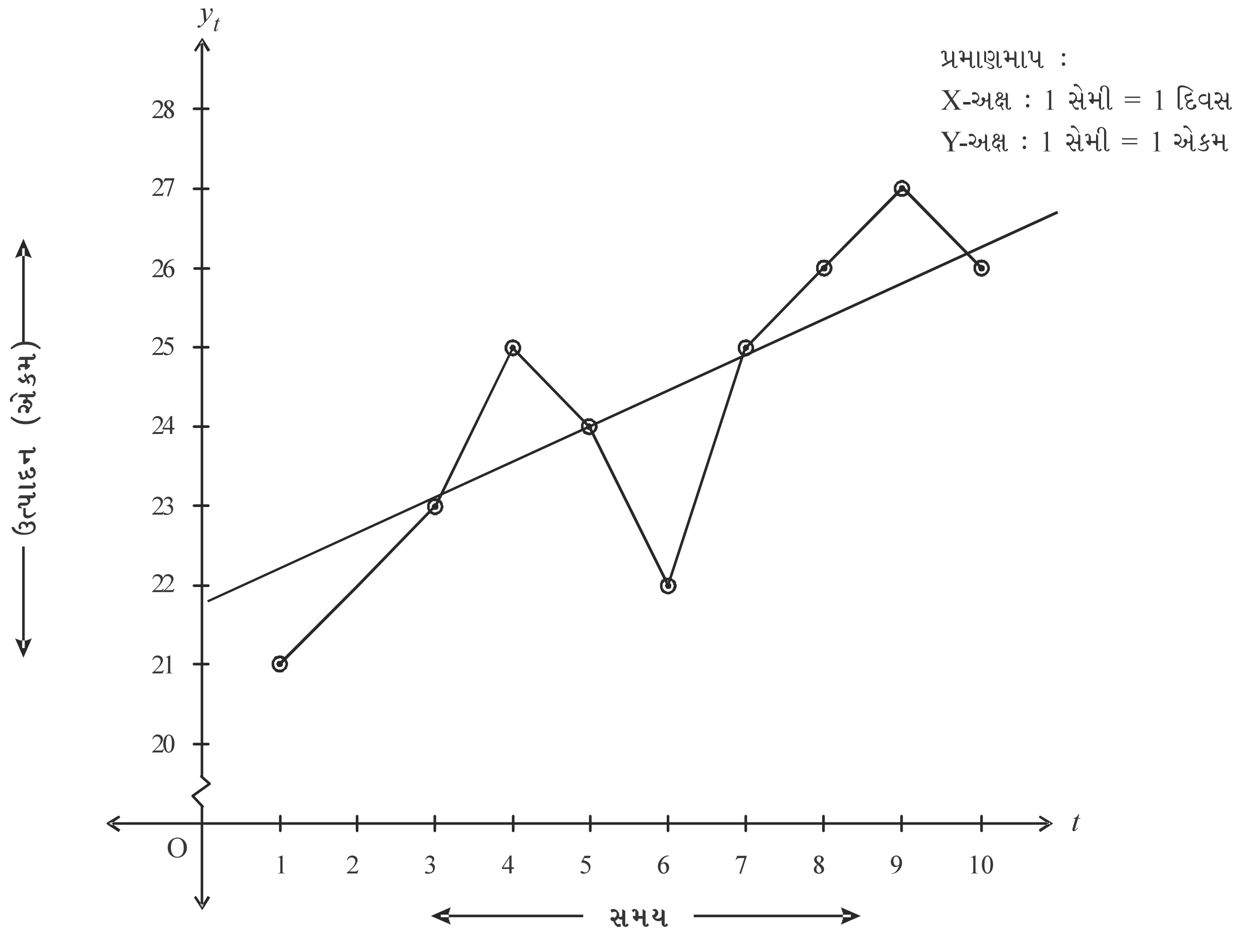
6. (a) **7.** (b) **8.** (c) **9.** (c) **10.** (d)

વિભાગ B

9. આઠમા સપ્તાહ માટે $\hat{y} = 14.7$

વિભાગ D

9.



10 $\hat{y} = 38 + 11.8\,t$

11.

માસ	જાન્યુઆરી	ફેબ્રુઆરી	માર્ચ	એપ્રિલ	મે	જૂન	જુલાઈ
ત્રણ માસની ચલિત સરેરાશ	–	16.33	17.33	19.67	21.33	22	–

વિભાગ E

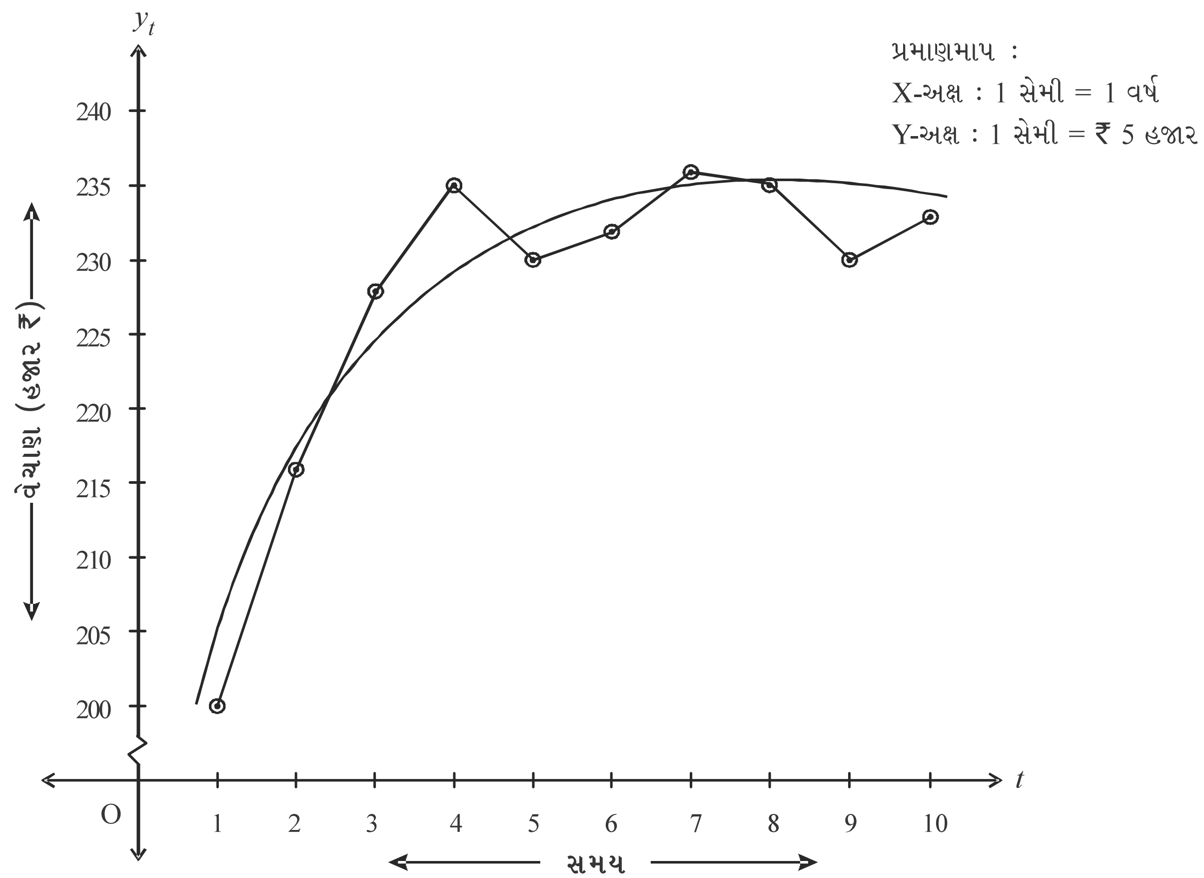
1. $\hat{y} = 23.18 + 0.09t$, વર્ષ 2017 માટે $\hat{y} =$ 23.9 કરોડ

2. $\hat{y} = 49.1 - 2.1t$, વર્ષ 2016 માટે $\hat{y} =$ 36.5 હજાર

3.

માસ	એપ્રિલ 2015	મે	જૂન	જુલાઈ	ઑગસ્ટ	સપ્ટે.	ઑક્ટો.	નવે.	ડિસે.	જાન્યુ. 2016
ત્રણ માસની ચલિત સરેરાશ	–	71.33	68.67	66.67	65	63.33	63.33	65	66	–

4.



5.

વર્ષ	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
પાંચ વર્ષીય ચલિત સરેરાશ	–	–	118.4	119.2	119	118.8	118	119.4	120.6	–	–

વિભાગ F

1. $\hat{y} = 30.26 + 1.19\,t$, વર્ષ 2016-17 માટે $\hat{y} =$ 39.78 કરોડ ટન

વર્ષ 2017-18 માટે $\hat{y} =$ 40.97 કરોડ ટન

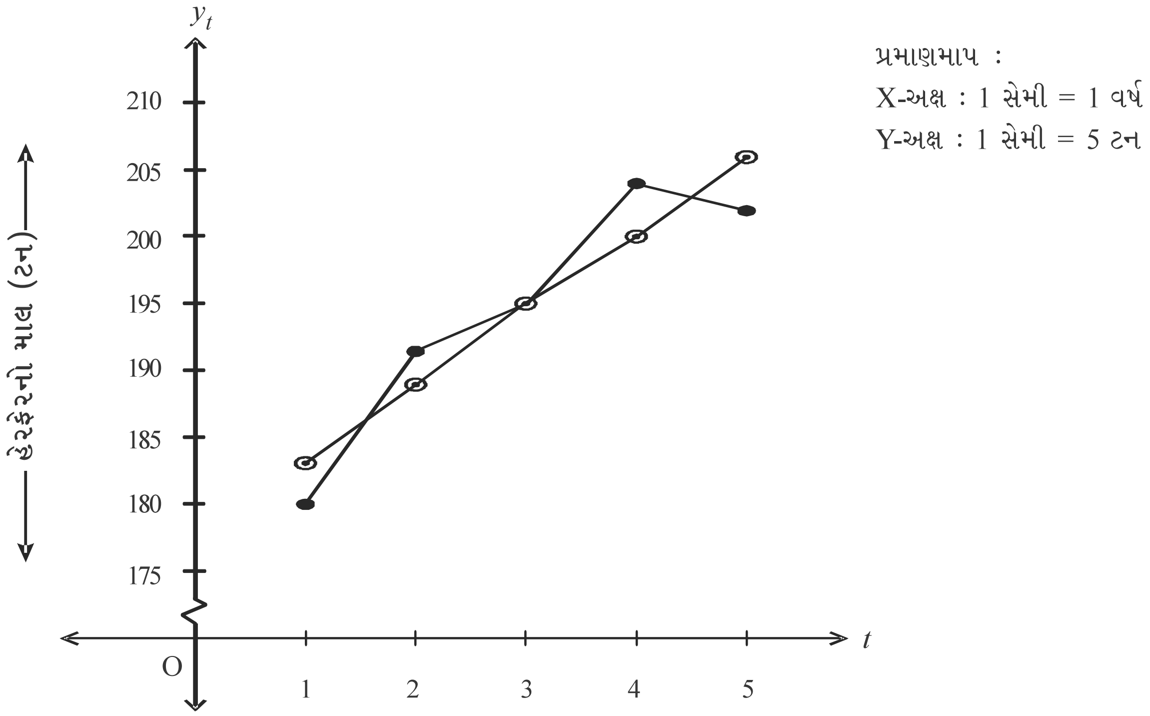
2.

વર્ષ	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
ચાર વર્ષીય ચલિત સરેરાશ	–	–	358.25	378	395.63	406.63	411.38	415.88	–	–

3. $\hat{y} = 22.55 - 0.39\,t$, વર્ષ 2016 માટે $\hat{y} =$ 19.43 વર્ષ 2017 માટે $\hat{y} =$ 19.04

4. $\hat{y} = 177.8 + 5.6\,t$, વર્ષ 2016 માટે $\hat{y} =$ 211.4 ટન

વર્ષ	2011	2012	2013	2014	2015
વલણની અનુમાનિત કિંમતો (ટન)	183.4	189	194.6	200.2	205.8



5.

માસ	માર્ચ				એપ્રિલ				મે			
સપ્તાહ	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
ચાર સપ્તાહની ચલિત સરેરાશ	–	–	38.44	38.7	38.97	39.62	41.29	43.05	44.4	45.72	–	–

●●●