પ્રકરણ 5

સંકર સંખ્યાઓ અને દ્વિઘાત સમીકરણો

❖*Mathematics is the Queen of Sciences and Arithmetic is the Queen of Mathematics. – GAUSS* ❖

5.1 પ્રાસ્તાવિક

આપણે અગાઉનાં ધોરણોમાં એક ચલ અને દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણોના તથા એક ચલ દ્વિઘાત સમીકરણોના ઉકેલનો અભ્યાસ કર્યો. આપણે જોયું કે સમીકરણ $x^2 + 1 = 0$ ને વાસ્તવિક ઉકેલ નથી, કારણ કે $x^2 + 1 = 0$ એટલે કે $x^2 = -1$ થાય છે અને કોઈ પણ વાસ્તવિક સંખ્યાનો વર્ગ ઋણ થાય નહિ. આથી, આપણે $x^2 = -1$ સમીકરણનો ઉકેલ મેળવી શકીએ તેવા વિસ્તૃત ગણમાં વાસ્તવિક સંખ્યાગણનો વિસ્તાર કરવો પડે. આપણે જાણીએ છીએ કે જો $D = b^2 - 4ac < 0$ હોય, તો દ્વિઘાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ ને વાસ્તવિક ઉકેલ નથી. ખરેખર આપણો મુખ્ય ઉદ્દેશ આવા પ્રકારનાં સમીકરણોના ઉકેલ મેળવવાનો છે.

W. R. Hamilton
(1805-1865)

5.2 સંકર સંખ્યાઓ

પ્રથમ આપણે $\sqrt{-1}$ ને સંકેતમાં i વડે દર્શાવીએ. આમ, $i^2 = -1$ થાય. આનો અર્થ એ થાય કે સમીકરણ $x^2 + 1 = 0$ નો એક ઉકેલ i થાય.

$a, b \in R$ હોય તેવી સંખ્યા $a + ib$ ને ***સંકર સંખ્યા*** *(complex number)* તરીકે વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે.

ઉદાહરણ તરીકે, $2 + i\,3$, $(-1) + i\sqrt{3}$, $4+i\left(\frac{-1}{11}\right)$ એ સંકર સંખ્યાઓ છે.

સંકર સંખ્યા $z = a + ib$ માં a ને z નો ***વાસ્તવિક ભાગ*** *(real part)* કહે છે. તેને સંકેતમાં $Re\ z$ વડે દર્શાવાય છે. b ને z નો ***કાલ્પનિક ભાગ*** *(imaginary part)* કહે છે. તેને સંકેતમાં $Im\ z$ વડે દર્શાવાય છે. ઉદાહરણ તરીકે, જો $z = 2 + i5$, તો $Re\ z = 2$ અને $Im\ z = 5$.

જો બે સંકર સંખ્યાઓ $z_1 = a + ib$ અને $z_2 = c + id$ સમાન હોય, તો $a = c$ તથા $b = d$.

ઉદાહરણ 1 : જો વાસ્તવિક સંખ્યાઓ x તથા y માટે $4x + i(3x - y) = 3 + i\,(-6)$, તો x અને y ની કિંમત શોધો.

ઉકેલ: અહીં, $4x + i\,(3x - y) = 3 + i\,(-6)$ ... (1)

સમીકરણ (1) ના વાસ્તવિક ભાગ તથા કાલ્પનિક ભાગને સરખાવતાં,

$$4x = 3,\ 3x - y = -6$$

બંને સમીકરણોને ઉકેલતાં, $x = \frac{3}{4}$ અને $y = \frac{33}{4}$.

5.3 સંકર સંખ્યાઓનું બીજગણિત

આ વિભાગમાં આપણે સંકર સંખ્યાઓ પરની બૈજિક ક્રિયાઓની ચર્ચા કરીશું.

5.3.1 બે સંકર સંખ્યાઓનો સરવાળો

ધારો કે $z_1 = a + ib$ અને $z_2 = c + id$ બે સંકર સંખ્યાઓ છે. તેમનો સરવાળો $z_1 + z_2$ નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત થાય છે :

$z_1 + z_2 = (a + c) + i\,(b + d)$ અને આ સરવાળાનું પરિણામ પણ એક સંકર સંખ્યા છે.

ઉદાહરણ તરીકે, $(2 + i3) + (-6 + i5) = (2 - 6) + i\,(3 + 5) = -4 + i\,8$.

સંકર સંખ્યાઓનો સરવાળો નીચે પ્રમાણેના ગુણધર્મોનું પાલન કરે છે :

(i) સંવૃત્તતા: બે સંકર સંખ્યાઓનો સરવાળો સંકર સંખ્યા થશે, એટલે કે, જો z_1 અને z_2 કોઈ પણ બે સંકર સંખ્યાઓ હોય, તો $z_1 + z_2$ એ પણ સંકર સંખ્યા થશે.

(ii) ક્રમનો નિયમ: કોઈ પણ બે સંકર સંખ્યાઓ z_1 અને z_2 માટે, $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$.

(iii) જૂથનો નિયમ: કોઈ પણ ત્રણ સંકર સંખ્યાઓ z_1, z_2, z_3 માટે, $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$.

(iv) સરવાળા માટેના તટસ્થ ઘટકનું અસ્તિત્વ: *એક સંકર સંખ્યા $0 + i\,0$ (જેનો સંકેત 0 છે) એવી મળે છે કે જેની પ્રત્યેક સંકર સંખ્યા $z + 0 = z$. આ સંકર સંખ્યા 0 ને સરવાળા માટેનો તટસ્થ ઘટક અથવા 0 સંકર સંખ્યા કહે છે.*

(v) સરવાળા માટેના વ્યસ્ત ઘટકનું અસ્તિત્વ: *દરેક સંકર સંખ્યા $z = a + ib$ માટે સંકર સંખ્યા $-a + i(-b)$ ($-z$ વડે દર્શાવાય છે)ને સરવાળા માટેનો વ્યસ્ત ઘટક અથવા z નો વિરોધી ઘટક કહે છે. આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે $z + (-z) = 0$* **(સરવાળા માટેનો તટસ્થ).**

5.3.2 બે સંકર સંખ્યાઓનો તફાવત : ધારો કે z_1 અને z_2 બે સંકર સંખ્યાઓ છે. તેમનો તફાવત $z_1 - z_2$ નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત થાય છે:

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2).$$

ઉદાહરણ તરીકે, $(6 + 3i) - (2 - i) = (6 + 3i) + (-2 + i) = 4 + 4i.$

અને $(2 - i) - (6 + 3i) = (2 - i) + (-6 - 3i) = -4 - 4i.$

5.3.3 બે સંકર સંખ્યાઓનો ગુણાકાર : ધારો કે $z_1 = a + ib$ અને $z_2 = c + id$ બે સંકર સંખ્યાઓ છે. તેમનો ગુણાકાર $z_1 z_2$ નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત થાય છે:

$$z_1 z_2 = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

ઉદાહરણ તરીકે, $(3 + i5)(2 + i6) = (3 \times 2 - 5 \times 6) + i(3 \times 6 + 5 \times 2) = -24 + i28.$

સંકર સંખ્યાઓનો ગુણાકાર નીચે પ્રમાણે ગુણધર્મો ધરાવે છે. તેમને આપણે સાબિતી આપ્યા વગર નોંધીશું.

(i) સંવૃત્તતા : બે સંકર સંખ્યાઓનો ગુણાકાર સંકર સંખ્યા થશે, એટલે કે, જો z_1 અને z_2 કોઈ પણ સંકર સંખ્યાઓ હોય, તો $z_1 z_2$ એ પણ સંકર સંખ્યા થશે.

(ii) ક્રમનો નિયમ: કોઈપણ બે સંકર સંખ્યાઓ z_1 અને z_2 માટે, $z_1 z_2 = z_2 z_1$.

(iii) જૂથનો નિયમ: કોઈપણ ત્રણ સંકર સંખ્યાઓ z_1, z_2, z_3 માટે, $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$.

(iv) ગુણાકાર માટેના તટસ્થ ઘટકનું અસ્તિત્વ : *એક સંકર સંખ્યા* $1 = 1 + i\,0$ *(જેનો સંકેત 1 છે) અસ્તિત્વ ધરાવે છે. જેથી પ્રત્યેક સંકર સંખ્યા* z *માટે,* $z \cdot 1 = z$. *આ સંકર સંખ્યા 1 ને ગુણાકાર માટેનો તટસ્થ ઘટક કહે છે.*

(v) ગુણાકાર માટેના વ્યસ્ત ઘટકનું અસ્તિત્વ: *દરેક શૂન્યેતર સંકર સંખ્યા* $z = a + ib$ *કે* $a + bi (a \neq 0, b \neq 0)$ *ને સંગત, સંકર સંખ્યા* $\frac{a}{a^2+b^2} + i\frac{-b}{a^2+b^2}$ *(જેને* $\frac{1}{z}$ *અથવા* z^{-1} *વડે દર્શાવાય છે) મળે, જેથી* $z \cdot \frac{1}{z} = 1$. *આ સંકર સંખ્યા* $\frac{1}{z}$ *ને* z *નો ગુણાકાર માટેનો વ્યસ્ત ઘટક કહે છે.*

(vi) વિભાજનનો નિયમ: કોઈ પણ ત્રણ સંકર સંખ્યાઓ z_1, z_2, z_3 માટે,

(a) $z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$

(b) $(z_1 + z_2) z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$

5.3.4 બે સંકર સંખ્યાઓનો ભાગાકાર: ધારો કે z_2 શૂન્યેતર હોય તેવી બે સંકર સંખ્યાઓ z_1 અને z_2 છે. તેમનો ભાગાકાર $\frac{z_1}{z_2}$ નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત થાય છે :

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \frac{1}{z_2}$$

ઉદાહરણ તરીકે, $z_1 = 6 + 3i$ અને $z_2 = 2 - i$ માટે,

$$\frac{z_1}{z_2} = \left((6+3i) \times \frac{1}{2-i}\right) = (6+3i)\left(\frac{2}{2^2+(-1)^2} + i\frac{-(-1)}{2^2+(-1)^2}\right)$$

$$= (6+3i)\left(\frac{2+i}{5}\right) = \frac{1}{5}\left[12-3+i(6+6)\right] = \frac{1}{5}(9+12i).$$

5.3.5 i ના ઘાત

આપણે જાણીએ છીએ કે,

$$i^3 = i^2 i = (-1)\,i = -i\,, \qquad i^4 = \left(i^2\right)^2 = (-1)^2 = 1,$$

$$i^5 = \left(i^2\right)^2 i = (-1)^2 i = i\,, \quad i^6 = \left(i^2\right)^3 = (-1)^3 = -1 \text{ વગેરે}$$

વળી, $i^{-1} = \frac{1}{i}\times\frac{i}{i} = \frac{i}{-1} = -i, \quad i^{-2} = \frac{1}{i^2} = \frac{1}{-1} = -1,$

$$i^{-3} = \frac{1}{i^3} = \frac{1}{-i}\times\frac{i}{i} = \frac{i}{1} = i, \quad i^{-4} = \frac{1}{i^4} = \frac{1}{1} = 1$$

વ્યાપક રીતે, કોઈ પણ પૂર્ણાંક k માટે, $i^{4k} = 1$, $i^{4k+1} = i$, $i^{4k+2} = -1$, $i^{4k+3} = -i$.

5.3.6 ઋણ વાસ્તવિક સંખ્યાનાં વર્ગમૂળ

આપણે નોંધીએ કે $i^2 = -1$ તથા $(-i)^2 = i^2 = -1$.

આથી, -1 નાં વર્ગમૂળ i તથા $-i$ થાય. તેમ છતાં સંકેત $\sqrt{-1}$ એ ફક્ત i સૂચવશે.

હવે, આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે i અને $-i$ બંને સમીકરણ $x^2 + 1 = 0$ અથવા $x^2 = -1$ ના ઉકેલ થશે.

તે જ પ્રમાણે, $\left(\sqrt{3}\,i\right)^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 i^2 = 3\,(-1) = -3$

$$\left(-\sqrt{3}\,i\right)^2 = \left(-\sqrt{3}\right)^2 i^2 = -3$$

$\therefore$ -3 ના વર્ગમૂળ $\sqrt{3}\,i$ તથા $-\sqrt{3}\,i$ થશે.

વળી, સંકેત $\sqrt{-3}$ એ $\sqrt{3}\,i$ સૂચવશે.

એટલે કે, $\sqrt{-3} = \sqrt{3}\,i$.

વ્યાપક રીતે જો a એ કોઈ ધન વાસ્તવિક સંખ્યા હોય તો, $\sqrt{-a} = \sqrt{a}\,\sqrt{-1} = \sqrt{a}\,i$.

આપણે અગાઉથી જાણીએ છીએ કે, દરેક ધન વાસ્તવિક સંખ્યા a, b માટે $\sqrt{a}\times\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ થાય. જો $a > 0$, $b < 0$ અથવા $a < 0$, $b > 0$ હોય ત્યારે પણ આ પરિણામનું પાલન થાય છે. જો $a < 0$, $b < 0$ હોય, તો શું થાય ?

આપણે નોંધીએ કે,

$i^2 = \sqrt{-1}\,\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)\,(-1)} = \sqrt{1} = 1$. (કોઈ પણ વાસ્તવિક સંખ્યાઓ a અને b માટે $\sqrt{a}\times\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ છે તેમ ધારી લેતાં)

આ પરિણામ $i^2 = -1$ ની સત્યાર્થતાની વિરુધ્ધ છે.

જો સંખ્યાઓ a અને b બંને ઋણ વાસ્તવિક હોય તો, $\sqrt{a}\times\sqrt{b}\neq\sqrt{ab}$.

વળી, જો a અને b માંથી ગમે તે એક શૂન્ય હોય તો સ્પષ્ટ છે કે $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}=0$ થાય.

5.3.7 નિત્યસમો

આપણે નીચેનું નિત્યસમ સાબિત કરીશું.

કોઈપણ સંકર સંખ્યા z_1 અને z_2 માટે, $(z_1+z_2)^2=z_1^2+z_2^2+2z_1z_2$.

સાબિતી : અહીં, $(z_1 + z_2)^2 = (z_1 + z_2)(z_1 + z_2)$

$= (z_1 + z_2) z_1 + (z_1 + z_2) z_2$ (વિભાજનનો નિયમ)

$= z_1^2+z_2z_1+z_1z_2+z_2^2$ (વિભાજનનો નિયમ)

$= z_1^2+z_1z_2+z_1z_2+z_2^2$ (ગુણાકાર માટે ક્રમનો નિયમ)

$= z_1^2+2z_1z_2+z_2^2$.

તે જ રીતે આપણે નીચે પ્રમાણેના નિત્યસમ સાબિત કરી શકીએ :

(i) $(z_1-z_2)^2=z_1^2-2z_1z_2+z_2^2$

(ii) $(z_1+z_2)^3=z_1^3+3z_1^2z_2+3z_1z_2^2+z_2^3$

(iii) $(z_1-z_2)^3=z_1^3-3z_1^2z_2+3z_1z_2^2-z_2^3$

(iv) $z_1^2-z_2^2=(z_1+z_2)(z_1-z_2)$

ખરેખર, જે વાસ્તવિક સંખ્યાઓ માટે સત્ય હોય તેવા ઘણાબધા નિત્યસમો સંકર સંખ્યાઓ માટે પણ સાબિત કરી શકાય.

ઉદાહરણ 2 : નીચેની સંકર સંખ્યાઓને $a+bi$ સ્વરૂપમાં દર્શાવો.

(i) $(-5i)\left(\frac{1}{8}i\right)$ (ii) $(-i)(2i)\left(-\frac{1}{8}i\right)^3$

ઉકેલ : (i) $(-5i)\left(\frac{1}{8}i\right)=\frac{-5}{8}i^2=\frac{-5}{8}(-1)=\frac{5}{8}=\frac{5}{8}+i0$

(ii) $(-i)(2i)\left(-\frac{1}{8}i\right)^3=2\times\frac{1}{8\times8\times8}\times i^5=\frac{1}{256}(i^2)^2\ i=\frac{1}{256}i$.

ઉદાહરણ 3 : $(5-3i)^3$ ને $a+ib$ સ્વરૂપમાં દર્શાવો.

ઉકેલ : અહીં, $(5-3i)^3 = 5^3-3\times5^2\times(3i)+3\times5\,(3i)^2-(3i)^3$

$= 125 - 225i - 135 + 27i = -10 - 198i.$

ઉદાહરણ 4 : $\left(-\sqrt{3}+\sqrt{-2}\right)\left(2\sqrt{3}-i\right)$ ને $a+ib$ સ્વરૂપમાં દર્શાવો.

ઉકેલ : અહીં, $\left(-\sqrt{3}+\sqrt{-2}\right)\left(2\sqrt{3}-i\right) = \left(-\sqrt{3}+\sqrt{2}\,i\right)\left(2\sqrt{3}-i\right)$

$$= -6+\sqrt{3}i+2\sqrt{6}i-\sqrt{2}\,i^2 = \left(-6+\sqrt{2}\right)+\sqrt{3}\left(1+2\sqrt{2}\right)i$$

5.4 સંકર સંખ્યાનો માનાંક તથા અનુબદ્ધ સંકર સંખ્યા

ધારો કે $z = a + ib$ એ સંકર સંખ્યા છે. અનૃણ વાસ્તવિક સંખ્યા $\sqrt{a^2+b^2}$ ને z ના ***માનાંક*** *(modulus)* તરીકે વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે. તેને સંકેતમાં $|z|$ વડે દર્શાવવામાં આવે છે. આમ, $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$. સંકર સંખ્યા $a - ib$ એ z ની ***અનુબદ્ધ સંકર સંખ્યા*** *(conjugate)* છે. તેને સંકેતમાં $\bar{z}$ વડે દર્શાવવામાં આવે છે. આમ, $\bar{z} = a - ib$.

ઉદાહરણ તરીકે, $|3+i| = \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{10}$, $\quad |2-5i| = \sqrt{2^2+(-5)^2} = \sqrt{29}$,

અને $\qquad \overline{3+i} = 3-i$, $\overline{2-5i} = 2+5i$, $\overline{-3i-5} = 3i-5$.

આપણે જોઈ શકીએ કે શૂન્યેતર સંકર સંખ્યા z નો ગુણાકાર માટેનો વ્યસ્ત

$$z^{-1} = \frac{1}{a+ib} = \frac{a}{a^2+b^2}+i\frac{-b}{a^2+b^2} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

$$\therefore\ z\,\bar{z} = |z|^2$$

વધુમાં નીચેનાં પરિણામો સહેલાઈથી તારવી શકાય.

કોઈ પણ બે સંકર સંખ્યાઓ z_1 અને z_2 માટે,

(i) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ $\qquad$ (ii) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$ $\quad (|z_2| \neq 0)$

(iii) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1\,\bar{z}_2$ $\qquad$ (iv) $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$ (v) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$ $\quad (z_2 \neq 0)$.

ઉદાહરણ 5 : $2 - 3i$ નો ગુણાકાર માટેનો વ્યસ્ત શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે $\quad z = 2 - 3i$

તેથી $\qquad \bar{z} = 2 + 3i$ અને $|z|^2 = 2^2+(-3)^2 = 13$

$\therefore\ 2-3i$ નો ગુણાકાર માટેનો વ્યસ્ત

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{2+3i}{13} = \frac{2}{13}+\frac{3}{13}i.$$

ઉપર પ્રમાણેની ગણતરી નીચેની રીતે પણ પુનઃ મેળવી શકાય :

$$z^{-1} = \frac{1}{2-3i} = \frac{2+3i}{(2-3i)(2+3i)}$$

$$= \frac{2+3i}{2^2-(3i)^2} = \frac{2+3i}{13} = \frac{2}{13}+\frac{3}{13}i.$$

ઉદાહરણ 6 : નીચેની સંકર સંખ્યાઓને $a + ib$ સ્વરૂપમાં દર્શાવો :

(i) $\dfrac{5+\sqrt{2}i}{1-\sqrt{2}i}$ (ii) i^{-35}

ઉકેલ : (i) અહીં, $\dfrac{5+\sqrt{2}i}{1-\sqrt{2}i} = \dfrac{5+\sqrt{2}i}{1-\sqrt{2}i} \times \dfrac{1+\sqrt{2}i}{1+\sqrt{2}i}$

$$= \frac{5+5\sqrt{2}i+\sqrt{2}i-2}{1-\left(\sqrt{2}i\right)^2}$$

$$= \frac{3+6\sqrt{2}i}{1+2}$$

$$= \frac{3(1+2\sqrt{2}i)}{3}$$

$$= 1+2\sqrt{2}i$$

(ii) $i^{-35} = \dfrac{1}{i^{35}} = \dfrac{1}{\left(i^2\right)^{17} i} = \dfrac{1}{-i} \times \dfrac{i}{i} = \dfrac{i}{-i^2} = i$

સ્વાધ્યાય 5.1

નીચે આપેલ પ્રશ્ન 1 થી 10 માં દરેક સંકર સંખ્યાને $a + ib$ સ્વરૂપમાં દર્શાવો.

1. $(5i)\left(-\dfrac{3}{5}i\right)$ **2.** $i^9 + i^{19}$ **3.** i^{-39}

4. $3(7 + i7) + i(7 + i7)$ **5.** $(1 - i) - (-1 + i6)$

6. $\left(\dfrac{1}{5}+i\dfrac{2}{5}\right)-\left(4+i\dfrac{5}{2}\right)$ **7.** $\left[\left(\dfrac{1}{3}+i\dfrac{7}{3}\right)+\left(4+i\dfrac{1}{3}\right)\right]-\left(-\dfrac{4}{3}+i\right)$

8. $(1 - i)^4$ **9.** $\left(\dfrac{1}{3}+3i\right)^3$ **10.** $\left(-2-\dfrac{1}{3}i\right)^3$

આપેલ પ્રશ્ન 11 થી 13 માં દરેક સંકર સંખ્યાનો ગુણાકાર માટેનો વ્યસ્ત શોધો.

11. $4 - 3i$ **12.** $\sqrt{5}+3i$ **13.** $-i$

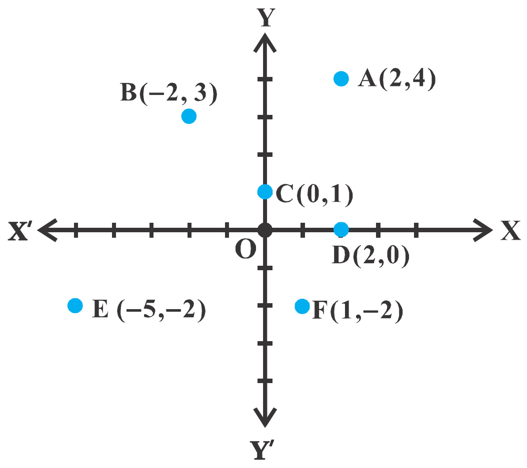
14. નીચેની પદાવલિને $a + ib$ સ્વરૂપમાં દર્શાવો :

$$\frac{\left(3+i\sqrt{5}\right)\left(3-i\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}i\right)-\left(\sqrt{3}-i\sqrt{2}\right)}$$

5.5 આર્ગન્ડ આકૃતિ અને ધ્રુવીય સ્વરૂપ

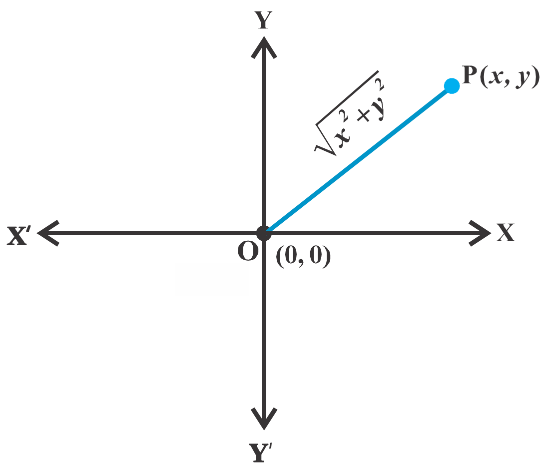
x-અક્ષ અને y-અક્ષ તરીકે ઓળખાતી પરસ્પર કાટખૂણે છેદતી રેખાઓના સંદર્ભમાં આપણે જાણીએ છીએ કે વાસ્તવિક સંખ્યાઓની દરેક ક્રમયુક્ત જોડ (x, y) ને સંગત XY–સમતલમાં અનન્ય બિંદુ મેળવી શકીએ અને તેનું પ્રતીપ પણ સત્ય છે. સંકર સંખ્યા $x + iy$ ને સંગત ક્રમયુક્ત જોડ (x, y) ને XY–સમતલના અનન્ય બિંદુ $P(x, y)$ તરીકે ભૌમિતિક રીતે દર્શાવી શકાય તેમજ XY–સમતલના બિંદુ $P(x, y)$ ને સંગત અનન્ય સંકર સંખ્યા $x + iy$ મળે.

સંકર સંખ્યાઓ જેવી કે $2 + 4i$, $-2 + 3i$, $0 + 1i$, $2 + 0i$, $-5 -2i$ અને $1-2i$ ને સંગત ક્રમયુક્ત જોડ અનુક્રમે $(2, 4)$, $(-2, 3)$, $(0, 1)$, $(2, 0)$, $(-5, -2)$, અને $(1, -2)$ ને ભૌમિતિક રીતે સંગત બિંદુઓ અનુક્રમે A, B, C, D, E, અને F આકૃતિ 5.1 માં દર્શાવેલ છે.



આકૃતિ 5.1

જે યામ-સમતલના પ્રત્યેક બિંદુને અનન્ય સંકર સંખ્યા સાથે સંગત કરી શકાય તેને ***સંકર સમતલ*** *(complex plane)* અથવા ***આર્ગન્ડ સમતલ*** *(Argand plane)* કહેવાય છે.



આકૃતિ 5.2

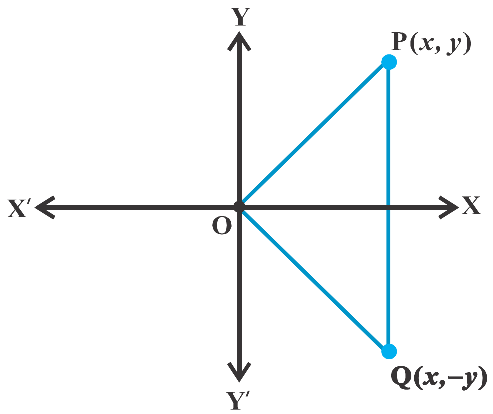
સ્પષ્ટ છે કે આર્ગન્ડ સમતલમાં સંકર સંખ્યા $x + iy$ નો માનાંક $|x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$ એ ઊગમબિંદુ O (0, 0) થી $P(x, y)$ વચ્ચેનું અંતર છે (આકૃતિ 5.2).

x-અક્ષ પરનાં બિંદુઓને સંગત સંકર સંખ્યા $a + i\,0$ સ્વરૂપમાં હોય છે અને y-અક્ષ પરનાં બિંદુઓને સંગત સંકર સંખ્યા

$0 + ib$ સ્વરૂપમાં હોય છે. આર્ગન્ડ સમતલમાં x- અક્ષ અને y-અક્ષને અનુક્રમે **વાસ્તવિક અક્ષ** *(real axis)* તથા **કાલ્પનિક અક્ષ** *(imaginary axis)* કહેવાય છે.

સંકર સંખ્યા $z = x + iy$ અને તેની અનુબદ્ધ સંકર સંખ્યા $\bar{z} = x - iy$ ને આર્ગન્ડ સમતલમાં અનુક્રમે બિંદુઓ P (x, y) અને Q $(x, -y)$ વડે દર્શાવાય છે.

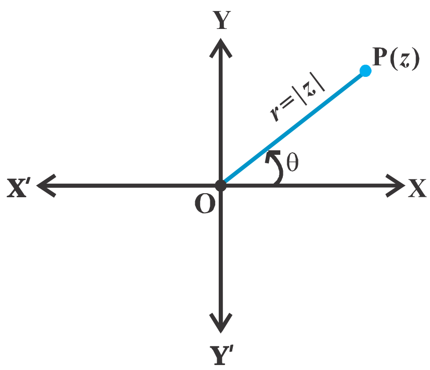
ભૌમિતિક રીતે બિંદુ $(x, -y)$ ને બિંદુ (x, y) નું વાસ્તવિક અક્ષને સાપેક્ષ **આરસી પ્રતિબિંબ** *(mirror image)* કહેવાય છે. (આકૃતિ 5.3)



આકૃતિ 5.3

5.5.1 સંકર સંખ્યાઓનું ધ્રુવીય સ્વરૂપ

ધારો કે સંકર સંખ્યા $z = x + iy$ ને બિંદુ P વડે દર્શાવેલ છે. ધારો કે દિશાયુક્ત રેખાખંડ OP ની લંબાઈ r છે અને OP એ x-અક્ષની ધન દિશા સાથે θ માપનો ખૂણો બનાવે છે (આકૃતિ 5.4).

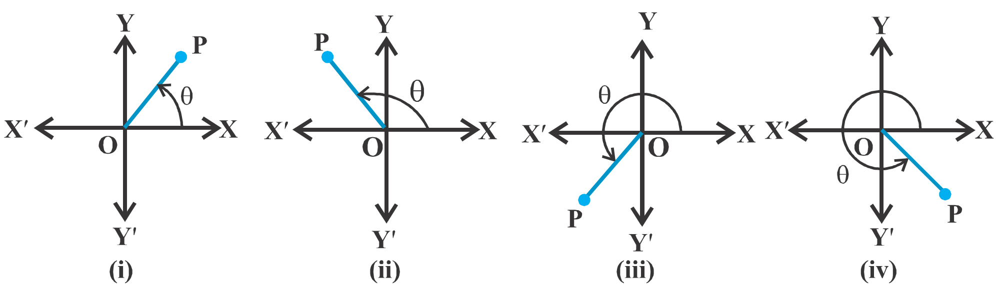


આકૃતિ 5.4

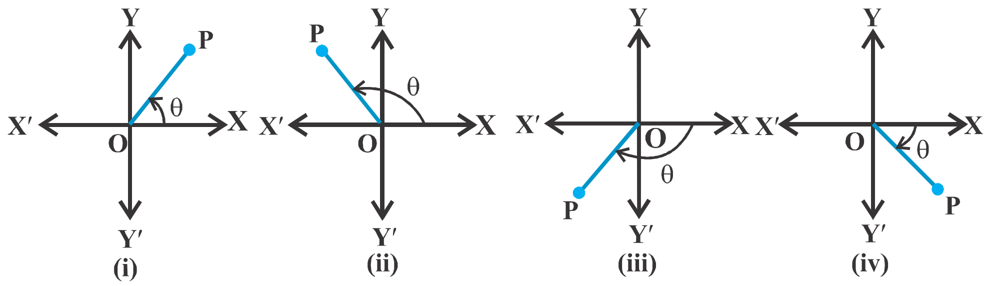
આપણે નોંધીએ કે બિંદુ P એ વાસ્તવિક સંખ્યાઓની ક્રમયુક્ત જોડ (r, θ) દ્વારા અનન્ય રીતે મેળવી શકાય. (r, θ) ને બિંદુ P ના ધ્રુવીય યામ કહે છે. આપણે ઊગમબિંદુને **ધ્રુવ** *(pole)* અને x-અક્ષની ધન દિશાને **આધારરેખા** અથવા **મૂળરેખા** *(initial line)* કહીશું.

અહીં, $x = r \cos \theta$, $y = r \sin\theta$

$\therefore$ $z = r(\cos\theta + i \sin\theta)$. આને સંકર સંખ્યાનું **ધ્રુવીય સ્વરૂપ** *(polar form)* કહેવાય છે. $r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$ એ z નો માનાંક છે અને θ એ z નો **કોણાંક** *(argument* અથવા *amplitude)* છે, તેને સંકેતમાં $\arg z$ વડે દર્શાવાય છે.



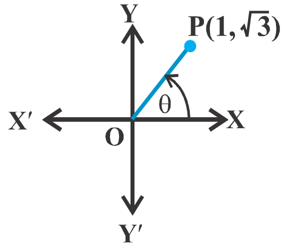
આકૃતિ 5.5 $(0 \le \theta < 2\pi)$



આકૃતિ 5.6 $(-\pi < \theta \le \pi)$

કોઈપણ સંખ્યા $z \ne 0$ ને સંગત θ ની અનન્ય કિંમત $0 \le \theta < 2\pi$ માં મળે છે. તેમ છતાં 2π લંબાઈનો કોઈ બીજો અંતરાલ $-\pi < \theta \le \pi$ જેવો પણ લઈ શકાય. આપણે θ ની કિંમત $-\pi < \theta \le \pi$ માં લઈશું. તેને z નો ***મુખ્ય કોણાંક*** (*principal argument*) કહેવાય છે. જો અન્યથા દર્શાવેલ ન હોય તો તેને સંકેતમાં *arg z* વડે દર્શાવીશું. (આકૃતિ 5.5. અને 5.6.)

ઉદાહરણ 7 : સંકર સંખ્યા $z = 1 + i\sqrt{3}$ ને ધ્રુવીય સ્વરૂપમાં દર્શાવો.



આકૃતિ 5.7

ઉકેલ : ધારો કે $1 = r\cos\theta$, $\sqrt{3} = r\sin\theta$

વર્ગ કરીને સરવાળો કરતાં,

$r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = 4$ એટલે કે, $r = \sqrt{4} = 2$ (પરંપરાગત રીતે, $r > 0$)

$$\therefore \quad \cos\theta = \frac{1}{2}, \ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore \quad \theta = \frac{\pi}{3}$$

$\therefore$ માંગેલ ધ્રુવીય સ્વરૂપ $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

સંકર સંખ્યા $z = 1 + i\sqrt{3}$ ને આકૃતિ 5.7 માં દર્શાવેલ છે.

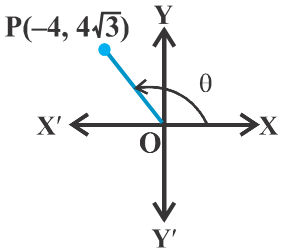
ઉદાહરણ 8 : સંકર સંખ્યા $\frac{-16}{1+i\sqrt{3}}$ ને ધ્રુવીય સ્વરૂપમાં ફેરવો.

ઉકેલ : આપેલ સંકર સંખ્યા $\frac{-16}{1+i\sqrt{3}} = \frac{-16}{1+i\sqrt{3}} \times \frac{1-i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$

$$= \frac{-16(1-i\sqrt{3})}{1-(i\sqrt{3})^2}$$

$$= \frac{-16(1-i\sqrt{3})}{1+3}$$

$= -4(1-i\sqrt{3}) = -4 + i4\sqrt{3}$ (આકૃતિ 5.8.)



આકૃતિ 5.8

ધારો કે $-4 = r\cos\theta$, $4\sqrt{3} = r\sin\theta$

વર્ગ કરીને સરવાળો કરતાં $16 + 48 = r^2\left(cos^2\theta + sin^2\theta\right)$

$\therefore$ $r^2 = 64$, એટલે કે, $r = 8$.

તેથી $$cos\ \theta = -\frac{1}{2},\ sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

આમ, માંગેલ ધ્રુવીય સ્વરૂપ $8\left(cos\frac{2\pi}{3} + i\ sin\frac{2\pi}{3}\right)$

સ્વાધ્યાય 5.2

પ્રશ્ન 1 થી 2 માં આવેલ દરેક સંકર સંખ્યાનો માનાંક અને કોણાંક શોધો.

1. $z = -1 - i\sqrt{3}$ **2.** $z = -\sqrt{3} + i$

પ્રશ્ન 3 થી 8 માં આવેલ દરેક સંકર સંખ્યાને ધ્રુવીય સ્વરૂપમાં ફેરવો.

3. $1 - i$ **4.** $-1 + i$ **5.** $-1 - i$

6. -3 **7.** $\sqrt{3} + i$ **8.** i

5.6 દ્વિઘાત સમીકરણો

આપણે દ્વિઘાત સમીકરણો વિશે પરિચિત છીએ અને જ્યારે વિવેચક અનૃણ હોય એટલે કે $D \geq 0$ હોય ત્યારે વાસ્તવિક સંખ્યા ગણ પર તેમના ઉકેલ પણ શોધ્યા.

હવે આપણે નીચે પ્રમાણેના દ્વિઘાત સમીકરણનો વિચાર કરીએ :

a, b, c વાસ્તવિક સહગુણકો છે અને $a \neq 0$ છે અને $ax^2 + bx + c = 0$ છે.

વળી, ધારો કે $b^2 - 4ac < 0$.

હવે આપણે સંકર સંખ્યાગણ પર ઋણ વાસ્તવિક સંખ્યાનું વર્ગમૂળ શોધી શકીએ છીએ. માટે ઉપર પ્રમાણેના સમીકરણનો ઉકેલ સંકર સંખ્યાગણ પર મળે છે.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{4ac - b^2}\ i}{2a}$$

નોંધ આ સમયે કેટલાકને જાણવાનો રસ હશે કે કોઈ પણ સમીકરણને કેટલાં બીજ મળે ? આ સંદર્ભે નીચેનો પ્રમેય જે ***બીજગણિતના મૂળભૂત પ્રમેય*** (*Fundamental theorem of Algebra*) તરીકે જાણીતો છે તેને (સાબિતી આપ્યા વગર) નોંધીશું.

"બહુપદીય સમીકરણને ઓછામાં ઓછું એક બીજ મળે."

આ પ્રમેયના પરિણામે ખૂબ જ ઉપયોગી એવું નીચે પ્રમાણેનું પરિણામ મળે છે :

"n ઘાતવાળા બહુપદીય સમીકરણને n બીજ મળે છે."

ઉદાહરણ 9 : ઉકેલો: $x^2 + 2 = 0$

ઉકેલ : અહીં, $x^2 + 2 = 0$

અથવા $x^2 = -2$ એટલે કે, $x = \pm\sqrt{-2} = \pm\sqrt{2}\, i.$

ઉદાહરણ 10: ઉકેલો : $x^2 + x + 1 = 0$

ઉકેલ : અહીં, $b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = 1 - 4 = -3$

$\therefore x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2 \times 1} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ એ માંગેલ ઉકેલો થશે.

ઉદાહરણ 11 : ઉકેલો: $\sqrt{5}x^2 + x + \sqrt{5} = 0$

ઉકેલ : અહીં, આપેલ સમીકરણનો વિવેચક

$1^2 - 4 \times \sqrt{5} \times \sqrt{5} = 1 - 20 = -19$

માંગેલ ઉકેલો $\dfrac{-1 \pm \sqrt{-19}}{2\sqrt{5}} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{19}i}{2\sqrt{5}}$ થશે.

સ્વાધ્યાય 5.3

નીચેનાં સમીકરણો ઉકેલો :

1. $x^2 + 3 = 0$ **2.** $2x^2 + x + 1 = 0$ **3.** $x^2 + 3x + 9 = 0$

4. $-x^2 + x - 2 = 0$ **5.** $x^2 + 3x + 5 = 0$ **6.** $x^2 - x + 2 = 0$

7. $\sqrt{2}x^2 + x + \sqrt{2} = 0$ **8.** $\sqrt{3}x^2 - \sqrt{2}x + 3\sqrt{3} = 0$

9. $x^2 + x + \dfrac{1}{\sqrt{2}} = 0$ **10.** $x^2 + \dfrac{x}{\sqrt{2}} + 1 = 0$

5.7 સંકર સંખ્યાનું વર્ગમૂળ

આગળના વિભાગમાં આપણે સંકર બીજને આવરી લેતા દ્વિઘાત સમીકરણના ઉકેલની ચર્ચા કરી. અહીં આપણે પ્રમાણિત સ્વરૂપમાં દર્શાવેલ સંકર સંખ્યાનું વર્ગમૂળ શોધવાની વિશિષ્ટ પ્રક્રિયા વર્ણવીશું. આપણે તેને ઉદાહરણ દ્વારા સ્પષ્ટ કરીશું.

ઉદાહરણ 12 : $-7 - 24i$ નું વર્ગમૂળ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે $x + iy = \sqrt{-7 - 24i}$

$\therefore \quad (x + iy)^2 = -7 - 24i$

અથવા $\quad x^2 - y^2 + 2xyi = -7 - 24i$

વાસ્તવિક ભાગ અને કાલ્પનિક ભાગ સરખાવતાં,

$x^2 - y^2 = -7$ ...(1)

$2xy = -24$

નિત્યસમ $\left(x^2 + y^2\right)^2 = \left(x^2 - y^2\right)^2 + \left(2xy\right)^2$ નો ઉપયોગ કરતાં,

$$\left(x^2 + y^2\right)^2 = 49 + 576$$

$$\left(x^2 + y^2\right)^2 = 625$$

આમ, $x^2 + y^2 = 25$ ...(2)

(1) અને (2) પરથી, $x^2 = 9$ અને $y^2 = 16$

અથવા $x = \pm 3$ અને $y = \pm 4$

ગુણાકાર xy ઋણ હોવાથી,

$x = 3, y = -4$ અથવા, $x = -3, y = 4$

આમ, $-7 - 24i$ નાં વર્ગમૂળ $3 - 4i$ અને $-3 + 4i$.

સ્વાધ્યાય 5.4

વર્ગમૂળ શોધો :

1. $-15 - 8i$ **2.** $-8 - 6i$ **3.** $1 - i$ **4.** $-i$

5. i **6.** $1 + i$

પ્રકીર્ણ ઉદાહરણો

ઉદાહરણ 13 : અનુબદ્ધ સંકર સંખ્યા શોધો : $\dfrac{(3-2i)(2+3i)}{(1+2i)(2-i)}$.

ઉકેલ : અહીં, $\dfrac{(3-2i)(2+3i)}{(1+2i)(2-i)}$

$$= \frac{6+9i-4i+6}{2-i+4i+2}$$

$$= \frac{12+5i}{4+3i} \times \frac{4-3i}{4-3i}$$

$$= \frac{48-36i+20i+15}{16+9}$$

$$= \frac{63-16i}{25}$$

$$= \frac{63}{25} - \frac{16}{25}i$$

$\therefore \frac{(3-2i)(2+3i)}{(1+2i)(2-i)}$ ની અનુબદ્ધ સંકર સંખ્યા $\frac{63}{25} + \frac{16}{25}i$ છે.

ઉદાહરણ 14 : નીચેની સંકર સંખ્યાઓના માનાંક અને કોણાંક શોધો :

(i) $\frac{1+i}{1-i}$ (ii) $\frac{1}{1+i}$

ઉકેલ : (i) અહીં, $\frac{1+i}{1-i} = \frac{1+i}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i} = \frac{1-1+2i}{1+1} = i = 0 + i$

હવે, $0 = r\ cos\ \theta$, $1 = r\ sin\theta$

વર્ગ કરીને સરવાળો કરતાં, $r^2 = 1$ એટલે કે $r = 1$

$$cos\ \theta = 0, \quad sin\theta = 1$$

$$\therefore \quad \theta = \frac{\pi}{2}$$

માટે, $\frac{1+i}{1-i}$ નો માનાંક 1 અને કોણાંક $\frac{\pi}{2}$ છે.

(ii) અહીં, $\frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i}{1+1} = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}$

ધારો કે, $\frac{1}{2} = r\ cos\ \theta$, $-\frac{1}{2} = r\ sin\theta$

ઉપર (i) પ્રમાણેની પ્રક્રિયા કરતાં, $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $sin\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

$$\therefore \theta = \frac{-\pi}{4}$$

આમ, $\frac{1}{1+i}$ નો માનાંક $\frac{1}{\sqrt{2}}$ અને કોણાંક $\frac{-\pi}{4}$ છે.

ઉદાહરણ 15 : જો $x + iy = \frac{a+ib}{a-ib}$, તો સાબિત કરો કે $x^2 + y^2 = 1$.

ઉકેલ : અહીં, $x + iy = \frac{(a+ib)(a+ib)}{(a-ib)(a+ib)} = \frac{a^2-b^2+2abi}{a^2+b^2} = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} + \frac{2ab}{a^2+b^2}i$

$$\therefore x - iy = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} - \frac{2ab}{a^2+b^2}i$$

$$\therefore x^2 + y^2 = (x + iy)(x - iy) = \frac{(a^2-b^2)^2}{(a^2+b^2)^2} + \frac{4a^2b^2}{(a^2+b^2)^2} = \frac{(a^2+b^2)^2}{(a^2+b^2)^2} = 1$$

ઉદાહરણ 16 : જો $\dfrac{3+2i\ \sin\theta}{1-2i\ \sin\theta}$ શુદ્ધ વાસ્તવિક સંખ્યા હોય, તો વાસ્તવિક θ શોધો.

ઉકેલ : અહીં,

$$\frac{3+2i\sin\theta}{1-2i\sin\theta} = \frac{(3+2i\sin\theta)(1+2i\sin\theta)}{(1-2i\sin\theta)(1+2i\sin\theta)}$$

$$= \frac{3+6i\sin\theta+2i\sin\theta-4\sin^2\theta}{1+4\sin^2\theta} = \frac{3-4\sin^2\theta}{1+4\sin^2\theta}+\frac{8i\ \sin\theta}{1+4\sin^2\theta}$$

આપેલ છે કે આ સંકર સંખ્યા વાસ્તવિક છે.

$$\therefore \frac{8\sin\theta}{1+4\sin^2\theta} = 0, \text{ એટલે કે } \sin\theta = 0$$

તેથી, $\theta = n\pi,\ n \in \mathbf{Z}$.

ઉદાહરણ 17 : સંકર સંખ્યા $z = \dfrac{i-1}{\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}}$ ને ધ્રુવીય સ્વરૂપમાં ફેરવો.

ઉકેલ : અહીં, $z = \dfrac{i-1}{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}$

$$= \frac{2(i-1)}{1+\sqrt{3}i}\times\frac{1-\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}$$

$$= \frac{2\left(i+\sqrt{3}-1+\sqrt{3}i\right)}{1+3}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\sqrt{3}+1}{2}\ i$$

હવે, $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2} = r\cos\theta,\ \dfrac{\sqrt{3}+1}{2} = r\sin\theta$ લો.

વર્ગ કરીને સરવાળો કરતાં,

$$r^2 = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^2 = \frac{2\left(\left(\sqrt{3}\right)^2+1\right)}{4} = \frac{2\times4}{4} = 2$$

તેથી $r=\sqrt{2}$ માટે, $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}},\quad \sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

માટે, $\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{12}$ (શા માટે ?)

આમ, ધ્રુવીય સ્વરૂપ $\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$ થશે.

પ્રકીર્ણ સ્વાધ્યાય 5

1. કિંમત શોધો : $\left[i^{18} + \left(\frac{1}{i}\right)^{25}\right]^3$

2. કોઈ પણ બે સંકર સંખ્યાઓ z_1 અને z_2 માટે સાબિત કરો કે,

$Re\,(z_1 z_2) = Re\, z_1\, Re\, z_2 - Im z_1\, Im z_2$

3. $\left(\frac{1}{1-4i} - \frac{2}{1+i}\right)\left(\frac{3-4i}{5+i}\right)$ ને પ્રમાણિત સ્વરૂપમાં મૂકો.

4. જો $x - iy = \sqrt{\frac{a-ib}{c-id}}$ હોય, તો સાબિત કરો કે $\left(x^2+y^2\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}$.

5. નીચેની સંખ્યાઓને ધ્રુવીય સ્વરૂપમાં ફેરવો :

(i) $\frac{1+7i}{(2-i)^2}$ (ii) $\frac{1+3i}{1-2i}$

પ્રશ્ન 6 થી 9 ના પ્રત્યેક સમીકરણને ઉકેલો :

6. $3x^2 - 4x + \frac{20}{3} = 0$

7. $x^2 - 2x + \frac{3}{2} = 0$

8. $27x^2 - 10x + 1 = 0$

9. $21x^2 - 28x + 10 = 0$

10. જો $z_1 = 2 - i$, $z_2 = 1 + i$, તો $\left|\frac{z_1 + z_2 + 1}{z_1 - z_2 + 1}\right|$ શોધો.

11. જો $a + ib = \frac{(x+i)^2}{2x^2+1}$, તો $a^2 + b^2 = \frac{(x^2+1)^2}{(2x^2+1)^2}$ સાબિત કરો.

12. ધારો કે, $z_1 = 2 - i$, $z_2 = -2 + i$.

(i) $Re\left(\frac{z_1 z_2}{\bar{z}_1}\right)$ (ii) $Im\left(\frac{1}{z_1\bar{z}_1}\right)$ શોધો.

13. સંકર સંખ્યા $\dfrac{1+2i}{1-3i}$ નો માનાંક તથા કોણાંક શોધો.

14. જો $(x - iy)(3 + 5i)$ એ $-6 - 24i$ ની અનુબદ્ધ સંકર સંખ્યા હોય, તો વાસ્તવિક સંખ્યાઓ x અને y શોધો.

15. $\dfrac{1+i}{1-i}-\dfrac{1-i}{1+i}$ નો માનાંક શોધો.

16. જો $(x + iy)^3 = u + iv$ હોય, તો બતાવો કે $\dfrac{u}{x}+\dfrac{v}{y}=4(x^2-y^2)$.

17. જો α અને β એ ભિન્ન સંકર સંખ્યાઓ હોય તથા $|\beta|=1$, તો $\left|\dfrac{\beta-\alpha}{1-\overline{\alpha}\beta}\right|$ ની કિંમત શોધો.

18. સમીકરણ $|1-i|^x=2^x$ ના શૂન્યેતર પૂર્ણાંક ઉકેલોની સંખ્યા શોધો.

19. જો $(a + ib)(c + id)(e + if)(g + ih) = A + iB$, હોય તો, બતાવો કે

$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)(e^2 + f^2)(g^2 + h^2) = A^2 + B^2$.

20. $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^m=1$ થાય તેવી m ની ન્યૂનતમ પૂર્ણાંક કિંમત શોધો.

સારાંશ

◆ જ્યાં a અને b વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે તેવી $a + ib$ પ્રકારની સંખ્યાને સંકર સંખ્યા કહેવાય છે. a ને સંકર સંખ્યાનો વાસ્તવિક ભાગ તથા b ને તેનો કાલ્પનિક ભાગ કહેવાય છે.

◆ ધારો કે $z_1 = a + ib$ અને $z_2 = c + id$, તો

(i) $z_1 + z_2 = (a + c) + i(b + d)$

(ii) $z_1 z_2 = (ac - bd) + i(ad + bc)$

◆ દરેક શૂન્યેતર સંકર સંખ્યા $a + ib$ $(a \neq 0, b \neq 0)$ ને સંગત સંકર સંખ્યા $\dfrac{a}{a^2+b^2}+i\dfrac{-b}{a^2+b^2}$,અસ્તિત્વ ધરાવે છે કે, જેથી $(a+ib)\left(\dfrac{a}{a^2+b^2}+i\dfrac{-b}{a^2+b^2}\right)=1 + i0 =1$. તેને $z = a + ib$ નો વ્યસ્ત કહે છે તથા તેને સંકેત $\dfrac{1}{z}$ અથવા z^{-1}થી દર્શાવાય છે.

◆ કોઈ પણ પૂર્ણાંક k માટે, $i^{4k} = 1$, $i^{4k+1} = i$, $i^{4k+2} = -1$, $i^{4k+3} = -i$

◆ સંકર સંખ્યા $z = a + ib$ ની અનુબદ્ધ સંકર સંખ્યા (કે જેને $\overline{z}$ વડે દર્શાવાય છે) $\overline{z} = a - ib$.

◆ સંકર સંખ્યા $z = x + iy$ નું ધ્રુવીય સ્વરૂપ $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ છે, જ્યાં $r=\sqrt{x^2+y^2}$ (z નો માનાંક) અને $\cos\theta = \dfrac{x}{r}$, $\sin\theta = \dfrac{y}{r}$ (θ એ z નો કોણાંક). જો θ ની કિંમત અંતરાલ $-\pi < \theta \leq \pi$ માં હોય તો તેને z નો મુખ્ય કોણાંક કહે છે.

◆ n ઘાતવાળા બહુપદીય સમીકરણને n બીજ મળે છે.

◆ જો $b^2 - 4ac < 0$ હોય તો દ્વિઘાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$, $a, b, c \in R$, $a \neq 0$ નાં બીજ

$x = \frac{-b \pm \sqrt{4ac - b^2}\,i}{2a}$ છે.

Historical Note

The fact that square root of a negative number does not exist in the real number system was recognised by the Greeks. But the credit goes to the Indian mathematician *Mahavira* (850) who first stated this difficulty clearly. "He mentions in his work '*Ganitasara Sangraha*' as in the nature of things a negative (quantity) is not a square (quantity)', it has, therefore, no square root". *Bhaskara*, another Indian mathematician, also writes in his work *Bijaganita*, written in 1150. "There is no square root of a negative quantity, for it is not a square." *Cardan* (1545) considered the problem of solving

$$x + y = 10,\ xy = 40.$$

He obtained $x = 5 + \sqrt{-15}$ and $y = 5 - \sqrt{-15}$ as the solution of it, which was discarded by him by saying that these numbers are 'useless'. *Albert Girard* (about 1625) accepted square root of negative numbers and said that this will enable us to get as many roots as the degree of the polynomial equation. *Euler* was the first to introduce the symbol i for $\sqrt{-1}$ and *W.R. Hamilton* (about 1830) regarded the complex number $a + ib$ as an ordered pair of real numbers (a, b) thus giving it a purely mathematical definition and avoiding use of the so called '*imaginary numbers*'.

— ❖ —