ગુજરાત રાજ્યના શિક્ષણવિભાગના પત્ર-ક્રમાંક
મશબ/1219/119-125/છ, તા. 16-02-2019–થી મંજૂર

ગણિત

ભાગ I

ધોરણ XII

પ્રતિજ્ઞાપત્ર

ભારત મારો દેશ છે.
બધાં ભારતીયો મારાં ભાઈબહેન છે.
હું મારા દેશને ચાહું છું અને તેના સમૃદ્ધ અને
વૈવિધ્યપૂર્ણ વારસાનો મને ગર્વ છે.
હું સદાય તેને લાયક બનવા પ્રયત્ન કરીશ.
હું મારાં માતાપિતા, શિક્ષકો અને વડીલો પ્રત્યે આદર રાખીશ
અને દરેક જણ સાથે સભ્યતાથી વર્તીશ.
હું મારા દેશ અને દેશબાંધવોને મારી નિષ્ઠા અર્પું છું.
તેમનાં કલ્યાણ અને સમૃદ્ધિમાં જ મારું સુખ રહ્યું છે.

કિંમત : ₹ 104.00

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्
NATIONAL COUNCIL OF EDUCATIONAL RESEARCH AND TRAINING

ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક મંડળ
'વિદ્યાયન', સેક્ટર 10-એ, ગાંધીનગર-382010

અનુવાદ
ડૉ. એ. પી. શાહ (કન્વીનર)
શ્રી જયકૃષ્ણ એન. ભટ્ટ
ડૉ. વિપુલ શાહ
શ્રી રાજીવ ચોક્સી
શ્રી વિજય વોરા
ડૉ. રવિ બોરાણા
શ્રી મૃગેશ પારેખ

પરામર્શન
ડૉ. એ. કે. દેસાઈ
ડૉ. પી. જે. ભટ્ટ
ડૉ. પરેશ આઇ. અંધારિયા
ડૉ. પ્રકાશ ડાભી
પ્રો. એમ. જે. વચેણા
શ્રી પરિમલ બી. પુરોહિત
શ્રી નવરોજ બી. ગાંગાણી
શ્રી કૃપાલ એસ. પરીખ
શ્રી આર. વી. વૈષ્ણવ
શ્રી આર. ડી. મોઢા
શ્રી પી. પી. પટેલ
શ્રી હેમા એસ. પંડ્યા
શ્રી સચીન એસ. કામદાર
શ્રી ભદ્રેશ જે. ભટ્ટ

ભાષાશુદ્ધિ
શ્રી વિજય ટી. પારેખ

સંયોજન
શ્રી આશિષ એચ. બોરીસાગર
(વિષય-સંયોજક : ગણિત)

નિર્માણ-સંયોજન
શ્રી હરેન શાહ
(નાયબ નિયામક : શૈક્ષણિક)

મુદ્રણ-આયોજન
શ્રી હરેશ એસ. લીમ્બાચીયા
(નાયબ નિયામક : ઉત્પાદન)

પ્રસ્તાવના

રાષ્ટ્રીય સ્તરે સમાન અભ્યાસક્રમ રાખવાની સરકારશ્રીની નીતિના અનુસંધાને ગુજરાત સરકાર તથા ગુજરાત માધ્યમિક અને ઉચ્ચતર માધ્યમિક શિક્ષણ બોર્ડ દ્વારા તા. 25/10/2017ના ઠરાવ ક્રમાંક મશભ/1217/1036/છ થી શાળા કક્ષાએ NCERTનાં પાઠ્યપુસ્તકોનો સીધો જ અમલ કરવાનો નિર્ણય કરવામાં આવ્યો. તેને અનુલક્ષીને NCERT, નવી દિલ્હી દ્વારા પ્રકાશિત **ધોરણ XII**ના **ગણિત (ભાગ I)** વિષયના પાઠ્યપુસ્તકનો ગુજરાતીમાં અનુવાદ કરીને વિદ્યાર્થીઓ સમક્ષ મૂકતાં ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક મંડળ આનંદ અનુભવે છે.

આ પાઠ્યપુસ્તકનો અનુવાદ તથા તેની સમીક્ષા નિષ્ણાત પ્રાધ્યાપકો અને શિક્ષકો પાસે કરાવવામાં આવ્યા છે અને સમીક્ષકોનાં સૂચનો અનુસાર હસ્તપ્રતમાં યોગ્ય સુધારા-વધારા કર્યા પછી આ પાઠ્યપુસ્તક પ્રસિદ્ધ કરતાં પહેલાં આ પાઠ્યપુસ્તકની મંજૂરી માટે એક સ્ટેટ લેવલની કમિટીની રચના કરવામાં આવી. આ કમિટીની સાથે NCERTના પ્રતિનિધિ તરીકે RIE, ભોપાલથી ઉપસ્થિત રહેલા નિષ્ણાતોની સાથે એક દ્વિદિવસીય કાર્યશિબિરનું આયોજન કરવામાં આવ્યું અને પાઠ્યપુસ્તકને અંતિમ સ્વરૂપ આપવામાં આવ્યું. જેમાં ડૉ. એ. પી. શાહ, શ્રી રાજીવ ચોક્સી, શ્રી પરિમલ પુરોહિત, શ્રી આર. વી. વૈષ્ણવ, શ્રી પી. પી. પટેલ, શ્રી નિલેશ એમ. કા.પટેલ, ડૉ. અશ્વનીકુમાર ગર્ગ (આર.આઇ.ઇ., ભોપાલ), ડૉ. સુરેશ મકવાણા (આર.આઇ.ઇ., ભોપાલ) ઉપસ્થિત રહી પોતાનાં કીમતી સૂચનો અને માર્ગદર્શન પૂરાં પાડ્યાં છે.

પ્રસ્તુત પાઠ્યપુસ્તકને રસપ્રદ, ઉપયોગી અને ક્ષતિરહિત બનાવવા માટે મંડળ દ્વારા પૂરતી કાળજી લેવામાં આવી છે, તેમ છતાં શિક્ષણમાં રસ ધરાવનાર વ્યક્તિઓ પાસેથી ગુણવત્તા વધારે તેવાં સૂચનો આવકાર્ય છે.

NCERT, નવી દિલ્લીના સહકાર બદલ તેમના આભારી છીએ.

અવંતિકા સિંઘ (IAS)
નિયામક — કાર્યવાહક પ્રમુખ
તા. 3-4-2019 — ગાંધીનગર

પ્રથમ આવૃત્તિ : 2019

પ્રકાશક : ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક મંડળ, 'વિદ્યાયન', સેક્ટર 10-એ, ગાંધીનગર વતી શ્રી અવંતિકા સિંઘ, નિયામક
મુદ્રક :

Foreword

The National Curriculum Framework, 2005, recommends that children's life at school must be linked to their life outside the school. This principle marks a departure from the legacy of bookish learning which continues to shape our system and causes a gap between the school, home and community. The syllabi and textbooks developed on the basis of NCF signify an attempt to implement this basic idea. They also attempt to discourage rote learning and the maintenance of sharp boundaries between different subject areas. We hope these measures will take us significantly further in the direction of a child-centred system of education outlined in the National Policy on Education (1986).

The success of this effort depends on the steps that school principals and teachers will take to encourage children to reflect on their own learning and to pursue imaginative activities and questions. We must recognise that, given space, time and freedom, children generate new knowledge by engaging with the information passed on to them by adults. Treating the prescribed textbook as the sole basis of examination is one of the key reasons why other resources and sites of learning are ignored. Inculcating creativity and initiative is possible if we perceive and treat children as participants in learning, not as receivers of a fixed body of knowledge.

These aims imply considerable change in school routines and mode of functioning. Flexibility in the daily time-table is as necessary as rigour in implementing the annual calendar so that the required number of teaching days are actually devoted to teaching. The methods used for teaching and evaluation will also determine how effective this textbook proves for making children's life at school a happy experience, rather than a source of stress or boredom. Syllabus designers have tried to address the problem of curricular burden by restructuring and reorienting knowledge at different stages with greater consideration for child psychology and the time available for teaching. The textbook attempts to enhance this endeavour by giving higher priority and space to opportunities for contemplation and wondering, discussion in small groups, and activities requiring hands-on experience.

NCERT appreciates the hard work done by the textbook development committee responsible for this book. We wish to thank the Chairperson of the advisory group in Science and Mathematics, Professor J.V. Narlikar and the Chief Advisor for this book, Professor P.K. Jain for guiding the work of this committee.

Several teachers contributed to the development of this textbook; we are grateful to their principals for making this possible. We are indebted to the institutions and organisations which have generously permitted us to draw upon their resources, material and personnel. As an organisation committed to systemic reform and continuous improvement in the quality of its products, NCERT welcomes comments and suggestions which will enable us to undertake further revision and refinement.

Director
National Council of Educational
Research and Training

New Delhi
20 December 2005

Preface

The National Council of Educational Research and Training (NCERT) had constituted 21 Focus Groups on Teaching of various subjects related to School Education, to review the National Curriculum Framework for School Education - 2000 (NCFSE - 2000) in face of new emerging challenges and transformations occurring in the fields of content and pedagogy under the contexts of National and International spectrum of school education. These Focus Groups made general and specific comments in their respective areas. Consequently, based on these reports of Focus Groups, National Curriculum Framework (NCF)-2005 was developed.

NCERT designed the new syllabi and constituted Textbook Development Teams for Classes XI and XII to prepare textbooks in mathematics under the new guidelines and new syllabi. The textbook for Class XI is already in use, which was brought in 2005.

The first draft of the present book (Class XII) was prepared by the team consisting of NCERT faculty, experts and practicing teachers. The draft was refined by the development team in different meetings. This draft of the book was exposed to a group of practicing teachers teaching mathematics at higher secondary stage in different parts of the country, in a review workshop organised by the NCERT at Delhi. The teachers made useful comments and suggestions which were incorporated in the draft textbook. The draft textbook was finalised by an editorial board constituted out of the development team. Finally, the Advisory Group in Science and Mathematics and the Monitoring Committee constituted by the HRD Ministry, Government of India have approved the draft of the textbook.

In the fitness of things, let us cite some of the essential features dominating the textbook. These characteristics have reflections in almost all the chapters. The existing textbook contain 13 main chapters and two appendices. Each Chapter contain the followings:

- Introduction: Highlighting the importance of the topic; connection with earlier studied topics; brief mention about the new concepts to be discussed in the chapter.
- Organisation of chapter into sections comprising one or more concepts/sub concepts.
- Motivating and introducing the concepts/sub concepts. Illustrations have been provided wherever possible.
- Proofs/problem solving involving deductive or inductive reasoning, multiplicity of approaches wherever possible have been inducted.
- Geometric viewing / visualisation of concepts have been emphasised whenever needed.
- Applications of mathematical concepts have also been integrated with allied subjects like science and social sciences.
- Adequate and variety of examples/exercises have been given in each section.

- For refocusing and strengthening the understanding and skill of problem solving and applicabilities, miscellaneous types of examples/exercises have been provided involving two or more sub concepts at a time at the end of the chapter. The scope of challenging problems to talented minority have been reflected conducive to the recommendation as reflected in NCF-2005.
- For more motivational purpose, brief historical background of topics have been provided at the end of the chapter and at the beginning of each chapter relevant quotation and photograph of eminent mathematician who have contributed significantly in the development of the topic undertaken, are also provided.
- Lastly, for direct recapitulation of main concepts, formulas and results, brief summary of the chapter has also been provided.

I am thankful to Professor Krishan Kumar, Director, NCERT who constituted the team and invited me to join this national endeavor for the improvement of mathematics education. He has provided us with an enlightened perspective and a very conducive environment. This made the task of preparing the book much more enjoyable and rewarding. I express my gratitude to Professor J.V. Narlikar, Chairperson of the Advisory Group in Science and Mathematics, for his specific suggestions and advice towards the improvement of the book from time to time. I, also, thank Prof. G. Ravindra, Joint Director, NCERT for his help from time to time.

I express my sincere thanks to Professor Hukum Singh, Chief Coordinator and Head DESM, Dr. V. P. Singh, Coordinator and Professor S. K. Singh Gautam who have been helping for the success of this project academically as well as administratively. Also, I would like to place on records my appreciation and thanks to all the members of the team and the teachers who have been associated with this noble cause in one or the other form.

PAWAN K. JAIN
Chief Advisor
Textbook Development Committee

Textbook Development Committee

CHAIRPERSON, ADVISORY GROUP IN SCIENCE AND MATHEMATICS

J.V. Narlikar, Emeritus Professor, Inter-University Centre for Astronomy and Astrophysics (IUCAA), Ganeshkhind, Pune University, Pune

CHIEF ADVISOR

P.K. Jain, Professor, Department of Mathematics, University of Delhi, Delhi

CHIEF COORDINATOR

Hukum Singh, Professor and Head, DESM, NCERT, New Delhi

MEMBERS

Arun Pal Singh, Sr. Lecturer, Department of Mathematics, Dayal Singh College, University of Delhi, Delhi

A.K. Rajput, Reader, RIE, Bhopal, M.P.

B.S.P. Raju, Professor, RIE Mysore, Karnataka

C.R. Pradeep, Assistant Professor, Department of Mathematics, Indian Institute of Science, Bangalore, Karnataka

D.R. Sharma, P.G.T., JNV-Mungeshpur, Delhi

Ram Avtar, Professor (Retd.) and Consultant, DESM, NCERT, New Delhi

R.P. Maurya, Reader, DESM, NCERT, New Delhi

S.S. Khare, Pro-Vice-Chancellor, NEHU, Tura Campus, Meghalaya

S.K.S. Gautam, Professor, DESM, NCERT, New Delhi

S.K. Kaushik, Reader, Department of Mathematics, Kirori Mal College, University of Delhi, Delhi

Sangeeta Arora, P.G.T., Apeejay School Saket, New Delhi-110017

Shailja Tewari, P.G.T., Kendriya Vidyalaya, Barkakana, Hazaribagh, Jharkhand

Vinayak Bujade, Lecturer, Vidarbha Buniyadi Junior College, Sakkardara Chowk, Nagpur, Maharashtra

Sunil Bajaj, Sr. Specialist, SCERT, Gurgaon, Haryana

MEMBER - COORDINATOR

V.P. Singh, Reader, DESM, NCERT, New Delhi

THE CONSTITUTION OF INDIA

PREAMBLE

WE, THE PEOPLE OF INDIA, having solemnly resolved to constitute India into a [1]**[SOVEREIGN SOCIALIST SECULAR DEMOCRATIC REPUBLIC]** and to secure to all its citizens :

JUSTICE, social, economic and political;

LIBERTY of thought, expression, belief, faith and worship;

EQUALITY of status and of opportunity; and to promote among them all

FRATERNITY assuring the dignity of the individual and the [2][unity and integrity of the Nation];

IN OUR CONSTITUENT ASSEMBLY this twenty-sixth day of November, 1949 do **HEREBY ADOPT, ENACT AND GIVE TO OURSELVES THIS CONSTITUTION.**

---

1. Subs. by the Constitution (Forty-second Amendment) Act, 1976, Sec.2, for "Sovereign Democratic Republic" (w.e.f. 3.1.1977)
2. Subs. by the Constitution (Forty-second Amendment) Act, 1976, Sec.2, for "Unity of the Nation" (w.e.f. 3.1.1977)

Acknowledgements

The Council gratefully acknowledges the valuable contributions of the following participants of the Textbook Review Workshop: Jagdish Saran, Professor, Deptt. of Statistics, University of Delhi; Quddus Khan, Lecturer, Shibli National P.G. College Azamgarh (U.P.); P.K. Tewari, Assistant Commissioner (Retd.), Kendriya Vidyalaya Sangathan; S.B. Tripathi, Lecturer, R.P.V.V. Surajmal Vihar, Delhi; O.N. Singh, Reader, RIE, Bhubaneswar, Orissa; Miss Saroj, Lecturer, Govt. Girls Senior Secondary School No.1, Roop Nagar, Delhi; P. Bhaskar Kumar, PGT, Jawahar Navodaya Vidyalaya, Lepakshi, Anantapur, (A.P.); Mrs. S. Kalpagam, PGT, K.V. NAL Campus, Bangalore; Rahul Sofat, Lecturer, Air Force Golden Jubilee Institute, Subroto Park, New Delhi; Vandita Kalra, Lecturer, Sarvodaya Kanya Vidyalaya, Vikaspuri, District Centre, New Delhi; Janardan Tripathi, Lecturer, Govt. R.H.S.S. Aizawl, Mizoram and Ms. Sushma Jaireth, Reader, DWS, NCERT, New Delhi.

The Council acknowledges the efforts of Deepak Kapoor, Incharge, Computer Station, Sajjad Haider Ansari, Rakesh Kumar and Nargis Islam, D.T.P. Operators, Monika Saxena,Copy Editor and Abhimanu Mohanty, Proof Reader.

The Contribution of APC-Office, administration of DESM and Publication Department is also duly acknowledged.

ભારતનું બંધારણ

ભાગ IV A (કલમ 51 A)

મૂળભૂત ફરજો

ભારતના દરેક નાગરિકની ફરજો નીચે મુજબ રહેશે :*

(ક) સંવિધાનને વફાદાર રહેવાની અને તેના આદર્શો અને સંસ્થાઓનો, રાષ્ટ્રધ્વજનો અને રાષ્ટ્રગીતનો આદર કરવાની;

(ખ) આઝાદી માટેની આપણી રાષ્ટ્રીય લડતને પ્રેરણા આપનારા ઉમદા આદર્શોને હૃદયમાં પ્રતિષ્ઠિત કરવાની અને અનુસરવાની;

(ગ) ભારતના સાર્વભૌમત્વ, એકતા અને અખંડિતતાનું સમર્થન કરવાની અને તેમનું રક્ષણ કરવાની;

(ઘ) દેશનું રક્ષણ કરવાની અને રાષ્ટ્રીય સેવા બજાવવાની હાકલ થતાં, તેમ કરવાની;

(ચ) ધાર્મિક, ભાષાકીય, પ્રાદેશિક અથવા સાંપ્રદાયિક ભેદોથી પર રહીને, ભારતના તમામ લોકોમાં સુમેળ અને સમાન બંધુત્વની ભાવનાની વૃદ્ધિ કરવાની, સ્ત્રીઓનાં ગૌરવને અપમાનિત કરે તેવા વ્યવહારો ત્યજી દેવાની;

(છ) આપણી સમન્વિત સંસ્કૃતિના સમૃદ્ધ વારસાનું મૂલ્ય સમજી તે જાળવી રાખવાની;

(જ) જંગલો, તળાવો, નદીઓ અને વન્ય પશુપક્ષીઓ સહિત કુદરતી પર્યાવરણનું જતન કરવાની અને તેની સુધારણા કરવાની અને જીવો પ્રત્યે અનુકંપા રાખવાની;

(ઝ) વૈજ્ઞાનિક માનસ, માનવતાવાદ અને જિજ્ઞાસા તથા સુધારણાની ભાવના કેળવવાની;

(ટ) જાહેર મિલકતનું રક્ષણ કરવાની અને હિંસાનો ત્યાગ કરવાની;

(ઠ) રાષ્ટ્ર પુરુષાર્થ અને સિદ્ધિનાં વધુ ને વધુ ઉન્નત સોપાનો ભણી સતત પ્રગતિ કરતું રહે એ માટે, વૈયક્તિક અને સામૂહિક પ્રવૃત્તિનાં તમામ ક્ષેત્રે શ્રેષ્ઠતા હાંસલ કરવાનો પ્રયત્ન કરવાની;

(ડ) માતા-પિતાએ અથવા વાલીએ 6 વર્ષથી 14 વર્ષ સુધીની વયના પોતાના બાળક અથવા પાલ્યને શિક્ષણની તકો પૂરી પાડવાની.

અનુક્રમણિકા

પ્રકરણ 1

સંબંધ અને વિધેય

❖ *There is no permanent place in the world for ugly mathematics ... . It may be very hard to define mathematical beauty but that is just as true of beauty of any kind, we may not know quite what we mean by a beautiful poem, but that does not prevent us from recognising one when we read it. — G. H. HARDY* ❖

1.1 પ્રાસ્તાવિક

Lejeune Dirichlet
(C.E. 1805 - C.E. 1859)

આપણે ધોરણ XI માં સંબંધો, વિધેયો, તેમના પ્રદેશ, સહપ્રદેશ અને વિસ્તારનો પરિચય મેળવ્યો. આપણે વિશિષ્ટ વાસ્તવિક મૂલ્યોવાળાં વિવિધ પ્રકારનાં વિધેયો અને તેમના આલેખો દ્વારા તેમની જે રજૂઆત કરી હતી તે સંકલ્પના યાદ કરો. જો બે પદાર્થ અથવા રાશિને જોડતી કોઈ કડી કે પરિચિત કરી શકાય તેવી સાંકળ હોય, તો તે બંને વસ્તુ અથવા રાશિ સંબંધિત છે તેમ કહેવાય છે. એ જ પ્રમાણે અંગ્રેજી ભાષાના શબ્દ ***Relation*** પરથી ગણિતમાં પણ સંબંધની સંકલ્પના લેવામાં આવી છે.

એક શાળાના ધોરણ XII ના વિદ્યાર્થીઓનો ગણ A લો અને એ જ શાળાના ધોરણ XI ના વિદ્યાર્થીઓનો ગણ B લો. અહીં A થી B ના સંબંધો માટેનાં કેટલાંક ઉદાહરણો નીચે આપેલાં છે :

(i) $\{(a, b) \in A \times B : a$ એ b નો ભાઈ છે$\}$,

(ii) $\{(a, b) \in A \times B : a$ એ b ની બહેન છે$\}$,

(iii) $\{(a, b) \in A \times B : a$ ની ઉંમર b ની ઉંમર કરતાં વધારે છે$\}$,

(iv) $\{(a, b) \in A \times B : a$ એ અંતિમ પરીક્ષામાં પ્રાપ્ત કરેલા કુલ ગુણ એ b એ અંતિમ પરીક્ષામાં પ્રાપ્ત કરેલા કુલ ગુણ કરતાં ઓછા છે$\}$,

(v) $\{(a, b) \in A \times B : a$ અને b એક જ વિસ્તારમાં રહે છે$\}$.

આમ છતાં, આપણે આ પરથી અનુરૂપ તારણ મેળવીને A થી B ના સંબંધ R ને ગાણિતિક રીતે $A \times B$ ના સ્વૈર ઉપગણ તરીકે વ્યાખ્યાયિત કરીએ છીએ.

જો $(a, b) \in R$, તો આપણે કહીશું કે a એ b સાથે સંબંધ R દ્વારા સંબંધિત છે. આ તથ્યને આપણે aRb સ્વરૂપે લખીએ છીએ. વ્યાપક રીતે જો $(a, b) \in R$, તો એ જરૂરી નથી કે a અને b વચ્ચે કોઈ પરિચિત સંબંધ કે કડી હોય. આપણે ધોરણ XI માં જોયું છે કે, વિધેય એક ખાસ પ્રકારનો સંબંધ હોય છે.

આ પ્રકરણમાં, આપણે વિભિન્ન પ્રકારનાં સંબંધો અને વિધેયો, વિધેયોનાં સંયોજનો, વ્યસ્તસંપન્ન વિધેયો તથા દ્વિક્ક્રિયાઓ વિશે અભ્યાસ કરીશું.

1.2 સંબંધોના પ્રકાર

આ વિભાગમાં આપણે વિભિન્ન પ્રકારના સંબંધો વિશે અભ્યાસ કરીશું. આપણે જાણીએ છીએ કે A × A નો કોઈ પણ ઉપગણ એ ગણ A માં સંબંધ હોય છે. ખાલીગણ $\varnothing$ અને A × A એ આત્યંતિક સંબંધો છે. ઉદાહરણ તરીકે ગણ $A = \{1, 2, 3, 4\}$ પર વ્યાખ્યાયિત એક સંબંધ $R = \{(a, b) : a - b = 10\}$નો વિચાર કરો. આ એક ખાલીગણ છે, કારણ કે શરત $a - b = 10$ નું સમાધાન કરે એવી A × A ની કોઈ પણ ક્રમયુક્ત જોડ (a, b) ન મળે. આ જ પ્રમાણે $R' = \{(a, b) : |a - b| \geq 0\}$ એ પૂર્ણ ગણ A × A ને સમાન છે, કારણ કે A × A ની તમામ જોડ $(a - b)$, $|a - b| \geq 0$ નું સમાધાન કરે જ છે. આ બંને આત્યંતિક સ્થિતિ રજૂ કરતાં ઉદાહરણો આપણને નીચે આપેલ વ્યાખ્યાઓ માટે પ્રેરિત કરે છે :

વ્યાખ્યા 1 : ***જો ગણ A નો કોઈ પણ ઘટક A ના કોઈ પણ ઘટક સાથે સંબંધ R ધરાવતો ન હોય, તો Rને ગણ A પરનો રિક્ત (Void) સંબંધ કહે છે, એટલે કે $R = \varnothing \subset A \times A$.***

વ્યાખ્યા 2 : ***જો ગણ Aનો પ્રત્યેક ઘટક A ના પ્રત્યેક ઘટક સાથે સંબંધિત હોય, તો A પર વ્યાખ્યાયિત સંબંધ Rને સાર્વત્રિક (Universal) સંબંધ કહેવાય છે, એટલે કે $R = A \times A$ થાય તો A સાર્વત્રિક સંબંધ છે.***

રિક્ત સંબંધ તથા સાર્વત્રિક સંબંધને ક્યારેક-ક્યારેક ***સહજ (Trivial) સંબંધ*** પણ કહે છે.

ઉદાહરણ 1 : ધારો કે છોકરાઓની એક શાળાના બધા જ વિદ્યાર્થીઓનો ગણ A છે. સાબિત કરો કે ગણ A પરનો સંબંધ $R = \{(a, b) : a$ એ b ની બહેન છે$\}$ રિક્ત સંબંધ છે અને

$R' = \{(a, b) : a$ અને b વચ્ચેની ઊંચાઈનો તફાવત 3 મીટર કરતાં ઓછો છે.$\}$ એ સાર્વત્રિક ગણ છે.

ઉકેલ : અહીં, છોકરાઓની શાળા હોવાથી, આ શાળાનો એક પણ વિદ્યાર્થી અન્ય કોઈ પણ વિદ્યાર્થીની બહેન હોઈ શકે નહિ. તેથી, $R = \phi$, દર્શાવે છે કે R એ રિક્ત સંબંધ છે. અત્રે એ પણ સ્વયંસ્પષ્ટ છે કે, પ્રાકૃતિક રીતે શાળાના કોઈ પણ બે વિદ્યાર્થીઓની ઊંચાઈઓનો તફાવત 3 મીટર કરતાં ઓછો જ હોય. આ સત્ય દર્શાવે છે કે $R' = A \times A$ એ સાર્વત્રિક સંબંધ છે.

નોંધ : ધોરણ XI માં સંબંધને દર્શાવવાની બે રીતોનો આપણે અભ્યાસ કર્યો છે : એક ***યાદીની*** અને બીજી ***ગુણધર્મની રીત (ગણ સર્જનની રીત)***.

ઘણા લેખકો, ગણ $\{1, 2, 3, 4\}$ પર વ્યાખ્યાયિત સંબંધ $R = \{(a, b) : b = a + 1\}$ને '$b = a + 1$ હોય, તો અને તો જ aRb દ્વારા પણ દર્શાવે છે. જ્યારે પણ અનુકૂળ હોય ત્યારે આપણે આ સંકેતનો પણ ઉપયોગ કરીશું.

જો $(a, b) \in R$ તો આપણે કહીશું કે a, b સાથે R દ્વારા સંબંધ ધરાવે છે અને આપણે તેને aRb વડે દર્શાવીશું.

જેની ગણિતશાસ્ત્રમાં એક સાર્થક ભૂમિકા છે, તે સામ્ય સંબંધ અત્યંત મહત્ત્વપૂર્ણ સંબંધ છે. સામ્ય સંબંધનો અભ્યાસ કરવા માટે આપણે સ્વવાચક, સંમિત અને પરંપરિત કહેવાતા સંબંધોના ત્રણ પ્રકારોનો અભ્યાસ કરવો જરૂરી છે.

વ્યાખ્યા 3 : ***ગણ A પર વ્યાખ્યાયિત સંબંધ R માટે,***

(i) સ્વવાચકતા : ***જો પ્રત્યેક $a \in A$ માટે $(a, a) \in R$, તો ગણ A પર વ્યાખ્યાયિત સંબંધ Rને સ્વવાચક સંબંધ કહેવાય છે.***

(ii) સંમિતતા : ***જો પ્રત્યેક $a_1, a_2 \in A$ માટે $(a_1, a_2) \in R \Rightarrow (a_2, a_1) \in R$ તો ગણ A પર વ્યાખ્યાયિત સંબંધ Rને સંમિત સંબંધ કહેવાય છે.***

(iii) પરંપરિતતા : ***જો પ્રત્યેક $a_1, a_2, a_3 \in A$ માટે $(a_1, a_2) \in R$ તથા $(a_2, a_3) \in R \Rightarrow (a_1, a_3) \in R$ તો ગણ A પર વ્યાખ્યાયિત સંબંધ Rને પરંપરિત સંબંધ કહેવાય છે.***

વ્યાખ્યા 4 : ***જો ગણ A પર વ્યાખ્યાયિત સંબંધ R એ સ્વવાચક, સંમિત અને પરંપરિત સંબંધ હોય, તો સંબંધ Rને સામ્ય સંબંધ કહે છે.***

ઉદાહરણ 2 : જો T એ સમતલમાં આવેલા બધા જ ત્રિકોણોનો ગણ હોય અને R એ T પરનો સંબંધ

$R = \{(T_1, T_2) : T_1$ એ T_2 ને એકરૂપ છે$\}$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત હોય, તો સાબિત કરો કે R એ સામ્ય સંબંધ છે.

ઉકેલ : પ્રત્યેક ત્રિકોણ તેને પોતાને એકરૂપ હોય છે. તેથી સંબંધ R એ સ્વવાચક સંબંધ છે.

હવે ધારો કે, $(T_1, T_2) \in R$

$\therefore$ ત્રિકોણ T_1 એ ત્રિકોણ T_2 ને એકરૂપ છે.

$\therefore$ ત્રિકોણ T_2 એ ત્રિકોણ T_1 ને એકરૂપ છે.

$\therefore$ $(T_2, T_1) \in R$

તેથી, R એ સંમિત સંબંધ છે.

હવે, ધારો કે $(T_1, T_2) \in R$, $(T_2, T_3) \in R$

$\therefore$ ત્રિકોણ T_1 એ ત્રિકોણ T_2 ને એકરૂપ છે અને ત્રિકોણ T_2 એ ત્રિકોણ T_3 ને એકરૂપ છે.

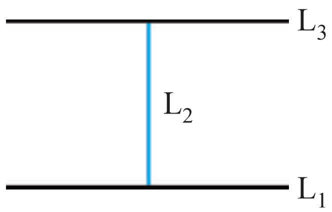
$\therefore$ ત્રિકોણ T_1 એ ત્રિકોણ T_3 ને એકરૂપ છે.

$\therefore$ $(T_1, T_3) \in R$

આમ, R એ સામ્ય સંબંધ છે.

ઉદાહરણ 3 : જો L એ સમતલમાં આવેલી બધી જ રેખાઓનો ગણ હોય અને R એ L પરનો સંબંધ, $R = \{(L_1, L_2)$: રેખા L_1 એ રેખા L_2 ને લંબ છે$\}$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત હોય, તો સાબિત કરો કે સંબંધ R એ સંમિત સંબંધ છે, પરંતુ સ્વવાચક કે પરંપરિત સંબંધ નથી.

ઉકેલ : સંબંધ R સ્વવાચક નથી, કારણ કે રેખા L_1 પોતાને જ લંબ ન હોઈ શકે, એટલે કે $(L_1, L_1) \notin R$.



આકૃતિ 1.1

ધારો કે $(L_1, L_2) \in R$

$\therefore$ રેખા L_1 એ રેખા L_2 ને લંબ છે.

$\therefore$ રેખા L_2 એ રેખા L_1 ને લંબ છે.

$\therefore$ $(L_2, L_1) \in R$

$\therefore$ R એ સંમિત સંબંધ છે.

R એ પરંપરિત સંબંધ નથી. જો રેખા L_1 અને રેખા L_2 પરસ્પર લંબ હોય તથા રેખા L_2 અને રેખા L_3 પરસ્પર લંબ હોય, તો રેખા L_1 ક્યારેય રેખા L_3 ને લંબ ન થાય. વાસ્તવમાં રેખા L_1 એ રેખા L_3 ને સમાંતર અથવા સંપાતિ છે. એટલે કે $(L_1, L_2) \in R$, $(L_2, L_3) \in R$, પરંતુ $(L_1, L_3) \notin R$. આથી R એ પરંપરિત સંબંધ નથી.

ઉદાહરણ 4 : સાબિત કરો કે ગણ $\{1, 2, 3\}$ પર વ્યાખ્યાયિત સંબંધ

$R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 3)\}$ એ સ્વવાચક સંબંધ છે, પરંતુ તે સંમિત કે પરંપરિત સંબંધ નથી.

ઉકેલ : અહીં (1, 1), (2, 2) અને (3, 3), સંબંધ R માં આવેલા છે, માટે R એ સ્વવાચક સંબંધ છે. તદુપરાંત $(1, 2) \in R$ છે, પરંતુ $(2, 1) \notin R$ હોવાથી R સંમિત સંબંધ નથી. આ જ પ્રમાણે, $(1, 2) \in R$ અને $(2, 3) \in R$, પરંતુ $(1, 3) \notin R$. તેથી R એ પરંપરિત સંબંધ નથી.

ઉદાહરણ 5 : સાબિત કરો કે પૂર્ણાંકોના ગણ Z પર વ્યાખ્યાયિત સંબંધ

$R = \{(a, b)$: 2 એ $(a - b)$ નો અવયવ છે$\}$ એ સામ્ય સંબંધ છે.

ઉકેલ : અહીં બધા જ $a \in Z$ માટે, 2 એ $(a - a)$ (એટલે કે 0) નો અવયવ છે. તેથી R એ સ્વવાચક સંબંધ છે. વધુમાં, જો $(a, b) \in R$ તો 2 એ $(a - b)$ નો અવયવ છે. માટે 2 એ $(b - a)$ નો અવયવ પણ છે. તેથી, $(b, a) \in R$. આ દર્શાવે છે કે R એ સંમિત સંબંધ છે.

આ જ રીતે જો $(a, b) \in R$ અને $(b, c) \in R$ તો $a - b$ અને $b - c$ એ 2 વડે વિભાજ્ય છે.

હવે $a - c = (a - b) + (b - c)$ એ યુગ્મ સંખ્યા છે. **(શા માટે ?)**

તેથી, $(a - c)$ એ 2 વડે વિભાજ્ય છે.

આ પરથી સિદ્ધ થાય છે કે, R એ પરંપરિત સંબંધ છે. આમ, R એ Z પર સામ્ય સંબંધ છે.

ઉદાહરણ 5 માં, નોંધ કરો કે બધા જ યુગ્મ પૂર્ણાંકોને R દ્વારા શૂન્ય સાથે સંબંધ છે, કારણ કે $(0, \pm 2)$, $(0, \pm 4)$,... વગેરે R માં છે અને કોઈ પણ અયુગ્મ પૂર્ણાંક 0 સાથે R દ્વારા સંબંધિત નથી, કારણ કે $(0, \pm 1)$, $(0, \pm 3)$,... વગેરે R માં નથી. આ જ પ્રમાણે બધા જ અયુગ્મ પૂર્ણાંકો 1 સાથે R દ્વારા સંબંધિત છે અને કોઈ પણ યુગ્મ પૂર્ણાંક 1 સાથે R દ્વારા સંબંધિત નથી. તેથી, Z ના ઉપગણો યુગ્મ સંખ્યાઓનો ગણ E અને અયુગ્મ સંખ્યાઓનો ગણ O નીચેની શરતોનું પાલન કરે છે :

(i) E ના બધા જ ઘટકો એકબીજા સાથે R દ્વારા સંબંધિત છે અને O ના બધા જ ઘટકો પણ એકબીજા સાથે R દ્વારા સંબંધિત છે.

(ii) E નો કોઈ પણ ઘટક O ના એક પણ ઘટક સાથે R દ્વારા સંબંધિત નથી અને એનું પ્રતીપ પણ સત્ય છે.

(iii) E અને O અલગ ગણો છે અને $Z = E \cup O$.

ઉપગણ **E** ને શૂન્યને સમાવતો **સામ્ય** વર્ગ કહે છે અને તેને [0] વડે દર્શાવવામાં આવે છે. આ જ પ્રમાણે, **O** એ 1 ને સમાવતો **સામ્ય** વર્ગ છે. તેને [1] વડે દર્શાવવામાં આવે છે.

નોંધ કરો કે $[0] \neq [1]$, $[0] = [2r]$ અને $[1] = [2r + 1]$, $r \in Z$. વાસ્તવમાં, આપણે જે ઉપર જોયું તે ગણ X પરના કોઈ પણ સામ્ય સંબંધ માટે સત્ય છે.

આપેલ ગણ X પરનો કોઈ પણ સામ્ય સંબંધ R એ X નું પરસ્પર અલગ ઉપગણો A_i માં વિભાજન કરે છે. તેમને X ના ભાગ અથવા ઉપવિભાગ કહે છે અને તે નીચે આપેલ શરતોનું પાલન કરે છે :

(i) બધા જ i માટે, A_i ના બધા જ ઘટકો એકબીજા સાથે R દ્વારા સંબંધિત છે.

(ii) જો $i \neq j$ તો A_i નો એક પણ ઘટક, A_j ના કોઈ પણ ઘટક સાથે R દ્વારા સંબંધિત નથી.

(iii) $\cup A_j = X$ અને જો $i \neq j$ તો $A_i \cap A_j = \varnothing$.

ઉપગણો A_i ને સામ્ય વર્ગો કહે છે. આ સ્થિતિનો રસપ્રદ ભાગ એ છે કે, આપણે પાછા પણ ફરી શકીએ છીએ. ઉદાહરણ તરીકે, Z ને જેમનો યોગગણ Z હોય એવા ત્રણ પરસ્પર અલગ ઉપગણો A_1, A_2 તથા A_3 માં વિભાજન કરતા હોય તેવા સામ્ય ગણો વિશે વિચાર કરીએ.

$A_1 = \{x \in Z : x$ એ 3 નો ગુણક છે.$\}$

$= \{..., -6, -3, 0, 3, 6,...\}$

$A_2 = \{x \in Z : x - 1$ એ 3 નો ગુણક છે.$\}$

$= \{..., -5, -2, 1, 4, 7,...\}$

$A_3 = \{x \in Z : x - 2$ એ 3 નો ગુણક છે.$\}$

$= \{..., -4, -1, 2, 5, 8,...\}$

Z પર સંબંધ $R = \{(a, b) : 3$ એ $a - b$ નો અવયવ છે.$\}$ વ્યાખ્યાયિત કરો.

ઉદાહરણ 5 માં આપેલ તર્કબદ્ધ દલીલો અનુસાર આપણે સાબિત કરી શકીએ કે, R એ સામ્ય સંબંધ છે. વળી, A_1 એ Z માં આવેલા શૂન્ય સાથે સંબંધિત પૂર્ણાંકોનો ગણ દર્શાવે છે. A_2 એ 1 સાથે સંબંધિત પૂર્ણાંકોનો ગણ દર્શાવે છે અને A_3 એ Z માં આવેલા 2 સાથે સંબંધિત પૂર્ણાંકોનો ગણ દર્શાવે છે. આમ, $A_1 = [0]$, $A_2 = [1]$ અને $A_3 = [2]$.

વાસ્તવમાં, પ્રત્યેક $r \in Z$ માટે $A_1 = [3r]$, $A_2 = [3r + 1]$ અને $A_3 = [3r + 2]$.

ઉદાહરણ 6 : સંબંધ R એ ગણ $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ પર $R = \{(a, b) : a$ અને b બંને અયુગ્મ અથવા બંને યુગ્મ$\}$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત છે. સાબિત કરો કે R એ સામ્ય સંબંધ છે. એ સાથે જ સાબિત કરો કે $\{1, 3, 5, 7\}$ ના બધા જ ઘટકો R દ્વારા એકબીજા સાથે સંબંધિત છે અને $\{2, 4, 6\}$ ના બધા જ ઘટકો R દ્વારા એકબીજા સાથે સંબંધિત છે, પરંતુ $\{1, 3, 5, 7\}$ નો કોઈ પણ ઘટક ઉપગણ $\{2, 4, 6\}$ ના કોઈ પણ ઘટક સાથે R દ્વારા સંબંધિત નથી.

ઉકેલ : A ના કોઈ પણ ઘટક a માટે, a અને a બંને અયુગ્મ અથવા બંને યુગ્મ જ હોય. તેથી $(a, a) \in$ R. તદુપરાંત, $(a, b) \in$ R $\Rightarrow$ a અને b બંને અયુગ્મ અથવા બંને યુગ્મ જ હોય.

$\Rightarrow (b, a) \in$ R

આ જ પ્રમાણે, $(a, b) \in$ R અને $(b, c) \in$ R $\Rightarrow$ બધા જ ઘટકો a, b, c એકસાથે યુગ્મ અથવા અયુગ્મ જ હોવા જોઈએ.

$\Rightarrow (a, c) \in$ R

તેથી, R સામ્ય સંબંધ છે. વધુમાં, $\{1, 3, 5, 7\}$ ના બધા જ ઘટકો એકબીજા સાથે સંબંધ R ધરાવે છે, કારણ કે આ ઉપગણના બધા જ ઘટકો અયુગ્મ સંખ્યાઓ છે. આ જ પ્રમાણે $\{2, 4, 6\}$ ના બધા જ ઘટકો એકબીજા સાથે સંબંધ R ધરાવે છે, કારણ કે બધા જ ઘટકો યુગ્મ સંખ્યાઓ છે. વળી, ઉપગણ $\{1, 3, 5, 7\}$ નો એક પણ ઘટક $\{2, 4, 6\}$ ના કોઈ પણ ઘટક સાથે સંબંધ ધરાવતો નથી, કારણ કે $\{1, 3, 5, 7\}$ના ઘટકો અયુગ્મ છે, જ્યારે $\{2, 4, 6\}$ ના ઘટકો યુગ્મ છે.

સ્વાધ્યાય 1.1

1. નીચે આપેલ સંબંધો પૈકી પ્રત્યેક માટે તે સ્વવાચક, સંમિત અથવા પરંપરિત સંબંધ છે કે નહિ તે નક્કી કરો :

(i) ગણ A = $\{1, 2, 3, ..., 13, 14\}$ પર વ્યાખ્યાયિત સંબંધ

R = $\{(x, y) : 3x - y = 0\}$

(ii) પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓના ગણ N પર વ્યાખ્યાયિત સંબંધ

R = $\{(x, y) : y = x + 5$ અને $x < 4\}$

(iii) ગણ A = $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ પર વ્યાખ્યાયિત સંબંધ

R = $\{(x, y) : y$ એ x વડે વિભાજ્ય છે.$\}$

(iv) પૂર્ણાંકોના ગણ Z પર વ્યાખ્યાયિત સંબંધ

R = $\{(x, y) : x - y$ એ પૂર્ણાંક છે.$\}$

(v) કોઈ ચોક્કસ સમયે કોઈ એક નગરમાં વસતા મનુષ્યોના ગણ A પર વ્યાખ્યાયિત સંબંધ R

(a) R = $\{(x, y) : x$ અને y એક જ સ્થળે કામ કરે છે.$\}$

(b) R = $\{(x, y) : x$ અને y એક જ વિસ્તારમાં રહે છે.$\}$

(c) R = $\{(x, y) : x$ ની ઊંચાઈ y ની ઊંચાઈ કરતાં બરાબર 7 સેમી વધારે છે.$\}$

(d) R = $\{(x, y) : x$ એ y ની પત્ની છે.$\}$

(e) R = $\{(x, y) : x$ એ y નો પિતા છે.$\}$

2. સાબિત કરો કે વાસ્તવિક સંખ્યાઓના ગણ **R** પર S = $\{(a, b) : a \le b^2\}$ વડે વ્યાખ્યાયિત સંબંધ S સ્વવાચક, સંમિત અને પરંપરિત સંબંધ પૈકી એક પણ નથી.

3. ગણ $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ પર વ્યાખ્યાયિત સંબંધ R = $\{(a, b) : b = a + 1\}$ એ સ્વવાચક, સંમિત કે પરંપરિત સંબંધ છે કે નહિ તે ચકાસો.

4. સાબિત કરો કે **R** પર વ્યાખ્યાયિત સંબંધ S = $\{(a, b) : a \le b\}$ એ સ્વવાચક અને પરંપરિત છે, પરંતુ સંમિત સંબંધ નથી.

5. **R** પર વ્યાખ્યાયિત સંબંધ S = $\{(a, b) : a \le b^3\}$ એ સ્વવાચક, સંમિત અથવા પરંપરિત સંબંધ છે કે નહિ તે ચકાસો.

6. સાબિત કરો કે ગણ $\{1, 2, 3\}$ પર વ્યાખ્યાયિત સંબંધ R = $\{(1, 2), (2, 1)\}$ સંમિત છે પરંતુ સ્વવાચક કે પરંપરિત સંબંધ નથી.

7. સાબિત કરો કે કૉલેજના ગ્રંથાલયનાં બધાં જ પુસ્તકોના ગણ A પર વ્યાખ્યાયિત સંબંધ $R = \{(x, y) : x$ અને y નાં પૃષ્ઠોની સંખ્યા સમાન છે.$\}$ એ સામ્ય સંબંધ છે.

8. સાબિત કરો કે ગણ $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ પર વ્યાખ્યાયિત સંબંધ $R = \{(a, b) : |a - b|$ યુગ્મ છે$\}$ સામ્ય સંબંધ છે. સાબિત કરો કે $\{1, 3, 5\}$ ના બધા જ ઘટકો એકબીજા સાથે સંબંધ R ધરાવે છે અને $\{2, 4\}$ ના બધા જ ઘટકો એકબીજા સાથે સંબંધ R ધરાવે છે. પરંતુ $\{1, 3, 5\}$ નો એક પણ ઘટક $\{2, 4\}$ ના કોઈ પણ ઘટક સાથે સંબંધ R ધરાવતો નથી.

9. સાબિત કરો કે ગણ $A = \{x \in Z : 0 \le x \le 12\}$ પર વ્યાખ્યાયિત નીચે દર્શાવેલ પ્રત્યેક સંબંધ R, એ સામ્ય સંબંધ છે. પ્રત્યેક વિકલ્પમાં 1 સાથે સંબંધ R ધરાવતા ઘટકોનો ગણ શોધો.

(i) $R = \{(a, b) : |a - b|$ એ 4 નો ગુણિત છે.$\}$

(ii) $R = \{(a, b) : a = b\}$

10. જે (i) સંમિત હોય પરંતુ સ્વવાચક કે પરંપરિત ના હોય.

(ii) પરંપરિત હોય પરંતુ સ્વવાચક કે સંમિત ના હોય.

(iii) સ્વવાચક અને સંમિત હોય પરંતુ પરંપરિત ના હોય.

(iv) સ્વવાચક અને પરંપરિત હોય પરંતુ સંમિત ના હોય.

(v) સંમિત અને પરંપરિત હોય પરંતુ સ્વવાચક ના હોય, તેવા સંબંધોનાં ઉદાહરણો આપો.

11. સાબિત કરો કે સમતલમાં આવેલાં બિંદુઓના ગણ A પર વ્યાખ્યાયિત સંબંધ $R = \{(P, Q)$: ઊગમબિંદુથી બિંદુ P નું અંતર એ ઊગમબિંદુથી બિંદુ Q ના અંતર જેટલું જ છે$\}$ હોય, તો R એ સામ્ય સંબંધ છે. સાબિત કરો કે ઊગમબિંદુ સિવાયના બિંદુ P સાથે સંબંધ R ધરાવતા બધાં જ બિંદુઓનો ગણ એ P માંથી પસાર થતું અને ઊગમબિંદુ કેન્દ્રવાળું વર્તુળ છે.

12. સાબિત કરો કે બધા જ ત્રિકોણોના ગણ A પર વ્યાખ્યાયિત સંબંધ $R = \{(T_1, T_2)$: ત્રિકોણ T_1 એ ત્રિકોણ T_2 ને સમરૂપ છે$\}$, એ સામ્ય સંબંધ છે. ત્રણ કાટકોણ ત્રિકોણો, T_1 ની બાજુઓ 3, 4, 5; T_2 ની બાજુઓ 5, 12, 13 અને T_3 ની બાજુઓ 6, 8, 10 છે, તો T_1, T_2 અને T_3 માંથી કયા ત્રિકોણો સંબંધ R દ્વારા સંબંધિત છે ?

13. સાબિત કરો કે તમામ બહુકોણના ગણ A પર વ્યાખ્યાયિત સંબંધ $R = \{(P_1, P_2) : P_1$ અને P_2 ની બાજુઓની સંખ્યા સમાન છે.$\}$ એ સામ્ય સંબંધ છે. 3, 4 અને 5 લંબાઈની બાજુઓવાળા કાટકોણ ત્રિકોણ સાથે સંબંધ R ધરાવતા ગણ A ના તમામ ઘટકોનો ગણ શું મળશે ?

14. XY સમતલની બધી જ રેખાઓનો ગણ L લો અને L પર સંબંધ $R = \{(L_1, L_2)$: રેખા L_1 એ રેખા L_2 ને સમાંતર છે$\}$ વડે વ્યાખ્યાયિત છે. સાબિત કરો કે R સામ્ય સંબંધ છે. જે રેખાઓ $y = 2x + 4$ સાથે સંબંધ R દ્વારા સંબંધિત હોય તેવી તમામ રેખાઓનો ગણ શોધો.

નોંધ : સ્વીકારી લો કે, પ્રત્યેક રેખા પોતાને સમાંતર છે.

પ્રશ્નો 15 તથા 16 માં વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલ વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

15. ગણ $\{1, 2, 3, 4\}$ પર સંબંધ R એ $R = \{(1, 2), (2, 2), (1, 1), (4, 4), (1, 3), (3, 3), (3, 2)\}$ દ્વારા આપેલ છે.

(A) R એ સ્વવાચક અને સંમિત છે, પરંતુ પરંપરિત નથી.

(B) R એ સ્વવાચક અને પરંપરિત છે, પરંતુ સંમિત નથી.

(C) R એ સંમિત અને પરંપરિત છે, પરંતુ સ્વવાચક નથી.

(D) R એ સામ્ય સંબંધ છે.

16. સંબંધ R એ ગણ N પર $R = \{(a, b) : a = b - 2, b > 6\}$ દ્વારા આપેલ છે.

(A) $(2, 4) \in R$ (B) $(3, 8) \in R$ (C) $(6, 8) \in R$ (D) $(8, 7) \in R$

1.3 વિધેયોના પ્રકાર

આપણે ધોરણ XI માં વિધેયની સંકલ્પના સમજવા કેટલાંક વિશિષ્ટ વિધેયો તદેવ વિધેય, અચળ વિધેય, બહુપદીય વિધેય, સંમેય વિધેય, માનાંક વિધેય, ચિહ્ન વિધેય વગેરેનો અભ્યાસ કર્યો હતો અને તેમના આલેખ દોર્યા હતા.

આપણે બે વિધેયોનાં સરવાળા, બાદબાકી, ગુણાકાર અને ભાગાકારનો પણ અભ્યાસ કર્યો છે. ગણિતશાસ્ત્ર અને અધ્યયનની અન્ય શાખાઓમાં વિધેયની સંકલ્પના સર્વાધિક મહત્ત્વપૂર્ણ હોવાથી, આપણે વિધેય વિશેના આપણા અભ્યાસનો જ્યાં અંત કર્યો હતો ત્યાંથી તેને આગળ ધપાવીશું.

નીચે આપેલ આકૃતિઓ દ્વારા દર્શાવવામાં આવેલ વિધેયો f_1, f_2, f_3 અને f_4 નો વિચાર કરો.

આકૃતિ 1.2 માં આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે, વિધેય f_1 ની અંતર્ગત X_1 ના ભિન્ન ઘટકોનાં પ્રતિબિંબ પણ ભિન્ન છે, પરંતુ f_2 ની અંતર્ગત બે ભિન્ન ઘટકો 1 અને 2 નાં પ્રતિબિંબ એક જ છે અને તે b છે. આગળ વધતાં X_2 ના કેટલાક ઘટકો e અને f એવા છે કે જે f_1 ની અંતર્ગત X_1 ના કોઈ પણ ઘટકનાં પ્રતિબિંબ નથી, જ્યારે X_3 ના બધા જ ઘટકો f_3 ને અંતર્ગત, X_1 ના કોઈક ને કોઈક ઘટકનાં પ્રતિબિંબ છે.

ઉપર્યુક્ત નિરીક્ષણ નીચે આપેલ વ્યાખ્યાઓનું સૂચન કરે છે :

વ્યાખ્યા 5 : જો f ની અંતર્ગત X ના ભિન્ન ઘટકોનાં પ્રતિબિંબો પણ ભિન્ન હોય, તો વિધેય $f : X \rightarrow Y$ ને એક-એક (injective અથવા one-one) વિધેય કહે છે.

એટલે કે *પ્રત્યેક $x_1, x_2 \in X$ માટે $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ તો f એક-એક વિધેય છે.*

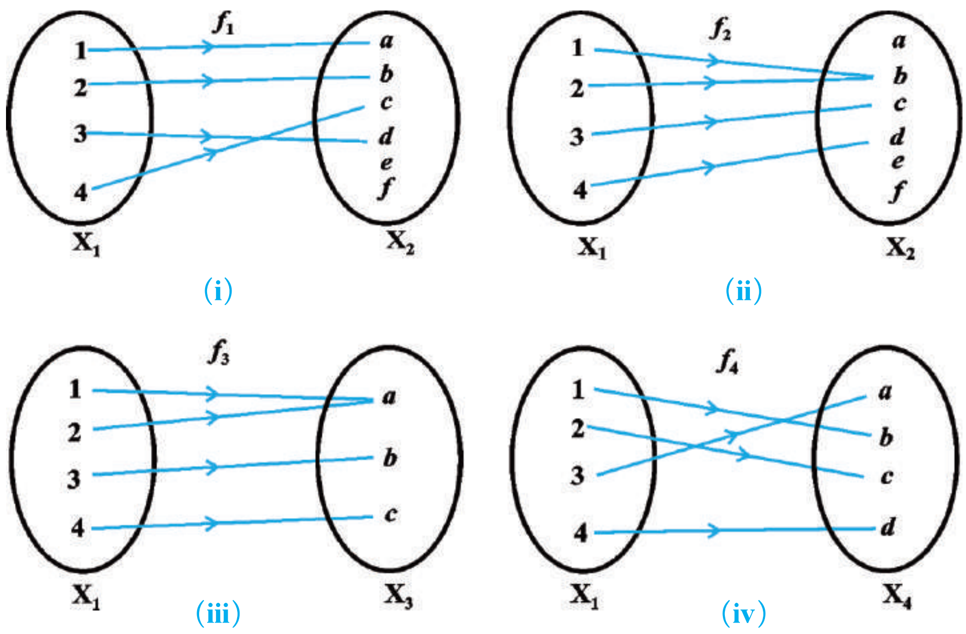
અન્યથા વિધેય f ને અનેક-એક વિધેય કહે છે.

આકૃતિ 1.2 (i) અને (iv) માં વિધેય f_1 અને f_4 એક-એક અને આકૃતિ 1.2 (ii) અને (iii) માં વિધેય f_2 અને f_3 અનેક-એક છે.

વ્યાખ્યા 6 : જો Y નો પ્રત્યેક ઘટક એ X ના કોઈક ઘટકનું f ની અંતર્ગત પ્રતિબિંબ હોય, તો વિધેય $f : X \rightarrow Y$ ને વ્યાપ્ત (surjective અથવા onto) વિધેય કહે છે.

એટલે કે પ્રત્યેક $y \in Y$ માટે X નો કોઈક ઘટક x મળે કે જેથી $f(x) = y$ થાય તો $f : X \rightarrow Y$ વ્યાપ્ત વિધેય છે.

વિધેય f_3 અને f_4 આકૃતિ 1.2 (iii), (iv) વ્યાપ્ત છે અને આકૃતિ 1.2 (i) માં વિધેય f_1 વ્યાપ્ત નથી. કારણ કે ઘટકો $e, f \in X_2$ એ f_1 ને અંતર્ગત X_1 ના કોઈ પણ ઘટકનાં પ્રતિબિંબો નથી.



આકૃતિ 1.2 (i) થી (iv)

નોંધ : જો $f : X \to Y$ વ્યાપ્ત હોય, તો અને તો જ fનો વિસ્તાર Y બને.

વ્યાખ્યા 7 : જો f એક-એક અને વ્યાપ્ત બંને હોય તો વિધેય $f : X \to Y$ ને એક-એક અને વ્યાપ્ત (bijective અથવા one-one and onto) વિધેય કહે છે.

આકૃતિ 1.2 (iv) માં વિધેય f_4 એક-એક અને વ્યાપ્ત છે.

ઉદાહરણ 7 : એક શાળાના ધોરણ X ના બધા જ 50 વિદ્યાર્થીઓનો ગણ A છે.

વિધેય $f : A \to N$, '$f(x)$ = વિદ્યાર્થી x નો રોલ નંબર' દ્વારા વ્યાખ્યાયિત છે. સાબિત કરો કે f એક-એક છે, પરંતુ વ્યાપ્ત નથી.

ઉકેલ : વર્ગમાં બે ભિન્ન વિદ્યાર્થીઓના રોલ નંબર સમાન નથી હોતા, એ બાબત જ્ઞાત છે. તેથી, f એક-એક વિધેય જ હોય. આમ, વ્યાપકતા ગુમાવ્યા સિવાય આપણે ધારી શકીએ કે વિદ્યાર્થીઓના રોલ નંબર 1 થી 50 છે. આનો અર્થ એ થયો કે $51 \in N$ એ આપેલ ધોરણના કોઈ પણ વિદ્યાર્થીનો રોલ નંબર નથી, એટલે કે 51 એ fની અંતર્ગત X ના કોઈ પણ ઘટકનું પ્રતિબિંબ ના હોઈ શકે. તેથી, વિધેય f એ વ્યાપ્ત નથી.

નોંધ : f વિધેય છે ? ખાતરી કરો.

ઉદાહરણ 8 : સાબિત કરો કે $f : N \to N$, $f(x) = 2x$ વડે વ્યાખ્યાયિત વિધેય એક-એક છે, પરંતુ વ્યાપ્ત નથી.

ઉકેલ : પ્રત્યેક $x_1, x_2 \in N$ માટે $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$

તેથી, વિધેય f એક-એક છે.

f વ્યાપ્ત નથી, કારણ કે $1 \in N$ ને સંગત કોઈ પણ $x \in N$ અસ્તિત્વ ધરાવતો નથી કે જેથી $f(x) = 2x = 1$ થાય.

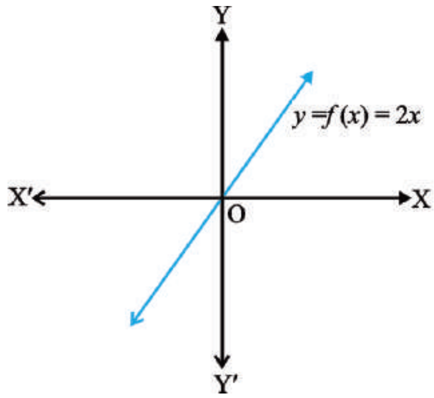
ઉદાહરણ 9 : સાબિત કરો કે વિધેય $f : R \to R$, $f(x) = 2x$ એક-એક અને વ્યાપ્ત છે.

ઉકેલ : પ્રત્યેક $x_1, x_2 \in R$ માટે,

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

તેથી, f એક-એક છે.

વળી, આપેલ વાસ્તવિક સંખ્યા $y \in R$ ને સંગત સંખ્યા $\frac{y}{2}$ R માં મળે કે જેથી, $f\left(\frac{y}{2}\right) = 2 \cdot \left(\frac{y}{2}\right) = y$. આમ, f વ્યાપ્ત છે.



આકૃતિ 1.3

ઉદાહરણ 10 : સાબિત કરો કે વિધેય $f : N \to N$, $f(1) = f(2) = 1$ અને પ્રત્યેક $x > 2$ માટે $f(x) = x - 1$, દ્વારા વ્યાખ્યાયિત હોય તો f વ્યાપ્ત છે, પરંતુ એક-એક નથી.

ઉકેલ : અહીં, $f(1) = f(2) = 1$ હોવાથી, f એક-એક નથી. પરંતુ, f વ્યાપ્ત છે, કારણ કે આપેલ $y \in N$, $y \neq 1$ માટે આપણે $x = y + 1$ પસંદ કરી શકીએ, જેથી $f(y + 1) = y + 1 - 1 = y$.

નોંધ : $y \in N$, $y \neq 1 \Rightarrow y > 1 \Rightarrow y + 1 > 2$

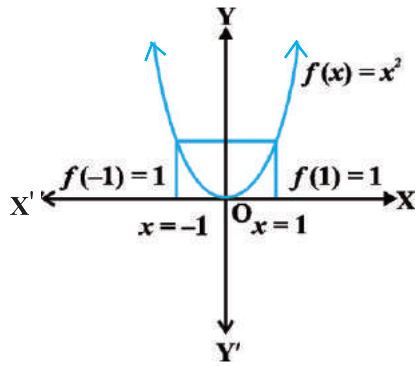
વળી, $1 \in N$ માટે, આપણી પાસે $f(1) = 1$ તો છે જ. આથી, f વ્યાપ્ત છે.

ઉદાહરણ 11 : સાબિત કરો કે $f : R \to R$, $f(x) = x^2$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેય એક-એક પણ નથી અને વ્યાપ્ત પણ નથી.

ઉકેલ : અહીં, $f(-1) = 1 = f(1)$ હોવાથી, f એક-એક નથી.

વળી, ઘટક $-2 \in R$ (R = સહપ્રદેશ) એ પ્રદેશ R ના કોઈ પણ ઘટક x નું પ્રતિબિંબ નથી (શા માટે ?).

તેથી f વ્યાપ્ત નથી.



f અંતર્ગત –1 તથા 1 નું પ્રતિબિંબ 1 છે.

આકૃતિ 1.4

ઉદાહરણ 12 : સાબિત કરો કે $f : \mathrm{N} \to \mathrm{N}$,

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \text{ અયુગ્મ}, \\ x - 1, & x \text{ યુગ્મ} \end{cases}$$

એ એક-એક અને વ્યાપ્ત વિધેય છે.

ઉકેલ : ધારો કે $f(x_1) = f(x_2)$.

આપણે નોંધીએ કે જો x_1 અયુગ્મ અને x_2 યુગ્મ હોય તો આપણને $x_1 + 1 = x_2 - 1$, એટલે કે $x_2 - x_1 = 2$ મળે છે, જે શક્ય નથી. આ જ દલીલનો ઉપયોગ કરીને x_1 યુગ્મ અને x_2 અયુગ્મ શક્યતાને પણ નકારી શકાય. તેથી, x_1 અને x_2 બંને યુગ્મ અથવા બંને અયુગ્મ જ હોવા જોઈએ. ધારો કે, x_1 અને x_2 બંને અયુગ્મ છે. તેથી, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 + 1 = x_2 + 1 \Rightarrow x_1 = x_2$.

આ જ પ્રમાણે, જો x_1 અને x_2 બંને યુગ્મ હોય તો પણ $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 - 1 = x_2 - 1 \Rightarrow x_1 = x_2$.

આમ, f એક-એક વિધેય છે.

વળી, સહપ્રદેશ **N** ની કોઈ પણ અયુગ્મ સંખ્યા $2r - 1$ એ પ્રદેશ **N** ની સંખ્યા $2r$ નું પ્રતિબિંબ છે. ($r = 1, 2, 3,...$) તથા **N** ની કોઈ પણ યુગ્મ સંખ્યા $2r$ છે તે પ્રદેશ **N** ની સંખ્યા $2r - 1$ નું પ્રતિબિંબ છે.

આમ, f વ્યાપ્ત છે.

ઉદાહરણ 13 : સાબિત કરો કે કોઈ પણ વ્યાપ્ત વિધેય $f : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$ એ હંમેશાં એક-એક છે.

ઉકેલ : ધારો કે f એક-એક નથી. જેમનાં પ્રતિબિંબ સહપ્રદેશમાં એના એ જ મળે તેવા 1 અને 2 જેવા બે ઘટકો, પ્રદેશમાં મળે. વળી, f ને અંતર્ગત 3 નું પ્રતિબિંબ એક જ ઘટક હોઈ શકે છે. તેથી, વિસ્તાર ગણમાં વધુમાં વધુ સહપ્રદેશ $\{1, 2, 3\}$ ના બે ઘટકો હોઈ શકે છે. આ દર્શાવે છે કે f એ વ્યાપ્ત નથી. આ વિરોધાભાસી પરિણામ છે. તેથી, f એક-એક જ હોવું જોઈએ.

ઉદાહરણ 14 : સાબિત કરો કે કોઈ પણ એક-એક વિધેય $f : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$ વ્યાપ્ત હોવું જ જોઈએ.

ઉકેલ : અહીં, f એક-એક છે, તેથી f ની અંતર્ગત $\{1, 2, 3\}$ ના ત્રણ ઘટકને સંગત સહપ્રદેશ $\{1, 2, 3\}$ ના ત્રણ ભિન્ન ઘટકો પ્રતિબિંબ તરીકે મળશે જ. તેથી, f વ્યાપ્ત હોય જ.

નોંધ : ઉપરનાં જે પરિણામોનો ઉલ્લેખ ઉદાહરણ 13 અને 14 માં છે તે ગમે તે સાન્ત ગણ X માટે પણ સત્ય છે, એટલે કે એક-એક વિધેય $f : \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ એ આવશ્યક રીતે વ્યાપ્ત છે અને વ્યાપ્ત વિધેય $f : \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ આવશ્યક રીતે એક-એક છે. પ્રત્યેક સાન્ત ગણ X માટે આ પરિણામના વિરોધાભાસમાં, ઉદાહરણ 8 અને 10 દર્શાવે છે કે અનંત ગણ માટે આ નિરીક્ષણ સત્ય ન પણ હોય. વાસ્તવમાં, આ સાન્ત ગણ અને અનંત ગણ વચ્ચેની લાક્ષણિકતાનો તફાવત છે.

સ્વાધ્યાય 1.2

1. ધારો કે $\mathbf{R}^*$ તમામ શૂન્યેતર વાસ્તવિક સંખ્યાઓનો ગણ છે. સાબિત કરો કે વિધેય $f : \mathbf{R}^* \to \mathbf{R}^*$, $f(x) = \frac{1}{x}$ વડે વ્યાખ્યાયિત વિધેય f એક-એક અને વ્યાપ્ત છે. જો પ્રદેશ $\mathbf{R}^*$ ના બદલે **N** લેવામાં આવે અને સહપ્રદેશ $\mathbf{R}^*$ જ રહે તો શું આ પરિણામ સત્ય રહેશે ?

2. નીચે આપેલ વિધેયો એક-એક અથવા વ્યાપ્ત અથવા બંને ગુણધર્મ ધરાવતાં વિધેયો છે કે નહિ તે ચકાસો :

(i) $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, $f(x) = x^2$

(ii) $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$, $f(x) = x^2$

(iii) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2$

(iv) $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, $f(x) = x^3$

(v) $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$, $f(x) = x^3$

3. સાબિત કરો કે $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = [x]$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત *મહત્તમ પૂર્ણાંક વિધેય (Greatest integer function)* એક-એક પણ નથી અને વ્યાપ્ત પણ નથી. અહીં, $[x]$ એ x થી નાના અથવા x ને સમાન તમામ પૂર્ણાંકોમાં મહત્તમ પૂર્ણાંક દર્શાવે છે. બીજા શબ્દોમાં x થી અધિક નહિ તેવા પૂર્ણાંકોમાં સૌથી મોટો પૂર્ણાંક x છે.

4. સાબિત કરો કે માનાંક વિધેય $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = |x|$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેય એક-એક નથી અને વ્યાપ્ત પણ નથી. જો x ધન અથવા શૂન્ય (અનૃણ) હોય, તો $|x| = x$ અને x ઋણ હોય, તો $|x| = -x$.

5. સાબિત કરો કે *ચિહ્ન વિધેય (Signum Function)* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેય એક-એક નથી અને વ્યાપ્ત પણ નથી.

6. A = {1, 2, 3}, B = {4, 5, 6, 7} છે અને વિધેય $f : A \to B$, $f = \{(1, 4), (2, 5), (3, 6)\}$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત છે. સાબિત કરો કે f એક-એક છે.

7. નીચે આપેલ પ્રત્યેક પ્રશ્નમાં આપેલાં વિધેય એક-એક છે કે નહિ, વ્યાપ્ત છે કે નહિ અથવા એક-એક અને વ્યાપ્ત છે કે નહિ તે નક્કી કરો. તમારા જવાબનું સમર્થન કરો :

(i) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ એ $f(x) = 3 - 4x$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેય છે.

(ii) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ એ $f(x) = 1 + x^2$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેય છે.

8. A અને B આપેલ ગણ છે. સાબિત કરો કે $f : A \times B \to B \times A$, $f((a, b)) = (b, a)$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેય એક-એક અને વ્યાપ્ત છે.

9. ધારો કે, $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, $f(n) = \begin{cases} \dfrac{n+1}{2}, & n \text{ અયુગ્મ} \\ \dfrac{n}{2}, & n \text{ યુગ્મ} \end{cases} \quad \forall n \in \mathrm{N}$

દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેય આપેલ છે. વિધેય f એક-એક છે કે નહિ તથા વ્યાપ્ત છે કે નહિ તે નિશ્ચિત કરો. તમારા જવાબનું સમર્થન કરો.

10. $A = \mathbf{R} - \{3\}$ અને $B = \mathbf{R} - \{1\}$ છે. $f(x) = \left(\dfrac{x-2}{x-3}\right)$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેય $f : A \to B$ નો વિચાર કરો. શું f એક-એક અને વ્યાપ્ત છે ? તમારા જવાબનું સમર્થન કરો.

પ્રશ્નો 11 તથા 12 માં વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલ વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

11. $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^4$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેય છે.

(A) f એક-એક અને વ્યાપ્ત છે.
(B) f અનેક-એક અને વ્યાપ્ત છે.
(C) f એક-એક છે પરંતુ વ્યાપ્ત નથી.
(D) f એક-એક પણ નથી અને વ્યાપ્ત પણ નથી.

12. વિધેય $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 3x$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત છે.

(A) f એક-એક અને વ્યાપ્ત છે.
(B) f અનેક-એક અને વ્યાપ્ત છે.
(C) f એક-એક છે પરંતુ વ્યાપ્ત નથી.
(D) f એક-એક પણ નથી અને વ્યાપ્ત પણ નથી.

1.4 વિધેયોનું સંયોજન અને વ્યસ્તસંપન્ન વિધેય

આ વિભાગમાં આપણે વિધેયોનું સંયોજન તથા એક-એક અને વ્યાપ્ત વિધેયના વ્યસ્ત વિશે અભ્યાસ કરીશું. વર્ષ 2006 માં ધોરણ X ની બોર્ડની પરીક્ષા આપી ચૂકેલા બધા જ વિદ્યાર્થીઓના ગણ A નો વિચાર કરો. બોર્ડની પરીક્ષામાં બેસવાવાળા પ્રત્યેક વિદ્યાર્થીને બોર્ડ દ્વારા એક પરીક્ષાર્થી-ક્રમાંક આપવામાં આવે છે. તેને વિદ્યાર્થી પરીક્ષાના

સમયે પોતાની ઉત્તરવહી પર લખે છે. ગોપનીયતા જાળવી રાખવા માટે બોર્ડ વિદ્યાર્થીઓના પરીક્ષાર્થી-ક્રમાંકને ઢાંકીને અથવા ભૂંસી નાખીને પ્રત્યેક પરીક્ષાર્થી-ક્રમાંકને નકલી સાંકેતિક ક્રમાંકમાં પરિવર્તિત કરે છે. ધારો કે $B \subset \mathbf{N}$ તમામ પરીક્ષાર્થી-ક્રમાંકોનો ગણ છે તથા $C \subset \mathbf{N}$ નકલી સાંકેતિક ક્રમાંકોનો ગણ છે. હવે, બે વિધેયો પ્રસ્તુત થાય છે,

$f : A \to B$ અને $g : B \to C$

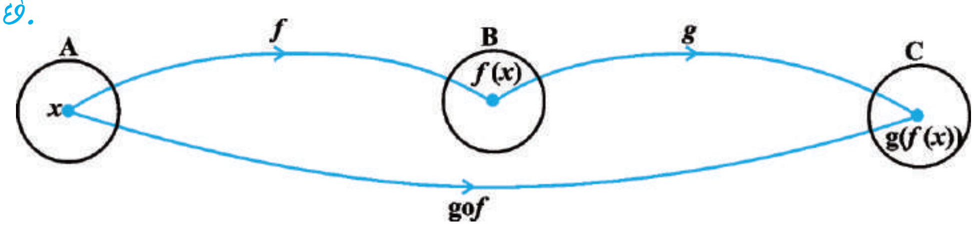
$f(a)$ = વિદ્યાર્થી a ને બોર્ડે આપેલો પરીક્ષાર્થી-ક્રમાંક તથા

$g(b)$ = પરીક્ષાર્થી-ક્રમાંક b ને સંગત આપવામાં આવેલો નકલી સાંકેતિક ક્રમાંક

આ પ્રક્રિયામાં વિધેય f દ્વારા પ્રત્યેક વિદ્યાર્થીને સંગત એક પરીક્ષાર્થી-ક્રમાંક નિર્ધારિત થાય છે અને વિધેય g દ્વારા પ્રત્યેક પરીક્ષાર્થી-ક્રમાંકને સંગત એક નકલી સાંકેતિક ક્રમાંક નિર્ધારિત થાય છે. આમ, આ બંને વિધેયોના સંયોજનથી પ્રત્યેક વિદ્યાર્થીને અંતે એક નકલી સાંકેતિક ક્રમાંક સાથે સંગત કરવામાં આવે છે.

આ પ્રક્રિયા પરથી નીચે આપેલ વ્યાખ્યા પ્રાપ્ત થાય છે.

વ્યાખ્યા 8 : ધારો કે, $f : A \to B$ અને $g : B \to C$ બે વિધેયો છે. વિધેયો f અને g ના સંયોજનને gof દ્વારા દર્શાવાય છે, અને તે વિધેય $gof : A \to C$; $(gof)(x) = g(f(x))$, $\forall x \in A$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે.



આકૃતિ 1.5

ઉદાહરણ 15 : વિધેયો $f : \{2, 3, 4, 5\} \to \{3, 4, 5, 9\}$ અને $g : \{3, 4, 5, 9\} \to \{7, 11, 15\}$, $f(2) = 3$, $f(3) = 4$, $f(4) = 5 = f(5)$ અને $g(3) = g(4) = 7$ અને $g(5) = g(9) = 11$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત છે, તો gof શોધો.

ઉકેલ : અહીં, આપણી પાસે $(gof)(2) = g(f(2)) = g(3) = 7$, $(gof)(3) = g(f(3)) = g(4) = 7$, $(gof)(4) = g(f(4)) = g(5) = 11$ અને $(gof)(5) = g(f(5)) = g(5) = 11$.

$gof : \{2, 3, 4, 5\} \to \{7, 11, 15\}$ વિધેય મળે છે.

ઉદાહરણ 16 : જો $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ અને $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ એ $f(x) = \cos x$ અને $g(x) = 3x^2$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત હોય, તો સાબિત કરો કે $gof \neq fog$.

નોંધ : પ્રત્યેક $x \in A$ માટે $f(x) = g(x)$ તો $f : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$, $g : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ સમાન વિધેય થાય.

ઉકેલ : અહીં આપણી પાસે, $(gof)(x) = g(f(x)) = g(\cos x) = 3(\cos x)^2 = 3\cos^2 x$.

આ જ પ્રમાણે, $(fog)(x) = f(g(x)) = f(3x^2) = \cos(3x^2)$.

નોંધ કરો કે $x = 0$ માટે $3\cos^2 x \neq \cos 3x^2$. તેથી, $gof \neq fog$.

ઉદાહરણ 17 : જો વિધેય $f : \mathbf{R} - \left\{\frac{7}{5}\right\} \to \mathbf{R} - \left\{\frac{3}{5}\right\}$, $f(x) = \frac{3x+4}{5x-7}$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત હોય અને વિધેય $g : \mathbf{R} - \left\{\frac{3}{5}\right\} \to \mathbf{R} - \left\{\frac{7}{5}\right\}$, $g(x) = \frac{7x+4}{5x-3}$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત હોય, તો સાબિત કે $fog = I_A$ અને $gof = I_B$, જ્યાં, $A = \mathbf{R} - \left\{\frac{3}{5}\right\}$, $B = \mathbf{R} - \left\{\frac{7}{5}\right\}$;

$I_A(x) = x$, $\forall x \in A$, $I_B(x) = x$, $\forall x \in B$ ને અનુક્રમે ગણ A અને ગણ B પરનાં એકમ (તદેવ) વિધેયો કહે છે.

ઉકેલ : અહીં આપણી પાસે,

$$(gof)(x) = g\left(\frac{3x+4}{5x-7}\right) = \frac{7\left(\frac{3x+4}{5x-7}\right)+4}{5\left(\frac{3x+4}{5x-7}\right)-3} = \frac{21x+28+20x-28}{15x+20-15x+21} = \frac{41x}{41} = x$$

આ જ પ્રમાણે, $(fog)(x) = f\left(\frac{7x+4}{5x-3}\right) = \frac{3\left(\frac{7x+4}{5x-3}\right)+4}{5\left(\frac{7x+4}{5x-3}\right)-7} = \frac{21x+12+20x-12}{35x+20-35x+21} = \frac{41x}{41} = x$

આમ, $(gof)(x) = x, \forall x \in B$ અને $(fog)(x) = x, \forall x \in A$.

આ પરિણામ સૂચવે છે કે $gof = I_B$ અને $fog = I_A$.

ઉદાહરણ 18 : સાબિત કરો કે જો $f : A \to B$ અને $g : B \to C$ એક-એક હોય, તો $gof : A \to C$ પણ એક-એક છે.

ઉકેલ : ધારો કે $(gof)(x_1) = (gof)(x_2)$, $x_1, x_2 \in A$

$\therefore \quad g(f(x_1)) = g(f(x_2))$

$\therefore \quad f(x_1) = f(x_2)$ (કારણ કે g એક-એક છે.)

$\therefore \quad x_1 = x_2$ (કારણ કે f એક-એક છે.)

આમ, gof એક-એક છે.

ઉદાહરણ 19 : જો $f : A \to B$ અને $g : B \to C$ વ્યાપ્ત હોય, તો સાબિત કરો કે $gof : A \to C$ પણ વ્યાપ્ત છે.

ઉકેલ : g ને અંતર્ગત કોઈ પણ ઘટક $z \in C$ ને સંગત z નું એક પૂર્વ પ્રતિબિંબ $y \in B$ મળે, જેથી $g(y) = z$, કારણ કે g વ્યાપ્ત છે. આ જ પ્રમાણે $y \in B$ ને સંગત A માં એક ઘટક x મળે, જેથી $f(x) = y$, કારણ કે f વ્યાપ્ત છે.

આમ, $(gof)(x) = g(f(x)) = g(y) = z$

આથી પ્રત્યેક, $z \in C$ ને સંગત $x \in A$ મળે જેથી $(gof)(x) = z$.

આ પરથી એ સિદ્ધ થાય છે કે gof વ્યાપ્ત છે.

ઉદાહરણ 20 : એવાં બે વિધેયો f અને g નો વિચાર કરો કે, જેથી gof વ્યાખ્યાયિત હોય અને એક-એક હોય. શું f અને g બંને એક-એક હોય તે જરૂરી છે ?

ઉકેલ : વિધેય $f : \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ એ $f(x) = x, \forall x$ અને

$g : \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \to \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ એ $x = 1, 2, 3, 4$ માટે $g(x) = x$ અને $g(5) = g(6) = 5$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત છે. હવે, $(gof)(x) = x, \forall x$. આ બતાવે છે કે gof એક-એક છે. પરંતુ સ્પષ્ટપણે g એક-એક નથી.

ઉદાહરણ 21 : જો gof વ્યાપ્ત હોય તો f અને g બંને વ્યાપ્ત હોય તે જરૂરી છે ?

ઉકેલ : વિધેય $f : \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4\}$, $g = \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3\}$ અને $f(1) = 1, f(2) = 2, f(3) = f(4) = 3, g(1) = 1, g(2) = 2$ અને $g(3) = g(4) = 3$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત હોય, તો જોઈ શકાય છે કે gof વ્યાપ્ત છે, પરંતુ f વ્યાપ્ત નથી.

નોંધ : સામાન્ય રીતે ચકાસી શકાય છે કે જો gof એક-એક હોય તો f એક-એક હોય છે. આ જ પ્રમાણે gof વ્યાપ્ત હોય તો g વ્યાપ્ત હોય છે.

હવે આપણે આ વિભાગના પ્રારંભમાં બોર્ડની પરીક્ષાના સંદર્ભમાં વર્ણવેલ વિધેયો f અને g નો વિગતે વિચાર કરીશું. બોર્ડની ધોરણ X ની પરીક્ષા આપનારા પ્રત્યેક વિદ્યાર્થીને વિધેય f ની અંતર્ગત એક પરીક્ષાર્થી-ક્રમાંક ફાળવવામાં આવે છે અને વિધેય g ની અંતર્ગત પ્રત્યેક પરીક્ષાર્થી-ક્રમાંકને સંગત એક ગુપ્ત સાંકેતિક ક્રમાંક આપવામાં આવે છે. ઉત્તરવહીઓની ચકાસણી પછી પરીક્ષક પ્રત્યેક મૂલ્યાંકન કરેલી ઉત્તરવહી પર ગુપ્ત સાંકેતિક ક્રમાંકની સામે મેળવેલા ગુણ લખીને બોર્ડના કાર્યાલયમાં રજૂ કરે છે. બોર્ડના અધિકારી, g ની વ્યસ્ત પ્રક્રિયા દ્વારા, પ્રત્યેક ગુપ્ત સાંકેતિક ક્રમાંકને બદલીને ફરીથી સંગત પરીક્ષાર્થી-ક્રમાંક પ્રદાન કરે છે, અને આ પ્રકારે મેળવેલા ગુણ ગુપ્ત સાંકેતિક ક્રમાંકને બદલે સીધા પરીક્ષાર્થી-ક્રમાંક સાથે જોડાઈ જાય છે. ફરીથી, fની વ્યસ્ત પ્રક્રિયા દ્વારા પ્રત્યેક પરીક્ષાર્થી-ક્રમાંકને એ જ પરીક્ષાર્થી-ક્રમાંકવાળા વિદ્યાર્થી સાથે પરિવર્તિત કરવામાં આવે છે. આનાથી મેળવેલા ગુણ સીધા જ સંબંધિત વિદ્યાર્થીના નામે સંકળાઈ જાય છે. આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે f તથા g નું સંયોજન gof પ્રાપ્ત કરતી વખતે, પહેલાં f અને પછી g નો ઉપયોગ થાય છે, જ્યારે સંયોજન gof ની વ્યસ્ત પ્રક્રિયામાં, પહેલાં g ની વ્યસ્ત પ્રક્રિયા કરવામાં આવે છે અને ત્યાર બાદ fની વ્યસ્ત પ્રક્રિયા કરવામાં આવે છે.

ઉદાહરણ 22 : $f : \{1, 2, 3\} \to \{a, b, c\}$, $f(1) = a$, $f(2) = b$ અને $f(3) = c$ દ્વારા એક-એક અને વ્યાપ્ત વિધેય વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવેલ છે. સાબિત કરો કે એક વિધેય $g : \{a, b, c\} \to \{1, 2, 3\}$ અસ્તિત્વ ધરાવે છે કે જેથી $gof = I_X$ અને $fog = I_Y$, જ્યાં $X = \{1, 2, 3\}$ અને $Y = \{a, b, c\}$.

ઉકેલ : ધારો કે વિધેય $g : \{a, b, c\} \to \{1, 2, 3\}$ એ $g(a) = 1$, $g(b) = 2$ અને $g(c) = 3$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત છે. હવે, એ ચકાસવું ઘણું સરળ છે કે સંયોજિત વિધેય $gof = I_X$ એ X પરનું તદેવ વિધેય છે અને સંયોજિત વિધેય $fog = I_Y$ એ Y પરનું તદેવ વિધેય છે.

નોંધ : એક રસપ્રદ તથ્ય નોંધી શકીએ કે ઉપર આપેલ ઉદાહરણમાં વર્ણવેલ પરિણામ કોઈ પણ સ્વૈર એક-એક અને વ્યાપ્ત વિધેય $f : X \to Y$ માટે સત્ય છે.

કેવળ આ જ નહિ, તેનું પ્રતીપ પણ સત્ય છે, એટલે કે જો $f : X \to Y$ એવું વિધેય હોય કે જેને સંગત વિધેય $g : Y \to X$ મળે કે જેથી $gof = I_X$ અને $fog = I_Y$, તો f એક-એક અને વ્યાપ્ત વિધેય હોય છે.

ઉપર્યુક્ત ચર્ચા, ઉદાહરણ 22 તથા નોંધ નીચે આપેલ વ્યાખ્યા તરફ દોરી જાય છે.

વ્યાખ્યા 9 : જો એવું વિધેય $g : Y \to X$ અસ્તિત્વ ધરાવે કે જેથી $gof = I_X$ અને $fog = I_Y$, તો વિધેય $f : X \to Y$ ને વ્યસ્તસંપન્ન વિધેય કહે છે અને વિધેય g ને વિધેય f નું પ્રતિવિધેય કહે છે અને તેને f^{-1} તરીકે દર્શાવાય છે.

આમ, જો વિધેય f વ્યસ્તસંપન્ન હોય, તો f એક-એક અને વ્યાપ્ત વિધેય હોય તથા એથી ઊલટું, જો વિધેય f એક-એક અને વ્યાપ્ત હોય તો f વ્યસ્તસંપન્ન પણ હોય. ખાસ કરીને જ્યારે fનું પ્રતિવિધેય શોધવાનું જરૂરી ન હોય ત્યારે આ તથ્ય વિધેય f ને એક-એક અને વ્યાપ્ત સાબિત કરીને, તેને વ્યસ્તસંપન્ન પુરવાર કરવામાં મહત્ત્વપૂર્ણ રીતે ઉપયોગી થાય છે.

ઉદાહરણ 23 : ધારો કે, $f : \mathbf{N} \to Y$ એ $f(x) = 4x + 3$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેય છે, જ્યાં $Y = \{y \in \mathbf{N} : \text{કોઈક } x \in \mathbf{N} \text{ માટે } y = 4x + 3\}$. સાબિત કરો કે f વ્યસ્તસંપન્ન છે. આ વિધેયનું પ્રતિવિધેય શોધો.

ઉકેલ : Y ના કોઈ યથેચ્છ ઘટક y નો વિચાર કરો. Y ની વ્યાખ્યા અનુસાર, પ્રદેશ **N** ના કોઈક x માટે $y = 4x + 3$. આ દર્શાવે છે કે $x = \frac{y-3}{4}$. હવે, $g(y) = \frac{y-3}{4}$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેય $g : Y \to \mathbf{N}$ લો.

તેથી, $(gof)(x) = g(f(x)) = g(4x + 3) = \frac{4x+3-3}{4} = x$

અને $(fog)(y) = f(g(y)) = f\left(\frac{y-3}{4}\right) = \frac{4(y-3)}{4} + 3 = y - 3 + 3 = y$.

નોંધ : $\frac{y-3}{4} \in \text{N}$ અને $g : \text{N} \to \text{Y}$ વિધેય છે.

આ દર્શાવે છે કે $gof = \text{I}_\text{N}$ અને $fog = \text{I}_\text{Y}$, આનો અર્થ એ છે કે f વ્યસ્તસંપન્ન છે અને g એ f નું પ્રતિવિધેય છે.

ઉદાહરણ 24 : ધારો કે $\text{Y} = \{n^2 : n \in \mathbf{N}\} \subset \mathbf{N}$. વિધેય $f : \mathbf{N} \to \text{Y}$, $f(n) = n^2$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત કરો. સાબિત કરો કે f વ્યસ્તસંપન્ન છે. fનું પ્રતિવિધેય શોધો.

ઉકેલ : Y નો યથેચ્છ ઘટક y એ કોઈક $n \in \mathbf{N}$ માટે n^2 સ્વરૂપનો છે. આનો અર્થ એ છે કે $n = \sqrt{y} \in \mathbf{N}$. વિધેય $g : \text{Y} \to \mathbf{N}$, $g(y) = \sqrt{y}$ તરીકે વ્યાખ્યાયિત છે.

હવે, $(gof)(n) = g(n^2) = \sqrt{n^2} = n$ અને $(fog)(y) = f\left(\sqrt{y}\right) = \left(\sqrt{y}\right)^2 = y$.

આ દર્શાવે છે કે $gof = \text{I}_\text{N}$ અને $fog = \text{I}_\text{Y}$.

તેથી, f વ્યસ્તસંપન્ન છે અને $f^{-1} = g$.

ઉદાહરણ 25 : વિધેય $f : \mathbf{N} \to \text{S}$, $f(x) = 4x^2 + 12x + 15$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત છે. સાબિત કરો કે $f : \mathbf{N} \to \text{S}$ એ વ્યસ્તસંપન્ન છે, જ્યાં S એ fનો વિસ્તાર છે. fનું પ્રતિવિધેય શોધો.

ઉકેલ : fના વિસ્તારનો કોઈ યથેચ્છ ઘટક y લો. તેથી, કોઈક $x \in \mathbf{N}$ માટે $y = 4x^2 + 12x + 15$. તેથી $y = (2x + 3)^2 + 6$.

તેથી $x = \frac{\sqrt{y-6} - 3}{2}$ મળે છે, કારણ કે $y \geq 6$ તથા $x \in \mathbf{N}$.

ચાલો આપણે, વિધેય $g : \text{S} \to \mathbf{N}$ ને $g(y) = \frac{\sqrt{y-6} - 3}{2}$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત કરીએ.

$$\begin{aligned}
\text{હવે, } (gof)(x) = g(f(x)) &= g(4x^2 + 12x + 15)\\
&= g((2x + 3)^2 + 6)\\
&= \frac{\sqrt{(2x+3)^2+6-6} - 3}{2}\\
&= \frac{2x+3-3}{2}\\
&= x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{અને } (fog)(y) = f\left(\frac{\sqrt{y-6}-3}{2}\right) &= \left(2\left(\frac{\sqrt{y-6}-3}{2}\right) + 3\right)^2 + 6\\
&= \left(\sqrt{y-6}-3+3\right)^2 + 6\\
&= \left(\sqrt{y-6}\right)^2 + 6\\
&= y - 6 + 6 = y
\end{aligned}$$

તેથી, $gof = \text{I}_\text{N}$ અને $fog = \text{I}_\text{S}$.

આનો અર્થ એ થયો કે f વ્યસ્તસંપન્ન છે અને $f^{-1} = g$.

ઉદાહરણ 26 : વિધેયો $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, $g : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ અને $h : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ એ $f(x) = 2x$, $g(y) = 3y + 4$ અને $h(z) = sin\ z$, $\forall x, y, z \in \mathbf{N}$, દ્વારા વ્યાખ્યાયિત છે. સાબિત કરો કે $ho(gof) = (hog)of$.

ઉકેલ : અહીં, પ્રત્યેક $x \in \mathbf{N}$ માટે,

$$\begin{aligned}(ho(gof))(x) = h((gof)(x)) = h(g(f(x))) &= h(g(2x))\\ &= h(3(2x) + 4)\\ &= h(6x + 4)\\ &= sin(6x + 4)\end{aligned}$$

તથા
$$\begin{aligned}((hog)of)(x) = (hog)(f(x)) = (hog)(2x) &= h(g(2x))\\ &= h(3(2x) + 4)\\ &= h(6x + 4)\\ &= sin(6x + 4)\end{aligned}$$

તેથી, $ho(gof) = (hog)of$.

આ પરિણામ વ્યાપક સ્વરૂપમાં પણ સત્ય છે.

પ્રમેય 1 : ***જો $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ અને $h : Z \to S$ વિધેયો હોય, તો $ho(gof) = (hog)of$.***

સાબિતી : અહીં, આપણી પાસે,

$$(ho(gof))(x) = h((gof)(x)) = h(g(f(x))),\ \forall x \in X$$

અને $((hog)of)(x) = (hog)(f(x)) = h(g(f(x)))$, $\forall x \in X$

તેથી, $ho(gof) = (hog)of$.

ઉદાહરણ 27 : વિધેયો $f : \{1, 2, 3\} \to \{a, b, c\}$ અને $g : \{a, b, c\} \to$ {સફરજન, દડો, બિલાડી} એ $f(1) = a$, $f(2) = b$, $f(3) = c$, $g(a) =$ સફરજન, $g(b) =$ દડો અને $g(c) =$ બિલાડી દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેયો છે. સાબિત કરો કે f, g અને gof વ્યસ્તસંપન્ન વિધેયો છે. f^{-1}, g^{-1} અને $(gof)^{-1}$ શોધો અને સાબિત કરો કે $(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$.

ઉકેલ : આપણે અહીં એ નોંધીએ કે વિધેયો f અને g એક-એક અને વ્યાપ્ત વિધેયો છે. વિધેયો $f^{-1} : \{a, b, c\} \to \{1, 2, 3\}$ અને g^{-1} : {સફરજન, દડો, બિલાડી} $\to \{a, b, c\}$ એ $f^{-1}(a) = 1$, $f^{-1}(b) = 2$ અને $f^{-1}(c) = 3$, g^{-1} (સફરજન) $= a$, g^{-1} (દડો) $= b$ અને g^{-1} (બિલાડી) $= c$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત છે. હવે, એ ચકાસવું સરળ છે કે $f^{-1}of = I_{\{1, 2, 3\}}$ અને $fof^{-1} = I_{\{a, b, c\}}$ અને $g^{-1}og = I_{\{a, b, c\}}$ તથા $gog^{-1} = I_D$, જ્યાં, D = {સફરજન, દડો, બિલાડી}.

હવે, $gof : \{1, 2, 3\} \to$ {સફરજન, દડો, બિલાડી} એ $(gof)(1) =$ સફરજન, $(gof)(2) =$ દડો, $(gof)(3) =$ બિલાડી દ્વારા વ્યાખ્યાયિત છે. હવે, આપણે વ્યાખ્યાયિત કરી શકીએ કે,

$(gof)^{-1}$: {સફરજન, દડો, બિલાડી} $\to \{1, 2, 3\}$, $(gof)^{-1}$ (સફરજન) $= 1$, $(gof)^{-1}$ (દડો) $= 2$, $(gof)^{-1}$ (બિલાડી) $= 3$. એ જોવું સરળ છે કે $(gof)\,o\,(gof)^{-1} = I_D$ તથા $(gof)^{-1}\,o\,(gof) = I_{\{1, 2, 3\}}$. આમ, આપણે જોયું કે f, g અને gof વ્યસ્તસંપન્ન છે.

હવે, $(f^{-1}og^{-1})$ (સફરજન) $= f^{-1}(g^{-1}$(સફરજન)$) = f^{-1}(a) = 1 = (gof)^{-1}$(સફરજન)

$(f^{-1}og^{-1})$ (દડો) $= f^{-1}(g^{-1}$(દડો)$) = f^{-1}(b) = 2 = (gof)^{-1}$(દડો) અને

$(f^{-1}og^{-1})$ (બિલાડી) $= f^{-1}(g^{-1}$(બિલાડી)$) = f^{-1}(c) = 3 = (gof)^{-1}$(બિલાડી)

આમ, $(gof)^{-1} : D \to \{1, 2, 3\}$, $f^{-1}og^{-1} : D \to \{1, 2, 3\}$ તથા $(gof)^{-1}(x) = (f^{-1}og^{-1})(x)$; $\forall x \in D$

તેથી, $(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$

ઉપર્યુક્ત પરિણામ વ્યાપક સ્વરૂપે પણ સત્ય છે.

પ્રમેય 2 : ***ધારો કે વિધેયો $f : X \to Y$ અને $g : Y \to Z$ બે વ્યસ્તસંપન્ન વિધેયો છે, તો વિધેય gof પણ વ્યસ્તસંપન્ન છે અને $(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$.***

સાબિતી : વિધેય gof વ્યસ્તસંપન્ન છે અને $(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$, સાબિત કરવા માટે $(f^{-1}og^{-1})\ o\ (gof) = I_X$ અને $(gof)\ o\ (f^{-1}og^{-1}) = I_Z$ બતાવવું પર્યાપ્ત છે.

હવે, $(f^{-1}og^{-1})\ o\ (gof) = ((f^{-1}og^{-1})\ og)\ of$ (પ્રમેય 1 પરથી)

$= (f^{-1}o\ (g^{-1}og))\ of$ (પ્રમેય 1 પરથી)

$= (f^{-1}oI_Y)\ of$ (g^{-1} ની વ્યાખ્યા પરથી)

$= I_X$

આ જ પ્રમાણે, $(gof)\ o\ (f^{-1}og^{-1}) = I_Z$ બતાવી શકાય.

ઉદાહરણ 28 : ધારો કે $S = \{1, 2, 3\}$. નીચે આપેલ વિધેય $f : S \to S$ નો વ્યસ્ત મળશે કે નહિ તે નક્કી કરો અને જો f^{-1} નું અસ્તિત્વ હોય તો તે શોધો.

નોંધ : અત્રે અને અન્યત્ર અગાઉ પણ આપણે સ્વીકારી લીધું છે કે વિધેયનો વ્યસ્ત અનન્ય છે.

(a) $f = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ (b) $f = \{(1, 2), (2, 1), (3, 1)\}$ (c) $f = \{(1, 3), (3, 2), (2, 1)\}$

ઉકેલ : (a) વિધેય f એ એક-એક અને વ્યાપ્ત છે તે સ્પષ્ટ છે. તેથી f વ્યસ્તસંપન્ન છે અને $f^{-1} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\} = f$ જ છે.

(b) $f(2) = 1 = f(3)$ હોવાથી f એક-એક નથી. તેથી વિધેય f વ્યસ્તસંપન્ન નથી.

(c) વિધેય f એ એક-એક અને વ્યાપ્ત છે તે જોવું સરળ છે. તેથી f વ્યસ્તસંપન્ન છે અને $f^{-1} = \{(3, 1), (2, 3), (1, 2)\}$.

સ્વાધ્યાય 1.3

1. ધારો કે $f = \{1, 3, 4\} \to \{1, 2, 5\}$ અને $g = \{1, 2, 5\} \to \{1, 3\}$ એ $f = \{(1, 2), (3, 5), (4, 1)\}$ અને $g = \{(1, 3), (2, 3), (5, 1)\}$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેયો છે. gof શોધો.

2. ધારો કે વિધેયો f, g અને h એ **R** થી **R** આપેલાં છે. સાબિત કરો કે, $(f + g)oh = foh + goh$

$(f \cdot g)oh = (foh) \cdot (goh)$

3. gof અને fog શોધો : (i) $f(x) = |x|$ અને $g(x) = |5x - 2|$

(ii) $f(x) = 8x^3$ અને $g(x) = x^{\frac{1}{3}}$

4. જો $f(x) = \dfrac{4x+3}{6x-4}$, $x \neq \dfrac{2}{3}$ હોય, તો બધા જ $x \neq \dfrac{2}{3}$ માટે સાબિત કરો કે $(fof)(x) = x$. f નું પ્રતિવિધેય શું છે ?

5. નીચે આપેલાં વિધેયોનાં પ્રતિવિધેય મળી શકશે ? કારણ સહિત નિર્ણય કરો.

(i) $f : \{1, 2, 3, 4\} \to \{10\}$, $f : \{(1, 10), (2, 10), (3, 10), (4, 10)\}$

(ii) $g : \{5, 6, 7, 8\} \to \{1, 2, 3, 4\}$, $g : \{(5, 4), (6, 3), (7, 4), (8, 2)\}$

(iii) $h : \{2, 3, 4, 5\} \to \{7, 9, 11, 13\}$, $h : \{(2, 7), (3, 9), (4, 11), (5, 13)\}$

6. સાબિત કરો કે $f : [-1, 1] \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{x+2}$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેય એક-એક છે. વિધેય $f : [-1, 1] \to f$નો વિસ્તાર $f(x) = \dfrac{x}{x+2}$, તો fનું પ્રતિવિધેય શોધો.

સૂચન : f ના વિસ્તારમાં આવેલ y ને સંગત કોઈક $x \in [-1, 1]$ માટે $y = f(x) = \dfrac{x}{x+2}$ એટલે કે, $x = \dfrac{2y}{1-y}$.

7. ધારો કે વિધેય $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 4x + 3$. સાબિત કરો કે f વ્યસ્તસંપન્ન છે. વિધેય fનું પ્રતિવિધેય શોધો.

8. વિધેય $f : \mathbf{R}^+ \to [4, \infty)$, $f(x) = x^2 + 4$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત છે. સાબિત કરો કે f વ્યસ્તસંપન્ન છે અને fનું પ્રતિવિધેય f^{-1} એ $f^{-1}(y) = \sqrt{y-4}$ દ્વારા દર્શાવાય છે. અત્રે, $\mathbf{R}^+$ એ તમામ અનૃણ વાસ્તવિક સંખ્યાઓનો ગણ છે.

9. વિધેય $f : \mathbf{R}^+ \to [-5, \infty)$, $f(x) = 9x^2 + 6x - 5$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત છે. સાબિત કરો કે f વ્યસ્તસંપન્ન છે અને $f^{-1}(y) = \left(\dfrac{\sqrt{y+6}-1}{3}\right)$.

10. વિધેય $f : X \to Y$ વ્યસ્તસંપન્ન છે. સાબિત કરો કે fનું પ્રતિવિધેય અનન્ય છે.

(**સૂચન** : ધારો કે g_1 અને g_2 બંને વિધેય fનાં પ્રતિવિધેયો છે. તેથી પ્રત્યેક $y \in Y$ માટે $(fog_1)(y) = I_Y(y) = (fog_2)(y)$. વિધેય f એક-એક છે, તે સત્યનો ઉપયોગ કરો.

11. ધારો કે $f : \{1, 2, 3\} \to \{a, b, c\}$ એ $f(1) = a$, $f(2) = b$ અને $f(3) = c$ દ્વારા આપેલ છે. f^{-1} શોધો અને સાબિત કરો કે $(f^{-1})^{-1} = f$.

12. વિધેય $f : X \to Y$ એ વ્યસ્તસંપન્ન છે. સાબિત કરો કે f^{-1} નું પ્રતિવિધેય f છે, એટલે કે $(f^{-1})^{-1} = f$.

પ્રશ્નો 13 તથા 14 માં વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલ વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

13. જો વિધેય $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ એ $f(x) = (3 - x^3)^{\frac{1}{3}}$ દ્વારા આપેલ હોય, તો $(fof)(x) =$ .... છે.

(A) $x^{\frac{1}{3}}$ (B) x^3 (C) x (D) $(3 - x^2)$

14. વિધેય $f : R - \left\{-\frac{4}{3}\right\} \to R$, $f(x) = \dfrac{4x}{3x+4}$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત છે. fનું પ્રતિવિધેય,

વિધેય g : fનો વિસ્તાર $\to R - \left\{-\frac{4}{3}\right\}$ એ .... દ્વારા મળે છે.

(A) $g(y) = \dfrac{3y}{3-4y}$ (B) $g(y) = \dfrac{4y}{4-3y}$ (C) $g(y) = \dfrac{4y}{3-4y}$ (D) $g(y) = \dfrac{3y}{4-3y}$

1.5 દ્વિક્ક્રિયાઓ

શાળાના દિવસોથી જ તમે ચાર મૂળભૂત પ્રક્રિયાઓ મુખ્યત્વે સરવાળો, બાદબાકી, ગુણાકાર અને ભાગાકારથી પરિચિત છો. આ પ્રક્રિયાઓની મુખ્ય વિશેષતા એ છે કે, આપણે આપેલ કોઈ પણ બે સંખ્યાઓ a અને b ને અનન્ય સંખ્યા $a + b$ અથવા $a - b$ અથવા ab અથવા $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$ સાથે સંગત કરી શકીએ છીએ. આપણે નોંધીએ કે એક સમયે, માત્ર બે સંખ્યાઓનો જ સરવાળો અથવા ગુણાકાર કરી શકાય છે, જ્યારે ત્રણ સંખ્યાઓનો સરવાળો કરવાની જરૂરિયાત હોય ત્યારે પહેલા આપણે બે સંખ્યાઓનો સરવાળો કરીએ છીએ અને પછી મળતી સંખ્યામાં ત્રીજી સંખ્યાને ઉમેરીએ છીએ. આમ સરવાળો, ગુણાકાર, બાદબાકી અને ભાગાકાર એ *દ્વિક્ક્રિયા* (***Binary Operations***) નાં ઉદાહરણો છે, કારણ કે 'દ્વિક્'નો અર્થ થાય છે બે. જો આપણે જેમાં આ ચારેય પ્રક્રિયાઓ આવી જતી હોય એવી વ્યાપક વ્યાખ્યાની ઈચ્છા રાખતા હોઈએ, તો સંખ્યાઓના ગણની જગ્યાએ કોઈ યથેચ્છ ગણ X લેવો જોઈએ અને પછી વ્યાપક દ્વિક્ક્રિયા એ બીજું કંઈ જ નથી, પરંતુ X ના બે ઘટકો a અને b ને X ના જ કોઈ નિશ્ચિત ઘટક સાથે સંગત કરવાની ક્રિયા છે. આ પરથી નીચે આપેલ વ્યાપક વ્યાખ્યા મળે છે :

વ્યાખ્યા 10 : *ગણ A ઉપર દ્વિક્ક્રિયા $*$ એ વિધેય $* : A \times A \to A$ છે. આપણે $*(a, b)$ ને $a * b$ વડે દર્શાવીએ છીએ.*

ઉદાહરણ 29 : સાબિત કરો કે સરવાળો, બાદબાકી અને ગુણાકાર $\mathbf{R}$ પર દ્વિક્રિયાઓ છે, પરંતુ ભાગાકાર એ $\mathbf{R}$ પર દ્વિક્રિયા નથી. તદુપરાંત, સાબિત કરો કે ભાગાકાર એ શૂન્યેતર વાસ્તવિક સંખ્યાઓના ગણ $\mathbf{R}^*$ પર દ્વિક્રિયા છે.

ઉકેલ : દ્વિક્રિયાઓ $+ : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ એ $(a, b) \to a + b$ દ્વારા રજૂ કરવામાં આવે છે.

$- : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ એ $(a, b) \to a - b$ સ્વરૂપે આપવામાં આવે છે.

$\times : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ એ $(a, b) \to ab$ દ્વારા દર્શાવવામાં આવે છે.

'+', '–' અને '×' વિધેયો હોવાથી, તે $\mathbf{R}$ પરની દ્વિક્રિયાઓ છે.

પરંતુ $\div : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $(a, b) \to \frac{a}{b}$ દ્વારા આપી શકાય નહિ. તે વિધેય નથી અને તેથી તે દ્વિક્રિયા નથી, કારણ કે $b = 0$ માટે $\frac{a}{b}$ વ્યાખ્યાયિત નથી.

તેમ છતાં, $\div : \mathbf{R}^* \times \mathbf{R}^* \to \mathbf{R}^*$, $(a, b) \to \frac{a}{b}$ દ્વારા આપવામાં આવે છે અને તેથી તે $\mathbf{R}^*$ પર દ્વિક્રિયા છે.

ઉદાહરણ 30 : સાબિત કરો કે બાદબાકી અને ભાગાકાર $\mathbf{N}$ પર દ્વિક્રિયાઓ નથી.

ઉકેલ : અહીં, $- : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ એ $(a, b) \to a - b$ દ્વારા આપેલ હોય, તો તે દ્વિક્રિયા નથી કારણ કે '–' હેઠળ $(3, 5)$ નું પ્રતિબિંબ $3 - 5 = -2 \notin \mathbf{N}$. આ જ પ્રમાણે, $\div : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, એ $(a, b) \to a \div b$ એ દ્વિક્રિયા નથી કારણ કે $\div$ હેઠળ $(3, 5)$ નું પ્રતિબિંબ $3 \div 5 = \frac{3}{5} \notin \mathbf{N}$.

ઉદાહરણ 31 : સાબિત કરો કે $* : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $(a, b) \to a + 4b^2$ દ્વારા આપેલ ક્રિયા હોય તો તે દ્વિક્રિયા છે.

ઉકેલ : $*$ $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ ની પ્રત્યેક જોડ (a, b) ને $\mathbf{R}$ ના અનન્ય ઘટક $a + 4b^2$ સાથે સાંકળે છે. તેથી $*$ એ $\mathbf{R}$ પર દ્વિક્રિયા છે.

ઉદાહરણ 32 : ધારો કે P એ આપેલ ગણ X ના તમામ ઉપગણોનો ગણ છે. સાબિત કરો કે $\cup : \mathrm{P} \times \mathrm{P} \to \mathrm{P}$ એ $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \to \mathrm{A} \cup \mathrm{B}$ અને $\cap : \mathrm{P} \times \mathrm{P} \to \mathrm{P}$ એ $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \to \mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ દ્વારા આપેલ ક્રિયાઓ ગણ P પર દ્વિક્રિયાઓ છે.

ઉકેલ : યોગ ક્રિયા $\cup$ પ્રત્યેક જોડ $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathrm{P} \times \mathrm{P}$ ને P ના અનન્ય ઘટક $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$ સાથે સંગત કરે છે. આથી, $\cup$ એ P માં દ્વિક્રિયા છે. આ જ પ્રમાણે, છેદ ક્રિયા $\cap$ એ $\mathrm{P} \times \mathrm{P}$ ની પ્રત્યેક જોડ (A, B) ને P ના અનન્ય ઘટક $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ સાથે સંગત કરે છે, આથી $\cap$ એ P પર દ્વિક્રિયા છે.

ઉદાહરણ 33 : સાબિત કરો કે $\vee : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ એ $(a, b) \to \max\{a, b\}$ અને $\wedge : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ એ $(a, b) \to \min\{a, b\}$ દ્વારા આપેલ વિધેયો દ્વિક્રિયાઓ છે.

ઉકેલ : અહીં, વિધેય $\vee$, $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ ની પ્રત્યેક જોડ (a, b) ને સંગત a અને b પૈકીના મહત્તમ ઘટક તરીકે અનન્ય વાસ્તવિક સંખ્યા આપે છે. આમ, $\vee$ એ દ્વિક્રિયા છે. આ જ પ્રકારની દલીલોનો ઉપયોગ કરીને, કહી શકાય કે $\wedge$ પણ દ્વિક્રિયા છે. વળી, $\vee(a, a) = \wedge(a, a) = a$

નોંધ : $\vee(4, 7) = 7$, $\vee(4, -7) = 4$, $\wedge(4, 7) = 4$ અને $\wedge(4, -7) = -7$.

જ્યારે કોઈ ગણ A માં ઘટકોની સંખ્યા સાન્ત હોય, ત્યારે આપણે ગણ A પરની દ્વિક્રિયા $*$ ને કોષ્ટક દ્વારા દર્શાવીએ છીએ. તેને $*$ નું દ્વિક્રિયા કોષ્ટક કહે છે. ઉદાહરણ તરીકે $\mathrm{A} = \{1, 2, 3\}$ લો. ઉદાહરણ 33 માં ગણ A પર વ્યાખ્યાયિત ક્રિયા $\vee$ ને આગળ આપેલ દ્વિક્રિયા કોષ્ટક (કોષ્ટક 1.1) સ્વરૂપે દર્શાવી શકાય. અહીં $\vee(1, 3) = 3$, $\vee(2, 3) = 3$, $\vee(1, 2) = 2$ થશે.

કોષ્ટક 1.1

$\vee$	1	2	3
1	1	2	3
2	2	2	3
3	3	3	3

અહીં દ્વિક્રિયા કોષ્ટકમાં 3 હાર અને 3 સ્તંભ છે. તેનામાં (i, j) મો ઘટક ગણ A ની i-મી હાર અને j-મા સ્તંભના ઘટકો પૈકી મહત્તમ ઘટક છે. આનું વ્યાપક સ્વરૂપ કોઈ પણ સામાન્ય દ્વિક્રિયા $* : A \times A \to A$ માટે લખી શકાય છે. જો $A = \{a_1, a_2,..., a_n\}$ હોય તો દ્વિક્રિયા કોષ્ટક n હાર અને n સ્તંભ ધરાવશે. તેમાં (i, j) મો ઘટક $a_i * a_j$ હશે. એથી ઊલટું, n હાર અને n સ્તંભ ધરાવતું ગમે તે દ્વિક્રિયા કોષ્ટક હોય તથા પ્રત્યેક ઘટક એ $A = \{a_1, a_2,..., a_n\}$ પૈકીનો કોઈ ઘટક હોય, તો આપણે દ્વિક્રિયા

$* : A \times A \to A$, $a_i * a_j$ = દ્વિક્રિયા કોષ્ટકની i મી હાર અને j-મા સ્તંભના ઘટક દ્વારા વ્યાખ્યાયિત કરી શકીએ.

આપણે એ પણ નોંધ કરીએ કે 3 અને 4 નો કોઈ પણ ક્રમમાં સરવાળો કરીએ તો પરિણામ સમાન જ મળે છે, એટલે કે $3 + 4 = 4 + 3$. પરંતુ 4 અને 3 ની ભિન્ન ક્રમમાં બાદબાકી કરતાં ભિન્ન પરિણામો મળે છે, એટલે કે $3 - 4 \neq 4 - 3$. આ જ પ્રમાણે, 3 અને 4 ના ગુણાકારના કિસ્સામાં, ક્રમનું મહત્ત્વ નથી, પરંતુ 3 અને 4 નો ભાગાકાર ભિન્ન ક્રમમાં ભિન્ન પરિણામ આપે છે. આમ, 3 અને 4 નો 'સરવાળો' અને 'ગુણાકાર' અર્થપૂર્ણ છે, પરંતુ 3 અને 4 ની 'બાદબાકી' અને 'ભાગાકાર' અર્થહીન છે. બાદબાકી અને ભાગાકાર માટે આપણે એમ લખીશું '3 ને 4 માંથી બાદ કરતાં', '4 ને 3 માંથી બાદ કરતાં', '3 નો 4 વડે ભાગાકાર કરો' અથવા '4 નો 3 વડે ભાગાકાર' કરો.

આ હકીકત નીચે આપેલ વ્યાખ્યા તરફ દોરી જાય છે :

વ્યાખ્યા 11 : જો પ્રત્યેક $a, b \in X$ માટે $a * b = b * a$ હોય, તો ગણ X પરની દ્વિક્રિયા $*$ સમક્રમી કહેવાય છે.

ઉદાહરણ 34 : સાબિત કરો કે $+ : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ અને $\times : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ સમક્રમી દ્વિક્રિયાઓ છે, પરંતુ $- : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ અને $\div : \mathbf{R}^* \times \mathbf{R}^* \to \mathbf{R}^*$ સમક્રમી નથી.

ઉકેલ : $a + b = b + a$ અને $a \times b = b \times a$; $\forall a, b \in \mathbf{R}$ હોવાથી '+' અને '×' સમક્રમી દ્વિક્રિયાઓ છે. પરંતુ '–' સમક્રમી નથી કારણ કે $3 - 4 \neq 4 - 3$. આ જ પ્રમાણે $3 \div 4 \neq 4 \div 3$ બતાવે છે કે '÷' સમક્રમી નથી.

ઉદાહરણ 35 : સાબિત કરો કે $* : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $a * b = a + 2b$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત દ્વિક્રિયા સમક્રમી નથી.

ઉકેલ : અહીં, $3 * 4 = 3 + 8 = 11$ અને $4 * 3 = 4 + 6 = 10$, પરથી સાબિત થાય છે કે દ્વિક્રિયા $*$ સમક્રમી નથી.

જો આપણે ગણ X ના ત્રણ ઘટકોને X પરની કોઈ દ્વિક્રિયા દ્વારા સાંકળવાનું ઇચ્છતા હોઈએ તો એક સ્વાભાવિક મુશ્કેલી ઊભી થાય છે. પદ $a * b * c$ નો અર્થ $(a * b) * c$ અથવા $a * (b * c)$ થઈ શકે છે અને આ બંને સમાન હોય તે જરૂરી નથી. ઉદાહરણ તરીકે, $(8 - 5) - 2 \neq 8 - (5 - 2)$. તેથી, ત્રણ સંખ્યાઓ 8, 5 અને 2 ના જૂથમાં દ્વિક્રિયા 'બાદબાકી' કરીએ તો એ જ્યાં સુધી કૌંસનો ઉપયોગ ન કરીએ ત્યાં સુધી અર્થહીન છે. પરંતુ સરવાળાની બાબતમાં, $8 + 5 + 2$ નું મૂલ્ય એ જ રહેશે. આપણે તેને $(8 + 5) + 2$ અથવા $8 + (5 + 2)$ તરીકે

દર્શાવીએ તો તે સમાન છે. આમ, 3 અથવા 3 કરતાં વધારે સંખ્યાઓનું જૂથ સરવાળા માટે કૌંસનો ઉપયોગ કર્યા સિવાય પણ અર્થપૂર્ણ છે. આ વિધાન આપણને નીચે આપેલ વ્યાખ્યા તરફ દોરી જાય છે :

વ્યાખ્યા 12 : જો $(a * b) * c = a * (b * c)$, $\forall a, b, c \in \mathbf{A}$ તો દ્વિક્રિયા $* : \mathbf{A} \times \mathbf{A} \to \mathbf{A}$ જૂથના નિયમનું પાલન કરે છે તેમ કહેવાય છે.

ઉદાહરણ 36 : સાબિત કરો કે સરવાળો અને ગુણાકાર **R** પર જૂથના નિયમોનું પાલન કરતી દ્વિક્રિયાઓ છે. પરંતુ બાદબાકી **R** પર જૂથના નિયમોનું પાલન કરતી નથી. ભાગાકાર $\mathbf{R}^*$ પર જૂથના નિયમોનું પાલન કરતો નથી.

ઉકેલ : પ્રત્યેક $a, b, c \in \mathbf{R}$ માટે $(a + b) + c = a + (b + c)$ અને $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ હોવાથી સરવાળો અને ગુણાકાર **R** પર જૂથના નિયમનું પાલન કરે છે. પરંતુ, બાદબાકી અને ભાગાકાર $\mathbf{R}^*$ પર જૂથના નિયમનું પાલન કરતી નથી, કારણ કે $(8 - 5) - 3 \neq 8 - (5 - 3)$ અને $(8 \div 5) \div 3 \neq 8 \div (5 \div 3)$.

ઉદાહરણ 37 : સાબિત કરો કે દ્વિક્રિયા $* : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $a * b = a + 2b$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે, તો તે જૂથના નિયમનું પાલન કરતી નથી.

ઉકેલ : દ્વિક્રિયા * જૂથના નિયમનું પાલન કરતી નથી, કારણ કે

$(8 * 5) * 3 = (8 + 10) * 3 = (8 + 10) + 6 = 24$, પરંતુ

$8 * (5 * 3) = 8 * (5 + 6) = 8 * 11 = 8 + 22 = 30$.

નોંધ : દ્વિક્રિયાનો જૂથનો ગુણધર્મ એ અર્થમાં ખૂબ જ મહત્ત્વનો છે કે, આ દ્વિક્રિયાના ગુણધર્મને આધારે આપણે કહી શકીએ કે $a_1 * a_2 *...* a_n$ સંદિગ્ધ નથી. પરંતુ આ ગુણધર્મની ગેરહાજરીમાં જ્યાં સુધી કૌંસનો ઉપયોગ ન કરીએ ત્યાં સુધી પદ $n \geq 3$ માટે $a_1 * a_2 *...* a_n$ અસ્પષ્ટ છે. યાદ કરો, આગળના વર્ગોમાં જ્યારે બાદબાકી અથવા ભાગાકારની ક્રિયાઓ અથવા એક કરતાં વધારે ક્રિયાઓ આવતી હતી ત્યારે કૌંસનો ઉપયોગ કર્યો હતો.

R પર વ્યાખ્યાયિત દ્વિક્રિયા '+' સાથે સંબંધિત શૂન્યનો એક રસપ્રદ ગુણધર્મ એ છે કે, પ્રત્યેક $a \in$ R માટે $a + 0 = a = 0 + a$, એટલે કે કોઈ પણ સંખ્યામાં શૂન્ય ઉમેરવાથી તે સંખ્યા તેની તે જ રહે છે. પરંતુ ગુણાકારની બાબતમાં, સંખ્યા 1 આ ભૂમિકા ભજવે છે, જેમ કે $a \times 1 = a = 1 \times a$, $\forall a \in \mathbf{R}$. આ તથ્ય નીચે આપેલ વ્યાખ્યા તરફ દોરી જાય છે.

વ્યાખ્યા 13 : જો આપેલ દ્વિક્રિયા $* : \mathbf{A} \times \mathbf{A} \to \mathbf{A}$ માટે કોઈ ઘટક $e \in \mathbf{A}$ અસ્તિત્વ ધરાવે કે જેથી, $a * e = a = e * a$, $\forall a \in \mathbf{R}$ તો ઘટક e ને દ્વિક્રિયા * માટે તટસ્થ ઘટક કહે છે.

ઉદાહરણ 38 : સાબિત કરો કે શૂન્ય એ **R** પર સરવાળા માટે તટસ્થ ઘટક છે અને 1 એ **R** પર ગુણાકાર માટે તટસ્થ ઘટક છે. દ્વિક્રિયાઓ $- : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ અને $\div : \mathbf{R}^* \times \mathbf{R}^* \to \mathbf{R}$ માટે તટસ્થ ઘટકનું અસ્તિત્વ નથી.

ઉકેલ : પ્રત્યેક $a \in \mathbf{R}$ માટે $a + 0 = a = 0 + a$ અને $a \times 1 = a = 1 \times a$ દર્શાવે છે કે 0 અને 1 અનુક્રમે ક્રિયાઓ '+' અને '×' માટે તટસ્થ ઘટકો છે. વધુમાં, **R** માં કોઈ પણ ઘટક e નથી કે જેથી $a - e = e - a$, $\forall a \in \mathbf{R}$. આ જ પ્રમાણે, આપણે $\mathbf{R}^*$ માં એવો કોઈ પણ ઘટક e નથી શોધી શકતાં કે જેથી, $a \div e = e \div a$, $\forall a \in \mathbf{R}^*$. તેથી, '–' અને '÷' માટે તટસ્થ ઘટકનું અસ્તિત્વ નથી.

નોંધ : **R** પર સરવાળાની દ્વિક્રિયા માટે શૂન્ય તટસ્થ ઘટક છે પરંતુ તે **N** પર સરવાળાની દ્વિક્રિયા માટે તટસ્થ ઘટક નથી, કારણ કે $0 \notin \mathbf{N}$. વાસ્તવમાં **N** પર સરવાળાની દ્વિક્રિયાને તટસ્થ ઘટક નથી.

સરવાળાની દ્વિક્રિયા $+ : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ માટે વધુ એક નોંધનીય હકીકત એ છે કે આપેલ કોઈ પણ $a \in \mathbf{R}$ ને સંગત $-a \in \mathbf{R}$ મળે કે જેથી $a + (-a) = 0$ ('+' માટે એકમ ઘટક) $= (-a) + a$.

આ જ પ્રમાણે, **R** પર ગુણાકારની દ્વિક્રિયા માટે **R** માં આપેલ કોઈ પણ $a \neq 0$ ને સંગત, **R** માં આપણને $\frac{1}{a}$ મળે કે જેથી $a \times \frac{1}{a} = 1$ ('×' માટે એકમ ઘટક) $= \frac{1}{a} \times a$. આ પરિણામ નીચે આપેલ વ્યાખ્યા તરફ દોરી જાય છે :

વ્યાખ્યા 14 : A માં એકમ ઘટક e વાળી દ્વિક્રિયા $* : A \times A \to A$ આપેલ છે. જો A માં એવા ઘટક b નું અસ્તિત્વ હોય કે જેથી $a * b = e = b * a$ થાય તો A ના ઘટક a ને વ્યસ્તસંપન્ન ઘટક કહે છે અને ઘટક b ને a નો વ્યસ્ત કહે છે અને તેને a^{-1} વડે દર્શાવવામાં આવે છે.

ઉદાહરણ 39 : સાબિત કરો કે **R** પર સરવાળાની દ્વિક્રિયા '+' માટે $-a$ એ ઘટક a નો વ્યસ્ત છે તથા ગુણાકારની દ્વિક્રિયા '×' માટે શૂન્યેતર a ને સંગત $\frac{1}{a}$ એ **R** પર ઘટક a નો વ્યસ્ત છે.

ઉકેલ : અહીં, $a + (-a) = a - a = 0$ અને $(-a) + a = 0$, હોવાથી $-a$ એ સરવાળા માટે a નો વ્યસ્ત છે. આ જ પ્રમાણે, $a \neq 0$ માટે, $a \times \frac{1}{a} = 1 = \frac{1}{a} \times a$ છે. તેથી, $\frac{1}{a}$ એ ગુણાકાર માટે a નો વ્યસ્ત છે.

ઉદાહરણ 40 : સાબિત કરો કે $-a$ એ **N** પર સરવાળાની દ્વિક્રિયા + માટે $a \in$ **N** નો વ્યસ્ત નથી અને $a \in$ **N**, $a \neq 1$ માટે $\frac{1}{a}$ એ **N** પર ગુણાકારની દ્વિક્રિયા × માટે a નો વ્યસ્ત નથી.

નોંધ : N માં સરવાળા માટે તટસ્થ ઘટક ન હોવાથી કોઈ પણ ઘટકના વ્યસ્ત ઘટકનો પ્રશ્ન જ ઉપસ્થિત નથી થતો. દ્વિક્રિયા $* : A \times A \to A$ માં તટસ્થ ઘટક e નું અસ્તિત્વ હોય, તો જ કોઈ ઘટકના વ્યસ્ત ઘટકની વાત થઈ શકે.

ઉકેલ : $-a \notin$ **N** હોવાથી $-a$ એ **N** પર સરવાળાની ક્રિયા માટે a નો વ્યસ્ત ન હોઈ શકે, ભલે ને $(-a) + a = 0$ નું સમાધાન $-a$ દ્વારા થતું હોય.

આ જ પ્રમાણે, **N** માં $a \neq 1$ માટે $\frac{1}{a} \notin$ **N**, દર્શાવે છે કે **N** પર ગુણાકારની દ્વિક્રિયા માટે 1 સિવાયના કોઈ પણ ઘટકનો વ્યસ્ત અસ્તિત્વ ધરાવતો નથી.

ઉદાહરણ 34, 36, 38 અને 39 માટે સાબિત કરો કે **R** પર સરવાળો સમક્રમી અને જૂથના નિયમનું પાલન કરતી દ્વિક્રિયા છે. 0 એ તટસ્થ ઘટક અને પ્રત્યેક $a \in$ **R** માટે $-a$ એ a નો વ્યસ્ત ઘટક છે.

સ્વાધ્યાય 1.4

1. નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત કરેલ પ્રત્યેક ક્રિયા $*$ એ દ્વિક્રિયા છે કે નહિ તે નક્કી કરો. જે પ્રશ્નમાં $*$ દ્વિક્રિયા ન હોય, તેના માટે કારણ આપો :

(i) $*$ Z^+ પર, $a * b = a - b$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત છે.

(ii) $*$ Z^+ પર, $a * b = ab$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત છે.

(iii) $*$ R પર, $a * b = ab^2$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત છે.

(iv) $*$ Z^+ પર, $a * b = |a - b|$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત છે.

(v) $*$ Z^+ પર, $a * b = a$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત છે.

2. નીચે દર્શાવ્યા પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત પ્રત્યેક ક્રિયા $*$ માટે નક્કી કરો કે તે દ્વિક્રિયા છે કે નહિ. જો તે દ્વિક્રિયા હોય, તો એ સમક્રમી છે કે નહિ અથવા જૂથના નિયમનું પાલન કરે છે કે નહિ તે નક્કી કરો :

(i) Z પર વ્યાખ્યાયિત $a * b = a - b$

(ii) Q પર વ્યાખ્યાયિત $a * b = ab + 1$

(iii) Q પર વ્યાખ્યાયિત $a * b = \frac{ab}{2}$

(iv) Z^+ પર વ્યાખ્યાયિત $a * b = 2^{ab}$

(v) Z^+ પર વ્યાખ્યાયિત $a * b = a^b$

(vi) **R** $- \{-1\}$ પર વ્યાખ્યાયિત $a * b = \frac{a}{b+1}$

3. ધારો કે ગણ $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ પર દ્વિક્રિયા $\wedge$, $a \wedge b = \min \{a, b\}$ (અથવા ન્યૂનતમ $\{a, b\}$) દ્વારા વ્યાખ્યાયિત છે. ક્રિયા $\wedge$ માટે દ્વિક્રિયા કોષ્ટક લખો.

4. ધારો કે ગણ $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ પર દ્વિક્રિયા $*$, નીચે આપેલા ગુણાકાર કોષ્ટક (કોષ્ટક 1.2) દ્વારા વ્યાખ્યાયિત કરેલ છે :

(i) $(2 * 3) * 4$ અને $2 * (3 * 4)$ ની ગણતરી કરો.

(ii) $*$ સમક્રમી છે ?

(iii) $(2 * 3) * (4 * 5)$ ની ગણતરી કરો.

(**સૂચન :** નીચે આપેલ કોષ્ટકનો ઉપયોગ કરો.)

કોષ્ટક 1.2

*	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1
2	1	2	1	2	1
3	1	1	3	1	1
4	1	2	1	4	1
5	1	1	1	1	5

5. ગણ $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ પર દ્વિક્રિયા $*'$ એ $a *' b = a$ અને b નો ગુ.સા.અ. દ્વારા વ્યાખ્યાયિત છે. ક્રિયા $*'$ એ ઉપરના પ્રશ્ન 4 માં વ્યાખ્યાયિત દ્વિક્રિયા $*$ જેવી જ છે ? તમારા જવાબની યથાર્થતા ચકાસો.

6. **N** પર $a * b = a$ અને b નો લ.સા.અ. દ્વારા વ્યાખ્યાયિત દ્વિક્રિયા $*$ આપેલ છે.

(i) $5 * 7$, $20 * 16$ મેળવો.

(ii) $*$ સમક્રમી છે ?

(iii) $*$ જૂથના નિયમનું પાલન કરે છે ?

(iv) **N** માં $*$ માટે તટસ્થ ઘટક શોધો.

(v) દ્વિક્રિયા $*$ માટે **N** ના કયા ઘટકો વ્યસ્તસંપન્ન છે ?

7. ગણ $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ પર $a * b = a$ અને b નો લ.સા.અ. દ્વારા વ્યાખ્યાયિત $*$ એ દ્વિક્રિયા છે ? તમારા જવાબની યથાર્થતા ચકાસો.

8. ગણ **N** પર $a * b = a$ અને b નો ગુ.સા.અ. દ્વારા વ્યાખ્યાયિત દ્વિક્રિયા $*$ સમક્રમી છે ? શું $*$ જૂથના નિયમનું પાલન કરે છે ? **N** પરની આ દ્વિક્રિયા માટે તટસ્થ ઘટકનું અસ્તિત્વ છે ?

9. સંમેય સંખ્યાઓના ગણ Q પર દ્વિક્રિયા $*$ નીચે દર્શાવ્યા પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત છે :

(i) $a * b = a - b$

(ii) $a * b = a^2 + b^2$

(iii) $a * b = a + ab$

(iv) $a * b = (a - b)^2$

(v) $a * b = \frac{ab}{4}$

(vi) $a * b = ab^2$

કઈ દ્વિક્રિયાઓ સમક્રમી છે અને કઈ ક્રિયાઓ જૂથના નિયમનું પાલન કરે છે તે શોધો.

10. ઉપર આપેલ પૈકી કઈ દ્વિક્રિયાઓ માટે તટસ્થ ઘટક પ્રાપ્ય છે ?

11. ધારો કે A = $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ અને A પર ક્રિયા $*$, $(a, b) * (c, d) = (a + c, b + d)$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત છે. સાબિત કરો કે $*$ સમક્રમી છે અને જૂથના નિયમનું પાલન કરે છે. જો $*$ માટે A માં કોઈ એકમ ઘટક હોય, તો તે શોધો.

12. નીચે આપેલાં વિધાનો સત્ય છે કે અસત્ય તે જણાવો. તમારા જવાબની યથાર્થતા ચકાસો :

(i) ગણ $\mathbf{N}$ પરની કોઈ પણ દ્વિક્ક્રિયા $*$ માટે, $a * a = a$, $\forall a \in \mathbf{N}$.

(ii) જો $*$ $\mathbf{N}$ પર સમક્રમી દ્વિક્ક્રિયા હોય તો $a * (b * c) = (c * b) * a$.

પ્રશ્ન 13 માં વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલ વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

13. $a * b = a^3 + b^3$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત $\mathbf{N}$ પરની દ્વિક્ક્રિયા $*$ નો વિચાર કરો.

(A) $*$ જૂથના નિયમને અનુસરે છે અને સમક્રમી બંને છે ?

(B) $*$ સમક્રમી છે પરંતુ જૂથના નિયમને અનુસરતી નથી ?

(C) $*$ જૂથના નિયમને અનુસરે છે પરંતુ સમક્રમી નથી ?

(D) $*$ સમક્રમી નથી અને જૂથના નિયમને અનુસરતી નથી ?

પ્રકીર્ણ ઉદાહરણો

ઉદાહરણ 41 : જો R_1 અને R_2 ગણ A માં સામ્ય સંબંધો હોય, તો સાબિત કરો કે $R_1 \cap R_2$ પણ સામ્ય સંબંધ છે.

ઉકેલ : અહીં R_1 અને R_2 સામ્ય સંબંધો છે, તેથી $(a, a) \in R_1$ અને $(a, a) \in R_2$, $\forall a \in$ A. આ દર્શાવે છે કે $(a, a) \in R_1 \cap R_2$, $\forall a$, એટલે કે $R_1 \cap R_2$ એ સ્વવાચક છે. વધુમાં,

$(a, b) \in R_1 \cap R_2 \Rightarrow (a, b) \in R_1$ અને $(a, b) \in R_2$ (કેમ ?)

$\Rightarrow (b, a) \in R_1$ અને $(b, a) \in R_2$

$\Rightarrow (b, a) \in R_1 \cap R_2$,

તેથી $R_1 \cap R_2$ સંમિત છે.

આ જ પ્રમાણે, $(a, b) \in R_1 \cap R_2$ અને $(b, c) \in R_1 \cap R_2$

$\Rightarrow (a, b) \in R_1, (b, c) \in R_1, (a, b) \in R_2, (b, c) \in R_2$

$\Rightarrow (a, c) \in R_1$ અને $(a, c) \in R_2$

$\Rightarrow (a, c) \in R_1 \cap R_2$.

આ દર્શાવે છે કે $R_1 \cap R_2$ પરંપરિત છે. આમ, $R_1 \cap R_2$ સામ્ય સંબંધ છે.

ઉદાહરણ 42 : ગણ A એ ધન પૂર્ણાંકોની ક્રમયુક્ત જોડોનો ગણ છે. ગણ A પર R એ જો $xv = yu$ તો અને તો જ (x, y) R (u, v) દ્વારા વ્યાખ્યાયિત સંબંધ છે. સાબિત કરો કે R એ સામ્ય સંબંધ છે.

ઉકેલ : સ્પષ્ટ છે કે (x, y) R (x, y), $\forall (x, y) \in$ A, કારણ કે $xy = yx$. આ દર્શાવે છે કે R સ્વવાચક સંબંધ છે. ઉપરાંત (x, y) R $(u, v) \Rightarrow xv = yu \Rightarrow uy = vx$ અને તેથી (u, v) R (x, y). આ દર્શાવે છે કે R સંમિત સંબંધ છે.

આ જ પ્રમાણે, (x, y) R (u, v) અને (u, v) R $(a, b) \Rightarrow xv = yu$ અને $ub = va$

$$\Rightarrow xv\frac{a}{u} = yu\frac{a}{u}$$

$$\Rightarrow xv\frac{b}{v} = yu\frac{a}{u}$$

$\Rightarrow xb = ya$ અને તેથી (x, y) R (a, b).

વધુ સારી સાબિતી : $xv = yu \Rightarrow xvb = yub$

$\Rightarrow xvb = yva$

$\Rightarrow xb = ya$

આમ, **R** પરંપરિત સંબંધ છે. આથી, **R** સામ્ય સંબંધ છે.

નોંધ : u, v ધન પૂર્ણાંક છે.

ઉદાહરણ 43 : ધારો કે X = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}. $\mathbf{R}_1$ એ X પરનો સંબંધ છે અને તે $\mathbf{R}_1$ = {(x, y) : $x - y$ એ 3 વડે વિભાજ્ય છે.} દ્વારા વ્યાખ્યાયિત છે અને X પર બીજો એક સંબંધ $\mathbf{R}_2$ એ $\mathbf{R}_2$ = {(x, y) : {x, y} $\subset$ {1, 4, 7} અથવા {x, y} $\subset$ {2, 5, 8} અથવા {x, y} $\subset$ {3, 6, 9}} દ્વારા વ્યાખ્યાયિત છે. સાબિત કરો કે $\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_2$.

ઉકેલ : અત્રે એ નોંધનીય છે કે ગણ {1, 4, 7}, {2, 5, 8} અને {3, 6, 9}ના કોઈ પણ બે ઘટકો વચ્ચેનો તફાવત 3 નો ગુણક છે.

તેથી (x, y) $\in \mathbf{R}_1$ $\Rightarrow$ $x - y$ એ 3 નો ગુણક છે.

$\Rightarrow$ {x, y} $\subset$ {1, 4, 7} અથવા {x, y} $\subset$ {2, 5, 8} અથવા {x, y} $\subset$ {3, 6, 9}

$\Rightarrow$ (x, y) $\in \mathbf{R}_2$.

તેથી, $\mathbf{R}_1 \subset \mathbf{R}_2$.

આ જ પ્રમાણે (x, y) $\in \mathbf{R}_2$

$\Rightarrow$ {x, y} $\subset$ {1, 4, 7} અથવા {x, y} $\subset$ {2, 5, 8} અથવા {x, y} $\subset$ {3, 6, 9}

$\Rightarrow$ $x - y$ એ 3 વડે વિભાજ્ય છે.

$\Rightarrow$ (x, y) $\in \mathbf{R}_1$. આ દર્શાવે છે કે $\mathbf{R}_2 \subset \mathbf{R}_1$.

તેથી, $\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_2$.

ઉદાહરણ 44 : ધારો કે f : X $\rightarrow$ Y વિધેય છે. X પર સંબંધ **R** એ **R** = {(a, b) : $f(a) = f(b)$} દ્વારા આપેલ છે. **R** એ સામ્ય સંબંધ છે કે નહિ તે ચકાસો.

ઉકેલ : $\forall a \in$ X, $f(a) = f(a)$ હોવાથી, પ્રત્યેક $a \in$ X માટે (a, a) $\in$ **R**. આ દર્શાવે છે કે **R** સ્વવાચક છે.

આ જ પ્રમાણે (a, b) $\in$ **R** $\Rightarrow f(a) = f(b) \Rightarrow f(b) = f(a) \Rightarrow$ (b, a) $\in$ **R**. તેથી **R** સંમિત છે. ઉપરાંત, (a, b) $\in$ **R** અને (b, c) $\in$ **R** $\Rightarrow f(a) = f(b)$ અને $f(b) = f(c) \Rightarrow f(a) = f(c) \Rightarrow$ (a, c) $\in$ **R**, આનો અર્થ એ થાય છે કે **R** પરંપરિત છે. તેથી, **R** સામ્ય સંબંધ છે.

ઉદાહરણ 45 : ગણ **R** પર નીચે આપેલ દ્વિક્ક્રિયાઓમાંથી કઈ દ્વિક્ક્રિયા જૂથના નિયમને અનુસરે છે અને કઈ દ્વિક્ક્રિયાઓ સમક્રમી છે તે નક્કી કરો :

(a) $a * b = 1$, $\forall a, b \in \mathbf{R}$ (b) $a * b = \dfrac{(a+b)}{2}$, $\forall a, b \in \mathbf{R}$

ઉકેલ : (a) વ્યાખ્યા પરથી સ્પષ્ટ છે કે $a * b = b * a = 1$, $\forall a, b \in \mathbf{R}$. વળી,

$(a * b) * c = 1 * c = 1$ અને $a * (b * c) = a * 1 = 1$, $\forall a, b, c \in \mathbf{R}$. તેથી, **R** એ જૂથના નિયમને અનુસરે છે અને સમક્રમી છે.

(b) $a * b = \dfrac{a+b}{2} = \dfrac{b+a}{2} = b * a$. આથી $*$ સમક્રમી છે.

$$\text{ઉપરાંત, } (a * b) * c = \left(\frac{a+b}{2}\right) * c$$

$$= \frac{\left(\frac{a+b}{2}\right) + c}{2}$$

$$= \frac{a+b+2c}{4}$$

$$\text{પરંતુ, } a * (b * c) = a * \left(\frac{b+c}{2}\right)$$

$$= \frac{a + \frac{b+c}{2}}{2}$$

$$= \frac{2a+b+c}{4}$$

$$\neq \frac{a+b+2c}{4} \text{ (વ્યાપક રૂપે)}$$

તેથી, $*$ એ જૂથના નિયમને અનુસરતી નથી.

નોંધ : $(1 * 2) * 3 = \frac{9}{4}$ અને $1 * (2 * 3) = \frac{7}{4}$

વળી, $\frac{9}{4} \neq \frac{7}{4}$

આમ, $(1 * 2) * 3 \neq 1 * (2 * 3)$

ઉદાહરણ 46 : ગણ A = {1, 2, 3} થી તેના પરના જ તમામ એક-એક વિધેયોની સંખ્યા શોધો.

ઉકેલ : {1, 2, 3} થી તેના પરના જ એક-એક વિધેય એ કેવળ સંકેતો 1, 2, 3 પરના ક્રમચય છે. માટે, {1, 2, 3} થી તેના પરના જ એક-એક વિધેયોની કુલ સંખ્યા એ ત્રણ સંકેતો 1, 2, 3 ના કુલ ક્રમચયોની સંખ્યા બરાબર જ છે અને તે 3! = 6 છે.

ઉદાહરણ 47 : ધારો કે A = {1, 2, 3}. સાબિત કરો કે (1, 2) અને (2, 3) ને સમાવતા સ્વવાચક અને પરંપરિત હોય, પરંતુ સંમિત ન હોય તેવા સંબંધોની સંખ્યા ત્રણ છે.

ઉકેલ : (1, 2) અને (2, 3) ને સમાવતો સ્વવાચક અને પરંપરિત, પરંતુ સંમિત ન હોય તેવો સૌથી નાનો સંબંધ R_1 = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 3), (1, 3)} છે. હવે, જો આપણે ક્રમયુક્ત જોડ (2, 1) ને R_1માં ઉમેરીને R_2 મેળવીએ, તો સંબંધ R_2 સ્વવાચક અને પરંપરિત થશે પરંતુ સંમિત નહિ થાય. આ જ પ્રમાણે, અપેક્ષિત સંબંધ મેળવવા માટે, આપણે R_1 માં (3, 2) ઉમેરીને સંબંધ R_3 મેળવી શકીએ. તેમ છતાં આપણે બે ક્રમયુક્ત જોડ (2, 1), (3, 2) અથવા એક ક્રમયુક્ત જોડ (3, 1) એકસાથે R_1 માં ઉમેરી નથી શકતાં, કારણ કે આમ કરવાથી, પરંપરિતતા જાળવી રાખવા માટે આપણને બાકીની ક્રમયુક્ત જોડ ઉમેરવાની ફરજ પડશે અને આમ કરવાથી સંબંધ સંમિત પણ થશે. તે માગેલ શરતનું ઉલ્લંઘન કરે છે. આમ, અપેક્ષિત સંબંધોની કુલ સંખ્યા 3 છે.

ઉદાહરણ 48 : સાબિત કરો કે ગણ {1, 2, 3} માં (1, 2) અને (2, 1) ને સમાવતા સામ્ય સંબંધની સંખ્યા બે છે.

ઉકેલ : (1, 2) અને (2, 1) ને સમાવતો સૌથી નાનો સામ્ય સંબંધ R_1,

{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1)} છે. હવે, આપણી પાસે માત્ર 4 જોડ (2, 3), (3, 2), (1, 3) અને (3, 1) શેષ છે. જો આપણે કોઈ એક જોડ, માનો કે (2, 3) ને R_1 માં ઉમેરીએ, તો સંમિત માટે (3, 2) પણ ઉમેરવી

જ પડે અને હવે પરંપરિતતા માટે આપણને (1, 3) અને (3, 1) ઉમેરવાની ફરજ પડે છે. આમ, R_1 કરતાં મોટો સામ્ય સંબંધ કેવળ સાર્વત્રિક સંબંધ જ છે. આ દર્શાવે છે કે (1, 2) અને (2, 1) ને સમાવતા સામ્ય સંબંધોની કુલ સંખ્યા બે છે.

ઉદાહરણ 49 : સાબિત કરો કે {1, 2} પર જેનો તટસ્થ ઘટક 1 હોય તથા જેના હેઠળ 2 નો વ્યસ્ત 2 હોય એવી દ્વિક્‌ક્રિયાની સંખ્યા માત્ર એક છે.

ઉકેલ : {1, 2} પર દ્વિક્‌ક્રિયા $*$ એ $\{1, 2\} \times \{1, 2\}$ થી {1, 2} નું વિધેય છે. એટલે કે વિધેય $\{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\} \to \{1, 2\}$ છે. અપેક્ષિત (ઇચ્છિત) દ્વિક્‌ક્રિયા $*$ માટે 1 એ તટસ્થ ઘટક હોવાથી, $*(1, 1) = 1$, $*(1, 2) = 2$, $*(2, 1) = 2$ અને ક્રમયુક્ત જોડ (2, 2) માટે જ પસંદગી બાકી રહી છે. 2 નો વ્યસ્ત 2 હોવાથી $*(2, 2)$ બરાબર 1 જ મળશે. આમ, ઇચ્છિત દ્વિક્‌ક્રિયાની સંખ્યા માત્ર એક જ છે.

ઉદાહરણ 50 : તદેવ વિધેય $I_N : N \to N$, $I_N(x) = x$, $\forall x \in N$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત છે. સાબિત કરો કે I_N વ્યાપ્ત હોવા છતાં $I_N + I_N : N \to N$, $(I_N + I_N)(x) = I_N(x) + I_N(x) = x + x = 2x$ વ્યાપ્ત નથી.

ઉકેલ : સ્પષ્ટ છે કે I_N વ્યાપ્ત છે. પરંતુ $I_N + I_N$ વ્યાપ્ત નથી. સહપ્રદેશ N માં ઘટક 3 એવો મળે છે કે જેથી પ્રદેશ N માં કોઈ પણ ઘટક x નું અસ્તિત્વ ન મળે જેના માટે $(I_N + I_N)(x) = 2x = 3$.

ઉદાહરણ 51 : ધારો કે વિધેય $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to R$, $f(x) = \sin x$ અને $g : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to R$, $g(x) = \cos x$ દ્વારા આપેલ છે. સાબિત કરો કે f અને g એક-એક છે, પરંતુ $f + g$ એક-એક નથી.

ઉકેલ : $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ના કોઈ પણ બે ભિન્ન ઘટકો x_1 અને x_2, માટે $\sin x_1 \neq \sin x_2$ અને $\cos x_1 \neq \cos x_2$, બંને f અને g એક-એક છે જ. પરંતુ $(f + g)(0) = \sin 0 + \cos 0 = 1$ અને

$(f + g)\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2} = 1$. તેથી, $f + g$ એક-એક નથી.

પ્રકીર્ણ સ્વાધ્યાય 1

1. $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 10x + 7$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત છે. એવું વિધેય $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ શોધો કે જેથી $gof = fog = I_{\mathbf{R}}$.
2. ધારો કે W એ પૂર્ણ સંખ્યાઓનો ગણ છે. $f : W \to W$, n અયુગ્મ માટે $f(n) = n - 1$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત છે અને n યુગ્મ માટે $f(n) = n + 1$ વ્યાખ્યાયિત કરો. સાબિત કરો કે f એ વ્યસ્ત સંપન્ન છે. fનો વ્યસ્ત શોધો.
3. જો $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 - 3x + 2$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત હોય, તો $f(f(x))$ શોધો.
4. સાબિત કરો કે વિધેય $f : \mathbf{R} \to \{x \in \mathbf{R} : -1 < x < 1\}$, $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$, એક-એક અને વ્યાપ્ત વિધેય છે.
5. સાબિત કરો કે વિધેય $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^3$ એક-એક છે.
6. બે વિધેયો $f : N \to Z$ અને $g : Z \to Z$ નાં ઉદાહરણ આપો કે જેથી gof એક-એક હોય પરંતુ g એક-એક ન હોય. (**સૂચન :** $f(x) = x$ અને $g(x) = |x|$ નો વિચાર કરો.)
7. બે વિધેયો $f : N \to N$ અને $g : N \to N$ નાં ઉદાહરણ આપો કે જેથી gof વ્યાપ્ત હોય પરંતુ f વ્યાપ્ત ન હોય. (**સૂચન :** $f(x) = x + 1$ અને $g(x) = \begin{cases} x - 1 & x > 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$ નો વિચાર કરો.)

8. X એ આપેલ અરિક્ત ગણ છે. X ના તમામ ઉપગણોના ગણ P(X) નો વિચાર કરો. P(X) માં સંબંધ R આ પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત છે :

P(X) ના ઉપગણો A અને B માટે, $A \subset B$ તો અને તો જ ARB.

R, P(X) પર સામ્ય સંબંધ છે ? તમારા જવાબનું સમર્થન કરો.

9. આપેલ અરિક્ત ગણ X નો ઘાતગણ P(X) છે. દ્વિક્રિયા $* : P(X) \times P(X) \to P(X)$ એ $A * B = A \cap B$, $\forall A, B \in P(X)$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત છે. સાબિત કરો કે X એ આ ક્રિયા માટે તટસ્થ ઘટક છે અને દ્વિક્રિયા $*$ ને સાપેક્ષ P(X) માં કેવળ X જ વ્યસ્તસંપન્ન છે.

10. ગણ $\{1, 2, 3,..., n\}$ થી $\{1, 2, 3,..., n\}$ સુધીનાં તમામ વ્યાપ્ત વિધેયોની સંખ્યા શોધો.

11. $S = \{a, b, c\}$ અને $T = \{1, 2, 3\}$ લો. જો અસ્તિત્વ હોય, તો નીચે આપેલાં વિધેયો $F : S \to T$ માટે F^{-1} શોધો.

(i) $F = \{(a, 3), (b, 2), (c, 1)\}$ (ii) $F = \{(a, 2), (b, 1), (c, 1)\}$

12. $a * b = |a - b|$ અને $a \text{ o } b = a$, $\forall a, b \in \mathbf{R}$, દ્વારા વ્યાખ્યાયિત દ્વિક્રિયાઓ $* : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ અને $\text{o} : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ નો વિચાર કરો. સાબિત કરો કે * સમક્રમી છે પરંતુ જૂથના નિયમને અનુસરતી નથી. o જૂથના નિયમને અનુસરે છે પરંતુ સમક્રમી નથી. વધુમાં, બતાવો કે $\forall a, b, c \in \mathbf{R}$, $a * (b \text{ o } c) = (a * b) \text{ o } (a * c)$. [જો આ સત્ય હોય, તો આપણે દ્વિક્રિયા $*$ ને દ્વિક્રિયા o પર વિભાજનીય કહીશું.] શું દ્વિક્રિયા o એ દ્વિક્રિયા $*$ પર વિભાજનીય થશે ? તમારા જવાબની સત્યાર્થતા ચકાસો.

13. X એ આપેલ અરિક્ત ગણ છે, $* : P(X) \times P(X) \to P(X)$, $A * B = (A - B) \cup (B - A)$, $\forall A, B \in P(X)$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત દ્વિક્રિયા છે. સાબિત કરો કે રિક્ત ગણ ϕ એ દ્વિક્રિયા $*$ માટે તટસ્થ ઘટક છે અને P(X) ના તમામ ઘટક A વ્યસ્ત સંપન્ન છે તથા $A^{-1} = A$.

(**સૂચન :** $(A - \varnothing) \cup (\varnothing - A) = A$ અને $(A - A) \cup (A - A) = A * A = \varnothing$).

14. ગણ $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ પર દ્વિક્રિયા $*$ નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત છે :

$$a * b = \begin{cases} a + b, & a + b < 6 \\ a + b - 6, & a + b \geq 6 \end{cases}$$

સાબિત કરો કે આ ક્રિયા માટે શૂન્ય એ તટસ્થ ઘટક છે અને આ ગણનો પ્રત્યેક શૂન્યેતર ઘટક વ્યસ્ત સંપન્ન છે. અહીં, $6 - a$ એ ઘટક a નો વ્યસ્ત છે.

15. $A = \{-1, 0, 1, 2\}$, $B = \{-4, -2, 0, 2\}$ અને વિધેયો $f, g : A \to B$, $f(x) = x^2 - x$, $x \in A$ અને $g(x) = 2\left|x - \frac{1}{2}\right| - 1$, $x \in A$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત છે. f અને g સમાન વિધેયો છે ? તમારા જવાબની યથાર્થતા ચકાસો. (**સૂચન :** યાદ કરો કે વિધેયો $f : A \to B$ અને $g : A \to B$ માટે $f(a) = g(a)$, $\forall a \in A$ હોય, તો f અને g સમાન વિધેયો કહેવાય છે.)

પ્રશ્નો 16 તથા 17 માં વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલ વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

16. ગણ $A = \{1, 2, 3\}$ લો. ઘટક (1, 2) અને (1, 3) સમાવતા હોય અને સ્વવાચક અને સંમિત હોય, પરંતુ પરંપરિત ન હોય તેવા સંબંધોની સંખ્યા .... છે.

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

17. ગણ $A = \{1, 2, 3\}$ લો. (1, 2) ને સમાવતા સામ્ય સંબંધોની સંખ્યા .... છે.

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

18. f **: R → R, ચિહ્ન વિધેય (Signum Function) લો.**

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

અને g : R → R, **મહત્તમ પૂર્ણાંક** વિધેય $g(x) = [x]$, જ્યાં $[x] = x$ અથવા x થી નાના પૂર્ણાંકો પૈકી મહત્તમ પૂર્ણાંક દ્વારા વ્યાખ્યાયિત છે, તો fog અને gof એ (0, 1] માં એકના એક જ (સમાન) છે ?

(A) હા (B) ના

(C) સંદિગ્ધ (D) સંયોજિત વિધેયનું અસ્તિત્વ નથી.

19. ગણ $\{a, b\}$ પર દ્વિક્ક્રિયાઓની સંખ્યા

(A) 10 (B) 16 (C) 20 (D) 8

સારાંશ

આ પ્રકરણમાં, આપણે વિવિધ પ્રકારના સંબંધો અને સામ્ય સંબંધ, વિધેયોનું સંયોજન, વ્યસ્તસંપન્ન વિધેયો અને દ્વિક્ક્રિયાઓનો અભ્યાસ કર્યો. આ પ્રકરણની મુખ્ય વિષયવસ્તુ નીચે આપેલ છે :

- X માં, $R = \phi \subset (X \times X)$ એ ખાલી અથવા રિક્ત સંબંધ R છે.
- X માં, સાર્વત્રિક સંબંધ R ને $R = X \times X$ દ્વારા આપવામાં આવે છે.
- X માં, સ્વવાચક સંબંધ R, $(a, a) \in R$, $\forall a \in X$ દ્વારા આપવામાં આવે છે.
- જો $(a, b) \in R$ તો $(b, a) \in R$ નું સમાધાન કરે તેવો સંબંધ R સંમિત સંબંધ છે.
- જો $(a, b) \in R$ અને $(b, c) \in R$ હોય, તો $(a, c) \in R$ નું સમાધાન કરતો સંબંધ R એ X માં પરંપરિત છે.
- X માં જે સંબંધ R, સ્વવાચક, સંમિત અને પરંપરિત સંબંધ હોય તેને સામ્ય સંબંધ R કહે છે.
- X માં, કોઈ સામ્ય સંબંધ R માટે, $a \in X$ ને સંગત સામ્ય વર્ગ $[a]$, X નો એવો ઉપગણ છે જેના તમામ સભ્યો b એ a સાથે સંબંધ ધરાવે છે.
- જો $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, $\forall x_1, x_2 \in X$ હોય, તો વિધેય $f : X \to Y$ એક-એક છે.
- જો આપેલ પ્રત્યેક $y \in Y$ માટે, $x \in X$ મળે કે જેથી $f(x) = y$ થાય તો $f : X \to Y$ ને વ્યાપ્ત વિધેય કહે છે.
- જો f એક-એક અને વ્યાપ્ત બંને હોય, તો $f : X \to Y$ એ એક-એક વ્યાપ્ત વિધેય છે તેમ કહેવાય.
- વિધેયો $f : A \to B$ અને $g : B \to C$ નું સંયોજન એ વિધેય $gof : A \to C$, $(gof)(x) = g(f(x))$, $\forall x \in A$ દ્વારા આપવામાં આવે છે.
- જો વિધેય $g : Y \to X$ નું અસ્તિત્વ હોય કે જેથી $gof = I_X$ અને $fog = I_Y$ મળે તો વિધેય $f : X \to Y$ વ્યસ્તસંપન્ન છે.
- જો વિધેય $f : X \to Y$ વ્યસ્તસંપન્ન હોય, તો અને તો જ f એક-એક અને વ્યાપ્ત છે.
- આપેલ સાન્ત ગણ X માટે વિધેય $f : X \to X$ એક-એક (તદનુસાર વ્યાપ્ત) હોય, તો અને તો જ f વ્યાપ્ત છે (તદનુસાર એક-એક). આ કોઈ પણ સાન્ત ગણનો લાક્ષણિક ગુણધર્મ છે. આ ગુણધર્મ અનંત ગણ માટે સત્ય નથી.

- ગણ A પરની દ્વિક્રિયા $*$ એ $A \times A$ થી A નું વિધેય છે.
- દ્વિક્રિયા $* : X \times X \to X$ માટે જો $a * e = a = e * a$, $\forall a \in X$ તો ઘટક $e \in X$ એ $*$ માટે તટસ્થ ઘટક છે.
- જો $b \in X$ અસ્તિત્વ ધરાવે કે જેથી $a * b = e = b * a$. જ્યાં, e એ દ્વિક્રિયા $*$ માટે તટસ્થ ઘટક છે, તો દ્વિક્રિયા $* : X \times X \to X$ માટે ઘટક $a \in X$ વ્યસ્તસંપન્ન છે. ઘટક b ને a નો વ્યસ્ત કહે છે અને તેને a^{-1} વડે દર્શાવાય છે.
- જો $a * b = b * a$, $\forall a, b \in X$ હોય, તો દ્વિક્રિયા $*$ ને X પર સમક્રમી કહે છે.
- જો $(a * b) * c = a * (b * c)$, $\forall a, b, c \in X$ હોય, તો દ્વિક્રિયા $*$ ને X પર જૂથના નિયમને અનુસરતી દ્વિક્રિયા કહે છે.

Historical Note

The concept of function has evolved over a long period of time starting from ***R. Descartes*** (C.E. 1596 - C.E. 1650), who used the word 'function' in his manuscript "***Geometrie***" in C.E. 1637 to mean some positive integral power x^n of a variable x while studying geometrical curves like hyperbola, parabola and ellipse. ***James Gregory*** (C.E. 1636 - C.E. 1675) in his work "***Vera Circuli*** et ***Hyperbolae Quadratura***" (C.E. 1667) considered function as a quantity obtained from other quantities by successive use of algebraic operations or by any other operations. Later ***G. W. Leibnitz*** (C.E. 1646 - C.E. 1716) in his manuscript "***Methodus tangentium inversa, seu de functionibus***" written in C.E. 1673 used the word '***function***' to mean a quantity varying from point to point on a curve such as the coordinates of a point on the curve, the slope of the curve, the tangent and the normal to the curve at a point. However, in his manuscript "***Historia***" (C.E. 1714), ***Leibnitz*** used the word '***function***' to mean quantities that depend on a variable. He was the first to use the phrase '***function of x***'. ***John Bernoulli*** (C.E. 1667 - C.E. 1748) used the notation ϕx for the first time in C.E. 1718 to indicate a function of x. But the general adoption of symbols like f, F, ϕ, Ψ... to represent functions was made by ***Leonhard Euler*** (C.E. 1707 - C.E. 1783) in C.E. 1734 in the first part of his manuscript "***Analysis Infinitorium***". Later on, ***Joeph Louis Lagrange*** (C.E. 1736 - C.E. 1813) published his manuscripts "***Theorie des functions analytiques***" in C.E. 1793, where he discussed about ***analytic function*** and used the notion $f(x)$, $F(x)$, $\phi(x)$ etc. for different function of x. Subsequently, ***Lejeunne Dirichlet*** (C.E. 1805 - C.E. 1859) gave the definition of function which was being used till the set theoretic definition of function presently used, was given after set theory was developed by ***Georg Cantor*** (C.E. 1845 - C.E. 1918). The set theoretic definition of function known to us presently is simply an abstraction of the definition given by ***Dirichlet*** in a rigorous manner.

પ્રકરણ 2

ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધેયો

❖ *Mathematics, in general, is fundamentally the science of self-evident things.* — *FELIX KLEIN* ❖

2.1 પ્રાસ્તાવિક

પ્રકરણ 1માં આપણે શીખી ગયાં કે જો f એક-એક અને વ્યાપ્ત વિધેય હોય, તો fનું પ્રતિવિધેય મળે અને તેને f^{-1} વડે દર્શાવાય છે. વ્યાપ્ત, એક-એક કે બંને પૈકી કોઈ પણ ન હોય એવાં ઘણાં વિધેય હોય છે અને આથી આપણે તેમના પ્રતિવિધેયની ચર્ચા ન કરી શકીએ. ધોરણ 11માં આપણે અભ્યાસ કરી ગયાં કે ત્રિકોણમિતીય વિધેયો તેમના પ્રદેશ અને વિસ્તારમાં એક-એક પણ નથી અને વ્યાપ્ત પણ નથી તથા આથી તેમના પ્રતિવિધેયનું અસ્તિત્વ નથી. આ પ્રકરણમાં આપણે ત્રિકોણમિતીય વિધેયોના પ્રદેશ અને વિસ્તાર પર તેમનાં પ્રતિવિધેયો શક્ય બને તે રીતે અંકુશ મૂકીશું. આલેખ દ્વારા તેમની રજૂઆતથી તેમની વર્તણૂકનું અવલોકન કરીશું. તદુપરાંત તેમના કેટલાંક પ્રાથમિક ગુણધર્મોની પણ ચર્ચા કરીશું.

ARYABHATTA
(C.E. 476 - C.E. 550)

ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધેય, કલનશાસ્ત્રમાં અગત્યનો ભાગ ભજવે છે, કારણ કે તેની મદદથી ઘણાબધા સંકલિત વ્યાખ્યાયિત થાય છે. ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધેયની સંકલ્પનાનો વિજ્ઞાન અને ઈજનેરી શાખામાં પણ ઉપયોગ થાય છે.

2.2 પાયાની સંકલ્પના

ધોરણ 11માં આપણે નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત ત્રિકોણમિતીય વિધેયોનો અભ્યાસ કર્યો :

sine વિધેય અર્થાત્ $sin : R \rightarrow [-1, 1]$.

cosine વિધેય અર્થાત્ $cos : R \rightarrow [-1, 1]$.

tangent વિધેય અર્થાત્ $tan : R - \{x : x = (2n + 1)\frac{\pi}{2}, n \in Z\} \rightarrow R$.

cotangent વિધેય અર્થાત્ $cot : R - \{x : x = n\pi, n \in Z\} \rightarrow R$.

secant વિધેય અર્થાત્ $sec : R - \{x : x = (2n + 1)\frac{\pi}{2}, n \in Z\} \rightarrow R - (-1, 1)$.

cosecant વિધેય અર્થાત્ $cosec : R - \{x : x = n\pi, n \in Z\} \rightarrow R - (-1, 1)$.

આપણે પ્રકરણ 1 માં એ પણ શીખી ગયાં કે જો વિધેય $f : X \to Y$ માટે $f(x) = y$ એક-એક અને વ્યાપ્ત હોય, તો એક અને માત્ર એક વિધેય $g : Y \to X$, $g(y) = x$ વ્યાખ્યાયિત કરી શકાય. અહીં $x \in X$ અને $y = f(x)$, $y \in Y$. અત્રે g નો પ્રદેશ $=$ fનો વિસ્તાર અને g નો વિસ્તાર $=$ fનો પ્રદેશ. વિધેય g એ fનું પ્રતિવિધેય કહેવાય અને તેને f^{-1} વડે દર્શાવાય. વળી, g પણ એક-એક અને વ્યાપ્ત છે અને gનું પ્રતિવિધેય f છે. આમ, $g^{-1} = (f^{-1})^{-1} = f$.

વળી, $(f^{-1}of)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x$

અને $(fof^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = f(x) = y$.

sin વિધેયનો પ્રદેશ વાસ્તવિક સંખ્યાઓનો ગણ અને વિસ્તાર $[-1, 1]$ છે. જો પ્રદેશ પર આપણે મર્યાદા મૂકી મર્યાદિત પ્રદેશ $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ લઈએ, તો તે એક-એક અને $[-1, 1]$ માં વ્યાપ્ત બને. ખરેખર તો *sine* વિધેય મર્યાદિત પ્રદેશ $\left[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right]$, $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ વગેરેમાં એક-એક અને $[-1, 1]$ માં વ્યાપ્ત બને. આથી, આપણે આ પ્રત્યેક અંતરાલ માટે *sine* વિધેયની શાખા વ્યાખ્યાયિત કરી શકીએ.

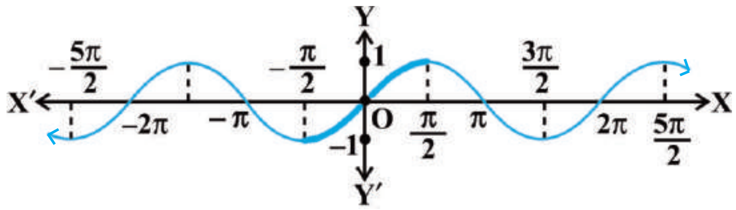
આથી આપણે *sine* વિધેયના પ્રતિવિધેયને sin^{-1} (*arcsine* વિધેય) સંકેત વડે દર્શાવીશું. આમ, sin^{-1} વિધેયનો પ્રદેશ $[-1, 1]$ અને વિસ્તાર $\left[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right]$, $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ વગેરે પૈકીનો કોઈ પણ અંતરાલ હોઈ શકે. આ પ્રત્યેક અંતરાલને અનુરૂપ આપણને sin^{-1} વિધેયની એક શાખા મળે છે. તેની $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ વિસ્તારવાળી શાખાને *મુખ્ય કિંમતવાળી શાખા* કહીશું. બાકીના અંતરાલ વિસ્તાર તરીકે લેતાં sin^{-1}ની *ભિન્ન શાખાઓ* મળે છે. આપણે હવે પછીથી જ્યારે sin^{-1} નો ઉલ્લેખ કરીશું, ત્યારે તેનો પ્રદેશ $[-1, 1]$ અને વિસ્તાર $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ લઈશું. આપણે $sin^{-1} : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ એમ લખીશું.

પ્રતિવિધેયની વ્યાખ્યા પરથી કહી શકાય કે, $sin\,(sin^{-1}x) = x$, જ્યાં $-1 \le x \le 1$ અને $sin^{-1}(sin\,x) = x$ જ્યાં $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$. બીજા શબ્દોમાં, જો $y = sin^{-1}x$ તો $siny = x$.

નોંધ :

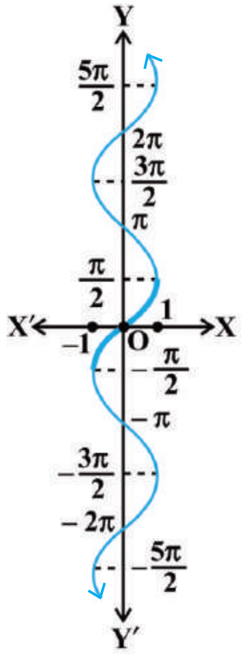
(1) આપણે પ્રકરણ 1 પરથી જાણીએ છીએ કે જો વિધેય $y = f(x)$ નું પ્રતિવિધેય શક્ય હોય તો $x = f^{-1}(y)$. આમ, sin^{-1} વિધેયનો આલેખ મૂળ વિધેયના આલેખમાં x-અક્ષ અને y-અક્ષની અદલ-બદલ કરી દોરી શકાય. અર્થાત્ જો (a, b) એ *sin* વિધેયના આલેખ પરનું બિંદુ હોય, તો (b, a) તેને અનુરૂપ sin^{-1} વિધેયના આલેખ પરનું બિંદુ બને. આમ, $y = sin^{-1}x$ વિધેયનો આલેખ $y = sinx$ વિધેયના આલેખમાં x-અક્ષ અને y-અક્ષની અદલ-બદલ કરી મેળવી શકાય. $y = sinx$ અને $y = sin^{-1}x$ ના આલેખ આકૃતિ 2.1(i), (ii), (iii) માં દર્શાવેલ છે. $y = sin^{-1}x$ આલેખનો ઘેરો ભાગ એ તેની મુખ્ય કિંમત દર્શાવતી શાખા છે.

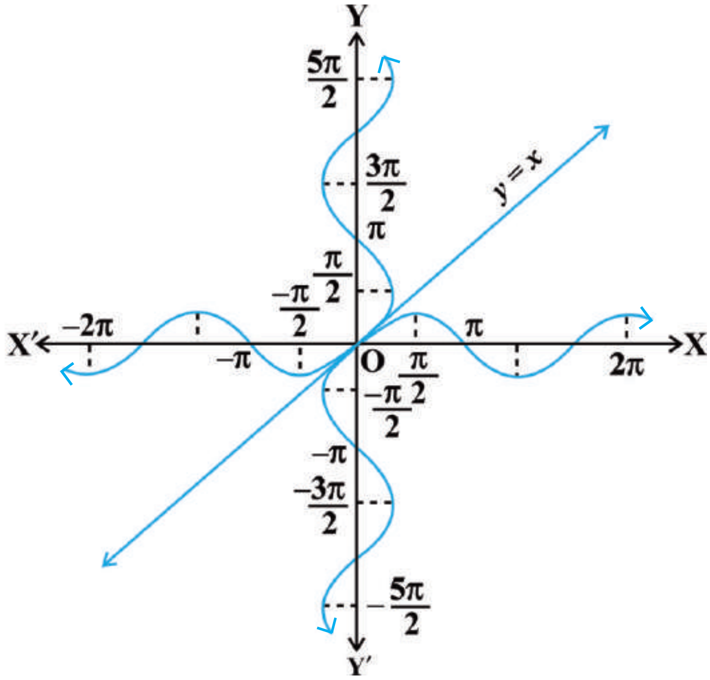
(2) એવું દર્શાવી શકાય કે કોઈ વિધેયના પ્રતિવિધેયનો આલેખ મુખ્ય વિધેયના આલેખના $y = x$ રેખામાં મળતા ***આરસી પ્રતિબિંબ (mirror image)*** સ્વરૂપે મળે છે. સમાન અક્ષો પર દોરવામાં આવતા $y = sinx$ અને $y = sin^{-1}x$ ના આલેખ પરથી તે જોઈ શકાય છે. (આકૃતિ 2.1(iii))



$y = sin\,x$

આકૃતિ 2.1 (i)





$y = sin^{-1}x$

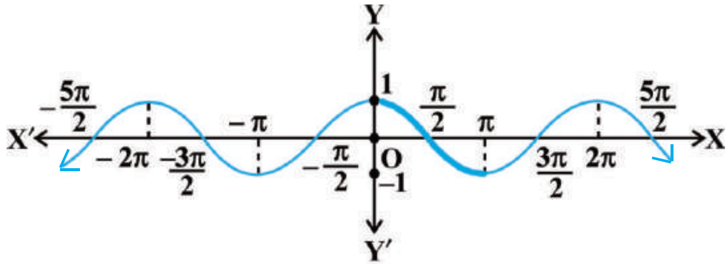
આકૃતિ 2.1 (ii)

$y = sinx$ અને $y = sin^{-1}x$

આકૃતિ 2.1 (iii)

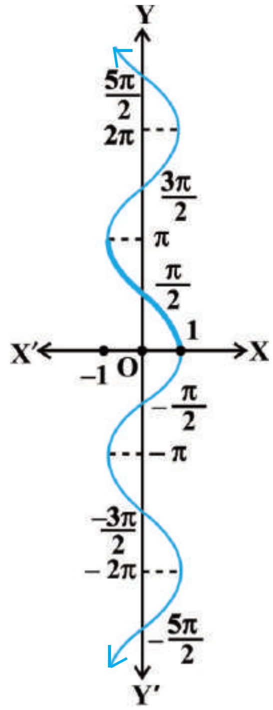
sin વિધેયની જેમ *cosine* વિધેયનો પ્રદેશ વાસ્તવિક સંખ્યાઓનો ગણ અને વિસ્તાર $[-1, 1]$ છે. જો *cosine* વિધેયના પ્રદેશને મર્યાદિત બનાવી $[0, \pi]$ ને પ્રદેશ તરીકે લઈએ તો તે એક-એક અને વ્યાપ્ત બને. અહીં વિસ્તાર $[-1, 1]$ છે. ખરેખર તો મર્યાદિત પ્રદેશ $[-\pi, 0]$, $[0, \pi]$, $[\pi, 2\pi]$ વગેરેમાં *cosine* વિધેય એક-એક અને $[-1, 1]$ માં વ્યાપ્ત બને. આથી, આપણે *cosine* વિધેયનું પ્રતિવિધેય આમાંના કોઈ પણ અંતરાલ પર વ્યાખ્યાયિત કરી શકીએ. *cosine* વિધેયના પ્રતિવિધેયને cos^{-1}(*arc cosine* વિધેય) સંકેત વડે દર્શાવીશું. આમ cos^{-1} વિધેયનો પ્રદેશ $[-1, 1]$ અને વિસ્તાર $[-\pi, 0]$, $[0, \pi]$, $[\pi, 2\pi]$ વગેરેમાંનો કોઈ પણ અંતરાલ છે. આ પ્રત્યેક અંતરાલને અનુરૂપ cos^{-1} વિધેયની એક શાખા મળશે. $[0, \pi]$ને અનુરૂપ મળતી cos^{-1} વિધેયની શાખાને *મુખ્ય કિંમતવાળી શાખા* કહીશું. આપણે $cos^{-1} : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ એમ લખીશું.

જે રીતે $y = sin^{-1}x$ ના આલેખની ચર્ચા કરી તે જ રીતે $y = cos^{-1}x$ નો આલેખ પણ દોરી શકાય. આકૃતિ 2.2(i) અને 2.2(ii)માં $y = cosx$ અને $y = cos^{-1}x$ ના આલેખ દર્શાવેલ છે.



$y = cos\,x$

આકૃતિ 2.2 (i)



$y = cos^{-1}x$

આકૃતિ 2.2 (ii)

ચાલો, આપણે નીચે પ્રમાણે $cosec^{-1}x$ અને $sec^{-1}x$ નો વિચાર કરીએ :

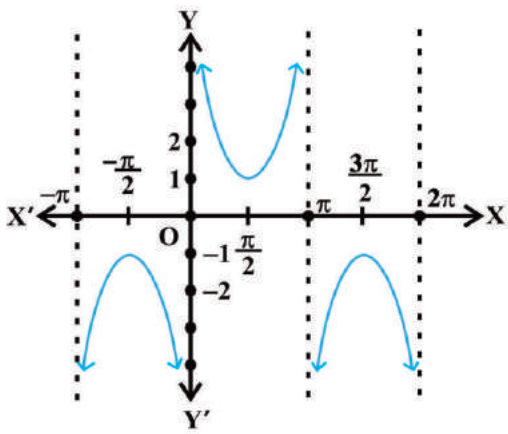
$cosecx = \frac{1}{sin\,x}$ હોવાથી, *cosec* વિધેયનો પ્રદેશગણ

$\{x : x \in \mathbf{R}$ અને $x \neq n\pi,\ n \in Z\}$ અને વિસ્તારગણ

$\{y : y \in R,\ y \geq 1$ અથવા $y \leq -1\}$ અર્થાત્ $\mathbf{R} - (-1, 1)$ થાય.

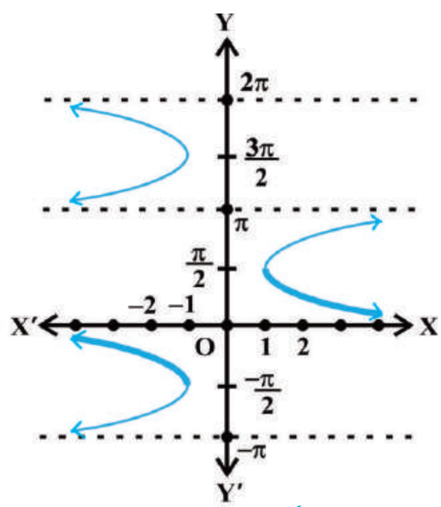
આમ, $y = cosec\,x$, $-1 < y < 1$ હોય તેવી y સિવાયની પ્રત્યેક વાસ્તવિક સંખ્યા ધારણ કરશે અને તે π ના પૂર્ણાંક ગુણિતો પર વ્યાખ્યાયિત નહીં થાય. જો *cosec* વિધેયના પ્રદેશને $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$ માં મર્યાદિત કરીએ તો તે વિસ્તાર $\mathbf{R} - (-1, 1)$ માટે એક-એક અને વ્યાપ્ત બને. ખરેખર તો *cosec* વિધેય, $\left[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right] - \{-\pi\}$, $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$, $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] - \{\pi\}$ વગેરે મર્યાદિત અંતરાલમાં એક-એક અને વ્યાપ્ત બને. અને તેનો વિસ્તાર વાસ્તવિક સંખ્યાઓનો ગણ $\mathbf{R} - (-1, 1)$ થાય. આમ, $cosec^{-1}$ વિધેયનો પ્રદેશ $\mathbf{R} - (-1, 1)$ અને વિસ્તાર $\left[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right] - \{-\pi\}$, $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$, $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] - \{\pi\}$ વગેરે પૈકીનો કોઈ પણ અંતરાલ લઈ શકાય. આપણે $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$ વિસ્તારને અનુરૂપ મળતી $cosec^{-1}$ વિધેયની શાખાને *મુખ્ય કિંમતવાળી શાખા* કહીશું. આમ, આપણે મુખ્ય શાખાના સંદર્ભમાં $cosec^{-1} : \mathbf{R} - (-1, 1) \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$ એમ લખી શકીએ.

આકૃતિ 2.3(i) અને 2.3(ii)માં $y = cosec\ x$ અને $y = cosec^{-1}x$ ના આલેખ બતાવેલ છે.



$y = cosec\,x$

આકૃતિ 2.3 (i)



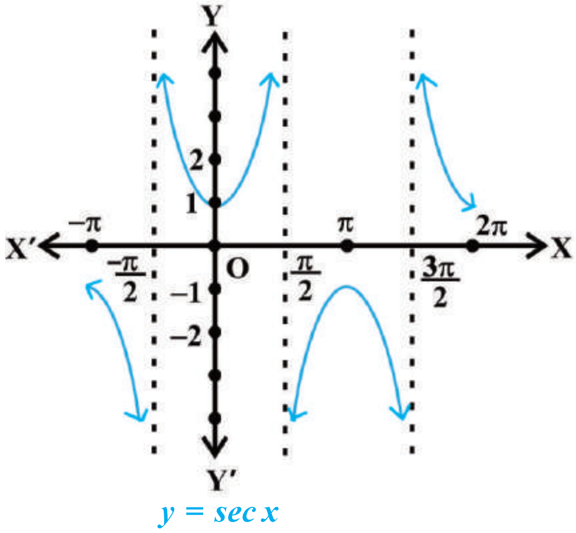
$y = cosec^{-1}x$

આકૃતિ 2.3 (ii)

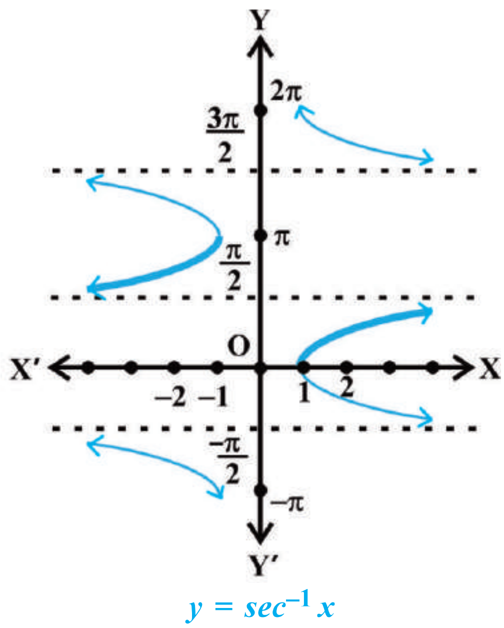
વળી, $sec x = \frac{1}{\cos x}$ હોવાથી $y = sec\ x$ નો પ્રદેશગણ $\mathbf{R} - \{x : x = (2n + 1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbf{Z}\}$ અને વિસ્તારગણ $\mathbf{R} - (-1, 1)$ છે. આનો અર્થ *sec* (*secant*) વિધેય $-1 < y < 1$ સિવાયની y ની પ્રત્યેક કિંમત ધારણ કરશે અને તે $\frac{\pi}{2}$ના અયુગ્મ ગુણકો માટે વ્યાખ્યાયિત નથી. જો *sec* વિધેયના પ્રદેશને $[0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$માં મર્યાદિત કરીએ, તો તે એક-એક અને $\mathbf{R} - (-1, 1)$ માં વ્યાપ્ત બને. ખરેખર તો *sec* વિધેય $[-\pi, 0] - \left\{-\frac{\pi}{2}\right\}$, $[0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$, $[\pi, 2\pi] - \left\{\frac{3\pi}{2}\right\}$, વગેરે મર્યાદિત અંતરાલમાં એક-એક અને $\mathbf{R} - (-1, 1)$ માં વ્યાપ્ત બને. આમ, sec^{-1} વિધેયનો પ્રદેશ $\mathbf{R} - (-1, 1)$ અને વિસ્તાર $[-\pi, 0] - \left\{-\frac{\pi}{2}\right\}$, $[0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$, $[\pi, 2\pi] - \left\{\frac{3\pi}{2}\right\}$ વગેરે એમ વ્યાખ્યાયિત કરી શકાય. પ્રત્યેક અંતરાલને અનુરૂપ sec^{-1} વિધેયની ભિન્ન શાખા મળશે. આપણે $[0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ વિસ્તારને અનુરૂપ મળતી sec^{-1} વિધેયની શાખાને *મુખ્ય કિંમતવાળી શાખા* કહીશું. આમ,

$$sec^{-1} : \mathbf{R} - (-1, 1) \rightarrow [0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$$

આકૃતિ 2.4(i) અને 2.4(ii)માં $y = sec\ x$ અને $y = sec^{-1}x$ ના આલેખ બતાવેલ છે.



આકૃતિ 2.4 (i)



આકૃતિ 2.4 (ii)

અંતમાં આપણે tan^{-1} અને cot^{-1} નો વિચાર કરીશું.

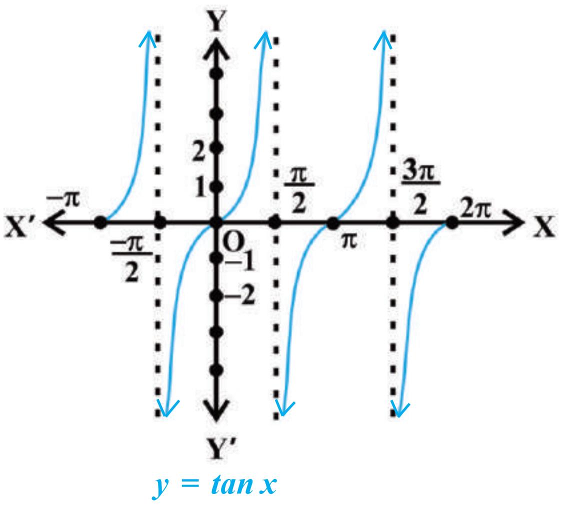
આપણે જાણીએ છીએ કે *tan* વિધેય (*tangent* વિધેય)નો પ્રદેશગણ

$\{x : x \in \mathbf{R}$ અને $x \neq (2n + 1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbf{Z}\}$ અને વિસ્તાર $\mathbf{R}$ છે. અર્થાત્ *tan* વિધેય $\frac{\pi}{2}$ ના અયુગ્મ

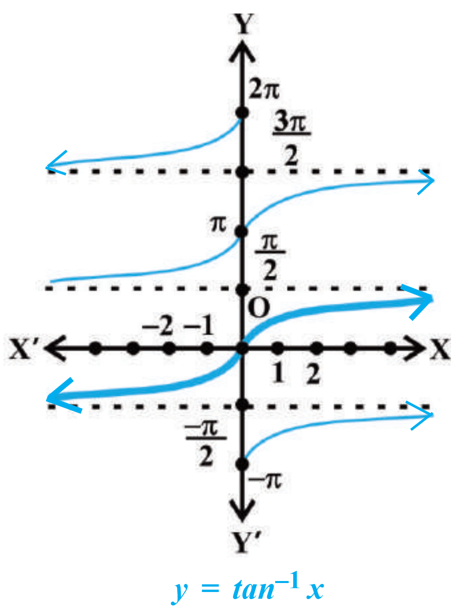
ગુણિતો માટે વ્યાખ્યાયિત નથી. જો આપણે *tan* વિધેયના પ્રદેશ પર મર્યાદા મૂકી તેને $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ લઈએ, તો તે એક-એક અને **R** માં વ્યાપ્ત બને છે. ખરેખર તો, *tan* વિધેય $\left(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ વગેરેમાંના કોઈ પણ મર્યાદિત અંતરાલમાં એક-એક અને **R** માં વ્યાપ્ત બને. આમ, tan^{-1} ને જેનો પ્રદેશ R અને વિસ્તાર $\left(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ વગેરે પૈકીનો કોઈ પણ અંતરાલ હોય એવા વિધેય તરીકે વ્યાખ્યાયિત કરી શકાય. આ અંતરાલોને અનુરૂપ tan^{-1} વિધેયની ભિન્ન શાખાઓ મળે. $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ વિસ્તારને અનુરૂપ મળતી tan^{-1} વિધેયની શાખાને *મુખ્ય કિંમતવાળી શાખા* કહી શકાય. આમ,

$$tan^{-1} : \mathrm{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$y = tan\ x$ અને $y = tan^{-1}x$ ના આલેખ આકૃતિ 2.5(i) અને 2.5(ii)માં દર્શાવેલ છે.



આકૃતિ 2.5 (i)

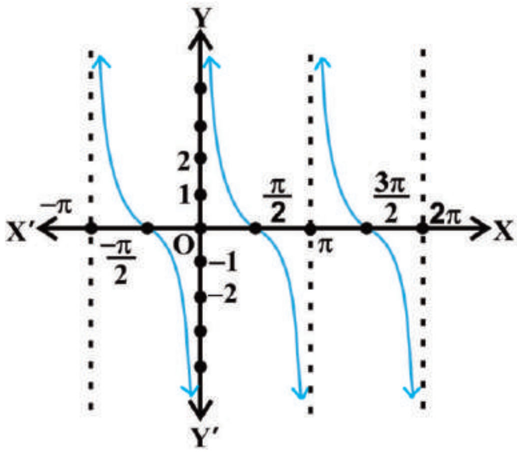


આકૃતિ 2.5 (ii)

આપણે જાણીએ છીએ કે *cot* વિધેય (*cotangent* વિધેય)નો પ્રદેશ $\{x : x \in \mathbf{R}$ અને $x \neq n\pi,\ n \in \mathbf{Z}\}$ તથા વિસ્તાર **R** છે. અર્થાત્ *cotangent* વિધેય π ના પૂર્ણાંક ગુણિતો માટે અવ્યાખ્યાયિત છે. જો *cotangent* વિધેયનો મર્યાદિત પ્રદેશ $(0, \pi)$ લઈએ, તો તે એક-એક અને **R** માં વ્યાપ્ત બને છે. ખરેખર *cotangent* વિધેય મર્યાદિત અંતરાલ $(-\pi, 0)$, $(0, \pi)$, $(\pi, 2\pi)$ વગેરેમાં એક-એક અને R માં વ્યાપ્ત બને. આમ, cot^{-1}ને જેનો પ્રદેશ **R** અને વિસ્તાર $(-\pi, 0)$, $(0, \pi)$, $(\pi, 2\pi)$ વગેરે પૈકીનો કોઈ પણ અંતરાલ હોય એવા વિધેય તરીકે વ્યાખ્યાયિત કરી શકાય. $(0, \pi)$ વિસ્તારને અનુરૂપ મળતી cot^{-1} વિધેયની શાખાને *મુખ્ય કિંમતવાળી શાખા* કહી શકાય. આમ,

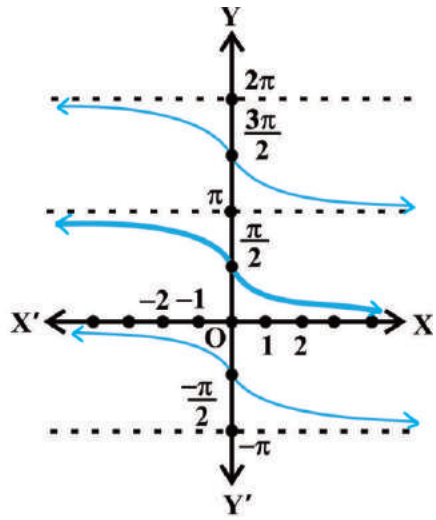
$$cot^{-1} : \mathrm{R} \to (0, \pi)$$

$y = cot\ x$ અને $y = cot^{-1}x$ ના આલેખ આકૃતિ 2.6(i) અને 2.6(ii)માં દર્શાવેલ છે.



$y = cot\,x$

આકૃતિ 2.6 (i)



$y = cot^{-1}\,x$

આકૃતિ 2.6 (ii)

નીચે આપેલ કોષ્ટક ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધેયોને (મુખ્ય કિંમતવાળી શાખા) તેમના પ્રદેશ અને વિસ્તાર સાથે દર્શાવેલ છે :

sin^{-1}	:	$[-1, 1]$	$\rightarrow$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
cos^{-1}	:	$[-1, 1]$	$\rightarrow$	$[0, \pi]$
$cosec^{-1}$	:	$\mathbf{R} - (-1, 1)$	$\rightarrow$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$
sec^{-1}	:	$\mathbf{R} - (-1, 1)$	$\rightarrow$	$[0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$
tan^{-1}	:	$\mathbf{R}$	$\rightarrow$	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
cot^{-1}	:	$\mathbf{R}$	$\rightarrow$	$(0, \pi)$

નોંધ :

(1) $sin^{-1}x$ અને $(sin\,x)^{-1}$ સંબંધી ગેરસમજ ના થવી જોઈએ. હકીકતે, $(sin\,x)^{-1} = \frac{1}{sin\ x}$ અને આ તથ્ય બાકીના ત્રિકોણમિતીય વિધેયો માટે પણ સત્ય છે.

(2) જ્યારે પણ ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધેયની કોઈ શાખાનો ઉલ્લેખ ના કરેલ હોય ત્યારે આપણે તે વિધેયની મુખ્ય કિંમતવાળી શાખા જ સમજીશું.

(3) ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધેયનું મૂલ્ય મુખ્ય કિંમતવાળી શાખાના વિસ્તારમાં હોય, તો તેને આપણે તે ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધિયની *મુખ્ય કિંમત* કહીશું.

હવે, આપણે કેટલાંક ઉદાહરણનો વિચાર કરીશું.

ઉદાહરણ 1 : $sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ની મુખ્ય કિંમત મેળવો.

ઉકેલ : ધારો કે, $sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = y$. આથી, $sin\, y = \frac{1}{\sqrt{2}}$. આપણે જાણીએ છીએ કે, sin^{-1} વિધેયની મુખ્ય કિંમતવાળી શાખાનો વિસ્તાર $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ છે અને $sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

$\therefore$ $sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ની મુખ્ય કિંમત $\frac{\pi}{4}$ છે.

ઉદાહરણ 2 : $cot^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$ની મુખ્ય કિંમત મેળવો.

ઉકેલ : ધારો કે, $cot^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = y$. આથી, $cot\, y = \frac{-1}{\sqrt{3}} = -cot\left(\frac{\pi}{3}\right) = cot\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$

$$= cot\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

આપણે જાણીએ છીએ કે, cot^{-1} વિધેયની મુખ્ય કિંમતવાળી શાખાનો વિસ્તાર $(0, \pi)$ છે અને $cot\frac{2\pi}{3} = \frac{-1}{\sqrt{3}}$.

આથી, $cot^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$ની મુખ્ય કિંમત $\frac{2\pi}{3}$ છે.

સ્વાધ્યાય 2.1

નીચેના પ્રતિવિધેય માટે તેની મુખ્ય કિંમત શોધો :

1. $sin^{-1}\left(\frac{-1}{2}\right)$ **2.** $cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ **3.** $cosec^{-1}(2)$

4. $tan^{-1}(-\sqrt{3})$ **5.** $cos^{-1}\left(\frac{-1}{2}\right)$ **6.** $tan^{-1}(-1)$

7. $sec^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ **8.** $cot^{-1}(\sqrt{3})$ **9.** $cos^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$

10. $cosec^{-1}(-\sqrt{2})$

નીચેની અભિવ્યક્તિઓનું મૂલ્ય મેળવો :

11. $tan^{-1}(1) + cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) + sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$

12. $cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + 2sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

પ્રશ્નો 13 તથા 14 માં વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલ વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

13. જો $sin^{-1}x = y$ હોય, તો

(A) $0 \le y \le \pi$ (B) $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$

(C) $0 < y < \pi$ (D) $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

14. $tan^{-1}\sqrt{3} - sec^{-1}(-2)$ નું મૂલ્ય .... છે.

(A) π (B) $-\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{2\pi}{3}$

2.3 ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધેયોના ગુણધર્મો

આ વિભાગમાં આપણે ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધેયોના કેટલાક અગત્યના ગુણધર્મો સાબિત કરીશું. અહીં, એક સ્પષ્ટ નોંધ કરીએ કે આ ગુણધર્મો ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધેયો તેમને સંગત મુખ્ય કિંમતવાળી શાખા પર વ્યાખ્યાયિત હોય ત્યારે સત્ય છે. કેટલાંક પરિણામો ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધેયોના પ્રદેશનાં તમામ મૂલ્યો માટે સત્ય ના પણ હોય. અલબત્ત, x નાં જે મૂલ્યો માટે ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધેય વ્યાખ્યાયિત હોય તેના માટે જ તે સત્ય હશે. આપણે પ્રદેશના x નાં આવાં મૂલ્યોની વિસ્તૃત ચર્ચા નહીં કરીએ, કારણ કે તે આ પુસ્તકની મર્યાદા બહાર છે.

યાદ કરો કે જો $y = sin^{-1}x$ તો, $x = sin\, y$ અને જો $x = sin\, y$ તો $y = sin^{-1}x$. આમ,

$sin\,(sin^{-1}x) = x,\ x \in [-1, 1]$ અને $sin^{-1}(sin\, x) = x,\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

આ જ વાત બાકીનાં પાંચ ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધેયો માટે પણ સત્ય છે. હવે, આપણે ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધેયોના કેટલાક ગુણધર્મો સાબિત કરીએ :

1. (i) $sin^{-1}\frac{1}{x} = cosec^{-1}x,\ x \geq 1$ અથવા $x \leq -1$

(ii) $cos^{-1}\frac{1}{x} = sec^{-1}x,\quad x \geq 1$ અથવા $x \leq -1$

(iii) $tan^{-1}\frac{1}{x} = cot^{-1}x,\quad x > 0$

પ્રથમ પરિણામ સાબિત કરવા, આપણે $cosec^{-1}x = y$ અર્થાત્ $cosec\, y = x$ લઈએ.

$\therefore\ \frac{1}{x} = sin\, y \qquad (x \neq 0)$

આથી, $sin^{-1}\frac{1}{x} = y$.

અથવા $sin^{-1}\frac{1}{x} = cosec^{-1}x$.

આ જ પ્રમાણે, બાકીના ભાગ સાબિત કરી શકાય.

2. (i) $sin^{-1}(-x) = -sin^{-1}x,\quad x \in [-1, 1]$

(ii) $tan^{-1}(-x) = -tan^{-1}x,\quad x \in \mathbf{R}$

(iii) $cosec^{-1}(-x) = -cosec^{-1}x,\quad |x| \geq 1$

ધારો કે $sin^{-1}(-x) = y$ અર્થાત્ $-x = sin\, y$

આથી, $x = -sin\, y$ અર્થાત્ $x = sin\,(-y)$

આથી, $sin^{-1}x = -y = -sin^{-1}(-x)$

આથી, $sin^{-1}(-x) = -sin^{-1}x$

આ જ પ્રમાણે, બાકીના ભાગ સાબિત કરી શકાય.

3. (i) $\boldsymbol{cos^{-1}(-x) = \pi - cos^{-1}x, \quad x \in [-1, 1]}$

(ii) $\boldsymbol{sec^{-1}(-x) = \pi - sec^{-1}x, \quad |x| \geq 1}$

(iii) $\boldsymbol{cot^{-1}(-x) = \pi - cot^{-1}x, \quad x \in R}$

ધારો કે $cos^{-1}(-x) = y$ અર્થાત્ $-x = cos\,y$

આથી, $x = -cos\,y = cos\,(\pi - y)$

આમ, $cos^{-1}x = \pi - y = \pi - cos^{-1}(-x)$

$\therefore \quad cos^{-1}(-x) = \pi - cos^{-1}x$

આ જ પ્રમાણે, બાકીના ભાગ સાબિત કરી શકાય.

4. (i) $\boldsymbol{sin^{-1}x + cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}, \quad x \in [-1, 1]}$

(ii) $\boldsymbol{tan^{-1}x + cot^{-1}x = \frac{\pi}{2}, \quad x \in R}$

(iii) $\boldsymbol{cosec^{-1}x + sec^{-1}x = \frac{\pi}{2}, \quad |x| \geq 1}$

ધારો કે $sin^{-1}x = y$. આથી, $x = sin\,y = cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right)$

$\therefore \quad cos^{-1}x = \frac{\pi}{2} - y = \frac{\pi}{2} - sin^{-1}x$

આથી, $cos^{-1}x + sin^{-1}x = \frac{\pi}{2}$

આ જ પ્રમાણે, બાકીના ભાગ સાબિત કરી શકાય.

5. (i) $\boldsymbol{tan^{-1}x + tan^{-1}y = tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}, \quad xy < 1}$

(ii) $\boldsymbol{tan^{-1}x - tan^{-1}y = tan^{-1}\frac{x-y}{1+xy}, \quad xy > -1}$

ધારો કે $tan^{-1}x = \theta$ અને $tan^{-1}y = \phi$

આથી, $x = tan\theta$ અને $y = tan\,\phi$

હવે, $tan(\theta + \phi) = \frac{tan\,\theta + tan\,\phi}{1 - tan\,\theta \cdot tan\,\phi} = \frac{x+y}{1-xy}$

આથી, આપણને $\theta + \phi = tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}$ મળશે.

આથી, $tan^{-1}x + tan^{-1}y = tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}$

ઉપરના પરિણામમાં, જો આપણે y ને $-y$ લઈએ તો, બીજું પરિણામ મળે અને y ના બદલે x લઈએ, તો આગળનાં પરિણામો પૈકીનું ત્રીજું પરિણામ મળે.

6. (i) $2tan^{-1}x = sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}$, $|x| \le 1$

(ii) $2tan^{-1}x = cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}$, $x \ge 0$

(iii) $2tan^{-1}x = tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$, $-1 < x < 1$

ધારો કે $tan^{-1}x = y$. આથી, $x = tan\, y$

હવે, $sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2} = sin^{-1}\frac{2\,tany}{1+tan^2y}$

$= sin^{-1}(sin\,2y)$

$= 2y$

$= 2tan^{-1}x$

તથા $cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2} = cos^{-1}\frac{1-tan^2y}{1+tan^2y}$

$= cos^{-1}(cos\,2y)$

$= 2y$

$= 2tan^{-1}x$

(iii) આ જ રીતે, સાબિત કરી શકાય.

આપણે હવે કેટલાંક ઉદાહરણો જોઈએ.

ઉદાહરણ 3 : સાબિત કરો કે,

(i) $sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2}) = 2sin^{-1}x$, $\quad -\frac{1}{\sqrt{2}} \le x \le \frac{1}{\sqrt{2}}$

(ii) $sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2}) = 2cos^{-1}x$, $\quad \frac{1}{\sqrt{2}} \le x \le 1$.

ઉકેલ : (i) ધારો કે, $sin^{-1}x = \theta$. આથી $x = sin\theta$

હવે, $sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2}) = sin^{-1}(2sin\theta\sqrt{1-sin^2\theta})$

$= sin^{-1}(2sin\theta\, cos\theta)$

$= sin^{-1}(sin\,2\theta)$

$= 2\theta$

$= 2sin^{-1}x$

(ii) $x = cos\theta$ લો. ઉપર પ્રમાણેની રીતે આગળ વધતાં, આપણને $sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2}) = 2cos^{-1}x$ મળે.

ઉદાહરણ 4 : સાબિત કરો કે, $tan^{-1}\frac{1}{2} + tan^{-1}\frac{2}{11} = tan^{-1}\frac{3}{4}$.

ઉકેલ : ગુણધર્મ 5(i) પરથી,

ડા.બા. $= tan^{-1}\frac{1}{2} + tan^{-1}\frac{2}{11}$

$= tan^{-1}\frac{\frac{1}{2}+\frac{2}{11}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{2}{11}} = tan^{-1}\frac{15}{20}$

$= tan^{-1}\frac{3}{4}$

$=$ જ.બા.

ઉદાહરણ 5 : $tan^{-1}\left(\frac{cos\,x}{1-sin\,x}\right)$, $-\frac{3\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$નું સાદું રૂપ આપો.

ઉકેલ : અહીં, $tan^{-1}\left(\frac{cos\,x}{1-sin\,x}\right) = tan^{-1}\left[\frac{cos^2\frac{x}{2} - sin^2\frac{x}{2}}{cos^2\frac{x}{2} + sin^2\frac{x}{2} - 2sin\frac{x}{2}\cdot cos\frac{x}{2}}\right]$

$$= tan^{-1}\left[\frac{\left(cos\frac{x}{2} + sin\frac{x}{2}\right)\left(cos\frac{x}{2} - sin\frac{x}{2}\right)}{\left(cos\frac{x}{2} - sin\frac{x}{2}\right)^2}\right]$$

$$= tan^{-1}\left[\frac{cos\frac{x}{2} + sin\frac{x}{2}}{cos\frac{x}{2} - sin\frac{x}{2}}\right]$$

$$= tan^{-1}\left[\frac{1+tan\frac{x}{2}}{1-tan\frac{x}{2}}\right]$$

$$= tan^{-1}\left[tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right] = \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}$$

બીજી રીત : $tan^{-1}\left(\frac{cos\,x}{1-sin\,x}\right) = tan^{-1}\left[\frac{sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{1-cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}\right]$

$$= tan^{-1}\left[\frac{sin\left(\frac{\pi-2x}{2}\right)}{1-cos\left(\frac{\pi-2x}{2}\right)}\right]$$

$$= tan^{-1}\left[\frac{2sin\left(\frac{\pi-2x}{4}\right)cos\left(\frac{\pi-2x}{4}\right)}{2sin^2\left(\frac{\pi-2x}{4}\right)}\right]$$

$$= tan^{-1}\left[cot\left(\frac{\pi-2x}{4}\right)\right]$$

$$= tan^{-1}\left[tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi-2x}{4}\right)\right]$$

$$= tan^{-1}\left[tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}$$

ઉદાહરણ 6 : $cot^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)$, $x > 1$ ને સાદા સ્વરૂપમાં દર્શાવો.

ઉકેલ : અહીં, $x = sec\theta$, તો $\sqrt{x^2-1} = \sqrt{sec^2\theta - 1} = tan\theta$

આથી, $cot^{-1}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = cot^{-1}(cot\,\theta) = \theta = sec^{-1}x$. માંગેલ સાદું સ્વરૂપ છે.

ઉદાહરણ 7 : સાબિત કરો કે, $tan^{-1}x + tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2} = tan^{-1}\left(\frac{3x-x^3}{1-3x^2}\right)$, $|x| < \frac{1}{\sqrt{3}}$.

ઉકેલ : ધારો કે, $x = tan\theta$. આથી, $\theta = tan^{-1}x$.

હવે, જ.બા. $= tan^{-1}\left(\frac{3x-x^3}{1-3x^2}\right)$

$$= tan^{-1}\left(\frac{3tan\theta - tan^3\theta}{1-3tan^2\theta}\right)$$

$$= tan^{-1}(tan\,3\theta)$$

$$= 3\theta$$

$$= 3tan^{-1}x$$

$$= tan^{-1}x + 2tan^{-1}x$$

$$= tan^{-1}x + tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2} = \text{ડા.બા.}$$ (કેમ ?)

ઉદાહરણ 8 : $cos\,(sec^{-1}x + cosec^{-1}x)$, $|x| \geq 1$ની કિંમત શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $cos\,(sec^{-1}x + cosec^{-1}x) = cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

સ્વાધ્યાય 2.2

સાબિત કરો :

1. $3sin^{-1}x = sin^{-1}(3x - 4x^3)$, $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

2. $3cos^{-1}x = cos^{-1}(4x^3 - 3x)$, $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$

3. $tan^{-1}\frac{2}{11} + tan^{-1}\frac{7}{24} = tan^{-1}\frac{1}{2}$

4. $2tan^{-1}\frac{1}{2} + tan^{-1}\frac{1}{7} = tan^{-1}\frac{31}{17}$

નીચેનાં વિધેયોને સાદા સ્વરૂપમાં લખો :

5. $tan^{-1}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$, $x \neq 0$

6. $\tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$, $|x| > 1$

7. $\tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}\right)$, $0 < x < \pi$

8. $\tan^{-1} \left(\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\right)$, $0 < x < \pi$

9. $\tan^{-1} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, $|x| < a$

10. $\tan^{-1} \left(\frac{3a^2x - x^3}{a^3 - 3ax^2}\right)$, $a > 0$; $\frac{-a}{\sqrt{3}} < x < \frac{a}{\sqrt{3}}$

કિંમત શોધો :

11. $\tan^{-1} \left[2\cos\left(2\sin^{-1}\frac{1}{2}\right)\right]$

12. $\cot (\tan^{-1}a + \cot^{-1}a)$

13. $\tan\frac{1}{2}\left[\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2} + \cos^{-1}\frac{1-y^2}{1+y^2}\right]$, $|x| < 1$, $y > 0$ અને $xy < 1$.

14. જો $\sin\left(\sin^{-1}\frac{1}{5} + \cos^{-1}x\right) = 1$, તો x ની કિંમત શોધો.

15. જો $\tan^{-1} \frac{x-1}{x-2} + \tan^{-1} \frac{x+1}{x+2} = \frac{\pi}{4}$, તો x ની કિંમત શોધો.

પ્રશ્ન-ક્રમાંક 16 થી 18 ની અભિવ્યક્તિની કિંમત શોધો :

16. $\sin^{-1}\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

17. $\tan^{-1}\left(\tan\frac{3\pi}{4}\right)$

18. $\tan\left(\sin^{-1}\frac{3}{5} + \cot^{-1}\frac{3}{2}\right)$

પ્રશ્નો 19 થી 21 માં વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલ વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

19. $\cos^{-1}\left(\cos\frac{7\pi}{6}\right) =$ ....

(A) $\frac{7\pi}{6}$ (B) $\frac{5\pi}{6}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{\pi}{6}$

20. $\sin\left(\frac{\pi}{3} - \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right) =$ ....

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) 1

21. $\tan^{-1}\sqrt{3} - \cot^{-1}(-\sqrt{3}) =$ ....

(A) π (B) $-\frac{\pi}{2}$ (C) 0 (D) $2\sqrt{3}$

પ્રકીર્ણ ઉદાહરણો

ઉદાહરણ 9 : $sin^{-1}\left(sin\frac{3\pi}{5}\right)$નું મૂલ્ય શોધો.

ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે, $sin^{-1}(sin\, x) = x$.

આથી, $sin^{-1}\left(sin\frac{3\pi}{5}\right) = \frac{3\pi}{5}$ થાય તેવી અપેક્ષા રાખી શકાય.

પરંતુ, $sin^{-1}x$ની મુખ્ય કિંમતવાળી શાખા $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$માં $\frac{3\pi}{5}$ નથી.

$sin\left(\frac{3\pi}{5}\right) = sin\left(\pi - \frac{2\pi}{5}\right) = sin\frac{2\pi}{5}$ અને $\frac{2\pi}{5} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

આથી, $sin^{-1}\left(sin\frac{3\pi}{5}\right) = sin^{-1}\left(sin\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{2\pi}{5}$.

ઉદાહરણ 10 : સાબિત કરો કે $sin^{-1}\frac{3}{5} - sin^{-1}\frac{8}{17} = cos^{-1}\frac{84}{85}$.

ઉકેલ : ધારો કે $sin^{-1}\frac{3}{5} = x$ અને $sin^{-1}\frac{8}{17} = y$

આથી, $sin\, x = \frac{3}{5}$ અને $sin\, y = \frac{8}{17}$

હવે, $cos\, x = \sqrt{1 - sin^2 x} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$

અને $cos\, y = \sqrt{1 - sin^2 y} = \sqrt{1 - \frac{64}{289}} = \frac{15}{17}$.

હવે, $cos(x - y) = cos\, x \cdot cos\, y + sin\, x \cdot sin\, y$

$$= \frac{4}{5} \times \frac{15}{17} + \frac{3}{5} \times \frac{8}{17} = \frac{84}{85}$$

$\therefore \quad x - y = cos^{-1}\frac{84}{85}$

આથી, $sin^{-1}\frac{3}{5} - sin^{-1}\frac{8}{17} = cos^{-1}\frac{84}{85}$

ઉદાહરણ 11 : સાબિત કરો કે $sin^{-1}\frac{12}{13} + cos^{-1}\frac{4}{5} + tan^{-1}\frac{63}{16} = \pi$.

ઉકેલ : ધારો કે $sin^{-1}\frac{12}{13} = x$, $cos^{-1}\frac{4}{5} = y$, $tan^{-1}\frac{63}{16} = z$

આથી, $sin\, x = \frac{12}{13}$, $cos\, y = \frac{4}{5}$, $tan\, z = \frac{63}{16}$

$\therefore \quad cos\, x = \frac{5}{13}$, $sin\, y = \frac{3}{5}$, $tan\, x = \frac{12}{5}$ અને $tan\, y = \frac{3}{4}$

હવે, $tan(x + y) = \dfrac{tan\ x + tan\ y}{1 - tan\ x \cdot tan\ y}$

$$= \dfrac{\frac{12}{5} + \frac{3}{4}}{1 - \frac{12}{5} \times \frac{3}{4}} = -\dfrac{63}{16}$$

આથી, $tan(x + y) = -tan\ z$

અર્થાત્ $tan(x + y) = tan\ (-z)$ અથવા

$tan(x + y) = tan\ (\pi - z)$

$\therefore\ x + y = -z$ અથવા $x + y = \pi - z$

x, y અને z ધન હોવાથી, $x + y \neq -z$

આથી, $x + y + z = \pi$ અથવા

$$sin^{-1}\frac{12}{13} + cos^{-1}\frac{4}{5} + tan^{-1}\frac{63}{16} = \pi.$$

ઉદાહરણ 12 : $tan^{-1}\left[\dfrac{a\ cos\ x - b\ sin\ x}{b\ cos\ x + a\ sin\ x}\right]$નું સાદું રૂપ આપો, જ્યાં $\dfrac{a}{b}tan\ x > -1$.

ઉકેલ : અહીં $tan^{-1}\left[\dfrac{a\ cos\ x - b\ sin\ x}{b\ cos\ x + a\ sin\ x}\right] = tan^{-1}\left[\dfrac{\dfrac{a\ cos\ x - b\ sin\ x}{b\ cos\ x}}{\dfrac{b\ cos\ x + a\ sin\ x}{b\ cos\ x}}\right]$

$$= tan^{-1}\left[\dfrac{\frac{a}{b} - tan\ x}{1 + \frac{a}{b}tan\ x}\right] = tan^{-1}\frac{a}{b} - tan^{-1}(tan\ x)$$

$$= tan^{-1}\frac{a}{b} - x$$

ઉદાહરણ 13 : ઉકેલો : $tan^{-1}2x + tan^{-1}3x = \frac{\pi}{4}$.

ઉકેલ : અહીં, $tan^{-1}2x + tan^{-1}3x = \frac{\pi}{4}$

$\therefore\ tan^{-1}\left(\dfrac{2x + 3x}{1 - 2x \times 3x}\right) = \dfrac{\pi}{4}$

એટલે કે $tan^{-1}\left(\dfrac{5x}{1 - 6x^2}\right) = \dfrac{\pi}{4}$

$\therefore\ \dfrac{5x}{1 - 6x^2} = tan\dfrac{\pi}{4} = 1$

$\therefore\ 6x^2 + 5x - 1 = 0$ અર્થાત્ $(6x - 1)(x + 1) = 0$

આથી, $x = \frac{1}{6}$ અથવા $x = -1$.

$x = -1$ મૂકતાં, ડા.બા.નું મૂલ્ય ઋણ આવતું હોવાથી તે સમીકરણનું સમાધાન કરશે નહિ. આથી $x = \frac{1}{6}$ જ આપેલ સમીકરણનો ઉકેલ છે.

પ્રકીર્ણ સ્વાધ્યાય 2

નીચેનાં પ્રતિવિધેયનાં મૂલ્ય શોધો :

1. $cos^{-1}\left(cos\frac{13\pi}{6}\right)$ **2.** $tan^{-1}\left(tan\frac{7\pi}{6}\right)$

સાબિત કરો :

3. $2sin^{-1}\frac{3}{5} = tan^{-1}\frac{24}{7}$

4. $sin^{-1}\frac{8}{17} + sin^{-1}\frac{3}{5} = tan^{-1}\frac{77}{36}$

5. $cos^{-1}\frac{4}{5} + cos^{-1}\frac{12}{13} = cos^{-1}\frac{33}{65}$

6. $cos^{-1}\frac{12}{13} + sin^{-1}\frac{3}{5} = sin^{-1}\frac{56}{65}$

7. $tan^{-1}\frac{63}{16} = sin^{-1}\frac{5}{13} + cos^{-1}\frac{3}{5}$

8. $tan^{-1}\frac{1}{5} + tan^{-1}\frac{1}{7} + tan^{-1}\frac{1}{3} + tan^{-1}\frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$

સાબિત કરો :

9. $tan^{-1}\sqrt{x} = \frac{1}{2}cos^{-1}\left[\frac{1-x}{1+x}\right]$, $x \in [0, 1]$

10. $cot^{-1}\left[\frac{\sqrt{1+sin\,x}+\sqrt{1-sin\,x}}{\sqrt{1+sin\,x}-\sqrt{1-sin\,x}}\right] = \frac{x}{2}$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$

11. $tan^{-1}\left[\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right] = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}cos^{-1}x$, $-\frac{1}{\sqrt{2}} \le x \le 1$ [**સૂચન :** $x = cos2\theta$ લો.]

12. $\frac{9\pi}{8} - \frac{9}{4}sin^{-1}\frac{1}{3} = \frac{9}{4}sin^{-1}\frac{2\sqrt{2}}{3}$

નીચેનાં સમીકરણ ઉકેલો :

13. $2tan^{-1}(cos\ x) = tan^{-1}(2cosec\ x)$

14. $tan^{-1}\frac{1-x}{1+x} = \frac{1}{2}tan^{-1}x$ $(x > 0)$

પ્રશ્નો 15 થી 17 માં વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલ વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

15. $sin\,(tan^{-1}x)$, $|x| < 1$ = ...

(A) $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ (B) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (C) $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ (D) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

16. $sin^{-1}(1-x) - 2sin^{-1}x = \frac{\pi}{2}$, તો $x =$ ....

(A) $0, \frac{1}{2}$ (B) $1, \frac{1}{2}$ (C) 0 (D) $\frac{1}{2}$

17. $tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) - tan^{-1}\frac{x-y}{x+y} =$ ....

(A) $\frac{\pi}{2}$ (B) $\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{4}$ (D) $\frac{3\pi}{4}$

સારાંશ

- ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધેયના પ્રદેશ અને વિસ્તાર (મુખ્ય કિંમતવાળી શાખા) નીચેના કોષ્ટકમાં દર્શાવેલ છે :

વિધેય	પ્રદેશ	વિસ્તાર (મુખ્ય કિંમતવાળી શાખા)
$y = sin^{-1}x$	$[-1, 1]$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
$y = cos^{-1}x$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$
$y = cosec^{-1}x$	$\mathbf{R} - (-1, 1)$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$
$y = sec^{-1}x$	$\mathbf{R} - (-1, 1)$	$[0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$
$y = tan^{-1}x$	$\mathbf{R}$	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
$y = cot^{-1}x$	$\mathbf{R}$	$(0, \pi)$

- $sin^{-1}x$ ને ભૂલથી $(sin\,x)^{-1}$ તરીકે ના લેવાય. ખરેખર $(sin\,x)^{-1} = \frac{1}{sin\,x}$ અને આ જ વાત બાકીનાં ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધેયો માટે સત્ય છે.
- ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધેયનું મૂલ્ય મુખ્ય શાખામાં હોય, તો તેને તે ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધેયની *મુખ્ય કિંમત* કહેવાય.
- યોગ્ય પ્રદેશનાં મૂલ્યો માટે,
    - $y = sin^{-1}x \Rightarrow x = sin\,y$
    - $x = sin\,y \Rightarrow y = sin^{-1}x$
    - $sin\,(sin^{-1}x) = x$
    - $sin^{-1}(sin\,x) = x$
    - $sin^{-1}\frac{1}{x} = cosec^{-1}x$
    - $cos^{-1}(-x) = \pi - cos^{-1}x$
    - $cos^{-1}\frac{1}{x} = sec^{-1}x$
    - $cot^{-1}(-x) = \pi - cot^{-1}x$
    - $tan^{-1}\frac{1}{x} = cot^{-1}x$
    - $sec^{-1}(-x) = \pi - sec^{-1}x$

- $\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1} x$
- $\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1} x$
- $\tan^{-1} x + \cot^{-1} x = \frac{\pi}{2}$
- $\operatorname{cosec}^{-1}(-x) = -\operatorname{cosec}^{-1} x$
- $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$
- $\operatorname{cosec}^{-1} x + \sec^{-1} x = \frac{\pi}{2}$
- $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \tan^{-1} \frac{x+y}{1-xy}$
- $2\tan^{-1} x = \tan^{-1} \frac{2x}{1-x^2}$
- $\tan^{-1} x - \tan^{-1} y = \tan^{-1} \frac{x-y}{1+xy}$
- $2\tan^{-1} x = \sin^{-1} \frac{2x}{1+x^2} = \cos^{-1} \frac{1-x^2}{1+x^2}$

Historical Note

The study of trigonometry was first started in India. The ancient Indian Mathematicians, ***Aryabhatta*** (C.E. 476), ***Brahmagupta*** (C.E. 598), ***Bhaskara I*** (C.E. 600) and ***Bhaskara II*** (C.E. 1114) got important results of trigonometry. All this knowledge went from India to Arabia and then from there to Europe. The Greeks had also started the study of trigonometry but their approach was so clumsy that when the Indian approach became known, it was immediately adopted throughout the world.

In India, the predecessor of the modern trigonometric functions, known as the sine of an angle, and the introduction of the sine function represents one of the main contribution of the ***siddhantas*** (Sanskrit astronomical works) to mathematics.

Bhaskara I (about C.E. 600) gave formulae to find the values of sine functions for angles more than 90°. A sixteenth century Malayalam work ***Yuktibhasa*** contains a proof for the expansion of sin (A + B). Exact expression for sines or cosines of 18°, 36°, 54°, 72°, etc., were given by ***Bhaskara II***.

The symbols $\sin^{-1} x$, $\cos^{-1} x$, etc., for $arc \sin x$, $arc \cos x$, etc., were suggested by the astronomer Sir ***John F.W. Hersehel*** (C.E. 1813) The name of ***Thales*** (about B.C.E. 600) is invariably associated with height and distance problems. He is credited with the determination of the height of a great pyramid in Egypt by measuring shadows of the pyramid and an auxiliary staff (or gnomon) of known height, and comparing the ratios :

$$\frac{H}{S} = \frac{h}{s} = \tan \text{ (sun's altitude)}$$

Thales is also said to have calculated the distance of a ship at sea through the proportionality of sides of similar triangles. Problems on height and distance using the similarity property are also found in ancient Indian works.

પ્રકરણ 3

શ્રેણિક

❖ *The essence of Mathematics lies in its freedom. — CANTOR* ❖

3.1 પ્રાસ્તાવિક

ગણિતની વિવિધ શાખાઓમાં શ્રેણિકનું જ્ઞાન હોવું જરૂરી છે. ગણિતમાં શ્રેણિક ખૂબ જ શક્તિશાળી શસ્ત્ર છે. ગણિતનું આ સાધન બીજી સરળ રીતોની તુલનામાં આપણા કાર્યને અત્યંત સરળ બનાવે છે. સુરેખ સમીકરણની સંહતિના ઉકેલ માટેની સઘન અને સરળ રીતોના પ્રયત્નના ફળ સ્વરૂપે શ્રેણિકની સંકલ્પનાનું સર્જન થયું. સુરેખ સમીકરણની સંહતિના ઉકેલ માટેના સહગુણકોની રજૂઆત પૂરતો જ શ્રેણિકનો ઉપયોગ નથી, પરંતુ શ્રેણિકની સંકલ્પના આ ઉપયોગથી પણ ખૂબ દૂર સુધી જાય છે. શ્રેણિક સંકેત અને પ્રક્રિયાઓનો ઉપયોગ અંગત કમ્પ્યૂટર માટે વીજાણુ કાર્યપત્રક કાર્યક્રમમાં થાય છે. તેના પરિપાક રૂપે અંદાજપત્રક, વેચાણની પ્રક્ષેપણ ધારણા, અંદાજિત કિંમત, પ્રયોગોનાં પરિણામોનું વિશ્લેષણ જેવા ઉદ્યોગ અને વિજ્ઞાનનાં વિવિધ ક્ષેત્રોમાં શ્રેણિકનો ઉપયોગ થાય છે. તદુપરાંત સમતલમાં મોટવણી, પરિભ્રમણ અને પરાવર્તન જેવી ભૌતિક પ્રક્રિયાઓનું પણ શ્રેણિકો દ્વારા નિરૂપણ કરી શકાય છે. શ્રેણિકનો ઉપયોગ સંકેતલિપિમાં પણ થાય છે. આ ગાણિતિક સાધનનો ઉપયોગ વિજ્ઞાનની માત્ર નિશ્ચિત શાખાઓમાં જ થાય છે, એટલું જ નહિ, પરંતુ જનીનવિજ્ઞાન, અર્થશાસ્ત્ર, સામાજિક વિજ્ઞાન, આધુનિક મનોવિજ્ઞાન અને ઔદ્યોગિક સંચાલનમાં પણ તેનો ઉપયોગ થાય છે.

આ પ્રકરણમાં આપણે શ્રેણિકના સિદ્ધાંતો અને શ્રેણિક બીજગણિતને કેવી રીતે રસપ્રદ અને માહિતીપ્રચુર બનાવી શકાય તે જોઈશું.

3.2 શ્રેણિક

ધારો કે આપણે રાધા પાસે 15 નોટબુક છે એવી માહિતી દર્શાવવી છે. $[\ ]$ ની અંદરના ભાગમાં રહેલ સંખ્યા એ રાધા પાસેની નોટબુકની સંખ્યા દર્શાવે છે તેવી સમજણ સાથે આપણે આ માહિતી $[15]$ તરીકે દર્શાવીશું. હવે, આપણે રાધા પાસે 15 નોટબુક અને 6 પેન છે તેમ દર્શાવવું છે. આપણે $[\ ]$ માં પ્રથમ સંખ્યા રાધા પાસેની નોટબુકની સંખ્યા અને બીજી સંખ્યા એ પેનની સંખ્યા દર્શાવે છે તેવી સમજણ સાથે આપણે તેને $[15 \quad 6]$ થી અભિવ્યક્ત કરીશું. ચાલો, આપણે હવે રાધા અને તેના બે મિત્ર ફૌઝિઆ અને સિમરન પાસેની નોટબુક અને પેનની નીચે આપેલી માહિતીને અભિવ્યક્ત કરવા ઇચ્છીએ છીએ.

રાધા પાસે 15 નોટબુક અને 6 પેન

ફૌઝિઆ પાસે 10 નોટબુક અને 2 પેન

અને સિમરન પાસે 13 નોટબુક અને 5 પેન છે.

હવે, આ માહિતીને કોષ્ટક સ્વરૂપમાં નીચે પ્રમાણે ગોઠવી શકાય :

	નોટબુક	પેન
રાધા	15	6
ફૌઝિઆ	10	2
સિમરન	13	5

અને તેને

$$\begin{array}{cl} \begin{bmatrix} 15 & 6 \\ 10 & 2 \\ 13 & 5 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow \text{પ્રથમ હાર (First row)} \\ \leftarrow \text{દ્વિતીય હાર (Second row)} \\ \leftarrow \text{તૃતીય હાર (Third row)} \end{array} \\ \begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ \text{પ્રથમ સ્તંભ} & \text{દ્વિતીય સ્તંભ} \\ \text{(First} & \text{(Second} \\ \text{Column)} & \text{Column)} \end{array} & \end{array}$$

અથવા

	રાધા	ફૌઝિઆ	સિમરન
નોટબુક	15	10	13
પેન	6	2	5

પ્રમાણે અભિવ્યક્ત કરી શકાય.

આ માહિતીને

$$\begin{array}{cl} \begin{bmatrix} 15 & 10 & 13 \\ 6 & 2 & 5 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow \text{પ્રથમ હાર (First row)} \\ \leftarrow \text{દ્વિતીય હાર (Second row)} \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{પ્રથમ સ્તંભ} & \text{દ્વિતીય સ્તંભ} & \text{તૃતીય સ્તંભ} \\ \text{(First} & \text{(Second} & \text{(Third} \\ \text{Column)} & \text{Column)} & \text{Column)} \end{array} & \end{array}$$

પ્રમાણે પણ રજૂ કરી શકાય.

પ્રથમ ગોઠવણીમાં, પ્રથમ સ્તંભના સભ્યો એ અનુક્રમે રાધા, ફૌઝિઆ અને સિમરન પાસેની નોટબુકની સંખ્યા દર્શાવે છે અને બીજા સ્તંભના સભ્યો એ અનુક્રમે રાધા, ફૌઝિઆ અને સિમરન પાસેની પેનની સંખ્યા દર્શાવે છે.

એ જ રીતે, બીજી ગોઠવણીમાં, પ્રથમ હારના સભ્યો એ અનુક્રમે રાધા, ફૌઝિઆ અને સિમરન પાસેની નોટબુકની સંખ્યા દર્શાવે છે. બીજી હારના ઘટકો એ અનુક્રમે રાધા, ફૌઝિઆ અને સિમરન પાસેની પેનની સંખ્યા દર્શાવે છે. ઉપર પ્રમાણેની કરેલી ગોઠવણી અથવા પ્રદર્શનને ***શ્રેણિક (Matrix)*** કહે છે. ઔપચારિક રીતે, આપણે શ્રેણિકની વ્યાખ્યા આ પ્રમાણે આપીશું :

વ્યાખ્યા 1 : સંખ્યાઓ અથવા વિધેયોની ક્રમમાં લંબચોરસ સારણીને શ્રેણિક (Matrix) કહે છે. સંખ્યાઓ અથવા વિધેયોને શ્રેણિકના સભ્યો અથવા ઘટકો કહે છે.

શ્રેણિકને આપણે કેપિટલ અંગ્રેજી મૂળાક્ષરથી દર્શાવીશું. શ્રેણિકનાં કેટલાંક ઉદાહરણો નીચે આપ્યાં છે :

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 0 & \sqrt{5} \\ 3 & 6 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 2+i & 3 & -\frac{1}{2} \\ 3.5 & -1 & 2 \\ \sqrt{3} & 5 & \frac{5}{7} \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1+x & x^3 & 3 \\ \cos x & \sin x + 2 & \tan x \end{bmatrix}$$

ઉપરનાં ઉદાહરણોમાં, શ્રેણિકના સમક્ષિતિજ રેખામાં આવેલા ઘટકો શ્રેણિકની હાર અને શિરોલંબ રેખામાં આવેલા ઘટકો સ્તંભની રચના કરે છે તેમ કહીશું. આમ શ્રેણિક A ને 3 હાર અને 2 સ્તંભ, B ને 3 હાર અને 3 સ્તંભ જ્યારે Cને 2 હાર અને 3 સ્તંભ છે.