11

رقبے
Areas

11.1 تمہید

کیا آپ نے اپنے گاؤں یا شہر کے اطراف زرعی زمینات دیکھی ہیں؟ ان زمینات کو مختلف کسانوں کے درمیان تقسیم کیا گیا ہے اس طرح یہاں پر کئی کھیت ہیں کیا ان کے رقبے مساوی ہیں؟ اگر ایک کھیت کو مزید چند اشخاص میں بانٹ دیا جائے تو اس کو وہ کس طرح تقسیم کریں گے؟ اگر وہ اس کھیت کا مساوی رقبہ لینا چاہتے ہوں تب وہ کیا کر سکتے ہیں؟

کسان اس کے کھیت کے لئے درکار کھاد اور بیج کی مقدار کو کس طرح محسوب کرتا ہے؟ کیا کھیت کے رقبے اس کے لئے درکار کھاد کی مقدار میں کچھ تعلق ہوتا ہے یا نہیں؟

ابتداء میں جیومیٹری کی تعلیم کی افادیت واہمیت سب سے زیادہ زراعتی شعبہ کی ضرورت کی وجہ سے ہوئی جس میں زمین کی پیمائش کرنا اور اس کو متناسب حصوں میں تقسیم کرنا اور کھیتوں کے حدود کی حد بندی وغیرہ کے لئے جیومٹری کا استعمال کیا گیا۔

تاریخ سے ہمیں اس بات کا پتہ چلتا ہے کہ دریائے نیل کے طوفان مصر کے بعد زمین کے خطوں کی نشاندہی کا آغاز ہوا۔ ان میں سے کچھ کھیتوں کی شکلیں مربع، مستطیل، منحرف اور متوازی الاضلاع کے علاوہ چند غیر منتظم اشکال کی تھیں۔

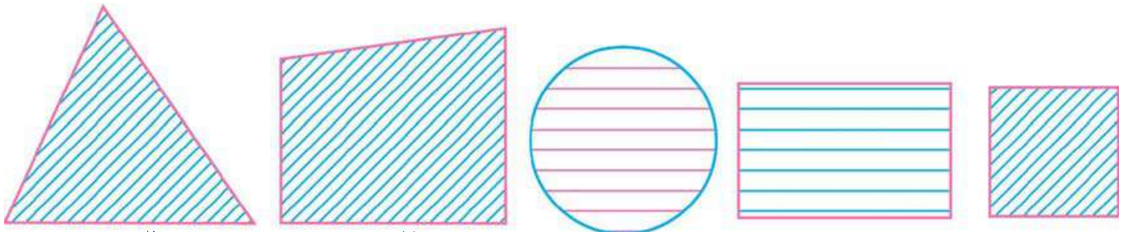
ان بنیادی اشکال کے لئے ان کا رقبہ معلوم کرنے کے لئے مختلف پیمائشات سے اصول اخذ کئے گئے۔ ہم اس باب میں ان میں سے چند کے بارے میں پڑھیں گے۔ ہم سیکھیں گے کہ کیسے مثلث، مربع، متوازی الاضلاع، مستطیل اور چار ضلعی کے رقبوں کو ضابطے کے استعمال سے معلوم کیا جاتا ہے۔

ان کے علاوہ ہم ان ضابطوں کے بنیادی اصولوں کو بیان کریں گے اور کس طرح ان کو اخذ کیا جاتا ہے اس پر بھی مباحثہ کریں گے۔

''رقبہ'' سے ہم کیا مراد لیتے ہیں؟

11.2 مستوی قطعوں کے رقبے

اب آپ اعادہ کر سکتے ہیں کہ ''ایک سادہ بند مستوی جو کسی شکل کا حصہ ہو اور اس شکل کے تناظر میں مستوی قطعہ کہلاتا ہو'' اس مستوی قطعے کی مقدار یا پیمائش اس کا ''رقبہ'' کہلاتا ہے۔

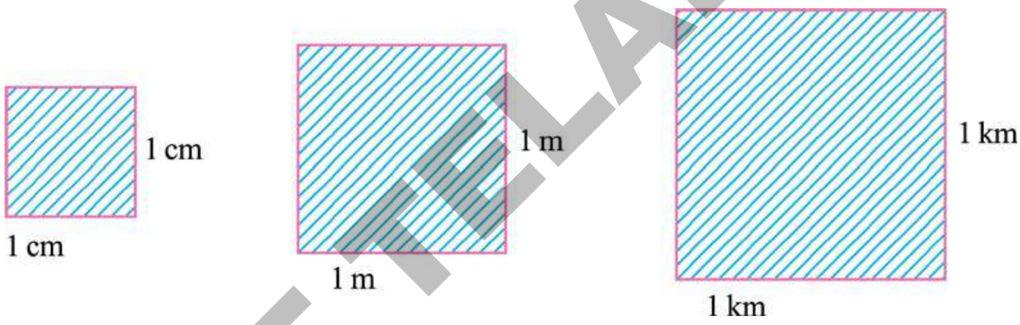


مربعی قطعہ　مستطیلی قطعہ　دائروی قطعہ　چار ضلعی قطعہ　مثلثی قطعہ

ایک مستوی قطعہ، اندرونی حصے اور اس کے حدود پر مشتمل ہوتا ہے۔ ہم ان کے رقبوں کی پیمائش کس طرح کرتے ہیں؟ ان قطعوں کی پیمائش کی مقدار (رقبے) کو ہمیشہ مثبت حقیقی قدر میں ظاہر کرتے ہیں۔ جیسا کہ $10cm^2$، $215m^2$ اور $2km^2$، 3 ہیکٹر وغیرہ۔ اس طرح ہم کہہ سکتے ہیں کہ کسی شکل کا رقبہ عدد ہوتا ہے (جو کسی اکائی رقبہ کے ساتھ لی گئی مقدار ہے) جو ایک بند مستوی شکل سے مربوط ہوتا ہے۔

اکائی رقبہ دراصل ایک مربع کا رقبہ ہوتا ہے جس کا ضلع اکائی طول پر مشتمل ہوتا ہے۔ اس طرح ''مربع سمر'' یا ($1\ cm^2$) یعنی ایسے کھینچے گئے مربع کا رقبہ ہے جس کے ضلع کا طول ایک سمر ہوتا ہے۔

اصطلاحاً مربع میٹر ($1m^2$)، مربع کلومیٹر ($1km^2$) مربع ملی میٹر ($1mm^2$) کو اُسی طرز پر سمجھا جاتا ہے۔

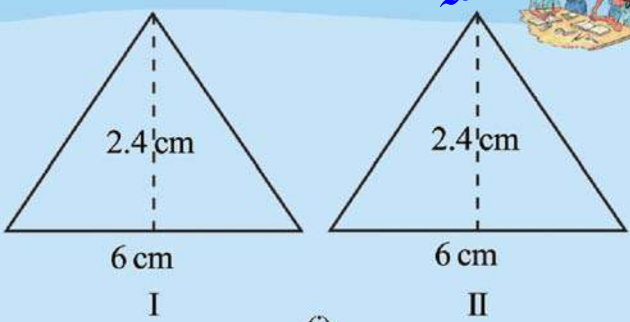


پچھلے اسباق میں ہم متماثل اشکال سے متعلق واقفیت حاصل کر چکے ہیں۔ اشکال اس وقت متماثل ہوتی ہیں جب ان کی شکل یکساں اور جسامت دونوں مساوی ہوں۔

مشغلہ

متصلہ شکل I اور II کا مشاہدہ کیجیے ان دو اشکال کا رقبہ معلوم کیجیے؟ کیا ان کے رقبے مساوی ہیں؟

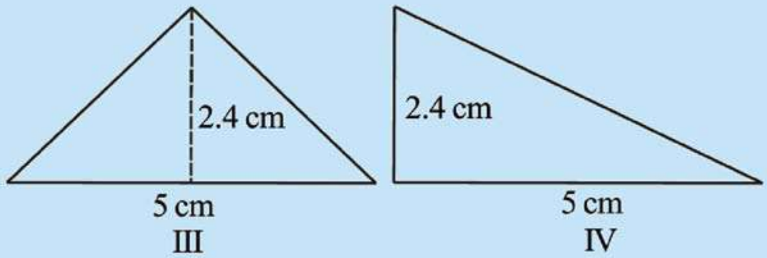
ان اشکال کو کاغذ پر بنائیے اور ان کو کاٹ کر شکل I کو شکل II پر رکھئے۔ کیا یہ ایک دوسرے پر منطبق ہوتی ہیں کیا یہ اشکال متماثل ہیں؟



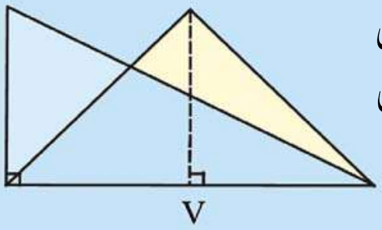
(i)

اشکال III اور IV کا مشاہدہ کیجئے

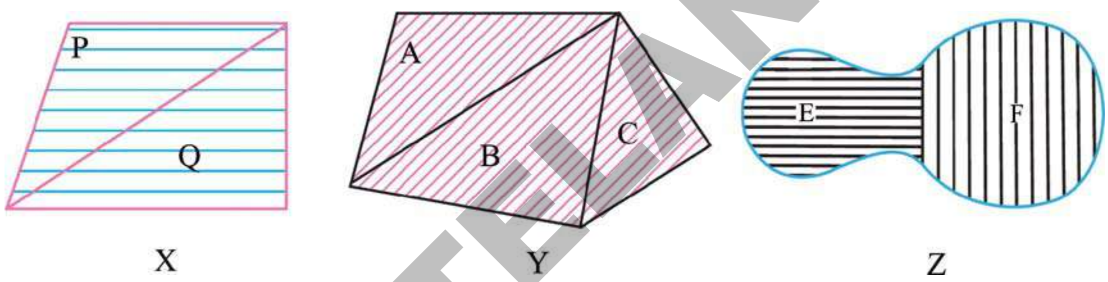
ان دونوں کا رقبہ معلوم کیجئے؟ آپ کیا نتیجہ اخذ کرتے ہیں؟ کیا یہ متماثل مثلثات ہیں؟ اب ان اشکال کو کاغذ پر بنائیے اور ان کو کاٹ کر ایک دوسرے پر اس طرح رکھیں کہ ان



کے قاعدے ایک دوسرے پر منطبق ہو (مساوی طول والا ضلع) جیسا کہ شکل V میں بتلایا گیا ہے۔ کیا وہ ایک دوسرے پر منطبق ہوتے ہیں؟



ہم اس نتیجے پر پہنچتے ہیں کہ اشکال I اور II متماثل ہیں اور رقبوں میں بھی مساوی ہیں لیکن اشکال III اور IV رقبوں میں مساوی ہیں لیکن متماثل نہیں ہیں۔ آیئے نیچے دی گئی اشکال پر غور کریں۔



آپ ان اشکال میں مشاہدہ کرسکتے ہیں کہ مستوی قطعے X، Y اور Z مزید دو یا دو سے زیادہ مستوی قطعوں پر مشتمل ہیں۔ شکل X میں ہم دیکھ سکتے ہیں کہ

شکل Q کا رقبہ + شکل P کا رقبہ = شکل X کا رقبہ ∴

اسی طرح

(C) کا رقبہ + (B) کا رقبہ + (A) کا رقبہ = Y کا رقبہ ∴

(F) کا رقبہ + (E) کا رقبہ = Z کا رقبہ ∴

اس طرح کسی شکل کا رقبہ ایک مقدار ہے (چند اکائیوں میں) جو اس شکل میں موجود بند مستوی حصوں کے علاوہ ان کی خصوصیات پر مشتمل ہوتا ہے۔

(نوٹ: اب ہم شکل X کے رقبہ کو Area (X) کے بجائے صرف Ar(X) سے ظاہر کریں گے۔)

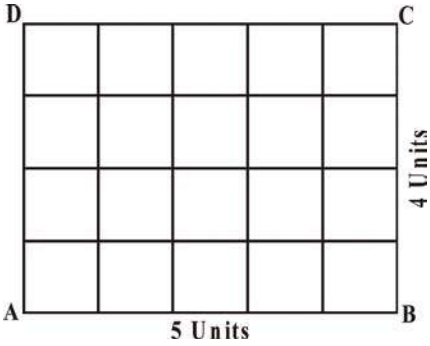
(i) دو متماثل اشکال کا رقبہ مساوی ہوتا ہے

اگر A اور B دو متماثل اشکال ہیں تب Ar(A)=Ar(B)

(ii) شکل کا رقبہ اس کے متناہی حصوں کے رقبوں کے مجموعہ کے مساوی ہوتا ہے۔ اگر مستوی شکل X جو دو غیر منطبق مستوی قطعوں p اور q پر مشتمل ہے تب ar (X) = ar (P) + ar(Q)

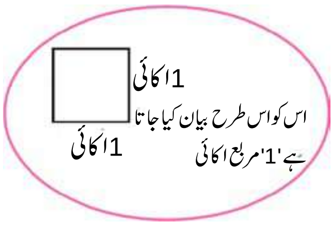
11.3 مستطیل کا رقبہ

اگر مستطیل کے طول میں موجود اکائیوں کی تعداد کو اس کے عرض میں موجود اکائیوں کی تعداد سے ضرب دینے پر مربع اکائیوں کی تعداد حاصل ہوتی ہے۔ جو مستطیل کا رقبہ کہلاتی ہے۔



فرض کرو کہ ABCD ایک مستطیل کو ظاہر کرتا ہے۔ جس کا طول AB، 5 اکائیاں ہے اور عرض BC، 4 اکائیاں ہے۔

طول AB کو 5 مساوی حصوں میں اور عرض BC کو 4 مساوی حصوں میں تقسیم کیجیے۔ اور ان ضلعوں پر منقسم نقاط سے متوازی خطوط کھینچیے۔ مستطیل میں ان خطوط سے حاصل ہونے والا ہر ایک قطعہ ایک مربع اکائی کو ظاہر کرتا ہے (کیوں؟)



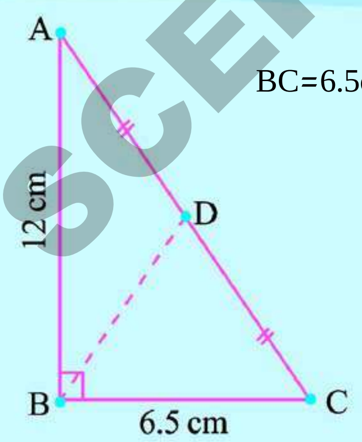
∴ مستطیل (5 اکائیاں × 4 اکائیاں) پر مشتمل ہے۔ اس طرح مستطیل کا رقبہ 20 مربع اکائیاں ہے۔

اسی طرح اگر طول ' a ' اکائیاں اور عرض ' b ' اکائیاں ہو تب مستطیل کا رقبہ ' ab ' مربع اکائیاں ہوتا ہے۔ یعنی ''طول × عرض'' مربع اکائیوں سے مستطیل کا رقبہ حاصل ہوتا ہے۔

سوچیے، مباحثہ کیجیے اور لکھیے

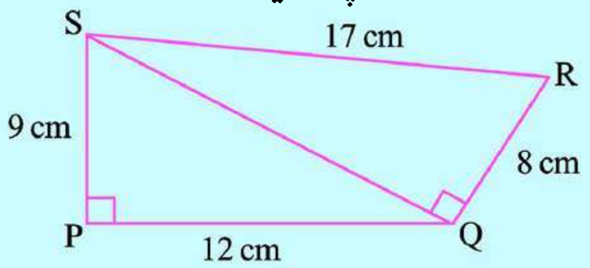
1. اگر 1cm کو 5m سے ظاہر کیا جائے، تب 6 مربع سمر رقبے کو اس کی حقیقی پیمائش میں ظاہر کیجیے۔
2. حنا $1 sq.m = 100 sq.cm$ کہتی ہے۔ کیا آپ اُس کے جواب سے متفق ہیں؟ وضاحت کیجیے۔

مشق - 11.1

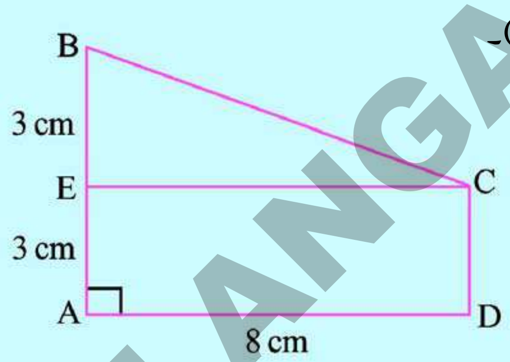


1. ΔABC میں $\angle ABC = 90^0$، AD=DC، AB=12cm اور BC=6.5cm تب ΔADB کا رقبہ معلوم کیجیے۔

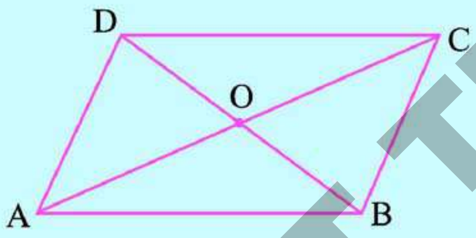
2. مستطیل PQRS کا رقبہ معلوم کیجئے جس میں $\angle QPS = \angle SQR = 90^{o}$، PQ=12cm، PS=9، QR=8cm اور SR=17cm ہیں۔(اشارہ: PQRS دوحصوں پر مشتمل ہیں)



3. شکل میں دیئے گئے منحرف ABCD کا رقبہ معلوم کیجئے جس میں ADCE مستطیل ہے۔(اشارہ: ABCD دوحصوں پر مشتمل ہے)۔

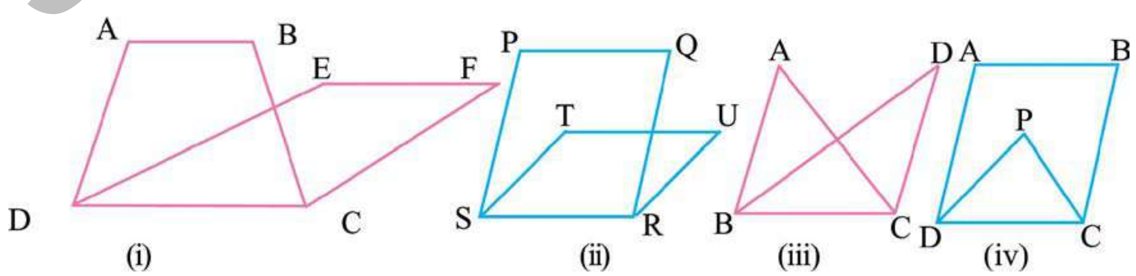


4. متوازی الاضلاع ABCD میں اس کے وتر AC اور BD نقطہ ' 0 ' پر ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں۔ثابت کیجئے کہ $ar(\Delta AOD)=ar(\Delta BOC)$ (اشارہ: متماثل اشکال کا رقبہ مساوی ہوتا ہے)۔



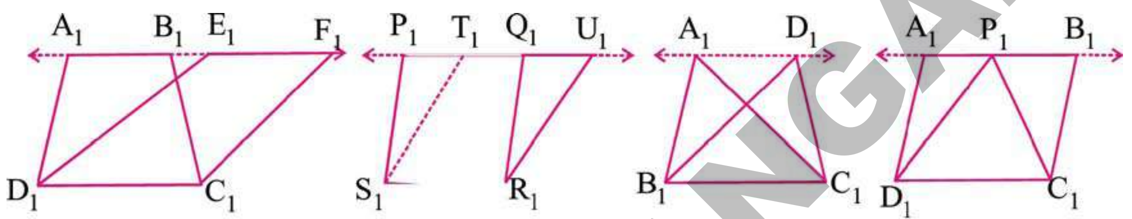
11.4 اشکال جوایک ہی قاعدے اوران ہی متوازی خطوط کے درمیان واقع ہوں۔

ایسے جیومٹری اشکال جواس شرط کے تحت ایک ہی قاعدے اور ایک ہی متوازن خطوط کے درمیان بنائی گئی ہوں ، ان کے رقبوں میں پائے جانے والے رشتہ کے تعلق سے ہم یہاں مطالعہ کریں گے۔اس موضوع کے مطالعے کے تحت ہم مثلثات کی مشابہت کے لئے چند نتائج کا فہم حاصل کریں گے۔آ یئے مندرجہ ذیل اشکال پر نظر ڈالیں۔



شکل (i) میں منحرف ABCD اور متوازی الاضلاع EFCD کا ایک مشترک ضلع CD ہے۔اس طرح ہم کہہ سکتے ہیں کہ منحرف ABCD اور متوازن الاضلاع EFCD ایک ہی قاعدے CD پر واقع ہیں۔اس طرح شکل (ii) میں متوازی الاضلاع PQRS اور متوازی الاضلاع TURS ایک ہی قاعدے پر واقع ہیں۔شکل (iii) میں مثلثات ABC اور DBC ایک ہی قاعدے BC پر واقع ہے۔شکل (iv) میں متوازی الاضلاع ABCD اور مثلث PCD ایک ہی قاعدے DC پر مشتمل ہیں۔اس طرح یہ تمام اشکال جیومٹری اشکال ہیں جو ایک ہی قاعدے پر واقع ہیں۔ یہ اشکال ایک ہی متوازی خطوط کے جوڑ کے درمیان واقع نہیں ہیں۔جیسا کہ ضلع AB، EF پر منطبق نہیں ہوتا ہے۔ اور PQ، TU پر منطبق نہیں ہوتا ہے وغیرہ۔نہ تو نقاط A,B,C,D ہم خط ہیں اور نہ نقاط PQTU ہم خط ہیں۔آپ اشکال (iii) اور (iv) کے بارے میں کیا کہہ سکتے ہیں۔

مندرجہ ذیل اشکال پر غور کیجئے۔



(v) (vi) (vii) (viii)

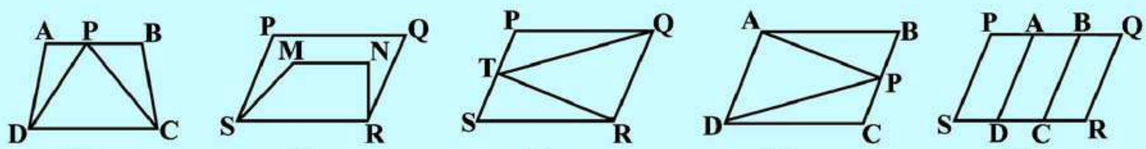
آپ ان اشکال میں کون کونسے فرق کا مشاہدہ کرتے ہیں؟ شکل (v) میں ہم کہہ سکتے ہیں کہ منحرف $A_1 B_1 C_1 D_1$ اور متوازی الاضلاع $E_1 F_1 C_1 D_1$ ایک ہی قاعدے اور ایک ہی متوازی خطوط کے درمیان $A_1 F_1$ اور $D_1 C_1$ پر واقع ہیں۔نقاط $A_1 E_1 B_1$ اور F_1 ہم خط نقاط ہیں۔اور AF||DG اسی طرح شکل (vi) میں $P_1 Q_1 R_1 S_1$ اور $T_1 U_1 R_1 S_1$ متوازی الاضلاع جو ایک ہی قاعدے $S_1 R_1$ اور ایک ہی متوازی خطوط کے جوڑ $P_1 V_1$ اور $S_1 R_1$ کے درمیان واقع ہیں۔(vii) اور (viii) میں دی گئی اشکال کے نام بتلایئے جو ایک ہی قاعدے اور متوازی خطوط کے درمیان واقع ہیں۔

اس طرح دو اشکال اس صورت میں ایک ہی قاعدے اور ایک ہی متوازی خطوط کے جوڑ کے درمیان واقع ہیں تو ہم کہہ سکتے ہیں کہ ان اشکال کا قاعدہ مشترک ہیں اور ہر شکل کے مشترک قاعدے کے مقابل کے راس (نقاط) قاعدے کے متوازی اسی خطوط پر واقع ہیں۔

سوچئے، مباحثہ کیجئے اور لکھئے

مندرجہ ذیل میں کونسے اشکال ایک ہی قاعدے اور ایک ہی متوازی خطوط کے جوڑ کے درمیان واقع ہیں؟

اس صورت میں مشترک قاعدہ اور متوازی خطوط کے جوڑ کے نام بتلایئے؟



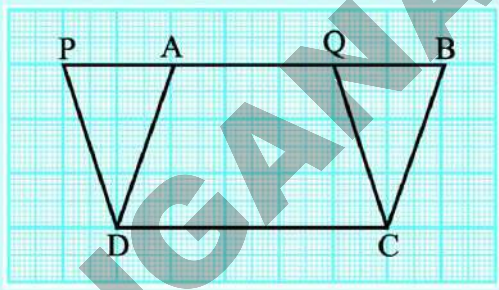
(a) (b) (c) (d) (e)

11.5. متوازی اضلاع جو ایک ہی قاعدے اور متوازی خطوط کے درمیان واقع ہوں

اب ہم ان اشکال کے درمیان تعلق پیدا کرنے کی کوشش کریں گے۔ متوازی الاضلاع جو ایک ہی قاعدے اور ایک ہی متوازی خطوط کے جوڑ کے درمیان واقع ہیں۔ آیئے اس تعلق کی جانچ کے لئے مندرجہ ذیل مشغلہ کریں۔

مشغلہ

ایک گراف پیپر لیجئے اور دو متوازی الاضلاع ABCD اور PQCD کھینچئے جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے۔

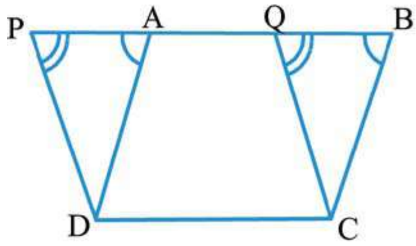


یہ متوازی الاضلاع ایک ہی قاعدے DC اور ایک وہی متوازی خطوط کے جوڑ PB اور DC کے درمیان واقع ہیں۔ شکل سے ظاہر ہے کہ DCQA مشترک حصہ ہے دونوں متوازی الاضلاع اسطرح ہیں کہ Δ DAP اور ΔCBQ کے رقبے مساوی ہیں۔ تب ہم یہ ثابت کرسکتے ہیں کہ

ar(PQCD) = ar (ABCD)

مسئلہ 11.1: متوازی الاضلاع جو ایک ہی قاعدے اور وہی متوازی خطوط کے درمیان واقع ہوں رقبہ میں مساوی ہوتے ہیں۔

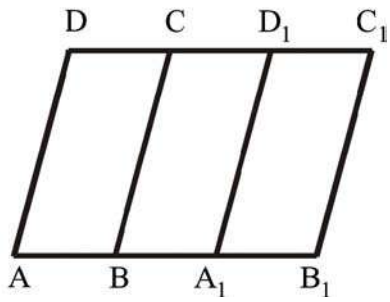
ثبوت : فرض کرو کہ ABCD اور PQCD دو متوازی الاضلاع جو ایک ہی قاعدے اور متوازی خطوط DC اور PB کے درمیان واقع ہیں۔



Δ DAP اور ΔCBQ میں PD||CQ DDA=CQB اور AD||CB اور PB عرضی خط ہے $\angle$DAP=$\angle$CBQ اس طرح PD||QC اس طرح PQCD متوازی الاضلاع ہے۔ اس طرح ΔDAP اور ΔCBQ متماثل ہیں اور وہ مساوی رقبہ رکھتے ہیں۔

اس طرح ہم کہہ سکتے ہیں کہ

$$Ar(PQCD) = ar\ (AQCD) + ar\ (DAP)$$
$$= ar\ (AQCD)+ar(CBQ)=ar(ABCD)$$



گراف پیپر پر کھینچے گئے متوازی الاضلاع میں موجود مربعوں کو شمار کرتے ہوئے آپ جواب کی تصدیق کرسکتے ہیں۔

کیا آپ گراف پیپر پر شکل سے بننے والے، مکمل مربعے آدھے سے کم، اور آدھے سے زیادہ والے مربعوں کو شمار کرنے کے اصولوں کی تشریح کرسکتے ہیں۔

حمیرہ اس بات پر بحث کرتی ہے کہ متوازی الاضلاع جو ایک ہی متوازی خطوط کے جوڑ کے درمیان ہوں۔ مساوی رقبے کے لئے ایک ہی قاعدہ پر واقع ہونا ضروری ہے۔ صرف ان کے قاعدوں کے طول مساوی ہونا چاہیئے۔

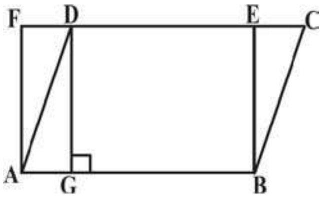
آیئے اب ہم حمیرہ کے بیان کے فہم کے لئے شکل دیکھیں۔

اگر $AB=A_1B_1$ جب میں متوازی الاضلاع $A_1B_1C_1D_1$ کو کاٹ کر متوازی الاضلاع ABCD پر منطبق کرتے ہیں تب A نقطہ A_1 اور B نقطہ B_1 اور C_1, D_1 نقطہ C, D سے منطبق ہوتے ہیں۔ اس طرح یہ متوازی اضلاع رقبے میں مساوی ہوتے ہیں۔

اسطرح اب جیومٹری اشکال کی خصوصیات کے فہم کے لئے متوازی الاضلاع ایک ہی قاعدے کے بجائے متوازی الاضلاع مساوی قاعدہ پر لیا جاسکتا ہے۔

آیئے اب ہم مندرجہ بالا مسئلہ کو استعمال کرتے ہوئے ان مثالوں کی وضاحت کریں گے۔

مثال 1: ABCD ایک متوازی الاضلاع اور ABEF مستطیل ہے۔ اور DG عمود وار ہے AB پر۔ ثابت کیجئے کہ



(i) ar(ABCD)=ar(ABEF)

(ii) ar(ABCD)=ABxDG

حل: (i) ایک مستطیل بھی متوازی الاضلاع ہوتا ہے۔

ar(ABCD)=ar(ABEF)

(متوازی الاضلاع جو ایک ہی قاعدے اور دو متوازی خطوط کے درمیان واقع ہوں)

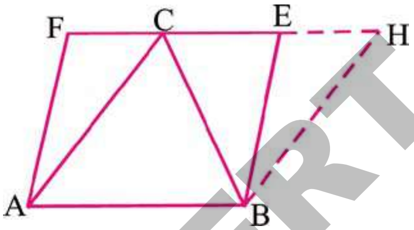
(ii) ar(ABCD)=ar(ABEF)(fig(i))

=ABxBE(ABEF مستطیل ہے)

=AB×DG($DG \perp AB$ اور DG=BE)

اس طرح Ar(ABCD)= ABxDG

مندرجہ بالا نتیجے سے ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ ”متوازی الاضلاع کا رقبہ اس کے قاعدے اور متناظر بلندی کا حاصل ضرب ہوتا ہے۔



مثال 2: مثلث ABC اور متوازی الاضلاع ABEF دونوں ایک ہی قاعدے AB اور ایک ہی متوازی خطوط کے جوڑ AB اور EF کے درمیان واقع ہیں۔ ثابت کیجئے کہ

$$ar(\Delta ABC) = \frac{1}{2} ar(\|\ gm\ \ ABEF)$$

حل: راس B سے BH||AC جو FE کو آگے بڑھانے پر H پر ملتے ہیں۔ ABHC متوازی الاضلاع ہے۔ وتر BC متوازی الاضلاع ABHC اور متوازی الاضلاع ABEF ایک ہی قاعدے AB اور وہی متوازی خطوط AB اور EF کے درمیان ہیں۔

اوپر کے بیان سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ ”مثلث کا رقبہ نصف ہوتا ہے متوازن الاضلاع کے رقبہ کے جبکہ دونوں ایک ہی قاعدے اور متوازی خطوط کے درمیان واقع ہوں۔

مثال 3: معین کے متصلہ معکوس کے وسطی نقاط کو ملایئے اور بننے والی شکل کا رقبہ معلوم کیجئے جسکے وتر 12cm اور 16cm ہیں۔

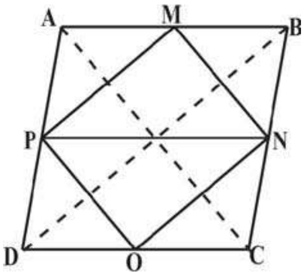
حل: معین ABCD کے ضلعوں AB، BC، CD اور DA کے وسطی نقاط کو جوڑتے ہوئے ان نقاط کو M، N، O اور D سے ظاہر کیجئے۔ جس سے شکل MNOP حاصل ہوتا ہے۔

تشکیل شدہ شکل MNOP شکل کونسی ہے؟ وجوہات بتلائیے۔

خط PN کو جوڑئے تب PN||AB اور PN||PC

ہم جانتے ہیں کہ ''اگر ایک مثلث اور ایک متوازی الاضلاع جو ایک ہی قاعدے اور ایک ہی متوازی خطوط کے جوڑ کے درمیان واقع ہوں تب مثلث کا رقبہ نصف ہوتا ہے متوازی الاضلاع کے رقبے کے۔

مندرجہ بالا نتیجے سے متوازی الاضلاع ABNP اور مثلث MNP ایک ہی قاعدے PN اور ایک ہی متوازی خطوط PN اور AB کے درمیان واقع ہیں۔



$\therefore$ ar $\Delta MNP = \frac{1}{2}$ ar $ABPN$ .... (i)

ar $\Delta PON = \frac{1}{2}$ ar $PNCD$ .....(ii)

معین کا رقبہ $= \frac{1}{2} \times d_1 d_2$ .... (iii)

(i)(ii) اور (iii) کی مدد سے ہم حاصل کر سکتے ہیں۔

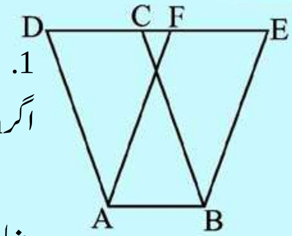
$$\text{ar}(MNOP) = \text{ar}(\Delta MNP) + \text{ar}(\Delta PON)$$

$$= \frac{1}{2}\text{ar}(ABNP) + \frac{1}{2}\text{ar}(PDCN)$$

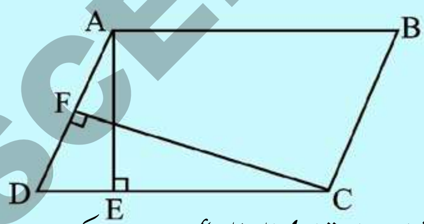
$= \frac{1}{2}$ ar معین کا رقبہ

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} \times 12 \times 16\right) = 48 \text{ cm.}^2$$

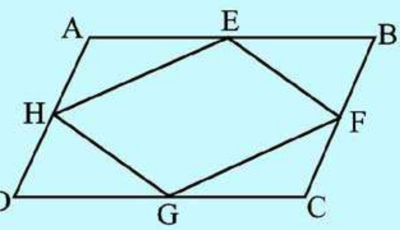
مشق 11.2



1. متوازی الاضلاع ABCD کا رقبہ $36cm^2$ ہے۔ اگر AB=4.2cm تب متوازی الاضلاع ABEF کی بلندی معلوم کیجئے۔

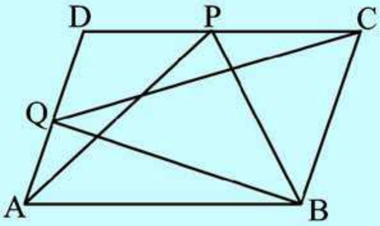


2. ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے۔ AE ضلع DC پر اور CF ضلع AD پر عمود وار ہیں۔ اگر AB=10cm AE=8cm اور CF=12cm تب AD کا طول معلوم کیجئے۔



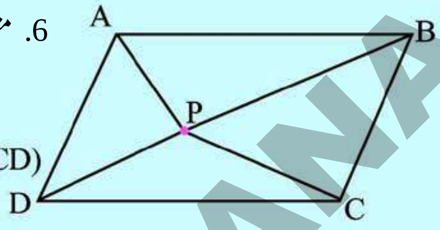
3. اگر E,F,G اور H ترتیب وار متوازی الاضلاع ABCD کے ضلعوں AB، BC CD اور AD پر وسطی نقاط ہیں تو بتلائیے کہ $\text{ar}(EFGH) = \frac{1}{2}\text{ar}(ABCD)$.

4. مثال 3 میں دی گئی شکل میں اگر آپ $\Delta APM, \Delta DPO, \Delta OCN$ اور ΔMNB کو جوڑتے ہیں تب آپ کو کونسی شکل حاصل ہوگی۔



.5 P اور Q کوئی دو نقاط متوازی الاضلاع ABCD کے ضلعوں DC اور AD پر ترتیب وار لئے گئے ہیں۔ بتلائے کہ

$ar(\Delta APB)=ar(\Delta BQC)$



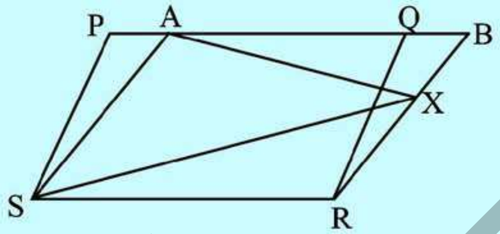
.6 متوازی الاضلاع ABCD میں P کوئی اندرونی نقطہ ہے بتلائے کہ

(i) $ar(\Delta APB) + ar(\Delta PCD) = \frac{1}{2} ar(ABCD)$

(ii) $ar(\Delta APD) + ar(\Delta PBC) = ar(\Delta APB) + ar(\Delta PCD)$

(اشارہ: نقطہ P سے ضلع AB کے متوازی خط کھینچئے)

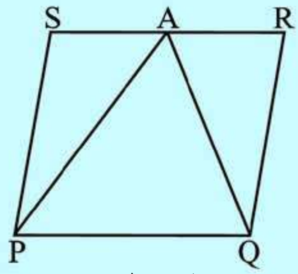
.7 ثابت کیجئے کہ منحرف کا رقبہ، متوازی ضلعوں کے مجموعے کے نصف اور ان کے درمیان کے فاصلے کا حاصل ضرب ہوتا ہے۔



.8 PQRS اور ABRS متوازی الاضلاع ہیں اور X کوئی نقطہ پر ضلع BR پر۔ تب بتلائیے کہ

(i) $ar(PQRS) = ar(ABRS)$

(ii) $ar(\Delta AXS) = \frac{1}{2} ar(PQRS)$



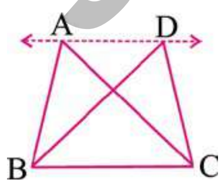
.9 ایک کسان کا کھیت متوازی الاضلاع PQRS کی طرح ہے۔ جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے؟ وہ ضلع RS پر وسطی نقطہ A لیتے ہوئے اسکو P اور Q سے جوڑتا ہے۔ کھیت کو کتنے حصوں میں منقسم کیا گیا ہے؟ یہ حصے کن اشکال کی طرح ہیں؟

کسان کھیت میں دھان اور دال کی پیداوار کے مساوی مونگ پھلی اگانا چاہتا ہے۔ اسے پیداوار کس طرح حاصل ہوگی۔

.10 ثابت کیجئے کہ معین کا رقبہ اس کے وتروں کے حاصل ضرب کا نصف ہوتا ہے۔

.11.6 مثلثات جو ایک ہی قاعدے اور وہی متوازی خطوط کے درمیان واقع ہوں

ہم متصلہ شکل میں دیکھتے ہیں کہ ایسے مثلثات جو ایک ہی قاعدے اور وہی متوازی خطوط کے درمیان واقع ہیں۔



آیئے ہم ان مثلثات کو ABC اور DBC جو ایک ہی قاعدے BC اور متوازی خطوط کے جوڑ AD اور BC کے درمیان ہیں ہم ان مثلثات کے رقبوں کے بارے میں کیا کہہ سکتے ہیں۔

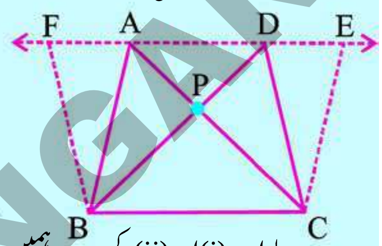
یہ بالکل عیاں ہے کہ اس طرح کے لا متناہی مثلثات کے جوڑ جو ایک ہی قاعدے اور ایک ہی متوازی خطوط کے جوڑ کے درمیان کھینچے جا سکتے ہیں۔

آیئے ایک مشغلہ کریں گے۔

مشغلہ

ایک گراف پیپر پر دو مثلثات کو ایک ہی قاعدہ پر اور متوازی خطوط کے درمیان کھینچئے جیسا کہ شکل میں بتایا گیا ہے۔

اگر ΔABC اور ΔDBC دو مثلثات ہیں جو کہ ایک ہی قاعدہ BC اور دو متوازی خطوط BC اور AD کے درمیان قائم ہیں۔ AD کو دونوں جانب طول دیجیے اور $AB \| CE$ اور $CD \| BF$ کھینچئے۔ متوازی الاضلاع AECB اور FDCB ایک ہی قاعدہ BC اور دو متوازی خطوط BC اور EF کے درمیان واقع ہیں۔ $ar(AECB) = ar(FDCB)$ (کیسے؟)



(ہم مشاہدہ کر سکتے ہیں کہ)

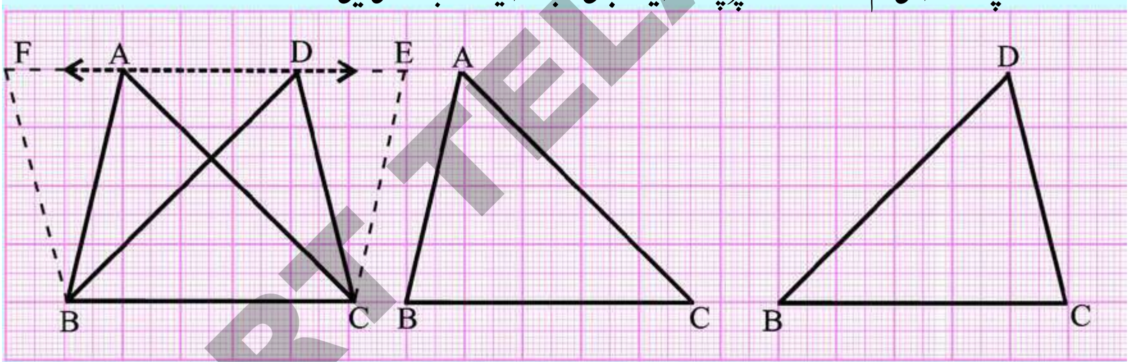
$$ar(\Delta ABC) = \frac{1}{2} ar(\text{متوازی الاضلاع } AECB) \quad ...(i)$$

$$ar(\Delta DBC) = \frac{1}{2} ar(\qquad FDCB) \quad ....(ii)$$

مساوات (i) اور (ii) کی رو سے ہمیں حاصل ہوتا ہے $ar(\Delta ABC)=ar(\Delta DBC)$

آپ ΔABC اور ΔDBC کے رقبے، ان میں موجود مربعوں کی گنتی کے طریقے سے بھی معلوم کر سکتے ہیں۔

پچھلے مشغلہ میں ہم نے جو گراف پیپر پر مشغلہ کیا تھا جانچ کیجیے کہ آیا وہ رقبے مساوی ہیں۔



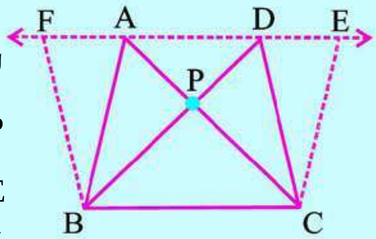
سوچئے بحث کیجیے اور لکھئے

THINK, DISCUSS AND WRITE

دو متوازی خطوط کے درمیان ایک ہی قاعدہ پر دو مثلثات ABC اور DBC اس طرح بنائیے کہ ان کے دو ضلع AC اور BD کا نقطہ تقاطع P ہے۔ دو خطوط کھینچئے جو کہ $CE \| BA$ اور $BF \| CD$ اس طرح کہ نقطہ E اور F خط AD پر واقع ہیں۔

کیا آپ بتا سکتے ہیں $ar(\Delta PBC)=ar(\Delta PBC)$

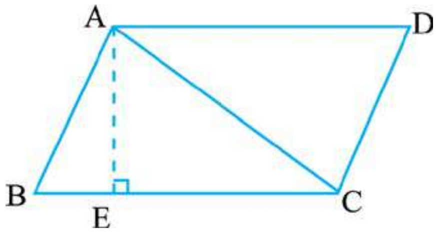
(اشارہ: یہ مثلثات متماثل نہیں ہیں لیکن دونوں کا رقبہ مساوی ہے)



ضمنی نتیجہ:1 ثابت کیجئے کہ مثلث کا رقبہ اس کے قاعدہ اور متعلقہ ارتفاع (بلندی) کے حاصل ضرب کے مساوی ہوتا ہے۔

ثبوت: فرض کیجئے کہ ABC ایک مثلث ہے $AD \| BC$ اس طرح کھینچئے کہ $CD=BA$ اب ہم کو ایک متوازی الاضلاع ABCD حاصل ہوگا جس کا وتر AC ہے۔

ہم جانتے ہیں کہ $\Delta ABC \cong \Delta ACD$



اسطرح $ar\Delta ABC \cong ar\Delta ACD$ (متماثل مثلثات مساوی رقبہ رکھتے ہیں)

اس لیئے $ar\Delta ABC = \frac{1}{2}\, ar(ABCD)$

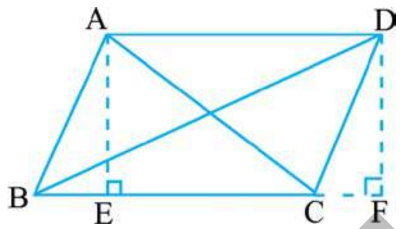
BC پر ایک عمود AE اس طرح کھینچئے $AE \perp BC$

ہم جانتے ہیں $ar(ABCD) = BC \times AE$

ہم جانتے ہیں $ar(\Delta ABC) = \frac{1}{2}\, ar\,(ABCD)$

$\frac{1}{2} \times BC \times AE$

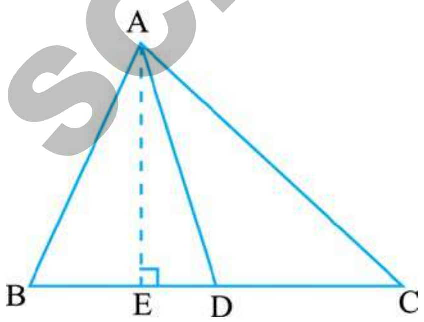
اسطرح $ar\Delta ABC = \frac{1}{2} \times$ قاعدہ $BC \times$ بلندی AE



مسئلہ 11.2: دو مثلثات جن کا ایک ہی قاعدہ (یا مساوی قاعدے ہو) اور مساوی رقبے رکھتے ہوں ہم متوازی خطوط کے درمیان واقع ہیں۔شکل کا مشاہدہ کیجئے۔ان مثلثات کے نام دیں جو ایک ہی قاعدہ BC پر واقع ہیں ΔABC اور ΔDBC کی بلندیاں کیا ہیں؟
اگر دو مثلثات جن کا رقبہ مساوی ہے اور ایک ہی قاعدہ پر واقع ہیں۔ان کی بلندیاں کیا ہوں گی؟ کیا A اور D ہم خط ہیں؟

آیئے مزید مثالیں لے کر اوپر دیئے گئے نتائج کی وضاحت کریں۔

مثال 4: بتایئے کہ مثلث کا وسطانیہ فرض کیجئے کہ AD اس کا ایک وسطانیہ ہے۔ΔABD اور ΔADC میں ایک مشترک راس ہوتا ہے جن کے قاعدے BD اور DC مساوی ہوتے ہیں۔ $AE \perp BC$ کھینچئے۔



$ar\,(\Delta ABD) = ar(\Delta ACD)$

$ar\,(\Delta ABD) = \frac{1}{2} \times$ قاعدہ $BD \times$ بلندی ΔADB

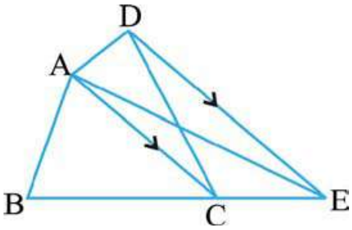
$= \frac{1}{2} \times BD \times AE$

$= \frac{1}{2} \times DC \times AE \quad (\because\ BD = DC)$

$= \frac{1}{2} \times$ قاعدہ $DC \times$ کا ارتفاع ΔACD

$= ar\,\Delta ACD$

مثال5:شکل ABCD ایک چار ضلعی ہے۔ جہاں AC ایک وتر اور DE||AC ہے۔ضلع BC کو نقطہ E تک کھینچیے اس طرح کہ نقطہ E، DE اور BC کا مشترک راس ہو۔



بتائیے کہ ar (ABCD) = ar(ΔABE)

حل: ar (ABCD) = ar(ΔABC) + ar (ΔDAC)

ΔDAC اور ΔEAC ایک ہی قاعدہ $\overline{AC}$ پر واقع ہیں۔اور متوازی خطوط DE//AC کے درمیان واقع ہیں۔

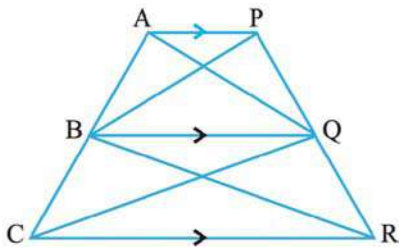
ar (ΔDAC) = ar (ΔEAC) (کیوں؟)

دونوں جانب ΔABC کا رقبہ جمع کرنے پر

$$ar(\Delta DAC) + ar(\Delta ABC) = ar(\Delta EAC) + ar(\Delta ABC)$$

لہذا $ar(ABCD) = ar(\Delta ABE)$

مثال6: دی گئی شکل میں اگر AP//BQ//CR ہوں تو ثابت کیجئے کہ ar(AQC)=ar(ΔPBR)



حل: ΔABQ اور ΔPBQ ایک ہی قاعدہ BQ پر واقع ہیں اور متوازی خطوط AP//BQ کے درمیان واقع ہیں۔

ar(ΔABQ) = ar (ΔPBQ)..........(1)

(ii) اسی طرح ar(ΔCQB)=ar (ΔRQB) (BQ//CR اور قاعدہ BQ)

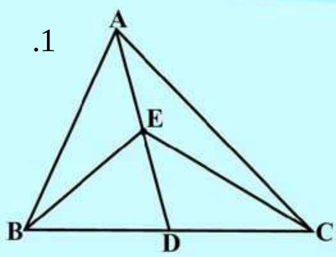
نتائج (i) اور (ii) کو جمع کرنے پر

$$ar(\Delta ABQ) + ar(\Delta CQB) = ar(\Delta PBQ) + ar(\Delta RQB)$$

$$ar\ \Delta AQC = ar\ \Delta PBR$$

مشق - 11.3

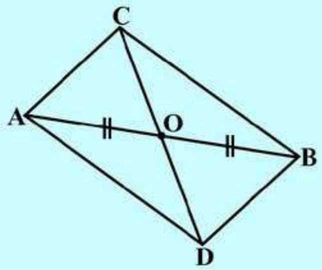
1. ایک مثلث ABC (شکل کا مشاہدہ کیجیے) میں نقطہ E وسطانیہ AD کا وسطی نقطہ ہے۔ بتائیے کہ



(i) $ar\ \Delta ABE = ar\ \Delta ACE$

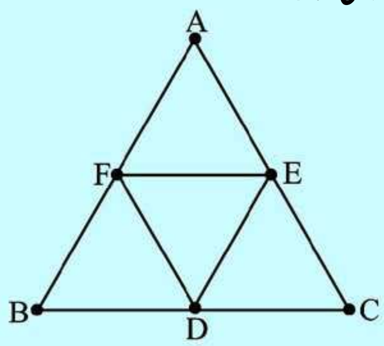
(ii) $ar\Delta ABE = \frac{1}{4} ar(\Delta ABC)$

2. بتائیے کہ ایک متوازی الاضلاع کے وتر اس کو چار مساوی رقبہ رکھنے والے مثلثات میں منقسم کرتے ہیں۔



3. دی گئی شکل میں دو مثلثات ΔABC اور ΔABD جو ایک ہی قاعدہ AB پر واقع ہیں۔ اگر ایک خطی قطعہ CD، AB کو نقطہ O پر قطع کرتا ہے۔ تب بتائیے کہ $ar(\Delta ABC)=ar(\Delta ABD)$

4. دی گئی شکل کے تحت ΔABC میں ضلع BC، CA اور AB کے وسطی نقاط بالترتیب D، E، F ہیں۔ بتائیے کہ۔



(i) BDEF ایک متوازی الاضلاع ہے

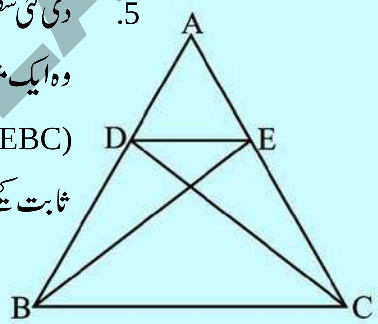
(ii) $ar(\Delta DEF) = \frac{1}{4} ar(\Delta ABC)$

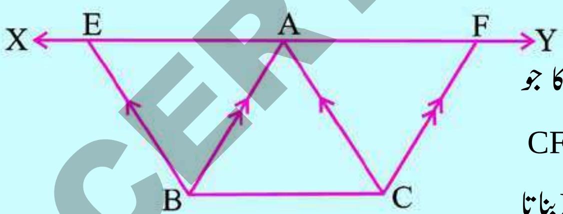
(iii) $ar(BDEF) = \frac{1}{2} ar(\Delta ABC)$

5. دی گئی شکل میں اضلاع AB اور AC پر نقاط بالترتیب D اور E ہیں۔ اس طرح وہ ایک مثلث ΔABC بناتا ہے۔ اس طرح کہ

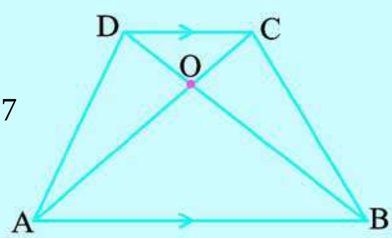
$ar(\Delta DBC) = ar(\Delta EBC)$

ثابت کیجئے DE||BC





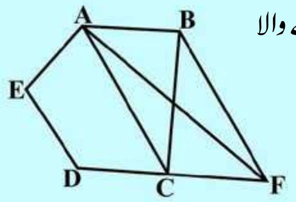
6. دی گئی شکل میں XY ایک متوازی خط ہے BC کا جو نقطہ A سے گذرتا ہے۔ اگر BE//CA اور CF//BA اس طرح کھینچیں جو بالترتیب E اور F سے گذر کر XY بناتا ہے ثابت کیجئے کہ $ar(\Delta ABE) = ar(\Delta ACF)$



7. دی گئی شکل میں منحرف ABCD میں وتر AC اور BD نقطہ O پر قطع کرتے ہیں اور AB||DC ثابت کیجئے کہ

$ar(\Delta AOD) = ar(\Delta BOC)$.

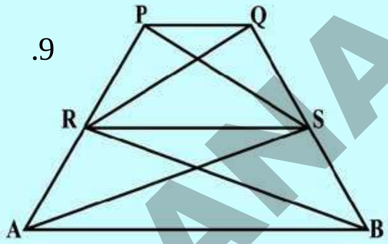
8. دی گئی شکل میں ABCDE ایک مخمس ہے۔ ضلع DC کو F تک بڑھانے پر بننے والا ضلع BF متوازی ہوتا ہے AC کے۔



(i) ar (ΔACB) = ar (ΔACF)

(ii) ar (AEDF) = ar (ABCDE)

9. دی گئی شکل میں ar ΔRAS = ar ΔRBS اور ar(ΔQRB) = ar(ΔPAS) تب بتلائیے کہ دونوں چار ضلعی PQRS اور RSBA منحرف ہیں۔



10. رامیا کے پاس ایک چار ضلعی شکل کا پلاٹ ہے۔ گاؤں کی گرام پنچایت اُس پلاٹ کے ایک کونے میں اسکول قائم کرنا چاہتی ہے۔ رامیا اس بات پر راضی ہوگیا۔ لیکن شرط رکھی کہ اتنا ہی ٹکڑا بازو کے پلاٹ سے اس طرح دیا جائے کہ وہ ایک مثلث بن جائے۔ بتلائیے کہ یہ کس طرح ہوگا؟ (پلاٹ کا ایک کچا خاکہ بنائیے)

سوچیے، گفتگو کیجیے اور لکھیے

مثلث A B C ایک قائم الزاویہ مثلث ہے جو A پر قائم الزاویہ بناتا ہے۔ ضلع B C، C A اور A B پر ترتیب وار مربعے BCED، ACFG اور ABMN بنائے گئے ہیں۔ خطی قطعے AX$\perp$DE، خطی قطعہ AE، ضلع BC پر Y کے مقام پر اور ضلع DE پر X کے مقام پر قطع کرتا ہے۔ AD، AE اور BF اور CM کو جوڑیئے اور بتلایئے کہ

(i) ΔMBC $\cong$ ΔABD

(ii) ar(BYXD) = 2ar (ΔMBC)

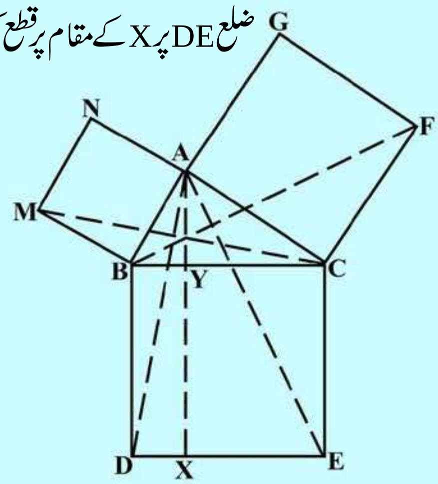
(iii) ar(BYXD) = ar(ABMN)

(iv) ΔFCB $\cong$ ΔACE

(v) ar(CYXE) = 2 ar(FCB)

(vi) ar(CYXE) = ar (ACFG)

(vii) ar(BCED) = ar(ABMN) + ar(ACFG)



کیا آپ (vii) کا نتیجہ اپنے الفاظ میں بیان کر سکتے ہیں؟ یہ فیثا غورث کا مشہور مسئلہ ہے۔ آپ اس کا آسان حل جماعت دہم میں پڑھیں گے۔

ہم نے کیا سیکھا

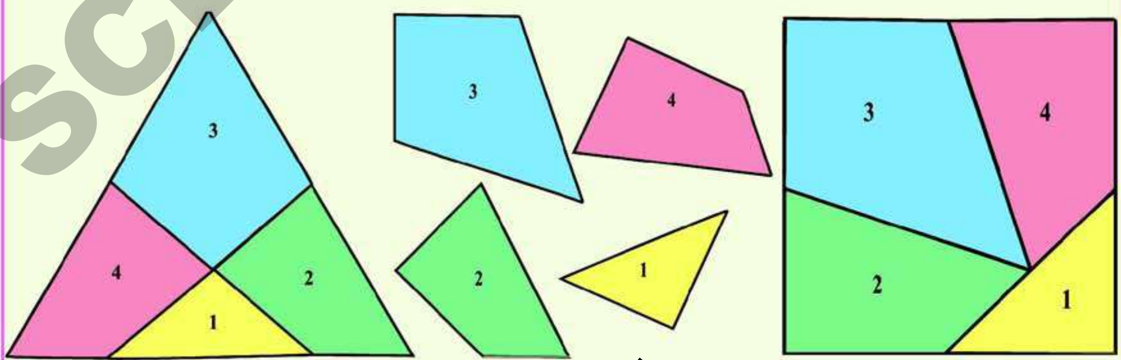
اس باب میں ہم نے حسب ذیل نکات پر غور کیا۔

1. کسی شکل کا رقبہ عدد ہوتا ہے (جو کسی اکائی رقبہ کے ساتھ لی گئی مقدار ہے) جو ایک بند مستوی شکل سے منسلک ہوتا ہے۔
2. دو متماثل اشکال کا رقبہ مساوی ہوسکتا ہے لیکن اس کا برعکس صادق نہیں ہوتا۔
3. اگر X ایک مستوی خطہ جو دو غیر منطبق مستویوں P اور Q سے تشکیل پاتا ہے تب $ar(X)=ar(P)+ar(Q)$
4. دو اشکال ایک ہی قاعدہ اور وہی متوازی خطوط کے درمیان واقع ہوں گے جب کہ ان کا ایک مشترک قاعدہ ہو اور ہر ایک شکل کے مشترک قاعدے کے مقابل کے راس اس خط پر واقع ہیں جو قاعدے کے متوازی ہے۔
5. متوازی الاضلاع جو ایک ہی قاعدہ پر واقع ہوں اور ایک ہی متوازی خطوط کے درمیان واقع ہوں رقبہ میں مساوی ہوتے ہیں۔
6. ایک متوازی الاضلاع کا رقبہ مساوی ہوتا ہے قاعدہ اور اُس کے متناظر بلندی کے حاصل ضرب کے۔
7. متوازی الاضلاع جو ایک ہی قاعدہ پر واقع ہوں اور رقبہ میں مساوی ہوں تب وہ ایک ہی متوازی خطوط کے جوڑ کے درمیان واقع ہوں گے۔
8. اگر ایک متوازی الاضلاع اور ایک مثلث ایک ہی قاعدہ پر واقع ہوں اور وہی متوازی خطوط کے درمیان واقع ہوں تب مثلث کا رقبہ مساوی ہوتا ہے متوازی الاضلاع کے آدھے رقبے کے۔
9. مثلثات جو ایک ہی قاعدہ پر واقع ہوں اور متوازی خطوط کے درمیان واقع ہوں رقبے میں مساوی ہوتے ہیں۔
10. مثلثات جو ایک ہی قاعدہ پر واقع ہوں اور مساوی رقبہ رکھتے ہوں وہ ایک ہی متوازی خطوط کی جوڑ کے درمیان واقع ہوتے ہیں۔

کیا آپ جانتے ہیں؟

جرمنی کا ایک ریاضی داں ڈیوڈ ہلبرٹ (1943-1862) نے پہلی بار ثابت کیا کہ کسی بھی کثیر ضلعی کو کسی اور کثیر ضلعی میں منتقل کر سکتے ہیں جس کا رقبہ مساوی ہو جب کہ اس کو متناہی حصوں میں کاٹا جائے۔

آیئے دیکھیں کہ کس طرح ایک انگریزی معمہ کا رہنری یمیسٹ ڈیوڈنی (1930-1847) نے ایک مساوی الاضلاع کو چار حصوں میں کاٹ کر اُس کو ایک مربع میں منتقل کیا



اس کے ہنر کو استعمال کرتے ہوئے اور معمہ بنانے کی کوشش کیجئے۔