অধ্যায় ৫

জটিল সংখ্যা আৰু দ্বিঘাত সমীকৰণ
(COMPLEX NUMBERS AND QUADRATIC EQUATIONS)

❖ *Mathematics is the Queen of Sciences and Arithmetic is the Queen of Mathematics.*– GAUSS ❖

5.1 অৱতাৰণা (Introduction)

W. R. Hamilton (1805-1865)

W. R. Hamilton (1805-1865)

আগৰ শ্ৰেণীত আমি এটা আৰু দুটা চলকৰ ৰৈখিক সমীকৰণ আৰু এটা চলকৰ দ্বিঘাত সমীকৰণ সম্বন্ধে অধ্যয়ন কৰিছোঁ। আমি দেখিছোঁ যে $x^2 + 1 = 0$ সমীকৰণৰ কোনো বাস্তৱ সমাধান নাই, কিয়নো $x^2 + 1 = 0$ ৰ পৰা আমি পাওঁ $x^2 = -1$ আৰু আমি জানো যে প্ৰত্যেক বাস্তৱ সংখ্যাৰ বৰ্গ অঋণাত্মক। গতিকে বাস্তৱ সংখ্যা প্ৰণালীক সম্প্ৰসাৰণ কৰাৰ প্ৰয়োজন আহি পৰিল যাতে আমি $x^2 = -1$ সমীকৰণৰ সমাধান উলিয়াব পাৰোঁ। দৰাচলতে আমাৰ মূল উদ্দেশ্য হ'ল $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকৰণৰ সমাধান উলিওৱা, যেতিয়া $D = b^2 - 4ac < 0$, যিটো বাস্তৱ সংখ্যা-প্ৰণালীত সম্ভৱ নহয়।

5.2 জটিল সংখ্যা (Complex Numbers)

i প্ৰতীকেৰে $\sqrt{-1}$ বুজোৱা হ'ল। গতিকে, আমি পালোঁ $i^2 = -1$। ইয়াৰ অৰ্থ এইটোৱেই যে $x^2 + 1 = 0$ সমীকৰণৰ i এটা মূল।

a, b বাস্তৱ সংখ্যা হ'লে $a + ib$ আকাৰৰ সংখ্যাবোৰক জটিল সংখ্যা বোলে। উদাহৰণস্বৰূপে, $2 + i3$, $(-1) + i\sqrt{3}$, $4 + i\left(\frac{-1}{11}\right)$ জটিল সংখ্যা।

$z = a + ib$ জটিল সংখ্যাটোৰ বাবে, a ক *বাস্তৱ অংশ* (real part) বোলে। ইয়াক $\text{Re}\, z$ এৰে বুজোৱা হয়। b ক জটিল সংখ্যা z অৰ *কাল্পনিক অংশ* (imaginary part) বোলে। ইয়াক $\text{Im}\, z$ এৰে বুজোৱা হয়। উদাহৰণস্বৰূপে যদি $z = 2 + i5$, তেনেহ'লে $\text{Re}\, z = 2$ আৰু $\text{Im}\, z = 5$.

দুটা জটিল সংখ্যা $z_1 = a + ib$ আৰু $z_2 = c + id$ ক সমান বুলি কোৱা হয় যদি $a = c$ আৰু $b = d$

উদাহৰণ 1 যদি $4x + i(3x - y) = 3 + i(-6)$, য'ত x আৰু y বাস্তৱ সংখ্যা, তেন্তে x আৰু y ৰ মান উলিওৱাঁ।

সমাধান দিয়া আছে

$$4x + i(3x - y) = 3 + i(-6) \qquad (1)$$

(1) অৰ বাস্তৱ আৰু কাল্পনিক অংশৰ সমতা স্থাপন কৰি আমি পাওঁ

$4x = 3,\ 3x - y = -6$

সমাধান কৰি আমি পালোঁ $x = \frac{3}{4}$ আৰু $y = \frac{33}{4}$

5.3 জটিল সংখ্যাৰ বীজগণিত (Algebra of Complex Numbers)

এই অনুচ্ছেদত আমি জটিল সংখ্যাৰ বীজগণিতৰ বিষয়ে আলোচনা কৰিম।

5.3.1 *দুটা জটিল সংখ্যাৰ যোগ (Addition of two complex numbers)*

ধৰা হ'ল $z_1 = a + ib$ আৰু $z_2 = c + id$ দুটা জটিল সংখ্যা। এতিয়া যোগফল $z_1 + z_2$ অৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়

$z_1 + z_2 = (a + c) + i(b + d)$, এইটোও এটা জটিল সংখ্যা।

উদাহৰণস্বৰূপে, $(2 + i3) + (-6 + i5) = (2 - 6) + i(3 + 5) = -4 + i8$

জটিল সংখ্যাৰ যোগে তলৰ ধৰ্মসমূহ মানি চলে ঃ

(i) **আৱদ্ধ বিধি** (The closure law) ঃ দুটা জটিল সংখ্যাৰ যোগফল এটা জটিল সংখ্যা; অৰ্থাৎ সকলো জটিল সংখ্যা z_1 আৰু z_2 ৰ বাবে $z_1 + z_2$ এটা জটিল সংখ্যা।

(ii) **ক্ৰমবিনিময় বিধি** (The commutative law) ঃ যি কোনো দুটা জটিল সংখ্যা z_1 আৰু z_2 ৰ বাবে $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

(iii) **সাহচৰ্য্য বিধি** (The associative law) ঃ যি কোনো তিনিটা জটিল সংখ্যা z_1, z_2, z_3 ৰ বাবে $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$

(iv) **যোগাত্মক এককৰ অস্তিত্ব** (The existence of additive identity) ঃ 0+i0 জটিল সংখ্যাটোক (ইয়াক 0 ৰে বুজোৱা হয়) যোগাত্মক একক বা শূন্য জটিল সংখ্যা বুলি কোৱা হয় আৰু প্ৰত্যেক জটিল সংখ্যা z অৰ বাবে, $z + o = z$.

(v) **যোগাত্মক বিপৰীতৰ অস্তিত্ব** (The existence of additive inverse) ঃ প্ৰত্যেক জটিল সংখ্যা $z = a + ib$ ৰ বাবে $-a + i(-b)$ জটিল সংখ্যাটো পোৱা যায়। ইয়াক $-z$ এৰে বুজোৱা হয় আৰু ইয়াক z ৰ যোগাত্মক বিপৰীত বা z ৰ ঋণাত্মক সংখ্যা (additive invere or negative) বোলে। মন কৰিব লগীয়া যে $z + (-z) = 0$ (যোগাত্মক একক)।

5.3.2 *দুটা জটিল সংখ্যাৰ অন্তৰ (Difference of two complex numbers)*

দুটা জটিল সংখ্যা z_1 আৰু z_2 দিয়া আছে। অন্তৰ $z_1 - z_2$ ৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়ঃ

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$$

উদাহৰণস্বৰূপে $(6 + 3i) - (2 - i) = (6 + 3i) + (-2 + i) = 4 + 4i$

আৰু $(2 - i) - (6 + 3i) = (2 - i) + (-6 - 3i) = -4 - 4i$

5.3.3 *দুটা জটিল সংখ্যাৰ পূৰণফল (Multiplication of two complex numbers)* ধৰা হ'ল $z_1 = a+ib$ আৰু $z_2 = c+id$ দুটা জটিল সংখ্যা। পূৰণফল $z_1 z_2$ ৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়

$$z_1 z_2 = (ac-bd)+i(ad+bc)$$

উদাহৰণস্বৰূপে, $(3+i5)(2+i6) = (3\times 2-5\times 6)+i(3\times 6+5\times 2) = -24+i28$

জটিল সংখ্যাৰ পূৰণে তলৰ ধৰ্মসমূহ মানি চলে। প্ৰমাণ ব্যতিৰেকে আমি সেইকেইটা উল্লেখ কৰিলোঁ।

(i) **আৱদ্ধ বিধি** (The closure law) ঃ দুটা জটিল সংখ্যাৰ পূৰণফল এটা জটিল সংখ্যা অৰ্থাৎ সকলো জটিল সংখ্যা z_1 আৰু z_2 ৰ বাবে $z_1 z_2$ এটা জটিল সংখ্যা।

(ii) **ক্ৰমবিনিময় বিধ** (The commutative law) ঃ যি কোনো দুটা জটিল সংখ্যা z_1 আৰু z_2 ৰ বাবে

$$z_1 z_2 = z_2 z_1$$

(iii) **সাহচৰ্য্য বিধি** (The associative law) ঃ যি কোনো তিনিটা জটিল সংখ্যা z_1, z_2, z_3 ৰ বাবে

$$(z_1 z_2)z_3 = z_1(z_2 z_3)$$

(iv) **গুণাত্মক এককৰ অস্তিত্ব** (The existence of multiplicative identity) $1+i0$ জটিল সংখ্যাটোক (ইয়াক 1এৰে বুজোৱা হয়) গুণাত্মক একক বুলি কোৱা হয় আৰু প্ৰত্যেক জটিল সংখ্যা z অৰ বাবে $z.1 = z$.

(v) **গুণাত্মক বিপৰীতৰ অস্তিত্ব** (The existence of multiplicative inverse) ঃ প্ৰত্যেক অশূন্য জটিল সংখ্যা $z = a+ib$ বা $a+bi(a\neq 0, b\neq 0)$ ৰ বাবে $\frac{a}{a^2+b^2}+i\frac{-b}{a^2+b^2}$ জটিল সংখ্যাটো পোৱা যায়। ইয়াক $\frac{1}{z}$ বা z^{-1} এৰে বুজোৱা হয় আৰু z অৰ গুণাত্মক বিপৰীত (multiplicative inverse) বোলে। এই ক্ষেত্ৰত $z\frac{1}{z} = 1$ (গুণাত্মক একক).

(vi) **বিতৰণ বিধি** (The distributive law) ঃ যি কোনো তিনিটা জটিল সংখ্যা z_1, z_2, z_3 ৰ বাবে

(*a*) $z_1(z_2+z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$

(*b*) $(z_1+z_2)z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$

5.3.4 *দুটা জটিল সংখ্যাৰ হৰণ (Division of two complex numbers)* দুটা জটিল সংখ্যা z_1 আৰু z_2 দিয়া আছে, আৰু $z_2 \neq 0$. ভাগফল $\frac{z_1}{z_2}$ ৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \frac{1}{z_2}$$

উদাহৰণস্বৰূপে, ধৰা হ'ল $z_1 = 6+3i$ আৰু $z_2 = 2-i$

গতিকে
$$\frac{z_1}{z_2} = \left((6+3i)\times\frac{1}{2-\mathrm{i}}\right) = (6+3i)\left(\frac{2}{2^2+(-1)^2}+\mathrm{i}\frac{-(-1)}{2^2+(-1)^2}\right)$$

$$= (6+3i)\left(\frac{2+i}{5}\right) = \frac{1}{5}\left[12-3+i(6+6\right] = \frac{1}{5}(9+12i)$$

5.3.5 i ৰ ঘাত (Powers of i)

আমি জানো যে

$$i^3 = i^2 i = (-1)\, i = -i\,, \qquad i^4 = \left(i^2\right)^2 = (-1)^2 = 1$$

$$i^5 = \left(i^2\right)^2 i = (-1)^2 i = i\,, \quad i^6 = \left(i^2\right)^3 = (-1)^3 = -1\,, \text{ ইত্যাদি}$$

আকৌ $$i^{-1} = \frac{1}{i} \times \frac{i}{i} = \frac{i}{-1} = -i, \quad i^{-2} = \frac{1}{i^2} = \frac{1}{-1} = -1,$$

$$\sqrt{3}i = \frac{1}{i^3} = \frac{1}{-i} \times \frac{i}{i} = \frac{i}{1} = i, \quad i^{-4} = \frac{1}{i^4} = \frac{1}{1} = 1$$

সাধাৰণভাৱে, যি কোনো অখণ্ড সংখ্যা kৰ বাবে

$i^{4k} = 1,\ i^{4k+1} = i,\ i^{4k+2} = -1,\ i^{4k+3} = -i$

5.3.6 ঋণাত্মক বাস্তৱ সংখ্যাৰ বৰ্গমূল (The square roots of a negative real number)

আমি জানো যে $i^2 = -1$ আৰু $\left(-i^2\right)^2 = i^2 = -1$। গতিকে -1 ৰ বৰ্গমূল হ'ল $i, -i$। অৱশ্যে $\sqrt{-1}$ প্ৰতীকৰদ্বাৰা আমি অকল i কহে বুজিম।

এতিয়া আমি ক'ব পাৰোঁ যে i আৰু $-i$ উভয়ে $x^2 + 1 = 0$ বা $x^2 = -1$ সমীকৰণৰ সমাধান।

সেইদৰে $$\left(\sqrt{3}\,i\right)^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 i^2 = 3\,(-1) = -3$$

$$\left(-\sqrt{3}\,i\right)^2 = \left(-\sqrt{3}\right)^2 i^2 = -3$$

গতিকে, -3 ৰ বৰ্গমূল হ'ল $\sqrt{3}i$ আৰু $-\sqrt{3}i$।

আকৌ $\sqrt{-3}$ প্ৰতীকে মাত্ৰ $\sqrt{3}\,i$ হে বুজায় অৰ্থাৎ $\sqrt{-3} = \sqrt{3}\,i$

সাধাৰণভাৱে, a এটা ধনাত্মক বাস্তৱ সংখ্যা হ'লে $\sqrt{-a} = \sqrt{a}\,\sqrt{-1} = \sqrt{a}\, i\,,$

আমি ইতিমধ্যে জানো যে সকলো ধনাত্মক বাস্তৱ সংখ্যা a আৰু b ৰ বাবে $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ । $a > 0,\ b < 0$ বা $a < 0,\ b > 0$ হ'লেও এই ফলটো প্ৰযোজ্য। যদি $a < 0,\ b < 0$ তেনেহ'লে কি হ'ব? তাকে চোৱা যাওক।

$i^2 = \sqrt{-1}\,\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)\,(-1)}$ [সকলো বাস্তৱ সংখ্যাৰ বাবে $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ বুলি ধৰি লৈ]

$= \sqrt{1} = 1$, এইটো পৰস্পৰবিৰোধী কথা, কিয়নো $i^2 = -1$। গতিকে a আৰু b উভয়ে ঋণাত্মক বাস্তৱ সংখ্যা হ'লে

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} \neq \sqrt{ab}$$

আকৌ, যদি a আৰু b ৰ যি কোনো এটা শূন্য হয়, তেনেহলে, স্পষ্টতঃ, $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab} = 0$

5.3.7 অভেদ (*Identities*)

সকলো জটিল সংখ্যা z_1 আৰু z_2ৰ বাবে তলৰ অভেদটো আমি প্ৰমাণ কৰোঁঃ

$$(z_1+z_2)^2 = z_1^2+z_2^2+2z_1z_2$$

প্ৰমাণ $(z_1+z_2)^2 = (z_1+z_2)\ (z_1+z_2)$

$= (z_1+z_2)z_1+(z_1+z_2)z_2$ (বিতৰণ বিধি)

$= z_1^2+z_2z_1+z_1z_2+z_2^2$ (বিতৰণ বিধি)

$= z_1^2+z_1z_2+z_1z_2+z_2^2$ (পূৰণৰ ক্ৰমবিনিময় বিধি)

$= z_1^2+2z_1z_2+z_2^2$

সেইদৰে আমি তলৰ অভেদবোৰ প্ৰমাণ কৰিব পাৰোঁ।

(i) $(z_1-z_2)^2 = z_1^2-2z_1z_2+z_2^2$

(ii) $(z_1+z_2)^3 = z_1^3+3z_1^2z_2+3z_1z_2^2+z_2^3$

(iii) $(z_1-z_2)^3 = z_1^3-3z_1^2z_2+3z_1z_2^2-z_2^3$

(iv) $z_1^2-z_2^2 = (z_1+z_2)\ (z_1-z_2)$

দৰাচলতে বাস্তৱ সংখ্যাৰ বাবে সত্য আন বহুতো অভেদ জটিল সংখ্যাৰ বাবেও সত্য বুলি প্ৰমাণ কৰিব পাৰি।

উদাহৰণ 2 তলৰ জটিল সংখ্যাবোৰ $a+bi$ আকাৰত প্ৰকাশ কৰাঁ।

(i) $(-5i)\ (\frac{1}{8}i)$ (ii) $(-i)\ (2i)\ (-\frac{1}{8}i)^3$

সমাধান

(i) $(-5i)\ (\frac{1}{8}i) = \frac{-5}{8}i^2 = \frac{-5}{8}(-1) = \frac{5}{8} = \frac{5}{8}+i0$

(ii) $(-i)\ (2i)\ (-\frac{1}{8}i)^3 = 2\times\frac{1}{8\times8\times8}\times i^5 = \frac{1}{256}(i^2)^2 i = \frac{1}{256}i = 0+i\frac{1}{256}$

উদাহৰণ 3 $(5-3i)^3$ ক $a+ib$ আকাৰত প্ৰকাশ কৰাঁ।

সমাধান $(5-3i)^3 = 5^3-3\times5^2\times(3i)+3\times5(3i)^2-(3i)^3$

$= 125-225i-135+27i = -10-198i$

উদাহৰণ 4 $\left(-\sqrt{3}+\sqrt{-2}\right)\left(2\sqrt{3}-i\right)$ ক $a+ib$ আকাৰত প্ৰকাশ কৰাঁ।

সমাধান $\left(-\sqrt{3}+\sqrt{-2}\right)\left(2\sqrt{3}-i\right) = \left(-\sqrt{3}+\sqrt{2}i\right)\left(2\sqrt{3}-i\right)$

$= -6+\sqrt{3}i+2\sqrt{6}i-\sqrt{2}i^3 = \left(-6+\sqrt{2}\right)+\sqrt{3}\left(1+2\sqrt{2}\right)i$

5.4 জটিল সংখ্যাৰ মাপাংক আৰু সংযুগ্মী (The Modulus and Conjugate of a Complex Number)

ধৰা হ'ল $z = a + ib$ এটা জটিল সংখ্যা। z অৰ মাপাংকক $|z|$ এৰে বুজোৱা হয় আৰু অঋণাত্মক বাস্তৱ সংখ্যা $\sqrt{a^2+b^2}$ ক ইয়াৰ মাপাংক বুলি কোৱা হয়; অৰ্থাৎ $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ । আকৌ z অৰ সংযুগ্মীক $\bar{z}$ এৰে বুজোৱা হয় আৰু $a - ib$ জটিল সংখ্যাটোক ইয়াৰ সংযুগ্মী বুলি কোৱা হয়; অৰ্থাৎ $\bar{z} = a - ib$ ।

উদাহৰণস্বৰূপে $|3+i| = \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{10}, |2-5i| = \sqrt{2^2+(-5)^2} = \sqrt{29}$,

আৰু $\overline{3+i} = 3-i$, $\overline{2-5i} = 2+5i$, $\overline{-3i-5} = 3i-5$

এটা অশূন্য জটিল সংখ্যা z অৰ গুণাত্মক বিপৰীত আমি এনেদৰে পাওঁ

$$z^{-1} = \frac{1}{a+ib} = \frac{a}{a^2+b^2} + i\frac{-b}{a^2+b^2} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

বা $\quad z\bar{z} = |z|^2$

তলৰ ফলবোৰ অনায়াসে নিগমন কৰিব পাৰি।

যিকোনো দুটা জটিল সংখ্যা z_1 আৰু z_2ৰ বাবে

(i) $|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$ $\quad$ (ii) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$, যদি $|z_2| \neq 0$

(iii) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$ $\quad$ (iv) $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$

(v) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_1}\right)} = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$, যদি $z_2 \neq 0$

উদাহৰণ 5 $\;2-3i$ৰ গুণাত্মক বিপৰীত উলিওৱাঁ।

সমাধান ধৰা হ'ল $z = 2-3i$

গতিকে, $\bar{z} = 2+3i$ আৰু $\quad |z|^2 = 2^2 + (-3)^2 = 13$

গতিকে, $2-3i$ৰ গুণাত্মক বিপৰীত হ'ব

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{2+3i}{13} = \frac{2}{13} + \frac{3}{13}i$$

তলত দিয়া ধৰণেও গুণাত্মক বিপৰীত উলিয়াব পাৰি

$$z^{-1} = \frac{1}{2-3i} = \frac{2+3i}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{2+3i}{2^2-(3i)^2} = \frac{2+3i}{13} = \frac{2}{13} + \frac{3}{13}i$$

উদাহৰণ 6 তলৰ জটিল সংখ্যাবোৰ $a+ib$ আকাৰত প্ৰকাশ কৰাঁ।

(i) $\dfrac{5+\sqrt{2}i}{1-\sqrt{2}i}$ (ii) i^{-35}

সমাধান (i) $\dfrac{5+\sqrt{2}i}{1-\sqrt{2}i}=\dfrac{5+\sqrt{2}i}{1-\sqrt{2}i}\times\dfrac{1+\sqrt{2}i}{1+\sqrt{2}i}=\dfrac{5+5\sqrt{2}i+\sqrt{2}i-2}{1-(\sqrt{2}i)^2}$

$$=\frac{3+6\sqrt{2}i}{1+2}=\frac{3\left(1+2\sqrt{2}i\right)}{3}=1+2\sqrt{2}i$$

(ii) $i^{-35}=\dfrac{1}{i^{35}}=\dfrac{1}{(i^2)^{17}i}=\dfrac{1}{-i}\times\dfrac{i}{i}=\dfrac{i}{-i^2}=i$

অনুশীলনী 5.1

তলৰ 1 নম্বৰৰ পৰা 10 নম্বৰলৈ দিয়া জটিল সংখ্যাবোৰক $a+ib$ আকাৰত প্ৰকাশ কৰাঁ।

1. $(5i)\left(-\frac{3}{5}i\right)$ 2. i^9+i^{19} 3. i^{-39}

4. $3(7+i7)+i(7+i7)$ 5. $(1-i)-(-1+i6)$

6. $\left(\frac{1}{5}+i\frac{2}{5}\right)-\left(4+i\frac{5}{2}\right)$ 7. $\left[\left(\frac{1}{3}+i\frac{7}{3}\right)+\left(4+i\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{-4}{3}+i\right)\right]$

8. $(1-i)^4$ 9. $\left(\frac{1}{3}+3i\right)^3$ 10. $\left(-2-\frac{1}{3}i\right)^3$

তলৰ 11 নম্বৰৰপৰা 13 নম্বৰলৈ দিয়া জটিল সংখ্যাবোৰৰ গুণাত্মক বিপৰীত উলিওৱাঁ।

11. $4-3i$ 12. $\sqrt{5}+3i$ 13. $-i$

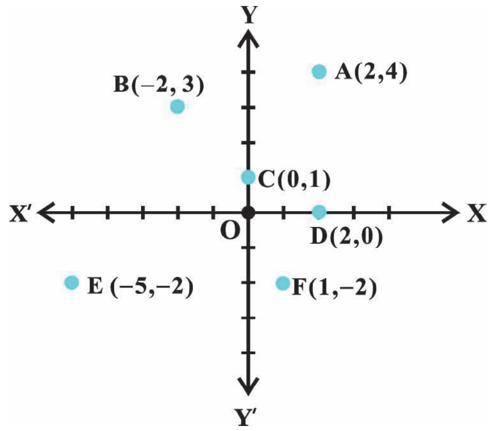
14. তলৰ ৰাশিটোক $a+ib$ আকাৰত প্ৰকাশ কৰাঁ।

$$\frac{\left(3+i\sqrt{5}\right)\left(3-i\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}i\right)-\left(\sqrt{3}-i\sqrt{2}\right)}$$

5.5 আৰ্গণ্ড সমতল আৰু ধ্ৰুৱীয় প্ৰদৰ্শন (Argand Plane and Polar Representation)

আমি জানো যে বাস্তৱ সংখ্যাৰ প্ৰত্যেক ক্ৰমিত-যোৰ (x, y) অৰ অনুৰূপে XY সমতলত এটা অদ্বিতীয় বিন্দু পোৱা যায়। বিপৰীতক্ৰমে এযোৰ পৰস্পৰ লম্ব-ৰেখা $x-$অক্ষ আৰু $y-$অক্ষ সাপেক্ষে সমতলখনৰ প্ৰত্যেক বিন্দুৰ অনুৰূপে এটা অদ্বিতীয় ক্ৰমিতযোৰ পোৱা যায়। ক্ৰমিত-যোৰ (x, y) ৰ অনুৰূপ $x+iy$ জটিল সংখ্যাটোক XY- সমতলত এটা অদ্বিতীয় বিন্দু P(x, y) অৰ দ্বাৰা প্ৰদৰ্শন কৰিব পাৰি। বিপৰীতক্ৰমে, বিন্দুটোৰ অনুৰূপে এটা অদ্বিতীয় জটিল সংখ্যা পোৱা যায়।

$2+4i, -2+3i, 0+1i, 2+0i, -5-2i$ আৰু $1-2i$ জটিল সংখ্যাকেইটাৰ অনুৰূপ ক্ৰমিত যোৰবোৰ হ'ল ক্ৰমে (2, 4), (−2, 3), (0, 1), (2, 0), (−5, −2) আৰু (1, −2)। ইহঁতক জ্যামিতীয়ভাৱে চিত্ৰ 5.1 ত ক্ৰমে A, B, C, D, E আৰু F বিন্দুৰদ্বাৰা বুজোৱা হৈছে।

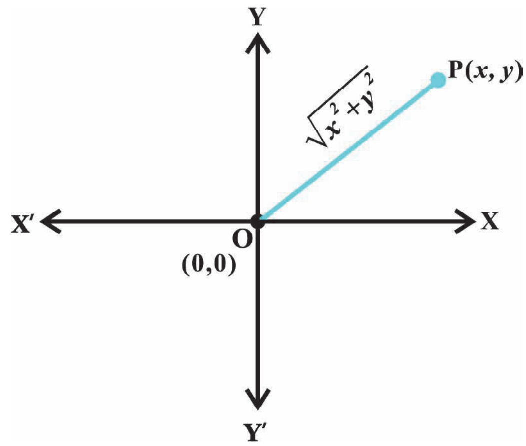


চিত্ৰ 5.1

যিখন সমতলত প্ৰতিটো বিন্দুৰ অনুৰূপে এটা জটিল সংখ্যা নিৰ্দিষ্ট কৰা হয় তাক ***জটিল সমতল বা আৰ্গণ্ড সমতল*** *(Complex Plane or Argand Plane)* বুলি কোৱা হয়।

স্পষ্টতঃ, আৰ্গণ্ড সমতলত $x+iy$ জটিল সংখ্যাটোৰ মাপাংক $\sqrt{x^2+y^2}$ = P (x, y) বিন্দু আৰু মূল বিন্দু O $(0,0)$ ৰ মাজৰ দূৰত্ব।

x-অক্ষৰ বিন্দুবোৰ $a+i\,0$ আকাৰৰ জটিল সংখ্যাবোৰৰ অনুৰূপ আৰু y অক্ষৰ বিন্দুবোৰ

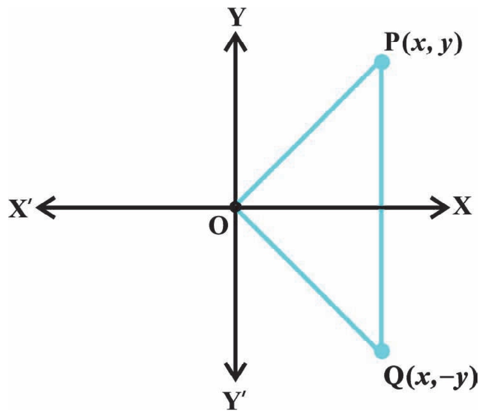


চিত্ৰ 5.2

$0+ib$ আকাৰৰ জটিল সংখ্যাবোৰৰ অনুৰূপ। আৰ্গণ্ড-সমতলত x-অক্ষ আৰু y-অক্ষক ক্ৰমে বাস্তৱ অক্ষ আৰু কাল্পনিক অক্ষ বুলি কোৱা হয়।

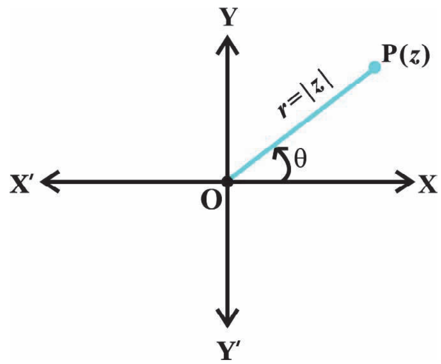
জটিল সংখ্যা $z=x+iy$ আৰু ইয়াৰ সংযুগ্মী $\bar{z}=x-iy$ ৰ আৰ্গণ্ড-সমতলত প্ৰদৰ্শন হ'ল ক্ৰমে P(x, y) আৰু Q$(x, -y)$ বিন্দু দুটা।

জ্যামিতীয়ভাৱে, $(x, -y)$ বিন্দুটো বাস্তৱ অক্ষত (x, y) বিন্দুটোৰ দাপোণ প্ৰতিচ্ছায়া (চিত্ৰ 5.3)।



চিত্ৰ 5.3

5 .5.1 জটিল সংখ্যাৰ ধ্ৰুৱীয় প্ৰদৰ্শন (Polar representation of a complex number)



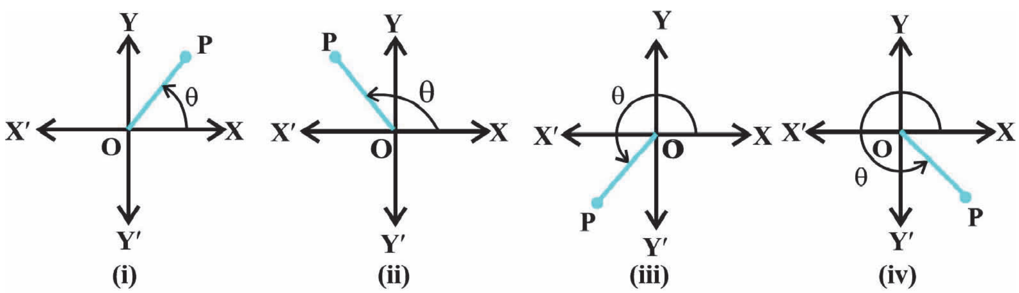
চিত্ৰ 5.4

ধৰা হ'ল P বিন্দুৱে অশূন্য জটিল সংখ্যা $z = x + iy$ বুজাইছে। ধৰা হ'ল দিশযুক্ত ৰেখাখণ্ড OP ৰ দৈৰ্ঘ্য r আৰু OP এ x -অক্ষৰ ধনাত্মক দিশৰ লগতθ কোণ কৰে (চিত্ৰ 5.4)।

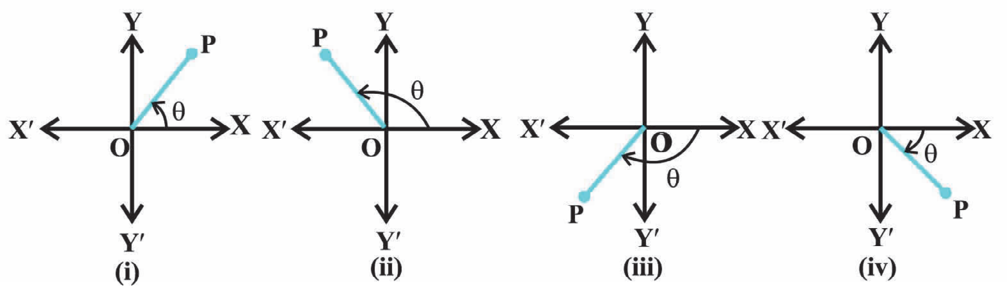
বাস্তৱ সংখ্যাৰ ক্ৰমিতযোৰ (r, θ) ৰ দ্বাৰা P বিন্দুটো অদ্বিতীয়ভাৱে নিৰ্ধাৰণ কৰিব পাৰি। ইয়াক P বিন্দুটোৰ ধ্ৰুৱীয় স্থানাংক (polar coordinates) বোলে। মূলবিন্দুক ধ্ৰুৱবিন্দু (pole) আৰু x - অক্ষৰ ধনাত্মক দিশক আদি ৰেখা (initial line) হিচাপে লোৱা হ'ল।

এতিয়া $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$. সেয়ে $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ আৰু ইয়াক *জটিল সংখ্যাটোৰ ধ্ৰুৱীয় আকাৰ (polar form) বোলে*। ইয়াত $r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$ হ'ল z অৰ মাপাংক আৰু θক z অৰ কোণাংক (argument or amplitude) বোলে আৰু ইয়াক arg z এৰে বুজোৱা হয়।

যিকোনো জটিল সংখ্যা $z \neq 0$ ৰ বাবে, $0 \leq \theta < 2\pi$ অন্তৰালত θ ৰ মাত্ৰ এটা মান থাকিব। অৱশ্যে 2π দৈৰ্ঘ্যৰ যি কোনো অন্তৰালকে; যেনে $-\pi < \theta \leq \pi$ ক , এনে অন্তৰাল হিচাপে ল'ব পাৰি। পৃথককৈ উল্লেখ নকৰিলে আমি θৰ মানটো এনেদৰে লম যাতে $-\pi < \theta \leq \pi$ । ইয়াক z অৰ মুখ্য কোণাংক (principal argument) বোলে আৰু ইয়াক arg z এৰে বুজোৱা হয়।



চিত্ৰ 5.5 ($0 \leq \theta < 2\pi$)



চিত্ৰ 5.6 ($-\pi \leq \theta < \pi$)

উদাহৰণ 7 $z = 1 + i\sqrt{3}$ জটিল সংখ্যাটোক ধ্ৰুৱীয় আকাৰত প্ৰকাশ কৰাঁ।

সমাধান ধৰা হ'ল $1 = r\cos\theta$, $\sqrt{3} = r\sin\theta$

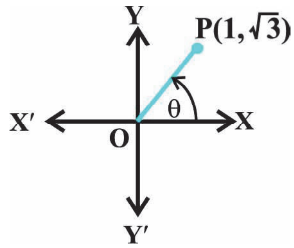
বৰ্গ আৰু যোগ কৰি, আমি পালোঁ

$r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = 4$

অৰ্থাৎ $r = \sqrt{4} = 2$ ($r > 0$ লোৱা হয়)

গতিকে $\cos\theta = \frac{1}{2}, \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$. ইয়াৰপৰা $\theta = \frac{\pi}{3}$

গতিকে, নিৰ্ণেয় ধ্ৰুৱীয় আকাৰ হ'ল $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$



চিত্ৰ 5.7

চিত্ৰ 5.7 অত $z = 1 + i\sqrt{3}$ জটিল সংখ্যাটো দেখুওৱা হৈছে।

উদাহৰণ 8 $\frac{-16}{1+i\sqrt{3}}$ জটিল সংখ্যাটোক ধ্ৰুৱীয় আকাৰত প্ৰকাশ কৰাঁ।

সমাধান প্ৰদত্ত জটিল সংখ্যাটো $\frac{-16}{1+i\sqrt{3}} = \frac{-16}{1+i\sqrt{3}} \times \frac{1-i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$

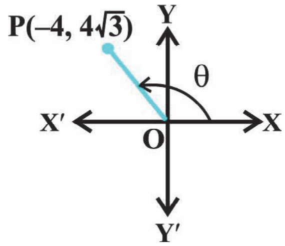
$$= \frac{-16(1-i\sqrt{3})}{1-(i\sqrt{3})^2} = \frac{-16(1-i\sqrt{3})}{1+3} = -4(1-i\sqrt{3}) = -4 + i4\sqrt{3} \text{ (চিত্ৰ 5.8)}$$

ধৰা হ'ল $-4 = r\cos\theta$, $4\sqrt{3} = r\sin\theta$

বৰ্গ আৰু যোগ কৰি, আমি পালোঁ $16 + 48 = r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)$. ইয়াৰপৰা $r^2 = 64$ অৰ্থাৎ $r = 8$

গতিকে $\cos\theta = -\frac{1}{2}, \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$



চিত্ৰ 5.8

গতিকে, নিৰ্ণেয় ধ্ৰুৱীয় আকাৰ হ'ল $8\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

অনুশীলনী 5.2

তলৰ 1 আৰু 2 নম্বৰ প্ৰশ্নৰ জটিল সংখ্যা দুটাৰ মাপাংক আৰু কোণাংক উলিওৱাঁ।

1. $z = -1 - i\sqrt{3}$
2. $z = -\sqrt{3} + i$

তলৰ 3 নম্বৰৰপৰা 8 নম্বৰ প্ৰশ্নলৈ জটিল সংখ্যাবোৰৰ প্ৰতিটোকে ধ্ৰুৱীয় আকাৰত প্ৰকাশ কৰাঁ।

3. $1 - i$
4. $-1 + i$
5. $-1 - i$
6. -3
7. $\sqrt{3} + i$
8. i

5.6 দ্বিঘাত সমীকৰণ (Quadratic Equations)

আমি ইতিমধ্যে দ্বিঘাত সমীকৰণ সম্বন্ধে শিকিছোঁ আৰু বাস্তৱ সংখ্যাৰ সংহতিত ইয়াৰ সমাধান উলিয়াইছোঁ। এই ক্ষেত্ৰত বিবেচিকাৰ (discriminant) মান অঋণাত্মক অৰ্থাৎ ≥ 0

এতিয়া তলৰ দ্বিঘাত সমীকৰণটো লোৱা হ'ল ঃ

$ax^2 + bx + c = 0$, ইয়াত সহগ a, b, c বাস্তৱ সংখ্যা আৰু $a \neq o$.

আকৌ আমি ধৰি লৈছোঁ যে $b^2 - 4ac < 0$.

এতিয়া, জটিল সংখ্যাৰ সংহতিত ঋণাত্মক বাস্তৱ সংখ্যাৰ বৰ্গমূল উলিয়াবলৈ আমি জানো। গতিকে, জটিল সংখ্যাৰ সংহতিত ওপৰৰ সমীকৰণটোৰ সমাধান উলিয়াব পৰা যাব আৰু সেয়া হ'ল

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{4ac - b^2}\, i}{2a}$$

> ☛ টোকা এইখিনিতে কোনো বিদ্যাৰ্থীয়ে হয়তো জানিবলৈ বিচাৰিব পাৰে যে এটা সমীকৰণৰ মূল কিমানটা থাকে। এই সন্দৰ্ভত আমি প্ৰমাণ ব্যতিৰেকে ***বীজগণিতৰ মৌলিক উপপাদ্য*** *(Fundamental theorem of Algebra)* শীৰ্ষক উপপাদ্যটোৰ উক্তি উল্লেখ কৰিলোঁ।

'এটা বহুপদ সমীকৰণৰ অন্ততঃ এটা মূল থাকে।'

এই উপপাদ্যৰ ফলস্বৰূপে অধোলিখিত অতি প্ৰয়োজনীয় সিদ্ধান্তটো পোৱা যায়।

'এটা n মাত্ৰাৰ বহুপদ সমীকৰণৰ n টা মূল থাকে।'

উদাহৰণ 9 সমাধান কৰাঁ $x^2 + 2 = 0$

সমাধান $x^2 + 2 = 0$

বা $x^2 = -2$ অৰ্থাৎ $x = \pm\sqrt{-2} = \pm\sqrt{2}\, i$

উদাহৰণ 10 সমাধান কৰাঁ $x^2 + x + 1 = 0$

সমাধান এই ক্ষেত্ৰত $b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = 1 - 4 = -3$

গতিকে, সমাধান হ'ল $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2 \times 1} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}\, i}{2}$

উদাহৰণ 11 সমাধান কৰাঁ $\sqrt{5}x^2 + x + \sqrt{5} = 0$

সমাধান সমীকৰণটোৰ বিবেচিকা হ'ল

$$1^2 - 4 \times \sqrt{5} \times \sqrt{5} = 1 - 20 = -19$$

গতিকে, সমাধান হ'ল

$$\frac{-1 \pm \sqrt{-19}}{2\sqrt{5}} = \frac{-1 \pm \sqrt{19}\, i}{2\sqrt{5}}$$

অনুশীলনী 5.3

তলৰ সমীকৰণবোৰ সমাধান কৰাঁ।

1. $x^2 + 3 = 0$ 2. $2x^2 + x + 1 = 0$ 3. $x^2 + 3x + 9 = 0$ 4. $-x^2 + x - 2 = 0$

5. $x^2 + 3x + 5 = 0$ 6. $x^2 - x + 2 = 0$ 7. $\sqrt{2}x^2 + x + \sqrt{2} = 0$ 8. $\sqrt{3}x^2 - \sqrt{2}x + 3\sqrt{3} = 0$

9. $x^2 + x + \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$ 10. $x^2 + \frac{x}{\sqrt{2}} + 1 = 0$

বিবিধ উদাহৰণ

উদাহৰণ 12 $\frac{(3-2i)\ (2+3i)}{(1+2i)\ (2-i)}$ ৰ সংযুগ্মী উলিওৱাঁ।

সমাধান $\frac{(3-2i)(2+3i)}{(1+2i)(2-i)}$

$$= \frac{6+9i-4i+6}{2-i+4i+2} = \frac{12+5i}{4+3i} \times \frac{4-3i}{4-3i}$$

$$= \frac{48-36i+20i+15}{16+9} = \frac{63-16i}{25} = \frac{63}{25} - \frac{16}{25}i$$

গতিকে, $\frac{(3-2i)(2+3i)}{(1+2i)(2-i)}$ ৰ সংযুগ্মী হ'ল $\frac{63}{25} + \frac{16}{25}i$

উদাহৰণ 13 তলৰ জটিল সংখ্যাবোৰৰ মাপাংক আৰু কোণাংক উলিওৱাঁ।

(i) $\frac{1+i}{1-i}$ (ii) $\frac{1}{1+i}$

সমাধান (i) $\frac{1+i}{1-i} = \frac{1+i}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i} = \frac{1-1+2i}{1+1} = i = 0 + i$

এতিয়া, ধৰা হ'ল $0 = r\cos\theta$, $1 = r\sin\theta$ ।

বৰ্গ আৰু যোগ কৰি, $r^2 = 1$ অৰ্থাৎ $r = 1$ । গতিকে

$$\cos\theta = 0, \quad \sin\theta = 1$$

গতিকে, $\theta = \frac{\pi}{2}$

গতিকে $\frac{1+i}{1-i}$ ৰ মাপাংক 1 আৰু কোণাংক $\frac{\pi}{2}$

(ii) $\frac{1}{1+i}=\frac{1-i}{(1+i)\ (1-i)}=\frac{1-i}{1+1}=\frac{1}{2}-\frac{i}{2}$

ধৰা হ'ল $\frac{1}{2}=r\cos\theta, \qquad -\frac{1}{2}=r\sin\theta$

ওপৰৰ (i) ৰ দৰে, আমি পাম $r=\frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin\theta=\frac{-1}{\sqrt{2}}$

গতিকে, $\qquad \theta=\frac{-\pi}{4}$

গতিকে, $\frac{1}{1+i}$ ৰ মাপাংক হ'ল $\frac{1}{\sqrt{2}}$, কোণাংক হ'ল $\frac{-\pi}{4}$

উদাহৰণ 14 যদি $x+iy=\frac{a+ib}{a-ib}$, প্ৰমাণ কৰাঁ যে $x^2+y^2=1$

সমাধান

$$x+iy=\frac{(a+ib)(a+ib)}{(a-ib)(a+ib)}=\frac{a^2-b^2+2abi}{a^2+b^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}+\frac{2ab}{a^2+b^2}i$$

গতিকে $\quad x-iy=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}-\frac{2ab}{a^2+b^2}i$

গতিকে

$$x^2+y^2=(x+iy)(x-iy)=\frac{(a^2-b^2)^2}{(a^2+b^2)^2}+\frac{4a^2b^2}{(a^2+b^2)^2}=\frac{(a^2+b^2)^2}{(a^2+b^2)^2}=1$$

উদাহৰণ 15 $\frac{3+2i\sin\theta}{1-2i\sin\theta}$ বিশুদ্ধ বাস্তৱ হ'লে, বাস্তৱ θ উলিওৱাঁ।

সমাধান

$$\frac{3+2i\sin\theta}{1-2i\sin\theta}=\frac{(3+2i\sin\theta)\ (1+2i\sin\theta)}{(1-2i\sin\theta)\ (1+2i\sin\theta)}$$

$$=\frac{3+6i\sin\theta+2i\sin\theta-4\sin^2\theta}{1+4\sin^2\theta}$$

$$=\frac{3-4\sin^2\theta}{1+4\sin^2\theta}+\frac{8i\sin\theta}{1+4\sin^2\theta}$$

প্ৰশ্নমতে জটিল সংখ্যাটো বাস্তৱ।

গতিকে $\qquad \frac{8\sin\theta}{1+4\sin^2\theta}=0$ অৰ্থাৎ $\sin\theta=0$.

গতিকে $\qquad \theta=n\pi, \quad n\in\mathbf{Z}$.

উদাহৰণ 16 $z = \dfrac{i-1}{\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}}$ জটিল সংখ্যাটোক ধ্ৰুৱীয় আকাৰত প্ৰকাশ কৰাঁ।

সমাধান $z = \dfrac{i-1}{\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i}$

$$= \frac{2(i-1)}{1+\sqrt{3}i} \times \frac{1-\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i} = \frac{2(i+\sqrt{3}-1+\sqrt{3}i)}{1+3} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\sqrt{3}+1}{2}i$$

এতিয়া $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2} = r\cos\theta, \dfrac{\sqrt{3}+1}{2} = r\sin\theta$ বহুওৱা হ'ল।

বৰ্গ আৰু যোগ কৰি, আমি পালোঁ

$$r^2 = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^2 = \frac{2\left((\sqrt{3})^2+1\right)}{4} = \frac{2\times 4}{4} = 2$$

গতিকে, $r = \sqrt{2}$. ইয়াৰপৰা $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}, \sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ পোৱা গ'ল।

গতিকে $\theta = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{5\pi}{12}$ (কিয় ?)

সেয়ে, ধ্ৰুৱীয় আকাৰটো হ'ল

$$\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$$

পঞ্চম অধ্যায়ৰ বিবিধ অনুশীলনী

1. মান নিৰ্ণয় কৰাঁ $\left[i^{18} + \left(\dfrac{1}{i}\right)^{25}\right]^3$

2. যি কোনো দুটা জটিল সংখ্যা z_1 আৰু z_2 ৰ বাবে প্ৰমাণ কৰাঁ যে
$\text{Re}(z_1 z_2) = \text{Re}\, z_1 \,\text{Re}\, z_2 - \text{Im}\, z_1 \,\text{Im}\, z_2$

3. $\left(\dfrac{1}{1-4i} - \dfrac{2}{1+i}\right)\left(\dfrac{3-4i}{5+i}\right)$ ক প্ৰামাণিক আকাৰলৈ নিয়াঁ।

4. যদি $x - iy = \sqrt{\dfrac{a-ib}{c-id}}$, প্ৰমাণ কৰাঁ যে $(x^2+y^2)^2 = \dfrac{a^2+b^2}{c^2+d^2}$

5. তলৰ জটিল সংখ্যাবোৰক ধ্ৰুৱীয় আকাৰলৈ নিয়াঁ।

(i) $\dfrac{1+7i}{(2-i)^2}$ (ii) $\dfrac{1+3i}{1-2i}$

6 নম্বৰপৰা 9 নম্বৰ প্ৰশ্নলৈ সমীকৰণবোৰ সমাধান কৰাঁ।

6. $3x^2 - 4x + \frac{20}{3} = 0$ 7. $x^2 - 2x + \frac{3}{2} = 0$

8. $27x^2 - 10x + 1 = 0$ 9. $21x^2 - 28x + 10 = 0$

10. যদি $z_1 = 2 - i, z_2 = 1 + i, \left|\frac{z_1 + z_2 + 1}{z_1 - z_2 + 1}\right|$ উলিওৱাঁ।

11. যদি $a + ib = \frac{(x+i)^2}{2x^2 + 1}$, প্ৰমাণ কৰাঁ যে

$$a^2 + b^2 = \frac{(x^2+1)^2}{(2x^2+1)^2}$$

12. ধৰা হ'ল $z_1 = 2 - i, \ z_2 = -2 + i$

(i) $\text{Re}\left|\frac{z_1 z_1}{\bar{z}_2}\right|$ (ii) $\text{Im}\left|\frac{1}{z_1 \bar{z}_1}\right|$ উলিওৱাঁ।

13. $\frac{1+2i}{1-3i}$ জটিল সংখ্যাটোৰ মাপাংক আৰু কোণাংক উলিওৱাঁ।

14. $-6 - 24i$ জটিল সংখ্যাটোৰ সংযুগ্মী $(x - iy)(3 + 5i)$. x আৰু y বাস্তৱ সংখ্যা দুটা উলিওৱাঁ।

15. $\frac{1+i}{1-i} - \frac{1-i}{1+i}$ জটিল সংখ্যাটোৰ মাপাংক উলিওৱাঁ।

16. যদি $(x + iy)^3 = u + iv$, দেখুওৱাঁ যে $\frac{u}{x} + \frac{v}{y} = 4(x^2 - y^2)$.

17. α আৰু β দুটা পৃথক জটিল সংখ্যা আৰু $|\beta| = 1$. $\left|\frac{\beta - \alpha}{1 - \bar{\alpha}\beta}\right|$ উলিওৱাঁ।

18. $|1 - i|^x = 2^x$ সমীকৰণৰ অশূন্য অখণ্ড সমাধানৰ সংখ্যা উলিওৱাঁ।

19. যদি $(a + ib)\ (c + id)\ (e + if)\ (g + ih) = A + iB$, দেখুওৱাঁ যে

$(a^2 + b^2)\ (c^2 + d^2)\ (e^2 + f^2)\ (g^2 + h^2) = A^2 + B^2$

20. যদি $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^m = 1$, m অৰ সৰ্বনিম্ন ধনাত্মক অখণ্ড মান উলিওৱাঁ।

সাৰাংশ

- a আৰু b বাস্তৱ সংখ্যা হ'লে $a + ib$ আকাৰৰ সংখ্যাক জটিল সংখ্যা বুলি কোৱা হয়। a ক জটিল সংখ্যাটোৰ বাস্তৱ অংশ আৰু b ক কাল্পনিক অংশ বুলি কোৱা হয়।
- ধৰা হ'ল $z_1 = a + ib$ আৰু $z_2 = c + id$. তেনেহ'লে

(i) $z_1 + z_2 = (a+c) + i(b+d)$

(i) $z_1 z_2 = (ac - bd) + i(ad + bc)$

- যি কোনো অশূন্য জটিল সংখ্যা $z = a + ib$ ৰ বাবে $(a \neq 0, b \neq 0)$, $\frac{a}{a^2+b^2} + i\frac{-b}{a^2+b^2}$ জটিল সংখ্যাটো পোৱা যায়। ইয়াক $\frac{1}{z}$ বা z^{-1} এৰে বুজোৱা হয় আৰু z অৰ গুণাত্মক বিপৰীত বোলে।

  ইয়াত $(a+ib)\left(\frac{a^2}{a^2+b^2} + i\frac{-b}{a^2+b^2}\right) = 1 + i0 = 1$

- যি কোনো অখণ্ড সংখ্যা k ৰ বাবে,

  $i^{4k} = 1,\ i^{4k+1} = i,\ i^{4k+2} = -1,\ i^{4k+3} = -i$

- $z = a + ib$ জটিল সংখ্যাটোৰ সংযুগ্মীক $\bar{z}$ এৰে বুজোৱা হয় আৰু z ৰ সংযুগ্মী হ'ল $\bar{z} = a - ib$

- $z = x + iy$ জটিল সংখ্যাটোৰ ধ্ৰুৱীয় আকাৰ হ'ল $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ইয়াত $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ হ'ল z অৰ মাপাংক আৰু $\cos\theta = \frac{x}{r}, \sin\theta = \frac{y}{r}$ θ ক z অৰ কোণাংক বোলে। θ ৰ যি মান $-\pi < \theta \leq \pi$ অন্তৰালত থাকে, তাক z অৰ মুখ্য কোণাংক বোলে।

- n মাত্ৰাৰ বহুপদ সমীকৰণৰ n টা মূল থাকে।

- $a, b, c \in \mathbf{R}$ হ'লে $ax^2 + bx + c = 0$ দ্বিঘাত সমীকৰণৰ মূল হ'ল

  $$x = \frac{-b \pm \sqrt{4ac - b^2}\,i}{2a},\quad b^2 - 4ac < 0,\quad a \neq 0.$$

ঐতিহাসিক টোকা

গ্ৰীকসকলে অনুধাৱন কৰিছিল যে বাস্তৱ সংখ্যা-প্ৰণালীত ঋণাত্মক সংখ্যাৰ বৰ্গমূল নাই। কিন্তু পোন প্ৰথম বাৰৰ বাবে এই অসুবিধাটো স্পষ্টকৈ কোৱাৰ কৃতিত্ব ভাৰতীয় গণিতজ্ঞ মহাবীৰ (850)ৰ প্ৰাপ্য। তেওঁ *গণিতসাৰসংগ্ৰহত* মন্তব্য কৰিছিল যে 'এটা ঋণাত্মক ৰাশি বৰ্গ নহয় আৰু সেয়ে বৰ্গমূল নাই'। আন এজন ভাৰতীয় গণিতজ্ঞ ভাস্কৰে 1150 খ্ৰিষ্টাব্দত ৰচিত *বীজগণিত* নামৰ গ্ৰন্থত কৈছে যে 'এটা ঋণাত্মক সংখ্যাৰ বৰ্গমূল নাই, কিয়নো ই বৰ্গ নহয়'। কাৰ্ডানে (Cardan,1545) $x + y = 10, xy = 40$ সমাধান কৰিব বিচাৰিছিল। তেওঁ ইয়াৰ সমাধান হিচাপে $x = 5 + \sqrt{-15}$ আৰু $y = 5 - \sqrt{-15}$ পাইছিল আৰু এইবোৰক 'অৰ্থহীন' বুলি প্ৰত্যাখ্যান কৰিছিল। আলবাৰ্ট গিৰাৰ্ডে (Albert Girard) ঋণাত্মক সংখ্যাৰ বৰ্গমূল মানি লৈছিল (প্ৰায় 1625) আৰু তেওঁ মন্তব্য কৰিছিল যে ইয়াৰপৰা এটা বহুপদ সমীকৰণৰ যি মাত্ৰা, সিমান সংখ্যক মূল পাবলৈ সমৰ্থ হ'ম। অইলাৰে (Euler) প্ৰথমবাৰৰ বাবে $\sqrt{-1}$ ৰ বাবে i প্ৰতীকটো ব্যৱহাৰ কৰে আৰু ডব্লিউ আৰ হেমিল্টনে (W R Hamilton) $a + ib$ জটিল সংখ্যাক বাস্তৱ সংখ্যাৰ ক্ৰমিতযোৰ (a, b) হিচাপে বিবেচনা কৰে। ইয়াৰপৰা এটা বিশুদ্ধ গাণিতিক সংজ্ঞা পোৱা যায় আৰু তথাকথিত "কাল্পনিক সংখ্যা" বাদ দিব পৰা যায়।