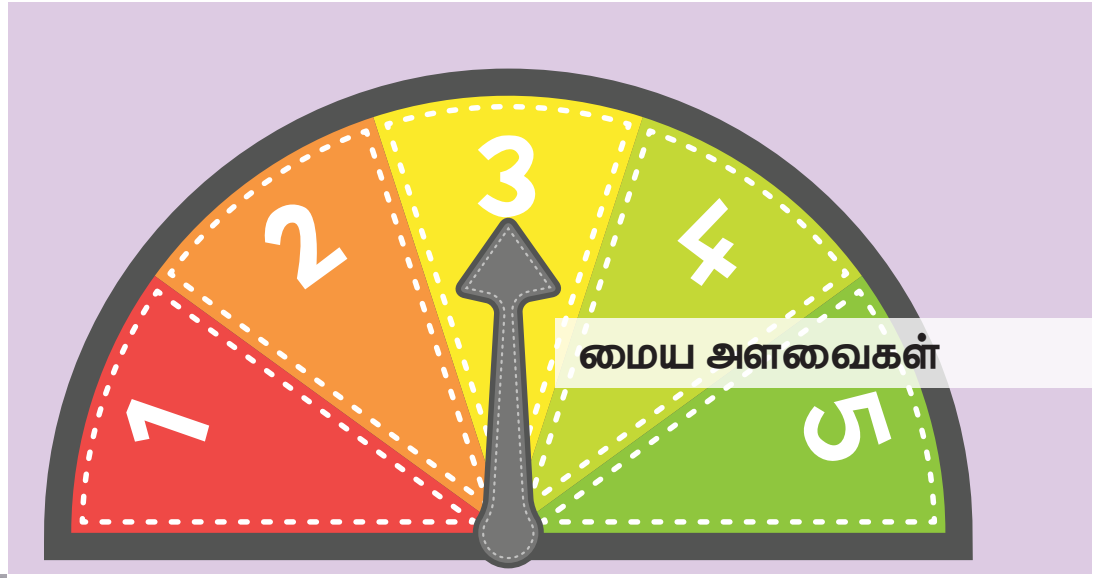


அத்தியாயம்

5



சர் பிரான்ஸிஸ் கால்ட்டன்

(16 பிப்ரவரி 1822 – 17 சனவரி 1911)

சர் பிரான்ஸிஸ் கால்ட்டன், இங்கிலாந்தில் பிறந்த புள்ளியியலார். அவர் சமூகவியல், உளவியல், இனமேம்பாட்டியல், வானிலை, புவியியல், புதிய ஆய்வுகள் போன்ற பல துறைகளில் சிறந்து விளங்கிய வித்தகர். அவர் 340க்கும் மேற்பட்ட ஆராய்ச்சி கட்டுரைகளும், புத்தகங்களும் வெளியிட்டுள்ளார். ஒட்டுறவு என்ற கருத்தை உருவாக்கி, சராசரி சார்ந்த உடன் தொடர்பு போக்குகளைக் கண்டு அறிமுகப்படுத்தியுள்ளார். அவர் முதன் முதலில் மனிதருக்குள்ளேயுள்ள புத்தி கூர்மையின் மரபு சார்ந்த வேறுபாடுகளை, புள்ளியியல் முறைப்படி ஆய்வு செய்வதற்காக வினாப்பட்டியல் அமைத்து தரவுகளைச் சேகரிக்கும் முறையைப் பயன்படுத்தினார்.

அறிவியலை அடிப்படையாகக் கொண்ட வானிலையியலில், முதன்முறையாக வரைபடங்கள் மூலம் புயல் உருவாகும் முறையைக் கண்டறிந்தார். அதை ஐரோப்பிய அளவுகோலுக்கு இணங்க குறுகிய கால வானிலை பற்றிய முழுமையான பதிவு செய்தார். அவர் மேலும் காது கேளாதோருக்காக, அவர்களைச் சோதனை செய்யும் கால்ட்டன் விசில் எனும் கருவியைக் கண்டுபிடித்து அவர்களுக்குப் பயன்படும்படியாக உதவியுள்ளார்.

'மனித மனம் எண்களால் ஆன அதிக எண்ணிக்கையுடைய தரவுகளை ஒரே சமயத்தில் கிரகித்து நினைவில் வைத்திருக்கும் ஆற்றல் பெற்றிருக்கவில்லையாதலால், அத்தரவுகளைப் பற்றி நமக்குப் போதுமான அளவில் விளக்கம் பெறும்படியாக சில எண்களைக் கொண்டே அவற்றைக் குறிப்பிட வேண்டிய அவசியம் ஏற்பட்டுள்ளது'

- பேராசிரியர் ஆர்.ஏ.பிஷர்

நோக்கங்கள்



- ★ சராசரி என்பது ஒரு குழுவைப் பற்றிக் குறிப்பிடும் அளவை என்பதை அறிதல்.
- ★ கணித சராசரி அளவைகளையும், இடம் சார்ந்த சராசரிகளையும் விதிப்படி கணக்கிடுதல்.
- ★ கால்மானங்கள், பதின்மானங்கள், நூற்றுமானங்களைக் கணக்கிட்டு விளக்குதல்
- ★ சராசரிகளுக்கிடையேயுள்ள தொடர்புகளைப் புரிந்து கொண்டு அவற்றின் பயன்களைக் கூறுதல்



அறிமுகம்

மிக அதிக அளவில் இடம் பெறும் தரவுகளை எளிதில் நினைவில் நிறுத்தியிருப்பது என்பது மனித மனத்திற்கு இயலாத ஒன்றாகும். எனவே சேகரித்த தரவுகளை சுருக்கமாகவும், அத் தரவுகளின் பண்பினை வெளிப்படுத்தும் விதமாகவும் சில எண்களைக் கொண்டே தரவுகளின் தன்மையைப் புரிந்து கொள்ளும் விதமாக அமைக்க வேண்டும். மேற்கூறிய அத்தன்மையைக் கொண்ட 'மையப்போக்கு அளவைகள்' என்பது பற்றி இப்பகுதியில் காணலாம். மையப்போக்கு அளவைகளை சராசரிகள் என்றும் கூறலாம்.

நடைமுறை கணிதச் செயல்களில், பல தரவு உறுப்புகள் கொண்ட கணத்தை அதைச் சார்ந்த ஒரே ஒரு உறுப்பின் அளவைக் கொண்டு கூறும் தேவை ஏற்படுகிறது. அத்தரவு கணத்தின் உறுப்பு மதிப்புகள் வேறுவேறாயினும், ஒர் உறுப்பைச் சுற்றியே மற்ற உறுப்புகள் அமைவதால் அந்த உறுப்பின் மதிப்பே அந்த தரவு கணத்தின் பிரதிநிதி உறுப்பாகக் கருதப்படுகிறது. எனவே அம்மதிப்பே மையப்போக்கு அளவை என்று கூறப்படுகிறது.

இத்தகைய மையப்போக்கு அளவை, அத்தரவு கணத்தின் தன்மையை எளிதாக விளக்கிவிடுகிறது. மேலும் இவ்வளவை பிந்தைய கணிதச் செயல்பாடுகளுக்கும், பகுப்பாய்வுகளுக்கும், பயன்படும்படியாக அமைகிறது.

5.1 மையப் போக்கு அளவைகள்

வரையறை:

புள்ளியியலாளர்கள் சராசரியை வெவ்வேறு விதமாக வரையறுத்துள்ளனர். அவற்றில் முக்கியமான சில வரையறைகள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

"சேகரிக்கப்பட்ட எண்களைச் சுற்றி அமைந்திருக்கும் மைய மதிப்பே மையப்போக்கு அளவைகள்". – கிளார்க் மற்றும் செகாடே

"சராசரி என்பது முழுமைத் தொகுதியின் ஒரு பகுதியாக இருப்பினும் தொகுதி முழுமையையும் குறிப்பிடக்கூடியது". – முர்ரே R. ஸ்பீகல்

"சில சமயங்களில் சராசரி ஒரு எண்ணாக விவரிக்கப்பட்டாலும் தொகுதி முழுமையையும் குறிப்பிடக்கூடியது". – லீபோ

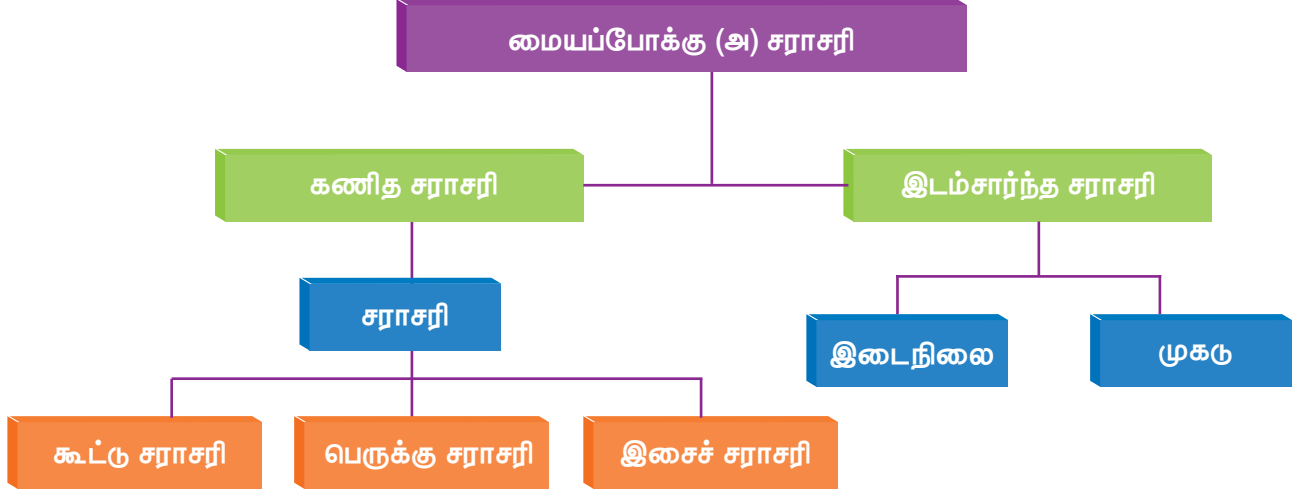
மேற்கூறிய வரையறைகளிலிருந்து சராசரி என்பது முழுமைத் தொகுதியை எடுத்துரைக்கக்கூடிய ஒர் மதிப்பு என நன்கு விளங்குகிறது. மேலும் சராசரி ஒர் மையப்போக்களவையாகும்

5.2 சிறந்த சராசரியின் முக்கிய சிறப்புகள்:

- நன்கு வரையறுக்கப்பட்டு ஒரே ஒரு தீர்வைப் பெற்றிருக்க வேண்டும்.
- எளிதில் புரிந்து கொள்வதாகவும், கணக்கிடுவதற்கு ஏற்ற வகையில் அமைய வேண்டும்.
- விவரங்களின் எல்லா உறுப்புகளையும் அடிப்படையாக வைத்து காணப்படுவதாக இருக்க வேண்டும்.

- கணித வாய்ப்பாட்டின் வடிவில் அமைய வேண்டும்
- மாதிரி நிலைத்தன்மை பெற்றுள்ளதாய் இருக்க வேண்டும்.
- அதிக மதிப்புகளால் இதை பாதிக்காது.

5.3 மையப் போக்கு அளவைகளின் வகைகள்



5.3.1 கூட்டு சராசரி

(a) தொகுக்கப்படாத தரவுகள் மூலம் கூட்டு சராசரி காணுதல்

மாறியின் கூட்டு சராசரி என்பது அம்மாறியின் மதிப்புகளின் மொத்தக் கூட்டுத் தொகையை மதிப்புகளின் மொத்த எண்ணிக்கையால் வகுக்கக் கிடைக்கும் எண் ஆகும்.

மாறியின் n மதிப்புகள் $x_1, x_2, \dots, x_n$ n எனில், இதன் கூட்டு சராசரி

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

கூட்டு சராசரியை நேரடிமுறை மற்றும் சுருக்குமுறை என்று இரு முறைகளில் காணலாம்.

(i) நேரடி முறை

(ii) எளிய முறை



குறிப்பு

இயல்பான சுகாதார அளவைகளான இரத்த அழுத்தம், நாடித்துடிப்பு, இரத்த செல் எண்ணிக்கை, இரத்த சர்க்கரை அளவு போன்றவை ஒரு குறிப்பிட்ட இடத்திலுள்ள மக்களிடத்தில் கணக்கிடப்பட்ட சராசரியே ஆகும். இவை நபர்களுக்கிடையே மாறுபடும்

எடுத்துக்காட்டு 5.1

7 வெவ்வேறு நாட்களில் ஒரு பள்ளியின் நூலகத்திலிருந்து கொடுக்கப்பட்ட புத்தகங்களின் எண்ணிக்கை 7, 9, 12, 15, 5, 4, 11 புத்தகங்களின் எண்ணிக்கையின் கூட்டு சராசரி காண்க.

தீர்வு:

(i) நேரடி முறை

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \\ \bar{x} &= \frac{7+9+12+15+5+4+11}{7} \\ &= \frac{63}{7} = 9\end{aligned}$$

புத்தகங்களின் எண்ணிக்கையின் கூட்டுசராசரி 9

(ii) எளிய முறை:

A என்பது d_i ல் அமைந்த இடைப்பட்ட ஏதேனும் ஒரு மதிப்பு மற்றும் $d_i = x_i - A$ எனில்

$$\bar{x} = A + \frac{\sum_{i=1}^n d_i}{n}$$

எடுத்துக்காட்டு 5.2

ஒரு மாணவனின் 5 பாடங்களின் மதிப்பெண் விவரம் 75, 68, 80, 92, 56 எனில் அதன் கூட்டு சராசரி காண்க

தீர்வு:

இங்கு $A = 68$ எனில்,

x_i	$d_i = x_i - 68$
75	7
68	0
80	12
56	-12
92	24
மொத்தம்	31

$$\begin{aligned}\bar{x} &= A + \frac{\sum_{i=1}^n d_i}{n} \\ &= 68 + \frac{31}{5} \\ &= 68 + 6.2 = 74.2\end{aligned}$$

மதிப்பெண்களின் கூட்டு சராசரி 74.2

(b) தொகுக்கப்பட்ட தரவுகள் மூலம் கூட்டு சராசரி காணுதல்

If $x_1, x_2, \dots, x_n$ என்பது கொடுக்கப்பட்ட n தரவுகள், அவற்றின் நிகழ்வெண்கள் $f_1, f_2, \dots, f_n$. எனில் அதன் கூட்டு சராசரி (நேரடி முறை)

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i x_i}{N}$$

சுருக்கு முறை

$$\bar{x} = A + \frac{\sum_{i=1}^n f_i d_i}{N} \quad \text{இங்கு} \quad d_i = x_i - A$$

எடுத்துக்காட்டு 5.3

73 பக்கங்கள் அடங்கிய கையெழுத்து பிரதிகளை சரிபார்க்கும்போது ஒவ்வொரு பக்கங்களிலும் கண்டறியப்பட்ட தவறுகளின் அட்டவணை கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

தவறுகளின் எண்ணிக்கை	1	2	3	4	5	6	7
பக்கங்களின் எண்ணிக்கை	5	9	12	17	14	10	6

ஒவ்வொரு பக்கங்களின் கண்டறியப்பட்ட தவறுகளின் கூட்டு சராசரி காண்க

தீர்வு:

(i) நேரடி முறை

x_i	f_i	$f_i x_i$
1	5	5
2	9	18
3	12	36
4	17	68
5	14	70
6	10	60
7	6	42
மொத்தம்	N=73	299

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i x_i}{N}$$

$$= \frac{299}{73} = 4.09$$

தவறுகளின் கூட்டு சராசரி 4.09

(ii) எளிய முறை

x_i	f_i	$d_i = x_i - A$	$f_i d_i$
1	5	-3	-15
2	9	-2	-18
3	12	-1	-12
4	17	0	0
5	14	1	14
6	10	2	20
7	6	3	18
	$\Sigma f_i = 73$		$\Sigma f_i d_i = 7$

$$\begin{aligned} \bar{x} &= A + \frac{\sum_{i=1}^n f_i d_i}{N} \\ &= 4 + \frac{7}{73} \\ &= 4.09 \end{aligned}$$

தவறுகளின் கூட்டு சராசரி = 4.09

தொடர்ச்சியாக தொகுக்கப்பட்ட தரவுகளின் கூட்டு சராசரி

கூட்டு சராசரி காண முன்பே அறிந்த இரு முறைகளையும் இங்கு பயன்படுத்தலாம்.

(i) நேரடி முறை

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i x_i}{N}, \quad x_i \text{ என்பது பிரிவு இடைவெளியின் மையப்புள்ளி}$$

(ii) எளிய முறை

$$\bar{x} = A + \frac{\sum_{i=1}^n f_i d_i}{N} \times C$$

இங்கு $d = \frac{x_i - A}{c}$

x_i என்பது பிரிவு இடைவெளியின் மையப்புள்ளி

A - ஏதேனும் ஒரு மதிப்பு

c - பிரிவு இடைவெளியின் அகலம்

எடுத்துக்காட்டு 5.4

வெவ்வேறு குழுக்களில் உள்ள ஆட்களின் வருமானத்தின் அட்டவணை கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

வரவு (ரூ.1000)	0 – 8	8 – 16	16 – 24	24 – 32	32 – 40	40 – 48
ஆட்களின் எண்ணிக்கை	8	7	16	24	15	7

ஆட்களின் வருமானத்தின் கூட்டு சராசரி காண்க

தீர்வு:

நேரடிமுறை:

Class	f_i	x_i	$f_i x_i$
0-8	8	4	32
8 – 16	7	12	84
16-24	16	20	320
24-32	24	28	672
32-40	15	36	540
40-48	7	44	308
N =77			1956

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{\sum_{i=1}^n f_i x_i}{N} \\ &= \frac{1956}{77} \\ &= 25.40\end{aligned}$$

சுருக்கு முறை:

Class	f_i	x_i	$d_i = (x_i - A)/c$	$f_i d_i$
0 – 8	8	4	-3	-24
8 – 16	7	12	-2	-14



16 – 24	16	20	-1	-16
24 – 32	24	28	A	0
32 – 40	15	36	1	15
40 – 48	7	44	2	14
மொத்தம்	N= 77			-25

$$\bar{x} = A + \frac{\sum_{i=1}^n f_i d_i}{N} \times C$$

$$= 28 + \frac{-25}{77} \times 8 = 25.40$$

நிறைகள்

- கணக்கிடுவதற்கு எளிதாகவும், ஒரே மதிப்பையும் பெற்றிருக்கும்
- கண்டறியப்பட்ட எல்லா மதிப்புகளையும் பொறுத்து அமையும்.
- நன்கு வரையறுக்கப்பட்டது
- மாறிகளின் தன்மைகளைப் பொறுத்து குறைந்த அளவு மாறுபடும்
- புள்ளியியலை மேலும் அறிவதற்கு இது பயன்படுகிறது.

வரம்புகள்

- சராசரியானது முனை உறுப்புகளால் பாதிக்கக்கூடியது
- அழகு, நேர்மை போன்ற எண் அளவுகளால் குறிக்க இயலாத பண்புகளை இக்கூட்டு சராசரியின் மூலம் காண இயலாது.
- நிகழ்வெண் வரைபடமூலமாக இதனைப் பெற முடியாது

எங்கே பயன்படும் ?

ஒரே பண்புகள் உடைய தரவுகளுக்கு கூட்டு சராசரி மிகவும் உகந்தது. மற்ற மதிப்புகளுக்கு கூட்டுசராசரி காணும்போது அதன் விடை நம்மை தவறான இடத்திற்கு வழிவகுக்கும்

நிறையிட்ட கூட்டுசராசரி

தரவுகளின் கூட்டு சராசரி கணக்கிடும்போது அவ்விவரத்தின் மதிப்புகள் எல்லாமே சமமுக்கியத்துவம் பெற்றுள்ளன. செயலளவில் அவ்விதம் இருக்க இயலாது. ஆகவே பரவலில் உள்ள சில மதிப்புகள் மற்ற மதிப்புகளை விட அதிக முக்கியத்துவம் வாய்ந்தவை எனில் ஒவ்வொரு மதிப்பிற்கும் அதன் முக்கியத்துவத்தைப் பொறுத்து எடை கொடுக்கப்படுகிறது.

வரையறை:

$x_1, x_2, \dots, x_n$ $x_1, x_2, \dots, x_n$ என்ற மதிப்புகளுக்கு கொடுக்கப்படும் எடைகள் முறையே $w_1, w_2, \dots, w_n$ எனில் அம்மதிப்புகளின் நிறையிட்ட கூட்டுசராசரி

$$\bar{x}_w = \frac{w_1 x_1 + w_2 x_2 + \dots + w_n x_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_n} = \frac{\sum_{i=1}^n w_i x_i}{\sum_{i=1}^n w_i}$$

நிறையிட்ட கூட்டு சராசரியின் பயன்கள்

- குறியீட்டு எண்களை அமைக்கப் பயன்படுகிறது.
- இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட குழுக்களின் வேறுபாடுகளை ஒப்பிடப் பயன்படும்
- இறப்பு, பிறப்பு விகிதங்களைக் கணக்கிட உதவும்

எடுத்துக்காட்டு 5.5

ஒரு தேர்வில் மதிப்பெண்கள் அளவிலும் முறை

பிரிவுகள்	மதிப்பெண்கள் விவரம் (w)	மதிப்பெண்(x) பெற்ற விவரம்
எழுத்துத் தேர்வு	4	60
செய்முறை	3	80
ஒப்படைவு	1	90
திட்டம்	2	75

நிறையிட்ட கூட்டு சராசரி காண்க.

தீர்வு:

பிரிவுகள்	மதிப்பெண்கள் பெற்ற விவரம்	மதிப்பெண்களின் அளவீடு (w_i)	$w_i x_i$
எழுத்துத் தேர்வு	60	4	240
செய்முறை	80	3	240
ஒப்படைவு	90	1	90
திட்டம்	75	2	150
	மொத்தம்	10	720

$$\begin{aligned}\text{நிறையிட்ட கூட்டு சராசரி, } \bar{x}_w &= \frac{\sum w_i x_i}{\sum w_i} \\ &= 720/10 \\ &= 72\end{aligned}$$

இணைந்த கூட்டு சராசரி:

$\bar{x}_1$ மற்றும் $\bar{x}_2$ என்பன n_1, n_2 தரவுகளைக் கொண்ட முழுமைத் தொகுதியின் சராசரி (இரண்டு தரவுகளும் ஒரே அலகுகள் கொண்டவை) எனில் இவற்றின் இணைந்த கூட்டு சராசரி $\bar{x}_{12} = \frac{n_1 \bar{x}_1 + n_2 \bar{x}_2}{n_1 + n_2}$

எடுத்துக்காட்டு 5.6

ஒரு வகுப்பில் 4 மாணவர்களும், 3 மாணவிகளும் உள்ளனர். மாணவர்கள் மற்றும் மாணவிகளின் சராசரி மதிப்பெண்கள் முறையே 20 மற்றும் 30 எனில் அந்த வகுப்பின் சராசரியைக் காண்க.

தீர்வு:

$$n_1 = 4, \bar{x}_1 = 20, n_2 = 3, \bar{x}_2 = 30$$

$$\begin{aligned} \text{இணைந்த கூட்டுசராசரி} &= \bar{x}_{12} = \frac{n_1 \bar{x}_1 + n_2 \bar{x}_2}{n_1 + n_2} \\ &= \left[\frac{4 \times 20 + 3 \times 30}{4 + 3} \right] \\ &= \left[\frac{80 + 90}{7} = \frac{170}{7} \right] = 24.3 \end{aligned}$$

குறிப்பு

நிறை (மதிப்பெண்களின் அளவீடு) கொடுக்கப்படாவிட்டால் சராசரி $= (60 + 80 + 90 + 75) / 4 = 76.25$

குறிப்பு

மேற்கூறிய சூத்திரத்தை இரண்டுக்கு மேற்பட்ட குழுக்களுக்கும் பயன்படுத்தலாம்

5.3.2 பெருக்கு சராசரி (G.M)

(a) தொகுக்கப்படாத தரவுகளுக்கான பெருக்குச் சராசரி

n மதிப்புகளைக் கொண்ட தொடரின் பெருக்குச் சராசரி என்பது n மதிப்புகளின் பெருக்குத் தொகையின் n வது படிமூலம் ஆகும். $x_1, x_2, \dots, x_n$ என்ற மதிப்புகளின் பெருக்குசராசரி

$$G. M. = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} = (x_1 x_2 \dots x_n)^{\frac{1}{n}}$$

n ஆம் படி மூலம் காண்பது கடினம் என்பதால் கீழ்க்கண்ட முறையில் பெருக்கு சராசரியை காணலாம்.

$$\begin{aligned} \log G.M. &= \log (x_1 \cdot x_2 \dots x_n) \\ &= (\log x_1 + \log x_2 + \dots + \log x_n) \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n \log x_i}{n} \\ G.M. &= \text{Antilog} \frac{\sum_{i=1}^n \log x_i}{n} \end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 5.7

2000 முதல் 2005 வரை ஒரு கம்பெனியின் வருடாந்திர இலாபத்தின் சதவீதம் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது 50, 72, 54, 82, 93 இதன் பெருக்குச் சராசரி காண்க.

தீர்வு:

x_i	50	72	54	82	93	மொத்தம்
$\log x_i$	1.6990	1.8573	1.7324	1.9138	1.9685	9.1710

$$\begin{aligned}
 \text{G.M.} &= \text{Antilog} \frac{\sum_{i=1}^n \log x_i}{n} \\
 &= \text{Antilog} \frac{9.1710}{5} \\
 &= \text{Antilog} 1.8342 \\
 \text{G. M.} &= 68.26
 \end{aligned}$$

இலாபத்தின் வருடாந்திர உயர்வின் சதவீதத்தின் பெருக்குச் சராசரி 68.26

எடுத்துக்காட்டு 5.8

ஒரு நகரின் மக்கட்தொகை உயரும் வீதம் இரு அடுத்தடுத்த ஆண்டுகளில் முறையே 15% மற்றும் 25% அடுத்த வருடத்தில் அது 5% குறைகிறது எனில் அது ஏறும் வீதத்தின் சராசரியைக் காண்க.

தீர்வு :

மக்கட்தொகை 100 எனக் கொள்க

மக்கட்தொகை ஏறும் வீதம்	வருட முடிவில் மக்கட் தொகை x_i	$\log x_i$
15	115	2.0607
25	125	2.0969
5	95	1.9777
		6.1353

$$\text{G.M} = \text{Antilog} \frac{\sum_{i=1}^n \log x_i}{n}$$

$$\begin{aligned}
&= \text{Antilog } \frac{(6.1353)}{3} \\
&= \text{Antilog } (2.0451) \\
&= 110.9
\end{aligned}$$

(b) தொகுக்கப்பட்ட தரவுகளுக்கான பெருக்குச் சராசரி

$x_1, x_2, \dots, x_n$ என்ற தரவுகளின் நிகழ்வெண்கள் முறையே $f_1, f_2, \dots, f_n$ எனில் இதன் பெருக்கு சராசரி

$$\text{G. M.} = \text{Antilog } \frac{\sum_{i=1}^n f_i \log x_i}{N}$$

எடுத்துக்காட்டு 5.9

ஒரு தொழிற்சாலையில் பழுதடைந்த திருகாணிகள் விவரம் கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

விட்டம் (செ.மீ)	5	15	25	35
திருகாணிகள் எண்ணிக்கை	5	8	3	4

தீர்வு:

x_i	f_i	$\log x_i$	$f_i \log x_i$
5	5	0.6990	3.4950
15	8	1.1761	9.4088
25	3	1.3979	4.1937
35	4	1.5441	6.1764
	N=20		23.2739

$$\begin{aligned}
\text{G.M} &= \text{Antilog } \frac{\sum_{i=1}^n f_i \log x_i}{N} \\
&= \text{Antilog } \frac{23.2739}{20} \\
&= \text{Antilog } 1.1637 \\
\text{G.M} &= 14.58
\end{aligned}$$

(c) தொடர் தொகுப்பின் தரவுகளுக்கான பெருக்குச் சராசரி

கொடுக்கப்பட்ட பிரிவு இடைவெளியின் நடுப்புள்ளி என்க

$$G. M. = \text{Antilog} \left[\frac{\sum_{i=1}^n f_i \log x_i}{N} \right]$$

எடுத்துக்காட்டு 5.10

பாடவாரியாக 109 மாணவர்களின் மதிப்பெண்களின் விவரம் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது அதன் பெருக்குச் சராசரி காண்க.

மதிப்பெண்கள்	4-8	8-12	12-16	16-20	20-24	24-28	28-32	32-36	36-40
மாணவர்கள் எண்ணிக்கை	6	10	18	30	15	12	10	6	2

தீர்வு:

மதிப்பெண்கள்	நடுப்புள்ளி (x_i)	f_i	$\log x_i$	$f_i \log x_i$
4-8	6	6	0.7782	4.6692
8-12	10	10	1.0000	10.0000
12-16	14	18	1.1461	20.6298
16-20	18	30	1.2553	37.6590
20-24	22	15	1.3424	20.1360
24-28	26	12	1.4150	16.980
28-32	30	10	1.4771	14.7710
32-36	34	6	1.5315	9.1890
36-40	38	2	1.5798	3.1596
மொத்தம்		N = 109		137.1936

$$\begin{aligned}
 G.M. &= \text{Antilog} \left[\frac{\sum_{i=1}^n f_i \log x_i}{N} \right] \\
 &= \text{Antilog} \left[\frac{137.1936}{109} \right] = \text{Antilog} [1.2587]
 \end{aligned}$$

$$G. M. = 18.14$$

பாடவாரியாக 109 மாணவர்களின் மதிப்பெண்களின் பெருக்கு சராசரி 18.14

நிறைகள்

- எல்லா விவரங்களின் தன்மைக்கும் பொருந்தும்
- நன்கு வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது
- இது மென்மேலும் பல கணித செயல்பாடுகளுக்கு உகந்தது
- முனை உறுப்புகளால் குறைந்த அளவே பாதிக்கப்படும்
- விகிதங்கள், வீதங்கள், சதவீதங்கள் இவற்றின் சராசரி காண்பதில் இது பொருத்தமானது.

வரம்புகள்:

- புரிந்து கொள்ள கடினமானது
- ஏதேனும் ஒரு மதிப்பு பூச்சியமாகவோ அல்லது குறை எண்ணாகவோ இருக்கும் இடங்களில் இது பயன்படாது.
- தொடரில் உள்ள சரியான மதிப்பாக பெருக்குச் சராசரி இருக்க முடியாது.
- விகிதங்களில் ஏற்படும் மாற்றத்தை அறிய இயலுமே தவிர, கூட்டு சராசரியைப் போல மாற்றங்களில் ஏற்படும் சரியான வித்தியாசத்தை தர இயலாது.

5.3.3 இசைச்சராசரி (H.M.)

ஒரு மாறியின் மதிப்புகளின் தலைகீழிகளின் சராசரியின் தலைகீழி அதன் இசைச்சராசரி எனப்படும்.

(a) தொகுக்கப்படாத தரவுகளுக்கான இசைச் சராசரி (H.M. for Ungrouped data)

$$x_1, x_2, \dots, x_n \text{ என்பது } n \text{ மாறிகள் எனில் அதன் இசைச் சராசரி H. M.} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{x_i} \right)}$$

எடுத்துக்காட்டு 5.11

ஒரு மனிதன் காரில் 4 மணி நேரத்தில் ஜெயப்பூரிலிருந்து ஆக்ரா வரை உள்ள தூரத்தைக் கடக்கிறார். முதல் 1 மணி நேரத்தில் காரின் வேகம் 50 கி.மீ / மணி இரண்டாவது மணி நேரத்தில் காரின் வேகம் 65 கி.மீ / மணி மூன்றாவது மணி நேரத்தில் காரின் வேகம் 80 கி.மீ / மணி மற்றும் நான்காவது மணி நேரத்தில் காரின் வேகம் 55 கி.மீ / மணி எனில் கார் ஓட்டுனரின் சராசரி வேகத்தைக் காண்க.

தீர்வு:

x	50	65	80	55	மொத்தம்
$1/x$	0.0200	0.0154	0.0125	0.0182	0.0661

$$H. M. = \frac{n}{\sum \left(\frac{1}{x_i} \right)}$$

$$= \frac{4}{0.0661} = 60.5$$

கார் ஓட்டுனரின் சராசரி வேகம் 60.5 கி.மீ /மணி

(b) தொகுக்கப்பட்ட தரவு

ஒரு நிகழ்வெண் பரவலில்

$$H. M. = \frac{N}{\sum_{i=1}^n f_i \left(\frac{1}{x_i} \right)}$$

எடுத்துக்காட்டு 5.12

ஒரு கணக்கெடுப்பின் அடிப்படையில் விவரங்கள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. அதன் இசைச் சராசரி காண்க.

காரின் வேகம்	130	135	140	145	150
கார்களின் எண்ணிக்கை	3	4	8	9	2

தீர்வு:

x_i	f_i	$\frac{f_i}{x_i}$
130	3	0.0231
135	4	0.0296
140	8	0.0571
145	9	0.0621
150	2	0.0133
மொத்தம்	N = 26	0.1852

$$H. M. = \frac{N}{\sum_{i=1}^n f_i \left(\frac{1}{x_i} \right)}$$

$$= \frac{26}{0.1852}$$

$$H.M = 140.39$$

(c) தொடர் தொகுக்கப்பட்ட தரவுகளுக்கான இசைச் சராசரி (H.M. for Continuous data):

பிரிவு இடைவெளியின் மையப்புள்ளி x_i எனில்

$$\text{H.M.} = \frac{N}{\sum_{i=1}^n f_i \left(\frac{1}{x_i} \right)}$$

எடுத்துக்காட்டு 5.13

பின்வரும் விவரங்களுக்கு H.M. காண்க

பங்குகள் (%)	2 – 6	6 – 10	10 – 14
கம்பெனிகளின் எண்ணிக்கை	10	12	18

தீர்வு:

பங்குகள்	நடுப்புள்ளி (x_i)	கம்பெனிகளின் எண்ணிக்கை (f_i)	தலைகீழி ($1/x_i$)	$f_i (1/x_i)$
2 – 6	4	10	$\frac{1}{4}$	2.5
6 – 10	8	12	$\frac{1}{8}$	1.5
10 – 14	12	18	$\frac{1}{12}$	1.5
மொத்தம்		N = 40		5.5

$$\text{H.M.} = \frac{N}{\sum_{i=1}^n f_i \left(\frac{1}{x_i} \right)} = \frac{40}{5.5} = 7.27$$

இசைச் சராசரியின் நிறைகள்:

- இசைச் சராசரியின் நிறைகள்
- எல்லா மதிப்புகளுக்கும் இது வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது.
- அதிகமாக பரவல் அமையும்போது இது பயன்படுகிறது.
- இது கணித செயல்பாடுகளுக்கு இணக்கமாக உள்ளது.
- இது பெரிய மதிப்புகளுக்கு குறைந்த முக்கியத்துவத்தையும், சிறிய மதிப்புகளுக்கு அதிக முக்கியத்துவத்தையும் கொடுக்கும் இடங்களில் இது பொருத்தமாக அமையும்.

வரம்புகள்:

- இதனை கணக்கிடுவதும், புரிந்து கொள்வதும் கடினம்
- எல்லா மதிப்புகளும் கணக்கீடு முறையில் அமைகிறது.
- கணக்கீடு கடினமாக இருப்பதால் இது பிரபலமாகவில்லை.
- இது ஒரு சுருக்கமான எண்ணை தவிர அத்தொடரின் சரியான உறுப்பாக இருக்க இயலாது.

எங்கே பயன்படும்?

மதிப்பு / அலகு வடிவத்தில் தரவுகள் அமையும் போது இசைச்சராசரி பயன்படுகிறது. ஆகவே சராசரி வேகம் காணப் பயன்படுகிறது.

சராசரிகளுக்கிடையேயான உறவு:

எந்தவொரு பரவலிலும் மூலத்தரவுகள் வெவ்வேறானவை எனில் A.M., G.M. மற்றும் H.M ஆகியவை வெவ்வேறாக இருக்கும். மேலும் கீழ்க்கண்ட வரிசையில் அமையும்.

$$A.M. \geq G.M \geq H.M$$

5.3.4 இடைநிலை அளவு

வரிசைப்படுத்தப்பட்ட தரவு உறுப்புகளை இரு சரிபாதியாகப் பிரிக்கும் இடத்திலுள்ள உறுப்பின் மதிப்பு இடைநிலை அளவு அல்லது இடைநிலை எனப்படும். 50% மதிப்புகள் இடைநிலை மதிப்பிற்கு மேலும், 50% மதிப்புகள் அதற்குக் கீழும் இருக்கும். எனவே இடைநிலை அளவு என்பது இடம் சார்ந்த சராசரி என்று கூறப்படுகிறது.

(a) செப்பனிடப்படா தரவுகளுக்கான இடைநிலை அளவு

முதலில் கொடுக்கப்பட்ட தரவு உறுப்புகளை அவற்றின் எண் அளவிற்கு ஏற்ப ஏறுவரிசையிலோ, இறங்கு வரிசையிலோ அமைக்க வேண்டும்.

- (i) தரவு உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை n என்பது ஒற்றை எண்ணாக இருப்பின் $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு இடைநிலை அளவு எனப்படும்.
- (ii) தரவு உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை n என்பது இரட்டை எண்ணாக இருந்தால் தரவுகளுக்கு இடையில் இரண்டு எண்கள் இருக்கும். அந்த இரண்டு எண்களின் சராசரியே இடைநிலை அளவாகும்.

$$\text{இடைநிலை} = \frac{\left(\frac{n}{2}\right)\text{ஆவது உறுப்பு} + \left(\frac{n}{2} + 1\right)\text{ஆவது உறுப்பு}}{2}$$

எடுத்துக்காட்டு 5.14

சென்னையில் உள்ள சில ஐந்து நட்சத்திர பெரும் விடுதிகளில் உள்ள அறைகளின் எண்ணிக்கை 71, 30, 61, 59, 31, 40, 29 ஆகும். இடைநிலையளவு மூலம் அறைகளின் சராசரி எண்ணிக்கையைக் காண்க.

தீர்வு:

தரவுகளை ஏறுவரிசையில் அமைக்க 29, 30, 31, 40, 59, 61, 71

$$n = 7$$

$$\text{இடைநிலை} = \frac{7+1}{2} = 4\text{ஆவது உறுப்பு}$$

∴ இடைநிலை அளவு = 40 அறைகள்

எடுத்துக்காட்டு 5.15

1974, 1975 ஆண்டுகளில் விளைந்த வேளாண் பொருட்களின் ஏற்றுமதி மதிப்பு 8 காலாண்டுகளில் (மில்லியன் டாலரில்) 29.7, 16.6, 2.3, 14.1, 36.6, 18.7, 3.5, 21.3 ஆகத் தரப்பட்டுள்ளது. அவற்றிற்கு இடைநிலை மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு:

தரவு உறுப்புகளை இறங்கு வரிசையில் எழுதுக.

36.6, 29.7, 21.3, 18.7, 16.6, 14.1, 3.5, 2.3

$$n = 8$$

$$\begin{aligned}\text{இடைநிலை} &= \frac{4\text{ஆவது உறுப்பு} + 5\text{ஆவது உறுப்பு}}{2} \\ &= \frac{18.7 + 16.6}{2} \\ &= 17.65 \text{ மில்லியன் டாலர்கள்}\end{aligned}$$

குவிவு நிகழ்வெண்கள்:

ஒரு தொகுக்கப்பட்ட பரவலின் ஒவ்வொரு குழுவிற்கும் அதற்குரிய நிகழ்வெண்கள் உண்டு. குழுவின் ஒரு எல்லைக்கு மேலும் அல்லது அதற்குக் கீழும் அமையும் நிகழ்வெண்களைக் காண வேண்டுமெனில் நிகழ்வெண்களை அவ்வெல்லைவரை கூட்ட வேண்டும். இவ்வாறு அமைக்கப்படும் நிகழ்வெண்கள் கூட்டு நிகழ்வெண்கள் அல்லது குவிவு நிகழ்வெண்கள் என்று கூறப்படும். இக்குவிவு நிகழ்வெண்கள் இடைநிலையளவு, கால்மானங்கள், பதின்மானங்கள் நூற்றுமானங்கள் காண்பதற்குப் பயன்படுகிறது.

(b) தொகுப்புத் தரவுகளுக்கான இடைநிலை அளவு

கீழ்க்கண்ட வழிமுறைப்படி இடைநிலையளவைக் காணலாம்.

(i) குவிவு நிகழ்வெண்களைக் கணக்கிட்டு எழுதுக.

(ii) $N = \sum f$ = மொத்த நிகழ்வெண்கள் எனில் $\frac{N+1}{2}$ காண்க.

- (iii) $\frac{N+1}{2}$ ஐ விட அதிகமான குவிவு நிகழ்வெண்ணைக் காண்க.
- (iv) $\frac{N+1}{2}$ விற்கு நிகரான குவிவு நிகழ்வெண் இடைநிலை எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.16

ஒரு வகுப்பு மாணவர்களின் எடைகளைக் கொண்ட தரவுகள் தரப்பட்டுள்ளன. அம்மாணவர்களின் சராசரி எடையை இடைநிலையளவின் மூலம் காண்க.

எடை (கி.கி)	10	20	30	40	50	60	70
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	4	7	12	15	13	5	4

தீர்வு:

எடை (கி.கி) x	மாணவர் எண்ணிக்கை f	குவிவு நிகழ்வெண்கள் $c.f$
10	4	4
20	7	11
30	12	23
40	15	38
50	13	51
60	5	56
70	4	60
மொத்தம்	$N = 60$	

$$N = \sum f = 60$$

$$\frac{N+1}{2} = 30.5$$

குவிவு நிகழ்வெண் நிரலில் 30.5ஐவிட அதிகமான எண் 38 அந்த குவிவு எண் 38இன் நிரை வரிசையில் அமைந்த 40 இடைநிலையளவு ஆகும்.

(c) இடைநிலை: தொடர்ச்சியான நிகழ்வெண் பரவல்

தொடர்ச்சியான மாறிகளுக்கான நிகழ்வெண் பரவலுக்கு இடைநிலை காண கீழ்க்கண்ட விதியைப் பயன்படுத்துவோம்.



குறிப்பு

குழுக்கள், சேர்த்துக் கணக்கிடும் முறையில் இருந்தால் அதை பிணைப்பெல்லைகளால் ஆன தவிர்த்துக் கணக்கிடும் முறையில் பிரிவிடைகளை உண்மை சார்ந்த குழுக்களாக மாற்றிக்கொள்ள வேண்டும்.

$$\text{இடைநிலையளவு} = l + \frac{\frac{N}{2} - m}{f} \times c$$

l = இடைநிலையளவுக் குழுவின் கீழ்எல்லை மதிப்பு

N = மொத்த நிகழ்வெண்கள்

f = இடைநிலைக் குழுவில் அமையும் நிகழ்வெண்

m = இடைநிலைக் குழுவில் அமையும் குவிவு நிகழ்வெண்ணுக்கு முந்தைய குவிவு நிகழ்வெண்

c = இடைநிலைக் குழுவின் பிரிவிடை வித்தியாசத்தின் அளவு.

இடைநிலைகுழு என்பது, குவிவு நிகழ்வெண்களில் $\frac{N}{2}$ ஐவிட அதிக மதிப்பைக் கொண்ட குவிவு நிகழ்வெண் வரிசையாகும். முதலில் இடைநிலைக்குழுவைக் கண்டபின்பே மேற்கண்ட விதியைப் பயன்படுத்த வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.17

ஒரு தோட்டத்தில் விளைந்த ஆப்பிள்களின் எடை விவரம் பின்வரும் அட்டவணையில் தரப்பட்டுள்ளது. ஆப்பிளின் சராசரி எடையை இடைநிலையளவைக் கொண்டு கணக்கிடுக.

எடை (கிராமில்)	410 – 420	420 – 430	430 – 440	440 – 450	450 – 460	460 – 470	470 – 480
ஆப்பிள்களின் எண்ணிக்கை	14	20	42	54	45	18	7

தீர்வு:

எடை (கிராமில்)	ஆப்பிள்களின் எண்ணிக்கை	குவிவு நிகழ்வெண்கள்
410 – 420	14	14
420 – 430	20	34
430 – 440	42	76
440 – 450	54	130
450 – 460	45	175
460 – 470	18	193
470 – 480	7	200
மொத்தம்	$N = 200$	

$$\frac{N}{2} = \frac{200}{2} = 100.$$

இடைநிலை பிரிவு இடைவெளி 440 – 450



$$\text{இடைநிலை} = l + \frac{\frac{N}{2} - m}{f} \times c$$

$$l = 440, \quad \frac{N}{2} = 100, \quad m = 76, \quad f = 54, \quad c = 10$$

$$\begin{aligned} \text{இடைநிலை} &= 440 + \frac{100 - 76}{54} \times 10 \\ &= 440 + \frac{24}{54} \times 10 = 440 + 4.44 \\ &= 444.44 \end{aligned}$$

ஆப்பிளின் இடைநிலை எடை 444.44 கிராம்

எடுத்துக்காட்டு 5.18

ஒரு பகுதியில் வசிக்கும் மக்களின் வயது பற்றிய தரவுகள் கீழ்க்கண்ட அட்டவணையில் தரப்பட்டுள்ளன. அதிலிருந்து இடைநிலையளவு மூலம் அவர்களின் வயது சராசரியைக் காண்க.

வயது (ஆண்டுகளில்)	எண்ணிக்கை (ஆயிரத்தில்)
10 க்கு கீழ்	2
20 க்கு கீழ்	5
30 க்கு கீழ்	9
40 க்கு கீழ்	12
50 க்கு கீழ்	14
60 க்கு கீழ்	15
70 க்கு கீழ்	15.5
80 க்கு கீழ்	15.6

தீர்வு:

வினாவில் மேல் எல்லைகளும் கீழின குவிவு நிகழ்வெண்களும் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. அதிலிருந்து பிரிவெல்லைகளைக் கொண்ட குழுக்களும் அதற்குரிய நிகழ்வெண்களையும் கணக்கிட்டு அட்டவணை அமைக்கவும். பின் இடைநிலையளவை விதியைப் பயன்படுத்திக் காணவும்.



குழுக்கள்	எண்ணிக்கை (ஆயிரத்தில்) f	குவிவு நிகழ்வெண்கள் cf
0 – 10	2	2
10 – 20	3	5
20 – 30	4	9
30 – 40	3	12
40 – 50	2	14
50 – 60	1	15
60 – 70	0.5	15.5
70 – 80	0.1	15.6
மொத்தம்	$N = 15.6$	

$$\left(\frac{N}{2}\right) = \frac{15.6}{2} = 7.8$$

இடைநிலை பிரிவு இடைவெளி 20 – 30

$$\begin{aligned} \text{இடைநிலை அளவு} &= l + \frac{\frac{N}{2} - m}{f} \times c \\ &= 20 + \frac{7.8 - 5}{4} \times 10 \end{aligned}$$

இடைநிலை அளவு = 27 ஆண்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 5.19

ஒரு கல்லூரியில் 140 மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்கள் பின்வரும் அட்டவணையில் தரப்பட்டுள்ளன. அதிலிருந்து இடைநிலையளவின் மூலம் சராசரி மதிப்பைக் காண்க.

மதிப்பெண்கள்	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை
10-19	7
20-29	15
30-39	18
40-49	25
50-59	30
60-69	20
70-79	16
80-89	7
90-99	2



குறிப்பு

இடைநிலையளவுக் குழுவில் அமையும் கீழ் எல்லையை மட்டும் மாற்றி, பின் வழக்கம்போல் இடைநிலையளவைக் காணலாம்

தீர்வு:

பிணைப்பு எல்லைகள்	f	Cf
9.5 -19.5	7	7
19.5-29.5	15	22
29.5- 39.5	18	40
39.5-49.5	25	65
49.5-59.5	30	95
59.5-69.5	20	115
69.5-79.5	16	131
79.5-89.5	7	138
89.5-99.5	2	140
மொத்தம்	$N = 140$	

$$\text{இடைநிலை} = l + \left(\frac{\frac{N}{2} - m}{f} \right) \times c$$

$$\frac{N}{2} = \frac{140}{2} = 70$$

இங்கு, $l = 49.5$, $f = 30$, $m = 65$, $c = 10$

$$\begin{aligned} \text{இடைநிலை} &= 49.5 + \left(\frac{70 - 65}{30} \right) \times 10 \\ &= 49.5 + 1.67 \\ &= 51.17 \end{aligned}$$

வரைபடம் மூலம் இடைநிலையளவைக் காணுதல்

குவிவு நிகழ்வெண் வளைவரையைப் பயன்படுத்தி இடைநிலையளவைக் காணலாம். குவிவு நிகழ்வெண் வளைவரை ஓஜைவ் (Ogive) என்று அழைக்கப்படுகிறது.

இடைநிலையளவைப் பின்வரும் வழிகளின்படி காண வேண்டும்.

படி 1: குழுக்கள் X அச்சில் அமைக்கப்படவேண்டும்.

படி 2: கணக்கிடப்பட்ட குவிவெண்களை குழுக்களின் மேல் எல்லைக்கு X அச்சுக்கு எதிரே y அச்சில் குறிக்க வேண்டும்.

படி 3: அப்புள்ளிகள் அனைத்தையும் இணைத்து (அளவுகோல் பயன்படுத்தாமல்) வளைவரை ஒன்றை வரைக. இதுவே கீழின குவிவு நிகழ்வெண் வளைவரை (Less than Ogive) என்று அழைக்கப்படும்.

படி4: $\frac{N}{2}$ அல்லது $\frac{N+1}{2}$ மதிப்பில் Y அச்சில் X அச்சுக்கு இணையாக வரையப்படும் கோடு வளைவரையில் சந்திக்கும் புள்ளியைக் காண்க.

படி5: அப்புள்ளியிலிருந்து X அச்சுக்குச் செங்குத்தாக ஒரு கோடு வரைக. அக்கோடு X அச்சில் சந்திக்கும் புள்ளி m என்க.

படி6: m இன் மதிப்பே இடைநிலை மதிப்பாகும்.

குறிப்பு:

- (i) அதேபோல் ஒரு குழுவின் கீழ்எல்லைகளையும், அதற்குரிய மேலின குவிவு நிகழ்வெண்களையும் X மற்றும் Y அச்சுகளில் அமைத்து மேலின குவிவு நிகழ்வெண் வளைவரையை (more than Ogive) வரைந்து, இடைநிலையளவைக் காணலாம்.
- (ii) ஒரே வரைபடத்தில் கீழின மற்றும் மேலின குவிவு நிகழ்வெண்கள் வளைவரையை வரையும் போது அவை இரண்டும் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளியிலிருந்து X அச்சுக்கு செங்குத்தாக ஒரு கோடு வரைந்தால் அக்கோடு X அச்சில் சந்திக்கும் புள்ளியில் அமையும் மதிப்பே இடைநிலையளவு மதிப்பாகும்.

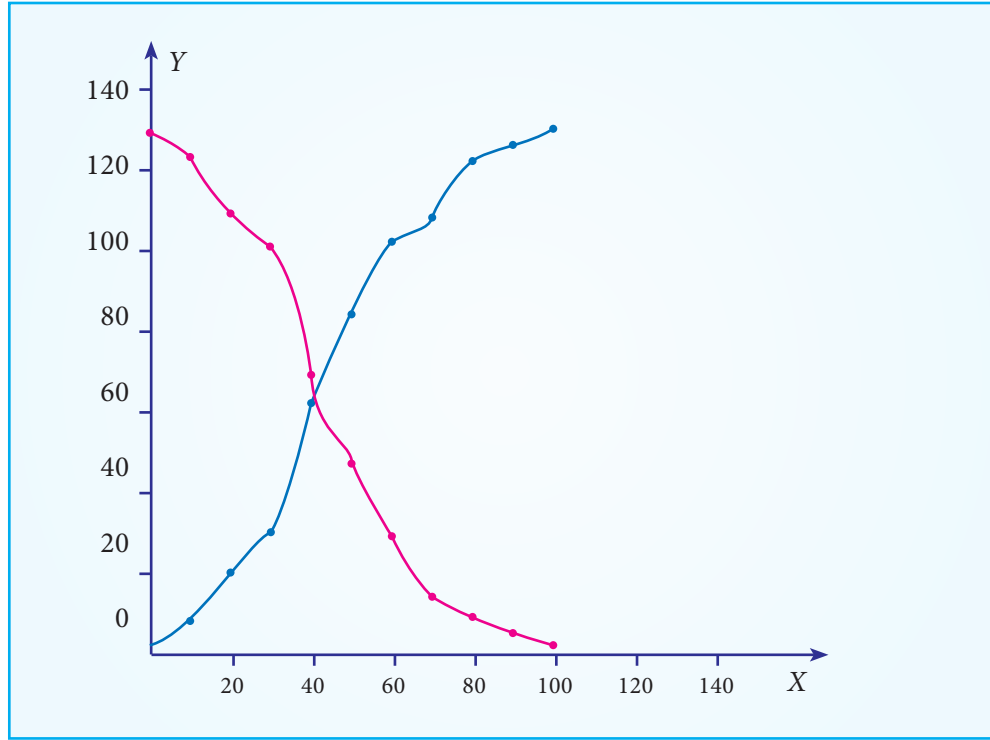
எடுத்துக்காட்டு 5.20

கீழின மற்றும் மேலின குவிவு நிகழ்வெண் வளைவரைகளை வரைந்து இடைநிலை மதிப்பைக் காண்க.

குழுவின் வயது	எண்ணிக்கை
0 – 10	6
10 – 20	12
20 – 30	10
30 – 40	32
40 – 50	22
50 – 60	18
60 – 70	15
70 – 80	5
80 – 90	4
90 – 100	3

தீர்வு:

குழுக்களின் பிணைப்பு எல்லைகள்	குவிவு நிகழ்வெண்	
	கீழின	மேலின
0	0	127
10	6	121
20	18	109
30	28	99
40	60	67
50	82	45
60	100	27
70	115	12
80	120	7
90	124	3
100	127	0



படத்தில் இடைநிலையளவு மதிப்பு 42 என்பதைக் காணலாம்.

நிறைகள்:

- இடைநிலையளவு கணக்கிடுவதற்கு எளிதானது. இம்மதிப்பை நடுவில் உள்ள இடத்தைப் பார்த்தும் காணலாம். வரைபடம் மூலமும் காணலாம்.
- எல்லை மதிப்புகளால் இடைநிலை மதிப்பு பாதிக்கப்படுவதில்லை.
- குழுக்களின் பிரிவிடைகள் மாறுபட்டு இருந்தாலும் இடைநிலையளவைக் காண முடியும்.

வரம்புகள்:

- பிந்தைய கணக்கீட்டுச் செயல்களில் அதிகம் பயன்படுத்த இயலாது.
- இது இடம் சார்ந்த மைய மதிப்பினை மட்டுமே சார்ந்த சராசரி.
- தரவிலுள்ள உண்மை மதிப்புகளைச் சாராத தன்மையும் இதற்கு உண்டு.

5.3.5 முகடு

ஓர் உறுப்பையே மையப்படுத்தி அதைச் சுற்றியே மற்ற உறுப்புகளும் அதிகமாக அமைந்திருப்பதை முகடு சார்ந்த பரவலாகும் என்று கிராக்ஸ்டன் மற்றும் கௌடன் என்ற புள்ளியியலார் கூறுகின்றனர்.



அதிக வாகனங்கள் செல்லும் சாலை ஒன்றில், ஒரு குறிப்பிட்ட கால அளவில் அச்சாலையில் செல்லும் போக்குவரத்து பற்றிய கணக்கெடுப்பு நடத்தியதில் இரு சக்கர வாகனங்களே, மற்ற எல்லா வாகனங்களைவிட அதிகம் செல்வதாகக் கண்டறியப்பட்டது. இக்கணக்கெடுப்பில் இரு சக்கர வாகனங்களே அதிக நிகழ்வெண்களைப் பெற்றிருப்பதால், அதன் முகடு 'இரு சக்கர வாகனம்' என்பதாகும்.

தரவு உறுப்புகளால் ஆன ஒரு கணத்தில் எவ்வறுப்பு அதிக முறை அதில் நிகழ்ந்திருக்கிறதோ அந்த உறுப்பு முகடு என்று கூறப்படும். இவ்வாறு அமையும் முகடு, ஒரு பரவலில் ஒன்றாகவோ, இரண்டாகவோ, பலவாகவோ இருக்கலாம்.

முகடு காணும் முறை

(a) தொகுக்கப்படாத தரவுகளுக்கு முகடு காணுதல்

ஒரு தரவு கணத்தில் எந்த மதிப்பு அதிக முறை காணப்படுகிறதோ அதுவே முகடு எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.21

20 மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்கள் 90, 70, 50, 30, 40, 86, 65, 73, 68, 90, 90, 10, 73, 25, 35, 88, 67, 80, 74, 46 இவற்றிற்கு முகடு காண்க

தீர்வு:

மற்ற எல்லா மதிப்பெண்களை விட 90 என்ற மதிப்பெண் மூன்று முறை நிகழ்ந்திருப்பதால் முகடு 90 ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.22

ஒரு மருத்துவர் 9 நோயாளிகளின் குருதிச் சோதனையில் சர்க்கரை அளவைக் கீழ்க்கண்டவாறு காண்கிறார். 80, 112, 110, 115, 124, 130, 100, 90, 150, 180

தீர்வு:

இங்கு ஒவ்வொரு அளவும் ஒரு முறை மட்டுமே நிகழ்ந்திருப்பதால் முகடு இல்லை எனலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 5.23

2, 7, 10, 12, 10, 19, 2, 11, 3, 12 என்றவற்றிற்கு முகடு காண்க.

தீர்வு:

இங்கு 10, 12 ஆகிய இரு உறுப்புகளும் இரண்டு முறை இடம் பெற்றிருக்கின்றன. எனவே 10, 12 ஆகிய இரண்டும் முகடுகள் ஆகின்றன.



குறிப்பு:

ஒரு தரவு கணத்தில் முகடுகள் இரண்டும் இரண்டிற்கு மேலும் இருக்கலாம். முகடுகள் இல்லாமலும் இருக்கலாம்.

(b) தனித்த நிகழ்வெண் பரவல்களுக்கு முகடு காணுதல்

தனித்த நிகழ்வெண் பரவலில் எந்த உறுப்பின் நிகழ்வெண் அதிக மதிப்பைப் பெற்றிருக்கிறதோ அந்த உறுப்பே முகடு எனப்படும்

எடுத்துக்காட்டு 5.24

கீழ்க்கண்ட விவரங்களுக்கு முகடு காண்க

x	6	7	8	9	10
f	4	6	7	5	3

தீர்வு:

இங்கு அதிக மதிப்புடைய நிகழ்வெண் 7 ஆகும். அதற்குரிய x மதிப்பு 8 ஆகும். எனவே முகடு 8 ஆகும்.

(c) தொடர்ச்சியான நிகழ்வெண் பரவல்களுக்கு முகடு காணுதல்

முகட்டுக்குழு என்பது குழுவில் அதிக நிகழ்வெண் கொண்ட குழுவாகும். முகடு காணும் சூத்திரம் முகடு = $l + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times c$

இங்கு L = முகட்டுக்குழுவிலுள்ள கீழ் எல்லை மதிப்பு

f_1 = முகட்டுக் குழுவிலுள்ள நிகழ்வெண்

f_0 = முகட்டுக் குழுவிலுள்ள நிகழ்வெண்ணுக்கு முந்தைய நிகழ்வெண்

f_2 = முகட்டுக் குழுவிலுள்ள நிகழ்வெண்ணுக்கு பிந்தைய நிகழ்வெண்

c = பிரிவிடையளவு

குறிப்புகள்:

- (i) $(2f_1 - f_0 - f_2)$ மதிப்பு பூஜ்ஜியம் எனில் முகட்டை பின்வரும் வாய்ப்பாட்டின் மூலம் பெறலாம்.

$$M_0 = l + \left(\frac{(f_1 - f_0)}{|f_1 - f_0| + |f_1 - f_2|} \times C \right)$$

- (ii) முதல் பிரிவிடைக்குழுவில் முகட்டுக்குழு அமையுமானால் f_0 , 0 என எடுத்துக் கொள்ள வேண்டும்.

- (iii) திறந்த பிரிவு இடைவெளியைக் கொண்ட பரவலில் முகடானது திறந்த பிரிவு இடைவெளியில் அமையாத வரையில், முகட்டைக் கணிப்பதில் எந்த ஒரு சிக்கலும் இல்லை.

எடுத்துக்காட்டு 5.25

ஒரு நகரத்தின் ஒரு பகுதியில் வாழும் குடும்பத்தினரின் மாத ஊதிய விவரம் கீழ்க்கண்ட அட்டவணையில் தரப்பட்டுள்ளது. அக்குடும்பத்தினரின் மாத ஊதியத்தை முகடு வாயிலாகக் காண்க.

மாத ஊதியம் (ரூபாயில்)	0-100	100-200	200-300	300-400	400-500	500-600	600-700
எண்ணிக்கை	5	7	12	18	16	10	5

தீர்வு:

மாத ஊதியம் (ரூபாயில்)	எண்ணிக்கை (f)
0-100	5
100-200	7
200-300	12 f_0
300-400	18 f_1
400-500	16 f_2
500-600	10
600-700	5

$$\text{முகடு} = l + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times C$$

அதிகபட்ச நிகழ்வெண் – 18, முகட்டு பிரிவு இடைவெளி : 300-400

இங்கு, $l = 300$, $f_0 = 12$, $f_1 = 18$, $f_2 = 16$,



$$\begin{aligned}
\text{முகடு} &= 300 + \frac{18 - 12}{2 \times 18 - 12 - 16} \times 100 \\
&= 300 + \frac{6}{36 - 28} \times 100 \\
&= 300 + \frac{6}{8} \times 100 \\
&= 300 + \frac{600}{8} = 300 + 75 = 375
\end{aligned}$$

முகடு மதிப்பில் அமையும் ஊதியம் 375 ஆகும்.

முகட்டுக் குழுவைக் காணுதல்

நிகழ்வெண் பரவலில் முகட்டு பிரிவு என்பது அதிகபட்ச நிகழ்வெண்ணிற்கு நேராக உள்ள பிரிவு இடைவெளியாகும். ஆனால் ஒரு சில கீழே குறிப்பிட்டுள்ள இடங்களில்

- (i) அதிக எண்ணிக்கையிலான நிகழ்வெண் திரும்பவும் வரும்போது,
- (ii) அதிக எண்ணிக்கையிலான நிகழ்வெண், பரவலின் ஆரம்பத்திலோ முடிவிலோ வரும்போது,
- (iii) பரவலில் தொடர்பற்ற முறையில் வரும்போது, முகட்டுப்பிரிவு காண்பது எளிதானதல்ல. இந்நிலையில் தொகுப்பு அட்டவணை உருவாக்கி, முகட்டுக் குழுவைக் காண்கிறோம். அம்முறையின் படிகளைக் கீழே விளக்கமாகக் காண்போம்.

பகுப்பாய்வு அட்டவணை உருவாக்குதலில் உள்ள படிகள்:

- (i) நிரல் 1 இல் கொடுக்கப்பட்ட நிகழ்வெண்களை எழுதுக
- (ii) நிரல் 2 இல் அட்டவணையில் காட்டியபடி இரண்டிரண்டாக நிகழ்வெண்களைக் கூட்டி எழுதுக.
- (iii) நிரல் 2 இல் அட்டவணையில் காட்டியபடி இரண்டிரண்டாக நிகழ்வெண்களைக் கூட்டி எழுதுக.
- (iv) நிரல் 4 இல் நிகழ்வெண்களை மும்மூன்றாகக் கூட்டி எழுதுக
- (v) முதல் நிகழ்வெண்களை விடுத்து அடுத்துள்ள நிகழ்வெண்களை மும்மூன்றாகக் கூட்டி எழுதுக.
- (vi) நிரல் 6 இல், முதல் மற்றும் இரண்டாம் நிகழ்வெண்களை விடுத்து, அடுத்துள்ள நிகழ்வெண்களைக் கூட்டி எழுதுக.



குறிப்பு:

நிகழ்வெண்கள் முகட்டுக் குழுவிற்கு மிக நெருங்கியதாகவோ, அதற்கு முந்தைய மற்றும் பிந்தைய நிகழ்வெண்களுடன் உள்ள வித்தியாசம் மிகக் குறைவானதாகவோ இருந்தால் முகட்டுக் குழுவைக் காண்பதற்கு நிகழ்வெண்களின் பகுப்பாய்வு அட்டவணை அமைத்து அதிலிருந்து ஒரு தொகுப்பு அட்டவணை உருவாக்கி முகட்டுக் குழுவைக் காண்கிறோம்.

இப்போது ஒவ்வொரு நிரலிலும் அதிக மதிப்புடைய நிகழ்வெண் மதிப்புகளைக் குறித்துக் கொள்க. பிறகு பகுப்பாய்வு அட்டவணையை அமைக்க. அதிலிருந்து முகடு குழுவைக் காண்க. பின் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி முகடு காண்க.

எடுத்துக்காட்டு 5.26

பின்வரும் பரவலுக்கு முகடு காண்க.

அளவு	நிகழ்வெண்
0-5	9
5-10	12
10-15	15
15-20	16
20-25	17
25-30	15
30-35	10
35-40	13

தீர்வு:

தொகுப்பு அட்டவணை:

குழு	f	2	3	4	5	6
0-5	9	21		36		
5-10	12		27			
10-15	15	31			43	
15-20	16					48
20-25	17	32	33	48		
25-30	15					
30-35	10	23	25		42	38
35-40	13					

பகுப்பாய்வு அட்டவணை:

குழுக்கள்	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40
1					1			
2					1	1		
3				1	1			
4				1	1	1		
5		1	1	1				
6			1	1	1			
மொத்தம்		1	2	4	5	2		

அதிகபட்ச மதிப்பு 20 – 25 என்ற பிரிவு இடைவெளியில் அமைவதால் அதுவே முகட்டு இடைவெளியாகும்.

$$\text{முகடு} = l + \frac{f_1 f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times C$$

$$l = 20, f_0 = 16, f_1 = 17, f_2 = 15$$

$$= 20 + \frac{17 - 16}{2 \times 17 - 16 - 15} \times C$$

$$= 20 + \frac{1}{34 - 31} \times 5$$

$$= 20 + \frac{5}{3} = 20 + 1.67 = 21.67$$

$$\text{முகடு} = 21.67$$

(d) வரைபடம் மூலம் முகடு காணுதல்

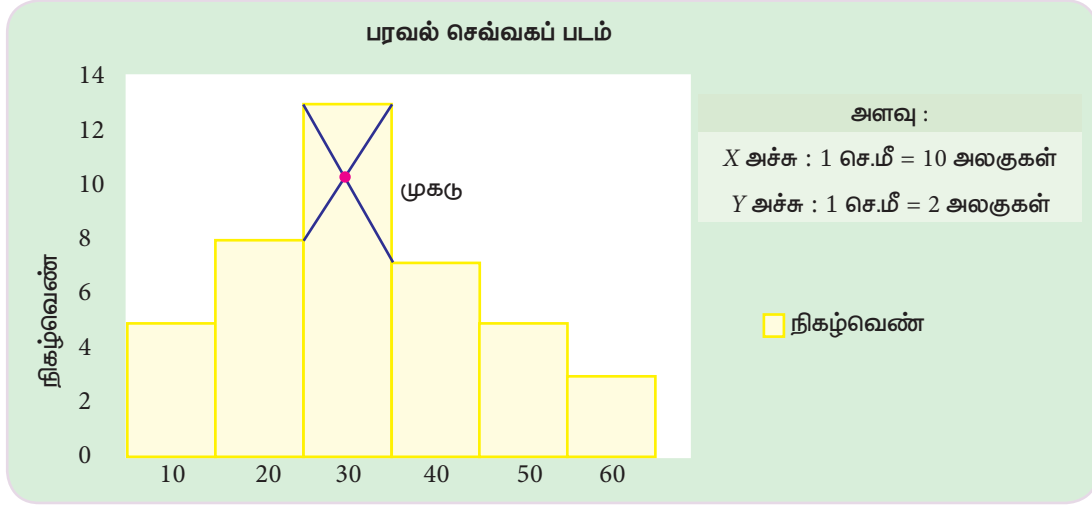
- கொடுக்கப்பட்ட பரவலுக்கு நிகழ்வுச் செவ்வகம் வரைக.
- படத்தில் காட்டியுள்ளபடி மிகப் பெரிய செவ்வகத்தின் (முகட்டுச் செவ்வகம்) வலப்பக்க உயர முனையையும் முந்தைய செவ்வகத்தின் வலப்பக்க செவ்வகத்தின் உயர முனையை நேர்க்கோட்டால் இணைக்க. அதேபோல் முகட்டுச் செவ்வகத்தின் இடப்பக்க உயர முனையையும் அச்செவ்வகத்தின் பிந்தைய செவ்வகத்தின் இடப்பக்க உயர முனையையும் நேர்க்கோட்டால் இணைக்க.
- இரு நேர்க்கோடுகள் வெட்டுமிடத்திலிருந்து X அச்சுக்கு ஒரு செங்குத்துக் கோடு வரைக.
- அச்செங்குத்துக் கோடு X அச்சை சந்திக்கும் புள்ளியே முகடு மதிப்பு ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.27

வரைபடம் மூலம் கீழ்க்கண்ட நிகழ்வெண் பரவலுக்கு முகடு காண்க.

குழுக்கள்	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60
நிகழ்வெண்கள்	5	8	12	7	5	3

தீர்வு:



நிறைகள்:

- இது எளிதில் புரிந்து கொள்ளக்கூடியது.
- இதை வரைபடம் மூலம் காண இயலும்.
- இதைப் பார்த்தறிந்தே கண்டு பிடிக்கலாம்.
- எல்லை மதிப்புகளால் பாதிக்கப்படுவதில்லை.
- சராசரிகளில் இதை மிக எளிய முறையில் கணக்கிடலாம்.

வரம்புகள்:

- இது பிந்தைய கணிதச் செயல்களுக்கு அதிகம் பயன்படுவதில்லை.
- சமமற்ற பிரிவிடைகளைக் கொண்ட குழுக்களுக்கு முகடு காண இயலாது.
- இரண்டும், அதற்கு மேற்பட்ட முகடுகள் இருக்கும்போது சராசரி காண்பது எளிதன்று.

5.4 கூட்டு சராசரி, இடைநிலை, முகடு ஆகியவற்றிற்கிடையேயான தொடர்பு.

ஒரு நிகழ்வெண் பரவலில் கூட்டு சராசரி, இடைநிலையளவு, முகடு ஆகிய மூன்றும் ஒரே மதிப்பைப் பெற்றால் அப்பரவல் சமச்சீர் பரவல் என்று அழைக்கப்படும். அவை மூன்றும் வேறு வேறு மதிப்புகளைப் பெற்றிருந்தால் அப்பரவல் சமச்சீர் பரவல் அல்லது வளைவுடைய பரவல் என்று அழைக்கப்படும். சுமாரான வளைவையுடைய சமச்சீர் பரவல்களில் கூட்டு சராசரி, இடைநிலையளவு, முகடு ஆகிய மூன்றிற்கும் உள்ள தொடர்பை

$$\text{முகடு} = 3 \text{ இடைநிலை} - 2 \text{ கூட்டு சராசரி}$$

என்று கூறலாம். இத்தொடர்பை கார்ல் பியார்சான் அறிமுகப்படுத்தினார்.

எடுத்துக்காட்டு 5.28

ஒரு சுமாரான சமச்சீரற்ற பரவலில் இடைநிலையளவு 72, கூட்டு சராசரி 78 எனில் முகடு மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு:

$$\text{முகடு} = 3 \text{ இடைநிலை} - 2 \text{ சராசரி} = 3 (72) - 2 (78)$$

$$= 216 - 156 = 60$$

$$\text{முகடு} = 60$$

எடுத்துக்காட்டு 5.29

ஒரு சுமாரான சமச்சீரற்ற பரவலில், கூட்டு சராசரி, முகடு ஆகியவற்றின் மதிப்புகள் முறையே 52.3, 60.3 ஆகும். அவ்வாறெனில் இடைநிலை மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு:

$$\text{முகடு} = 3 \text{ இடைநிலை} - 2 \text{ கூட்டுசராசரி}$$

$$60.3 = 3 \text{ இடைநிலை} - 2 \times 52.3$$

$$3 \text{ இடைநிலை} = 60.3 + 2 \times 52.3$$

$$60.3 + 104.6 = 164.9$$

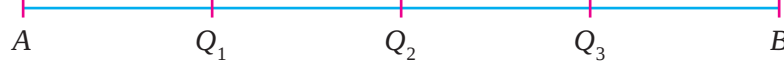
$$\text{இடைநிலை} = \frac{164.9}{3} = 54.966 = 54.97$$

சராசரி, இடைநிலை, முகடு & வீச்சு முதலில் ஏறு/ இறங்கு வரிசைப்படி விவரங்களை எழுதவும். எடுத்துக்காட்டு: 3, 5, 5, 6, 8, 10, 12			
சராசரி விவரங்களின் கூடுதல் வகுத்தல் விவரங்களின் எண்ணிக்கை 1. விவரங்களின் கூடுதல் காண்க 2. கூடுதல் தொகையை விவரங்களின் எண்ணிக்கையால் வகுக்க வேண்டும் $49 \div 7 = 7$	இடைநிலை விவரத் தொகுப்பின் மைய உறுப்பு 1. விவரங்களை ஏறு / இறங்கு வரிசையில் எழுதும் போது அதில் மைய உறுப்பு இடைநிலை 2. விவரங்களின் எண்ணிக்கை இரட்டைப்பட இரண்டாக இருப்பின் இரண்டு மைய எண்களின் சராசரியே இடைநிலை	முகடு அதிக முறை நிகழும் உறுப்பு 1. விவரத் தொகுப்பில் அடிக்கடி நிகழும் உறுப்பை தெரிவு செய்க (ஒன்றுக்கு மேலும் இருக்கலாம்). 2. எண் 5 இரண்டு முறை உள்ளது எனவே முகடு 5.	வீச்சு மிகப்பெரிய மற்றும் மிகச்சிறிய உறுப்புகளுக்கு இடையே உள்ள வித்தியாசம் 1. மிகப்பெரிய மதிப்பிலிருந்து மிகச்சிறிய மதிப்பை கழிக்கவும் . 2. $12 - 3 = 9$
சராசரி = 7	இடைநிலை = 7	முகடு = 5	வீச்சு = 9

5.5 பிரிவு அளவைகள்

5.5.1 கால்மானங்கள்

ஒரு நிகழ்வெண் பரவலை நான்கு பகுதிகளாகப் பிரித்து அவற்றினிடையே Q_1 , Q_2 and Q_3 என்ற மூன்று கால்மான இடங்களைக் குறிக்கலாம்.



அதாவது Q_1 க்குக் கீழ் 25% தரவுகளும், Q_2 க்குக் கீழ் 50% தரவுகளும், Q_3 க்குக் கீழ் 75% தரவுகளும் இடம் பெறுவதைக் காணலாம். இங்கு Q_2 என்பது இடைநிலையளவு ஆகும். கால்மானங்களைக் கணக்கிடுவது இடைநிலையளவைக் கணக்கிடுவது போன்றதே ஆகும்.

தொகுக்கப்படாத தரவுகளுக்குக் கால்மானங்கள் காணுதல்:

ஏறுவரிசையில் அமைக்கப்பட்ட n தரவு உறுப்புகளைக் கொண்ட கணத்தில்

$$Q_1 = \left(\frac{n+1}{4} \right) \text{ உறுப்பு, } Q_2 = \left(\frac{n+1}{2} \right) \text{ உறுப்பு மற்றும் } Q_3 = 3 \left(\frac{n+1}{4} \right) \text{ உறுப்பு}$$

எடுத்துக்காட்டு 5.30

25, 48, 32, 52, 21, 64, 29, 57 என்ற மதிப்பெண்கள் விவரத்திற்கு முதல் கால்மானம், மூன்றாம் கால்மானம் ஆகியவற்றைக் காண்க

தீர்வு:

$$n = 8$$

தரவு உறுப்புகளை ஏறுவரிசையில் எழுதுக.

21, 25, 29, 32, 48, 52, 57, 64

$$Q_1 = \left(\frac{n+1}{4} \right) \text{ ஆவது உறுப்பு}$$

$$= \left(\frac{8+1}{4} \right) \text{ ஆவது உறுப்பு}$$

$$= 2.25 \text{ ஆவது உறுப்பு}$$

$$= 2 \text{ ஆவது உறுப்பு} + \left(\frac{1}{4} \right) (\text{மூன்றாவது உறுப்பு} - \text{இரண்டாவது உறுப்பு})$$

$$= 25 + 0.25 (29 - 25)$$

$$= 25 + 1.0$$

$$Q_1 = 26$$



$$\begin{aligned}
Q_3 &= 3\left(\frac{n+1}{4}\right) \text{ ஆவது உறுப்பு} \\
&= 3 \times (2.25) \text{ ஆவது உறுப்பு} \\
&= 6.75 \text{ ஆவது உறுப்பு} \\
&= 6 \text{ ஆவது உறுப்பு} + 0.75 (7 \text{ ஆவது உறுப்பு} - 6 \text{ ஆவது உறுப்பு}) \\
&= 52 + (0.75) (57 - 52) \\
&= 52 + 3.75 \\
Q_3 &= 55.75
\end{aligned}$$

தனித்த நிகழ்வெண் பரவல்களுக்கு கால்மானங்கள் காணுதல்

கால்மானங்களைக் காண கீழ்க்கண்ட படிகளை பயன்படுத்தலாம்.

படி 1 : முதலில் குவிவு நிகழ்வெண்களைக் காண்க.

படி 2 : $\left(\frac{N+1}{4}\right)$ காண்க.

படி 3 : குவிவு நிகழ்வெண்கள் உள்ள நிரலில் $\left(\frac{N+1}{4}\right)$, இன் மதிப்பைவிட அதற்கு அடுத்த அதிக மதிப்புள்ள குவிவு நிகழ்வெண் உள்ள எண்ணுக்கு உரிய x Q_1 மதிப்பு ஆகும்.

படி 4 : $3\left(\frac{N+1}{4}\right)$ காண்க.

படி 5 : குவிவு நிகழ்வெண்கள் உள்ள நிரலில் $3\left(\frac{N+1}{4}\right)$ இன் மதிப்பை விட அதற்கு அடுத்த அதிக மதிப்புள்ள குவிவு நிகழ்வெண் உள்ள எண்ணுக்கு உரிய x இல் உள்ள எண்ணை Q_3 மதிப்பு ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.31

ஒரு கிராமத்தில் உள்ள 543 பேரின் வயது விவரங்கள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன. அவற்றிற்கு Q_1 மற்றும் Q_3 ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுக.

வயது	20	30	40	50	60	70	80
உறுப்பினர் எண்ணிக்கை	3	61	132	153	140	51	3

தீர்வு:

x	f	cf
20	3	3
30	61	64
40	132	196
50	153	349
60	140	489
70	51	540
80	3	543

$$Q_1 = \left(\frac{N+1}{4} \right) \text{ ஆவது உறுப்பு}$$

$$= \left(\frac{543+1}{4} \right) \text{ ஆவது உறுப்பு}$$

$$= 136 \text{ ஆவது உறுப்பு}$$

$$Q_1 = 40 \text{ ஆண்டுகள்}$$

$$Q_3 = 3 \left(\frac{N+1}{4} \right) \text{ ஆவது உறுப்பு}$$

$$= 3 \left(\frac{543+1}{4} \right) \text{ ஆவது உறுப்பு}$$

$$= 3 \times 136 \text{ ஆவது உறுப்பு}$$

$$= 408 \text{ ஆவது உறுப்பு}$$

$$Q_3 = 60 \text{ ஆண்டுகள்}$$

தொடர்ச்சியான நிகழ்வெண் பரவல்களுக்கு கால்மானங்கள் காணுதல்

படி 1 : கொடுக்கப்பட்ட நிகழ்வெண்களுக்கு ஏற்ப குவிவு நிகழ்வெண்களைக் காண்க

படி 2 : $\left(\frac{N}{4} \right)$ காண்க

படி 3 : முதல் கால்மானத்திற்கு $\left(\frac{N}{4} \right)$ காண்க. பின் குவிவு நிகழ்வெண்கள் உள்ள நிரலில் $\left(\frac{N}{4} \right)$ இன் மதிப்பைவிட அதற்கு அடுத்த அதிக மதிப்புள்ள குவிவு நிகழ்வெண் உள்ள நிரலில் உள்ள குழு Q_1 கால்மானக் குழு எனப்படும். இக்குழுவில் பெறும் விவரங்களை Q_1 காணும் சூத்திரத்தில் பிரதியிட முதல் கால்மானம் கிடைக்கும்.



படி 4 : மூன்றாம் கால்மானத்திற்கு $3\left(\frac{N}{4}\right)$ காண்க பின் குவிவு நிகழ்வெண்கள் உள்ள நிரலில் $3\left(\frac{N}{4}\right)$ இன் மதிப்பைவிட அதற்கு அடுத்த அதிக மதிப்புள்ள குவிவு நிகழ்வெண் உள்ள நிரலில் உள்ள குழு Q_3 கால்மானக்குழு எனப்படும். இக்குழுவில் பெறும் விவரங்களை Q_3 காணும் சூத்திரத்தில் பிரதியிட மூன்றாம் கால்மானம் கிடைக்கும்

$$Q_1 = l_1 + \frac{\frac{N}{4} - m_1}{f_1} \times c_1 \quad \text{மற்றும்} \quad Q_3 = l_3 + \frac{3\left(\frac{N}{4}\right) - m_3}{f_3} \times C_3$$

இங்கு $N = \sum f =$ மொத்த நிகழ்வெண்கள்

$l_1 =$ முதல் கால்மானக் குழுவின் கீழ்எல்லை

$f_1 =$ முதல் கால்மானக் குழுவில் அடைந்த நிகழ்வெண்

$c_1 =$ முதல் கால்மானக்குழுவின் அளவு

$m_1 =$ முதல் கால்மானக் குழுவில் உள்ள குவிவு எண்ணுக்கு முந்தைய குவிவு எண்

$l_3 =$ மூன்றாம் கால்மானக் குழுவின் கீழ்எல்லை

$f_3 =$ மூன்றாம் கால்மானக் குழுவில் அமைந்த நிகழ்வெண்

$m_3 =$ மூன்றாம் கால்மானக் குழுவின் அளவு

$c_3 =$ மூன்றாம் கால்மானக் குழுவில் உள்ள குவிவு எண்ணுக்கு முந்தைய குவிவு எண்

எடுத்துக்காட்டு 5.32

கீழ்க்கண்ட விவரங்களுக்குக் கால்மானங்கள் இரண்டினையும் காண்க.

குழுக்கள்	30-32	32-34	34-36	36-38	38-40	40-42	42-44
நிகழ்வெண்	12	18	16	14	12	8	6

தீர்வு:

x	f	cf
30 – 32	12	12
32 – 34	18	30
34 – 36	16	46
36 – 38	14	60
38 – 40	12	72
40 – 42	8	80
42 – 44	6	86
	86	

$$\frac{N}{4} = \frac{86}{4} = 21.5$$

இங்கு 32-34 பிரிவுகளை உடைய குழு முதல் கால்மானக்குழுவாகும்.

$$\begin{aligned} Q_1 &= l_1 + \frac{\frac{N}{4} - m_1}{f_1} \times c_1 \\ &= 32 + \frac{21.5 - 12}{18} \times 2 \\ &= 32 + \frac{19}{18} = 32 + 1.06 \\ &= ₹ 33.06 \end{aligned}$$

$$\frac{3N}{4} = \frac{3 \times 86}{4} = 64.5$$

∴ Q_3 எனவே இங்கு 38-40 பிரிவுகளை உடைய குழு மூன்றாம் கால்மானக்குழுவாகும்.

$$\begin{aligned} Q_3 &= l_3 + \frac{3\left(\frac{N}{4}\right) - m_3}{f_3} \times C_3 \\ &= 38 + \frac{64.5 - 60}{12} \times 2 \\ &= 38 + \frac{4.5}{12} \times 2 \\ &= 38 + 0.75 = ₹ 38.75 \end{aligned}$$

5.5.2 பதின்மானங்கள்

பதின்மானங்கள் என்பது கால்மானங்களைப் போன்றே அமையும். கொடுக்கப்பட்ட தரவுகளை கால்மானங்கள் நான்கு பகுதிகளாக பிரிக்கும். பதின்மானங்கள் 10 சம்பகுதிகளாக பிரிக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.33

கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களுக்கு D_6 காண்க. 11, 25, 20, 15, 24, 28, 19, 21

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களை ஏறுவரிசையில் எழுதுக.

11, 15, 19, 20, 21, 24, 25, 28

$$D_6 = \left(\frac{6(n+1)}{10} \right) \text{ உறுப்பு}$$



$$= \left(\frac{6(8+1)}{10} \right) \text{ வது உறுப்பு}$$

$$= \left(\frac{6(9)}{10} \right) \text{ வது உறுப்பு}$$

$$= [5.4] \text{ வது உறுப்பு}$$

$$= 5 \text{ வது உறுப்பு} + (0.4) (6 \text{ வது உறுப்பு} - 5 \text{ வது உறுப்பு})$$

$$D_6 = 21 + (0.4)(24 - 21)$$

$$= 21 + (0.4)(3)$$

$$= 21 + 1.2$$

$$= 22.2$$

எடுத்துக்காட்டு 5.34

ஒரு தொழிற்சாலையில் உள்ள வேலையாட்களின் மாத வருமானம் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இவ்விவரங்களுக்கு D_5 காண்க

வருமானம் (ரூ. ஆயிரத்தில்)	0 – 4	4 – 8	8 – 12	12 – 16	16 – 20	20 – 24	24 – 28	28 – 32
எண்ணிக்கை	10	12	8	7	5	8	4	6

தீர்வு:

தீர்வு	f	cf
0-4	10	10
4-8	12	22
8-12	8	30
12-16	7	37
16-20	5	42
20-24	8	50
24-28	4	54
28-32	6	60
	N=60	



$$\begin{aligned}
 D_5 &= \left(\frac{5N}{10} \right) \text{ வது உறுப்பு} \\
 &= \left(\frac{5(60)}{10} \right) \text{ வது உறுப்பு} \\
 &= 30 \text{ வது உறுப்பு}
 \end{aligned}$$

30 வது உறுப்பு 8-12 என்ற இடைவெளியில் அமையும்

$$l = 8, m = 22, f = 8, c = 4, N = 60$$

$$\begin{aligned}
 D_5 &= l + \left(\frac{\frac{5N}{10} - m}{f} \right) \times c \\
 &= 8 + \left(\frac{30 - 22}{8} \right) \times 4 \\
 &= 8 + \frac{8}{8} \times 4
 \end{aligned}$$

$$D_5 = 12$$

வருமானத்தின் D_5 என்பது 12 ஆகும்.

5.5.3 நூற்றுமானங்கள்

பரவலை நூறு சம பாகங்களாக பிரிப்பது நூற்றுமானங்கள் எனப்படும். ஒவ்வொன்றும் 1 சதவீத அளவினைக் குறிக்கும்.

தொடர்பு

$$P_{25} = Q_1$$

$$P_{50} = \text{இடைநிலை} = Q_2$$

$$P_{75} = 3\text{ம் கால்மானம்} = Q_3$$

எடுத்துக்காட்டு 5.35

ஒரு தொழிற்சாலையில் 8 வேலையாட்களின் மாத வருமானம் (ரூ.1000) கொடுக்கப்பட்டுள்ளது 10, 14, 36, 25, 15, 21, 29, 17 அதன் P_{30} காண்க

தீர்வு:

$$n = 8$$

10,14,15,17,21,25,29,36

$$\begin{aligned}
 P_{30} &= \left(\frac{30(n+1)}{100} \right) \text{ வது உறுப்பு} \\
 &= \left(\frac{30 \times 9}{100} \right) \text{ வது உறுப்பு} \\
 &= 2.7 \text{ வது உறுப்பு}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \text{ வது உறுப்பு} + 0.7 (3 \text{ வது உறுப்பு} - 2 \text{ வது உறுப்பு}) \\
&= 14 + 0.7(15 - 14) \\
&= 14 + 0.7 \\
P_{30} &= 14.7
\end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 5.36

ஒரு தோட்டத்தில் உள்ள செடிகளின் உயரம் தரப்பட்டுள்ளது.

உயரம் (செ.மீ)	0 – 5	5 – 10	10 – 15	15 – 20	20 – 25	25 – 30
எண்ணிக்கை	18	20	36	40	26	16

இதன் P_{61} மதிப்பு காண்க

தீர்வு:

குழுக்கள்	f	cf
0 – 5	18	18
5 – 10	20	38
10 – 15	36	74
15 – 20	40	114
20 – 25	26	140
25 – 30	16	156
	$N=156$	

$$\frac{61N}{100} = \left(\frac{61 \times 156}{100} \right)$$

$$= 95.16 \text{ வது உறுப்பு}$$

இந்த மதிப்பு 15-20 இடைவெளியில் அமையும்

$$l = 15, m = 74, f = 40, c = 5$$

$$\begin{aligned}
P_{61} &= l + \left(\frac{\frac{61N}{100} - m}{f} \right) \times c \\
&= 15 + \left(\frac{95.16 - 74}{40} \right) \times 5 \\
&= 15 + \frac{21.16}{40} \times 5 \\
&= 17.645
\end{aligned}$$

$$P_{61} = 17.645$$



நினைவில் கொள்க...

- மையப்போக்கு அளவை என்பது முழு தரவு மதிப்புகளை ஒரே ஒரு மதிப்பைக் கொண்டு விளக்குவதாகும்.
- கூட்டு சராசரி என்பது தரவின் எல்லா உறுப்புகளையும் கூட்டி, தரவு உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையால் வகுக்கக் கிடைப்பதாகும்.
- ஒரு குழுவில் உள்ள எல்லா உறுப்புகளுக்கும் சமமுக்கியத்துவம் அளித்து சராசரி கணக்கிடப்பட்டால் அது எளிய கூட்டு சராசரி எனப்படும். குழு உறுப்புகளுக்கு வேறு வேறு நிறைகளை அளித்து சராசரி கணக்கிடப்பட்டால் அது நிறையிட்ட கூட்டு சராசரி என்று கூறப்படும்.
- ஏறு வரிசையிலோ, இறங்கு வரிசையிலோ தரவு உறுப்புகளை அமைத்தபின் இடையில் உள்ள உறுப்பின் மதிப்பை இடைநிலையளவு அல்லது இடைநிலை என்று கூறப்படும்.
- தரவு உறுப்புகள் கொண்ட ஒரு தொடரைப் பல பகுதிகளாகப் பிரித்து கணக்கிட்டுக் கிடைக்கும் மதிப்புகள் பிரிவு மதிப்புகள் என்று கூறப்படும். அவை கால்மானங்கள், பதின்மானங்கள், நூற்றுமானங்கள் என்று அழைக்கப்படும்.
- முகடு என்பது ஒரு தொடரில் மிக அதிகமுறை நிகழும் உறுப்பு ஆகும். ஒரு குழுவில் அதிக நிகழ்வெண்கள் பெறும் உறுப்பு முகடு எனப்படும்.

பயிற்சி

I. மிகச் சரியான விடையைத் தெரிவு செய்க

1. கீழ்க்கண்டவற்றில் மையப்போக்கு அளவை எது ?
 (a) இடைநிலை (b) பதின்மானங்கள்
 (c) கால்மானங்கள் (d) நூற்றுமானங்கள்
2. பெருக்கல் சராசரி மற்ற சராசரியை விட எப்பொழுது சிறந்தது?
 (a) தரவுகள் மிகை மற்றும் குறையாக இருக்கும்போது
 (b) தரவுகள் விகிதம் மற்றும் சதவிகிதத்தில் இருக்கும்போது
 (c) தரவுகள் இரட்டையாக இருக்கும்போது
 (d) தரவுகள் இடைவெளியில் இருக்கும்போது
3. தரவுகள் அனைத்தும் சமமாக இருக்கும்போது A.M., G.M. மற்றும் H.M. இவற்றிற்கிடையேயான உறவு
 (a) A.M. = G.M. = H.M. (b) A.M. < H.M. < G.M.
 (c) A.M. < G.M. < H.M. (d) A.M. > G.M. > H.M.
4. 11, 7, 6, 9, 12, 15, 19 மதிப்புகளின் இடைநிலை
 (a) 9 (b) 12 (c) 15 (d) 11





5. ஓர் வரிசைப்படுத்தப்பட்ட தொடரில் மைய மதிப்பு என்பது
(a) 50 வது நூற்றுமானம் (b) இரண்டாம் கால்மானம்
(c) 5வது பதின்மானம் (d) மேற்கூறிய அனைத்தும்
6. ஒரு நிகழ்வெண் பரவலில் முகடு என்பது
(a) சிறும நிகழ்வெண் (b) பெரும நிகழ்வெண்
(c) நிகழ்வெண் (d) இவற்றில் எதுவுமில்லை
7. பதின்மானத்தில் பிரிவுகளின் எண்ணிக்கை
(a) 5 (b) 8 (c) 9 (d) 10
8. முதல் 11 இயல் எண்களின் வர்க்கங்களின் சராசரி
(a) 46 (b) 23 (c) 48 (d) 42
9. பரவல் செவ்வகப்படம் என்ற வரைபடத்தின் மூலம் கணக்கிடப்படுவது
(a) சராசரி (b) இடைநிலை (c) முகடு (d) மேற்கூறிய அனைத்தும்
10. எந்த சதவிகித மதிப்பு 5வது மற்றும் 25வது நூற்றுமானங்களுக்கு இடையில் அமையும்
(a) 15% (b) 30% (c) 75% (d) இவற்றில் எதுவுமில்லை

II. கோடிட்ட இடத்தை நிரப்புக:

11. திறந்த பிரிவு இடைவெளி கொண்ட பரவலில் ----- காண இயலாது.
12. சராசரியிலிருந்து விலக்கங்களின் கூடுதல் -----
13. இரண்டு முகடுகளைக் கொண்ட பரவல் -----
14. மூன்றாம் கால்மானம் மற்றும் ----- நூற்றுமானம் சமமானவை.
15. வகைப்படுத்தப்பட்ட விவரங்கள் ----- கொடுக்கப்பட்டால் இடைநிலை அளவு மிகப் பொருத்தமான சராசரியாகும்.

III. குறு வினா (ஒரிரு சொற்களில் விடையளி)

16. மையப்போக்கு அளவைகள் என்றால் என்ன?
17. மையப்போக்கு அளவைகளில் சிறந்த அளவையின் சிறப்பு இயல்புகள் யாவை?
18. கூட்டு சராசரியின் நிறை, குறைகள் யாவை?
19. நிறையிட்ட கூட்டு சராசரியை விவரிக்க?
20. இடைநிலை அளவை வரையறுக்க? இதன் நிறை, குறைகளை விவரிக்கவும்.



IV. சிறு வினா (ஒரே சொற்றொடரில் விடையளி)

21. பத்து குடும்பங்களின் மாத வருமானம் (ரூபாயில்) கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

குடும்பம்	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
வருமானம் (ரூபாயில்)	85	70	10	75	500	8	42	250	40	36

கூட்டு சராசரி காண்க

22. 100 மதிப்புகளின் சராசரி 30 எனக் கண்டறியப்பட்டது. 23, 11 என்ற மதிப்பிற்கு பதிலாக 32, 12 என்று தவறுதலாக எடுத்துக்கொள்ளப்பட்டால் திருத்தப்பட்ட சராசரியைக் காண்க.
23. ஒரு சைக்கிள் ஓட்டுபவர் முதல் 3 கி.மீ தூரத்தை 8 கி.மீ / மணி வேகத்திலும், அடுத்த 2 கி.மீ தூரத்தை 3 கி.மீ/மணி என்ற வேகத்திலும், கடைசி 2 கி.மீ தூரத்தை 2 கி.மீ / மணி என்ற வேகத்திலும் கடக்கிறார் எனில் அவரது மொத்த பயணத்தின் சராசரி வேகத்தைக் காண்க.
24. 100 மாணவர்களின் மதிப்பெண் சராசரி 40 பிறகு 53 என்ற மதிப்பெண்ணிற்குப் பதிலாக 83 என்று எடுத்துக்கொள்ளப்பட்டால் திருத்தப்பட்ட சராசரியைக் காண்க.
25. சமச்சீரற்ற பரவலில் முகடு மற்றும் சராசரி முறையே 32.1 மற்றும் 35.4 எனில், இடைநிலை அளவு காண்க.
26. பின்வரும் விவரங்களுக்கு D_9 காண்க.

x	58	59	60	61	62	63	64	65	66
f	2	3	6	15	10	5	4	3	2

27. ஒரு மருத்துவமனையில் எடுக்கப்பட்ட நோயாளிகளின் எடை விவரங்கள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. அவ்விவரங்களுக்கு P_{40} காண்க.

எடை (கி.கி.)	40	50	60	70	80	90	100
நோயாளிகளின் எண்ணிக்கை	15	26	12	10	8	9	5

V. விரிவான விடையளி:

28. சராசரி, இடைநிலை அளவு காண்க.

கூலி (₹)	60 – 70	50 – 60	40 – 50	30 – 40	20 – 30
தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கை	5	10	20	5	3

29. ஒரு பள்ளியில் பயிலும் மாணவர்கள் எடுத்த மதிப்பெண்கள் பின்வருமாறு.

மதிப்பெண்	>10	>20	>30	>40	>50	>60	>70	>80	>90
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	70	62	50	38	30	24	17	9	4

இடைநிலை அளவு காண்க.

30. கீழ்க்கண்ட நிகழ்வெண் பரவல் ஒரு தொலைபேசி இணைப்பகத்தில் தொடர்ச்சியாக 245 நிமிடங்களில் ஒரு நிமிட இடைவெளியில் பெறப்பட்ட தொலைபேசி அழைப்புகளைக் குறிக்கிறது.

தொலைபேசி அழைப்புகள்	0	1	2	3	4	5	6	7
எண்ணிக்கை	14	21	25	43	51	40	39	12

சராசரி, இடைவெளி, முகடு காண்.

31. ஒரு குழுவில் உள்ள மாணவர்களின் மாத செலவினம் கீழ்க்கண்ட வரிசையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. அவ்விவரங்களுக்கு பெருக்கல் சராசரி மற்றும் இசைச்சராசரி காண்க.

125, 130, 75, 10, 45, 0.5, 0.40, 500, 150, 5

32. கீழ்க்காணும் அட்டவணையில் உள்ள விவரத்திற்கு முகடு காண்:

கூலி (₹)	< 25	25 – 50	50 – 75	75 – 100	100 – 125	> 125
தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கை	10	30	40	25	20	15

33. பின்வரும் நிகழ்வெண் பரவலுக்கு இடைநிலை, முதல்கால்மானம், 7 வது பதின்மானம், 85 வது நூற்றுமானம் காண்

புள்ளியியல் மதிப்பெண்	10	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60	60 – 70	மேல் 70
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	8	12	20	32	30	28	12	4

34. ஒரு கல்லூரியில் பயிலும் 60 மாணவர்களின் உயரங்கள் பின்வரும் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

உயரம் (செ.மீ)	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை
145.0 – 149.9	2
150.0 – 154.9	5
155.0 – 159.9	9
160.0 – 164.9	15
165.0 – 169.9	16
170.0 – 174.9	7
175.0 – 179.9	5
180.0 – 184.9	1

செவ்வகப்படம் வரைந்து அதன் மூலம் முகட்டின் மதிப்பைக் காண்க. கண்டறிந்த மதிப்பை சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி சரிபார்க்கவும்.

35. கீழ்க்காணும் அட்டவணைக்கு இடைநிலை மற்றும் கால்மானங்கள் காண்க

அளவு	நிகழ்வெண்	அளவு	நிகழ்வெண்
4	40	12	50
5	48	13	52
6	52	14	41
7	56	15	57
8	60	16	63
9	63	17	52
10	57	18	48
11	55	19	43

36. ஒரு வகுப்பில் பயிலும் 50 மாணவர்களில், 10 மாணவர்கள் தோல்வியுற்றனர் அவர்களின் சராசரி மதிப்பெண் 2.5. மொத்த மாணவர்களின் மதிப்பெண்களின் கூடுதல் 281 எனில் வெற்றி பெற்ற மாணவர்களின் சராசரி மதிப்பெண் காண்க.

விடைகள்:

I. 1. (a) 2. (b) 3. (a) 4. (d) 5. (d) 6. (b) 7. (c) 8. (a) 9. (c) 10. (d)

II. 11. சராசரி 12. பூச்சியம் 13. இரு முகடு 14. 5 ஆவது
15. திறந்த இடைவெளி

IV. 21. சராசரி = 111.60 22. சராசரி = 29.90
23. சராசரி வேகம் = 3.4 கி.மீ / மணி 24. திருத்தப்பட்ட சராசரி = 39.7
25. இடைநிலை = 34.3 26. $D_9 = 65$ 27. $P_{40} = 50$

V. 28. இடைநிலை = 46.75, சராசரி = 47.09 29. இடைநிலை = 43.75
30. சராசரி = 3.76, இடைநிலை = 4, முகடு = 4
31. G.M. = 22.28, H.M. = 2.058 32. முகடு = Rs. 60
33. இடைநிலை = 40.33, முதல் கால்மானம் = 28.25, 7ஆவது பதின்மானம் = 50.07,
85 ஆவது நூற்றுமானம் = 57.9

35. இடைநிலை = 11, முதல் கால்மானம் = 8, மூன்றாம் கால்மானம் = 15

36. வெற்றி பெற்றவர்களின் சராசரி மதிப்பெண் = 6.4