પ્રકરણ 3

શ્રેણિક

3.1 વિહંગાવલોકન

3.1.1 સંખ્યાઓની (અથવા વિધેયોની) લંબચોરસ ગોઠવણીને શ્રેણિક કહે છે. ઉદાહરણ તરીકે, x સંખ્યા હોય કે વિધેય દર્શાવે, તો

$$A = \begin{bmatrix} x & 4 & 3 \\ 4 & 3 & x \\ 3 & x & 4 \end{bmatrix}$$

સંખ્યાઓને (અથવા વિધેયોને) શ્રેણિકના ઘટકો કહે છે.

સમક્ષિતિજ રેખામાં આવતા ઘટકો શ્રેણિકની હાર બનાવે છે અને શિરોલંબ રેખામાં આવતા ઘટકો શ્રેણિકનો સ્તંભ બનાવે છે.

3.1.2 શ્રેણિકની કક્ષા

m હાર અને n સ્તંભવાળા શ્રેણિકની કક્ષા $m \times n$ છે. આ શ્રેણિકને $m \times n$ શ્રેણિક કહે છે (m બાય n શ્રેણિક એમ વાંચીશું).

ઉપરના ઉદાહરણના શ્રેણિક A ની કક્ષા 3×3 છે અર્થાત્, A એ 3×3 શ્રેણિક છે.

વ્યાપક સ્વરૂપે, $m \times n$ શ્રેણિકની લંબચોરસ સ્વરૂપે ગોઠવણી નીચે પ્રમાણે છે :

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n} \quad 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n \quad i, j \in \mathbf{N}.$$

ઘટક a_{ij} એ i મી હાર અને j મા સ્તંભનો ઘટક છે અને આ ઘટકને શ્રેણિક A નો (i, j) મો ઘટક કહે છે. $m \times n$ શ્રેણિકની સભ્યસંખ્યા mn છે.

3.1.3 શ્રેણિકના પ્રકાર

(i) જો શ્રેણિકને માત્ર એક હાર હોય, તો તે શ્રેણિકને **હાર શ્રેણિક** કહે છે. તેને $1 \times n$ શ્રેણિક કહેવાય.

(ii) જો શ્રેણિકને માત્ર એક સ્તંભ હોય, તો તે શ્રેણિકને **સ્તંભ શ્રેણિક** કહે છે. તેને $m \times 1$ શ્રેણિક કહેવાય.

(iii) જો શ્રેણિકની હારની સંખ્યા અને સ્તંભની સંખ્યા સમાન હોય, તો તે શ્રેણિકને **ચોરસ શ્રેણિક** કહે છે. આમ, જો $m \times n$ શ્રેણિક માટે $m = n$ હોય, તો તે શ્રેણિક ચોરસ શ્રેણિક કહેવાય અને તે 'n' કક્ષાવાળો ચોરસ શ્રેણિક કહેવાય.

(iv) જો ચોરસ શ્રેણિકના વિકર્ણ ઘટકો સિવાયના બધા જ ઘટકો શૂન્ય હોય, તો તે ચોરસ શ્રેણિક $B = [b_{ij}]_{n \times n}$ ને **વિકર્ણ શ્રેણિક** કહે છે એટલે કે, શ્રેણિક $B = [b_{ij}]_{n \times n}$ માં $i \ne j$ માટે $b_{ij} = 0$ હોય, તો શ્રેણિક B વિકર્ણ શ્રેણિક છે.

(v) જો વિકર્ણ શ્રેણિકના બધા વિકર્ણઘટકો સમાન હોય, તો તે શ્રેણિકને **અદિશ શ્રેણિક** કહે છે એટલે કે, જો ચોરસ શ્રેણિક B = $[b_{ij}]_{n \times n}$ માં $i \neq j$ માટે $b_{ij} = 0$ અને $i = j$ માટે $b_{ij} = k$, જ્યાં k અચળ હોય, તો B અદિશ શ્રેણિક છે.

(vi) જો ચોરસ શ્રેણિકના બધા વિકર્ણ ઘટકો 1 હોય અને તે સિવાયના ઘટકો શૂન્ય હોય, તો તે શ્રેણિકને **એકમ શ્રેણિક** કહે છે.

બીજા શબ્દોમાં કહીએ, તો જો ચોરસ શ્રેણિક A = $[a_{ij}]_{n \times n}$ માં $i = j$ માટે $a_{ij} = 1$ અને $i \neq j$ માટે $a_{ij} = 0$, તો A એકમ શ્રેણિક છે.

(vii) જો શ્રેણિકના બધા જ ઘટકો શૂન્ય હોય, તો તે શ્રેણિકને **શૂન્ય શ્રેણિક** કહે છે. આપણે શૂન્ય શ્રેણિકને O વડે દર્શાવીશું.

(viii) જો શ્રેણિકો A = $[a_{ij}]$ અને B = $[b_{ij}]$ માટે

(a) તેમની કક્ષા સમાન હોય અને

(b) A નો પ્રત્યેક ઘટક B ના અનુરૂપ ઘટકને સમાન એટલે કે, પ્રત્યેક i અને j માટે $a_{ij} = b_{ij}$ હોય, તો A અને B સમાન શ્રેણિકો કહેવાય.

3.1.4 શ્રેણિકોનો સરવાળો

જો બે શ્રેણિકોની કક્ષા સમાન હોય, તો તે બે શ્રેણિકોનો સરવાળો શક્ય છે.

જો સમાન કક્ષા $m \times n$ વાળા બે શ્રેણિક A = $[a_{ij}]$ અને B = $[b_{ij}]$ આપેલ હોય, તો A અને B ના સરવાળાનો શ્રેણિક પ્રત્યેક શક્ય કિંમતો i અને j માટે $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ દ્વારા શ્રેણિક C = $[c_{ij}]_{m \times n}$ તરીકે વ્યાખ્યાયિત થાય.

3.1.5 શ્રેણિકનો અદિશ વડે ગુણાકાર

જો A = $[a_{ij}]_{m \times n}$ શ્રેણિક હોય અને k કોઈ પણ વાસ્તવિક સંખ્યા હોય, તો A ના પ્રત્યેક ઘટકને k વડે ગુણતાં બીજો શ્રેણિક kA મળે છે અર્થાત્ kA = $[ka_{ij}]_{m \times n}$ થાય.

3.1.6 વિરોધી શ્રેણિક

A ના વિરોધી શ્રેણિકને –A વડે દર્શાવાય છે. આપણે વિરોધી શ્રેણિક –A = (–1)A વડે દર્શાવીશું.

3.1.7 શ્રેણિકોના ગુણાકાર

જો શ્રેણિક A ના સ્તંભની સંખ્યા અને શ્રેણિક B ની હારની સંખ્યા સમાન હોય, તો શ્રેણિકો A અને B નો ગુણાકાર શ્રેણિક વ્યાખ્યાયિત થાય.

ધારો કે, A = $[a_{ij}]$ એ $m \times n$ શ્રેણિક અને B = $[b_{jk}]$ એ $n \times p$ શ્રેણિક છે. શ્રેણિકો A અને B ના ગુણાકાર શ્રેણિક C ની કક્ષા $m \times p$ થશે. શ્રેણિક C નો (i, k) મો ઘટક c_{ik} મેળવવા માટે, આપણે A ની i મી હાર અને B નો k મો સ્તંભ લઈ, તેમના અનુરૂપ ઘટકોનો ગુણાકાર કરી આ બધા જ ગુણાકારોનો સરવાળો કરીશું અર્થાત્

$$c_{ik} = a_{i1}\, b_{1k} + a_{i2}\, b_{2k} + a_{i3}\, b_{3k} + \ldots + a_{in}\, b_{nk}$$

શ્રેણિકો A અને B નો ગુણાકાર શ્રેણિક C = $[c_{ik}]_{m \times p}$ મળે.

નોંધ :

1. AB વ્યાખ્યાયિત હોય, તો BA વ્યાખ્યાયિત થાય તે આવશ્યક નથી.
2. A અને B અનુક્રમે $m \times n$ અને $k \times l$ શ્રેણિકો છે. જો $n = k$ અને $l = m$ હોય, તો અને તો જ AB અને BA બંને વ્યાખ્યાયિત છે.
3. જો AB અને BA બંને વ્યાખ્યાયિત હોય, તો એ આવશ્યક નથી કે AB = BA થાય.
4. જો બે શ્રેણિકોનો ગુણાકાર શૂન્ય શ્રેણિક હોય, તો બેમાંથી કોઈ પણ શ્રેણિક શૂન્ય શ્રેણિક હોય તે આવશ્યક નથી.

5. જો સમાન કક્ષાવાળા ત્રણ શ્રેણિકો A, B અને C માટે, A = B હોય, તો AC = BC થાય, પરંતુ આથી ઊલટું સત્ય નથી.
6. $A \cdot A = A^2$, $A \cdot A \cdot A = A^3$ અને આ રીતે આગળ.

3.1.8 પરિવર્ત શ્રેણિક

1. જો શ્રેણિક $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ની બધી જ હારને અનુરૂપ સ્તંભમાં પરિવર્તિત કરવામાં આવે અને તેથી જે શ્રેણિક પ્રાપ્ત થાય તેને શ્રેણિક A નો પરિવર્ત શ્રેણિક કહે છે.
   શ્રેણિક A ના પરિવર્ત શ્રેણિકને A' અથવા (A^T) વડે દર્શાવાય છે. બીજા શબ્દોમાં કહીએ તો, જો $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, તો $A^T = [a_{ji}]_{n \times m}$ થાય.
2. **પરિવર્ત શ્રેણિકના ગુણધર્મો :**
   યોગ્ય કક્ષાવાળા શ્રેણિકો A અને B માટે,
   (i) $(A^T)^T = A$
   (ii) $(kA)^T = kA^T$ (k કોઈ પણ અચળ છે.)
   (iii) $(A + B)^T = A^T + B^T$
   (iv) $(AB)^T = B^T A^T$

3.1.9 સંમિત શ્રેણિક અને વિસંમિત શ્રેણિક

(i) ચોરસ શ્રેણિક $A = [a_{ij}]$ માટે, જો $A^T = A$ તો A સંમિત શ્રેણિક છે, અર્થાત્ i અને j ની બધી જ શક્ય કિંમતો માટે $a_{ij} = a_{ji}$ થાય, તો A સંમિત છે.

(ii) ચોરસ શ્રેણિક $A = [a_{ij}]$ માટે, જો $A^T = -A$, એટલે કે i અને j ની બધી જ શક્ય કિંમતો માટે $a_{ji} = -a_{ij}$ થાય, તો A ને વિસંમિત શ્રેણિક કહેવાય.
નોંધ : વિસંમિત શ્રેણિકના વિકર્ણ ઘટકો શૂન્ય હોય છે.

(iii) **પ્રમેય 1 :** જેના ઘટકો વાસ્તવિક સંખ્યાઓ હોય તેવા ચોરસ શ્રેણિક A માટે, $A + A^T$ સંમિત શ્રેણિક છે અને $A - A^T$ વિસંમિત શ્રેણિક છે.

(iv) **પ્રમેય 2:** કોઈ પણ ચોરસ શ્રેણિક A ને એક સંમિત શ્રેણિક અને એક વિસંમિત શ્રેણિકના સરવાળા તરીકે અનન્ય રીતે દર્શાવી શકાય, એટલે કે

$A = \frac{(A+A^T)}{2} + \frac{(A-A^T)}{2}$ અને એ રીતે સંમિત શ્રેણિક B તથા વિસંમિત શ્રેણિક C માટે

$A = B + C$ તો $B = \frac{A+A^T}{2}$, $C = \frac{A-A^T}{2}$

3.1.10 વ્યસ્ત સંપન્ન શ્રેણિક

(i) જો A એ $m \times m$ કક્ષાવાળો ચોરસ શ્રેણિક હોય અને જો સમાન કક્ષા $m \times m$ વાળો બીજો ચોરસ શ્રેણિક B અસ્તિત્વ ધરાવે, કે જેથી $AB = BA = I_m$ થાય, તો A એ વ્યસ્તસંપન્ન શ્રેણિક છે અને શ્રેણિક B ને શ્રેણિક A નો વ્યસ્ત શ્રેણિક કહે છે તથા તેને A^{-1} વડે દર્શાવાય છે.

નોંધ :

1. લંબચોરસ શ્રેણિક માટે, જો ગુણાકાર શ્રેણિક AB અને BA વ્યાખ્યાયિત થાય અને તેઓ સમાન થાય, તેમ છતાંય તે શ્રેણિકના વ્યસ્ત શ્રેણિકનું અસ્તિત્વ ન હોય તે શક્ય છે. બંને શ્રેણિકો A અને B સમાન કક્ષાના ચોરસ શ્રેણિક હોવા જરૂરી છે.
2. જો શ્રેણિક A નો વ્યસ્ત શ્રેણિક B હોય, તો B નો વ્યસ્ત શ્રેણિક A છે.

(ii) **પ્રમેય 3 : (વ્યસ્ત શ્રેણિકની અનન્યતા)** જો ચોરસ શ્રેણિકના વ્યસ્ત શ્રેણિકનું અસ્તિત્વ હોય, તો તે અનન્ય છે.

(iii) **પ્રમેય 4 :** જો A અને B સમાન કક્ષાવાળા વ્યસ્તસંપન્ન શ્રેણિક હોય, તો $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

3.1.11 હાર સંક્ષેપન અથવા સ્તંભ સંક્ષેપનના ઉપયોગથી વ્યસ્ત શ્રેણિક

હાર સંક્ષેપનના ઉપયોગથી A^{-1} શોધવા માટે, A = IA લખી અને તેના પર હાર સંક્ષેપનની પ્રાથમિક ક્રિયાઓ કરતાં I = BA ન મળે ત્યાં સુધી હાર સંક્ષેપનની એક શ્રેણીનું પ્રયોજન કરીએ. શ્રેણિક B એ શ્રેણિક A નો વ્યસ્ત શ્રેણિક થશે. તે જ પ્રમાણે, જો સ્તંભ સંક્ષેપનના ઉપયોગથી A^{-1} શોધવું હોય, તો A = AI લખી અને તેના પર I = AB ન મળે ત્યાં સુધી સ્તંભ સંક્ષેપનની એક શ્રેણીનું પ્રયોજન કરીશું.

નોંધ : આપણે A = IA (અથવા A = AI) પર એક અથવા વધારે હાર (સ્તંભ) સંક્ષેપનનું પ્રયોજન કરતાં કોઈક વખત, જો ડાબી બાજુના પરિવર્તિત શ્રેણિકની એક અથવા વધારે હારમાં બધા જ શૂન્ય મળે, તો A^{-1} નું અસ્તિત્વ નથી.

3.2 ઉદાહરણો

ટૂંક જવાબી પ્રશ્નો (S.A.)

ઉદાહરણ 1 : જેના ઘટકો $a_{ij} = e^{2ix} \sin jx$ થી મળતા હોય, તેવો શ્રેણિક $A = [a_{ij}]_{2\times 2}$ રચો.

ઉકેલ : $i = 1, j = 1,$ માટે $a_{11} = e^{2x} \sin x$

$i = 1, j = 2,$ માટે $a_{12} = e^{2x} \sin 2x$

$i = 2, j = 1,$ માટે $a_{21} = e^{4x} \sin x$

$i = 2, j = 2,$ માટે $a_{22} = e^{4x} \sin 2x$

આમ, $A = \begin{bmatrix} e^{2x}\sin x & e^{2x}\sin 2x \\ e^{4x}\sin x & e^{4x}\sin 2x \end{bmatrix}$

ઉદાહરણ 2 : જો $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}$ હોય, તો

A + B, B + C, C + D અને B + D માંથી કયો સરવાળો વ્યાખ્યાયિત છે ?

ઉકેલ : સમાન કક્ષા ધરાવતા શ્રેણિકોનો સરવાળો શક્ય હોવાથી, માત્ર B + D જ વ્યાખ્યાયિત છે.

ઉદાહરણ 3 : સાબિત કરો કે, જો કોઈ શ્રેણિક સંમિત અને વિસંમિત બંને હોય, તો તે શ્રેણિક શૂન્ય શ્રેણિક છે.

ઉકેલ : ધારો કે શ્રેણિક $A = [a_{ij}]$ સંમિત અને વિસંમિત શ્રેણિક બંને છે.

શ્રેણિક A વિસંમિત શ્રેણિક હોવાથી, A′ = –A.

આમ, પ્રત્યેક i અને j માટે $a_{ij} = -a_{ji}$ થાય. (1)

ફરીથી, A સંમિત શ્રેણિક હોવાથી, A′ = A.

આમ, પ્રત્યેક i અને j માટે $a_{ji} = a_{ij}$ (2)

(1) અને (2) પરથી, પ્રત્યેક i અને j માટે $a_{ij} = -a_{ij}$ મળે.

અથવા $2a_{ij} = 0$,

તેથી પ્રત્યેક i અને j માટે, $a_{ij} = 0$. આથી A શૂન્ય શ્રેણિક છે.

બીજી રીત :

A′ = –A તથા

A′ = A હોવાથી

A = –A

$\therefore$ 2A = 0

$\therefore$ A = 0

ઉદાહરણ 4 : જો $[2x \quad 3]\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ 8 \end{bmatrix} = O$ હોય, તો x શોધો.

ઉકેલ : $[2x \quad 3]\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ 8 \end{bmatrix} = O \Rightarrow [2x-9 \quad 4x]\begin{bmatrix} x \\ 8 \end{bmatrix} = [0]$

$\therefore \ [2x^2 - 9x + 32x] = [0]$. આથી, $2x^2 + 23x = 0$

$\therefore \ x(2x + 23) = 0$

$\therefore \ x = 0$ અથવા $x = \frac{-23}{2}$

ઉદાહરણ 5 : જો 3×3 શ્રેણિક A એ વ્યસ્તસંપન્ન શ્રેણિક હોય અને k કોઈ પણ શૂન્યેતર અચળ હોય, તો સાબિત કરો કે kA વ્યસ્તસંપન્ન શ્રેણિક છે અને $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$.

ઉકેલ : $(kA)\left(\frac{1}{k}A^{-1}\right) = \left(k \cdot \frac{1}{k}\right)(A \cdot A^{-1}) = 1\ (I) = I$. તે જ રીતે, $\left(\frac{1}{k}A^{-1}\right)(kA) = I$

આથી, (kA) નો વ્યસ્ત શ્રેણિક $\left(\frac{1}{k}A^{-1}\right)$ છે અથવા $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$.

વિસ્તૃત જવાબી પ્રશ્નો (L.A.)

ઉદાહરણ 6 : જો શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 7 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ હોય, તો A ને એક સંમિત અને એક વિસંમિત શ્રેણિકના સરવાળા સ્વરૂપમાં દર્શાવો.

ઉકેલ : જો $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 7 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$, તો $A' = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \\ -6 & 5 & 4 \end{bmatrix}$ થાય.

આથી, $$\frac{A+A'}{2} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & 11 & -5 \\ 11 & 6 & 3 \\ -5 & 3 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & \frac{11}{2} & \frac{-5}{2} \\ \frac{11}{2} & 3 & \frac{3}{2} \\ \frac{-5}{2} & \frac{3}{2} & 4 \end{bmatrix}$$

અને $$\frac{A-A'}{2} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -3 & -7 \\ 3 & 0 & 7 \\ 7 & -7 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-3}{2} & \frac{-7}{2} \\ \frac{3}{2} & 0 & \frac{7}{2} \\ \frac{7}{2} & \frac{-7}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

માટે, $$\frac{A+A'}{2} + \frac{A-A'}{2} = \begin{bmatrix} 2 & \frac{11}{2} & \frac{-5}{2} \\ \frac{11}{2} & 3 & \frac{3}{2} \\ \frac{-5}{2} & \frac{3}{2} & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{-3}{2} & \frac{-7}{2} \\ \frac{3}{2} & 0 & \frac{7}{2} \\ \frac{7}{2} & \frac{-7}{2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 7 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix} = A$$

ઉદાહરણ 7 : જો $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, તો શ્રેણિક A એ $A^3 - 4A^2 - 3A + 11I = O$ સમીકરણનું સમાધાન કરે તેમ દર્શાવો. (આને Cayley Hamilton પ્રમેયનું પરિણામ કહે છે.)

ઉકેલ : $A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1+6+2 & 3+0+4 & 2-3+6 \\ 2+0-1 & 6+0-2 & 4+0-3 \\ 1+4+3 & 3+0+6 & 2-2+9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & 7 & 5 \\ 1 & 4 & 1 \\ 8 & 9 & 9 \end{bmatrix}$$

અને $A^3 = A^2 \times A = \begin{bmatrix} 9 & 7 & 5 \\ 1 & 4 & 1 \\ 8 & 9 & 9 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 9+14+5 & 27+0+10 & 18-7+15 \\ 1+8+1 & 3+0+2 & 2-4+3 \\ 8+18+9 & 24+0+18 & 16-9+27 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 28 & 37 & 26 \\ 10 & 5 & 1 \\ 35 & 42 & 34 \end{bmatrix}$$

હવે, $A^3 - 4A^2 - 3A + 11(I)$

$$= \begin{bmatrix} 28 & 37 & 26 \\ 10 & 5 & 1 \\ 35 & 42 & 34 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 9 & 7 & 5 \\ 1 & 4 & 1 \\ 8 & 9 & 9 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} + 11\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 28-36-3+11 & 37-28-9+0 & 26-20-6+0 \\ 10-4-6+0 & 5-16+0+11 & 1-4+3+0 \\ 35-32-3+0 & 42-36-6+0 & 34-36-9+11 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = O$$

ઉદાહરણ 8 : જો $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ હોય, તો $A^2 - 4A + 7I = O$ સાબિત કરો. આ પરિણામનો ઉપયોગ કરી A^5 ની ગણતરી કરો.

ઉકેલ : $A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 12 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad -4A = \begin{bmatrix} -8 & -12 \\ 4 & -8 \end{bmatrix}$ અને $7I = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$

આથી, $A^2 - 4A + 7I = \begin{bmatrix} 1-8+7 & 12-12+0 \\ -4+4+0 & 1-8+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O$

$\therefore \quad A^2 = 4A - 7I = O$

આમ, $A^3 = A \cdot A^2 = A\,(4A - 7I) = 4\,(4A - 7I) - 7A = 16A - 28I - 7A = 9A - 28I$

અને તેથી, $A^5 = A^3A^2$

$= (9A - 28I)\,(4A - 7I)$

$= 36A^2 - 63A - 112A + 196I$

$= 36\,(4A - 7I) - 175A + 196I$

$= -\,31A - 56I$

$= -31\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - 56\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -118 & -93 \\ 31 & -118 \end{bmatrix}$

હેતુલક્ષી પ્રશ્નો

વિધાન સત્ય બને તે રીતે આપેલા ચાર વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી 9 થી 12 ક્રમાંકવાળા પ્રશ્નોના ઉત્તર આપો :

ઉદાહરણ 9 : જો A અને B સમાન કક્ષાવાળા ચોરસ શ્રેણિક હોય, તો $(A + B)\,(A - B) =$ ....

(A) $A^2 - B^2$ (B) $A^2 - BA - AB - B^2$

(C) $A^2 - B^2 + BA - AB$ (D) $A^2 - BA + B^2 + AB$

ઉકેલ : $(A + B)\,(A - B) = A\,(A - B) + B\,(A - B)$

$= A^2 - AB + BA - B^2$

સાચો જવાબ (C) છે.

ઉદાહરણ 10 : જો $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -4 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ અને $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ હોય, તો...

(A) માત્ર AB વ્યાખ્યાયિત છે. (B) માત્ર BA વ્યાખ્યાયિત છે.

(C) AB અને BA બંને વ્યાખ્યાયિત છે. (D) AB અને BA બંને પૈકી કોઈ પણ વ્યાખ્યાયિત નથી.

ઉકેલ : શ્રેણિકો $A = [a_{ij}]_{2\times3}$ અને $B = [b_{ij}]_{3\times2}$ છે, આથી, AB અને BA બંને વ્યાખ્યાયિત છે.

સાચો જવાબ (C) છે.

ઉદાહરણ 11 : શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ હોય, તો A .... છે.

(A) અદિશ શ્રેણિક (B) વિકર્ણ શ્રેણિક (C) એકમ શ્રેણિક (D) ચોરસ શ્રેણિક

ઉકેલ : સાચો જવાબ (D) છે.

ઉદાહરણ 12 : જો A અને B સમાન કક્ષાવાળા સંમિત શ્રેણિકો હોય, તો $(AB' - BA')$ .... છે.

(A) વિસંમિત શ્રેણિક (B) શૂન્ય શ્રેણિક

(C) સંમિત શ્રેણિક (D) આપેલ પૈકી એક પણ નહિ.

ઉકેલ : $(AB' - BA')' = (AB')' - (BA')'$

$= (BA' - AB')$

$= -(AB' - BA')$

સાચો જવાબ (A) છે.

નીચેનાં વિધાન ક્રમાંક 13 થી 15 વાળા સત્ય બને તે રીતે ખાલી જગ્યા પૂરો :

ઉદાહરણ 13 : A અને B બંને સમાન કક્ષાવાળા વિસંમિત શ્રેણિકો છે. જો .... હોય, તો AB સંમિત શ્રેણિક છે.

ઉકેલ : $AB = BA$

$(AB)' = B'A' = (-B)(-A) = BA$

$\therefore$ AB સંમિત હોવા માટે $(AB)' = AB \Leftrightarrow AB = BA$

ઉદાહરણ 14 : જો A અને B સમાન કક્ષાવાળા શ્રેણિકો હોય, તો $(3A - 2B)' =$ ....

ઉકેલ : $3A' - 2B'$

ઉદાહરણ 15 : જો શ્રેણિકોની કક્ષા .... હોય, તો શ્રેણિકોનો સરવાળો વ્યાખ્યાયિત છે.

ઉકેલ : સમાન

નીચેના ક્રમાંક 16 થી 19 વાળાં વિધાનો સત્ય છે કે અસત્ય તે જણાવો. તમારા જવાબનું સમર્થન કરો.

ઉદાહરણ 16 : જો A અને B સમાન કક્ષાવાળા શ્રેણિકો હોય, તો $2A + B = B + 2A$.

ઉકેલ : સત્ય

ઉદાહરણ 17 : શ્રેણિકોની બાદબાકી જૂથના નિયમનું પાલન કરે છે.

ઉકેલ : અસત્ય

ઉદાહરણ 18 : સામાન્ય શ્રેણિક A માટે, $(A')^{-1} = (A^{-1})'$.

ઉકેલ : સત્ય. $AA^{-1} = I$. આથી, $(A^{-1})'A' = I$. આથી $(A')^{-1} = (A^{-1})'$

ઉદાહરણ 19 : સમાન કક્ષાવાળા કોઈ પણ ત્રણ શ્રેણિકો માટે, $AB = AC \Rightarrow B = C$.

ઉકેલ : અસત્ય

સ્વાધ્યાય 3.3

ટૂંક જવાબી પ્રશ્નો (S.A.)

1. જો શ્રેણિકને 28 ઘટકો હોય, તો શ્રેણિક માટે કેટલી કક્ષાઓ શક્ય છે ? જો 13 ઘટકો હોય, તો કેટલી કક્ષા થાય ?

2. જો શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} a & 1 & x \\ 2 & \sqrt{3} & x^2 - y \\ 0 & 5 & \frac{-2}{5} \end{bmatrix}$ હોય, તો

(i) શ્રેણિક A ની કક્ષા જણાવો.

(ii) શ્રેણિક A ના ઘટકોની સંખ્યા જણાવો.

(iii) ઘટકો a_{23}, a_{31}, a_{12} લખો.

3. એવો શ્રેણિક $A = [a_{ij}]_{2 \times 2}$ રચો, જ્યાં,

(i) $a_{ij} = \frac{(i-2j)^2}{2}$

(ii) $a_{ij} = |-2i + 3j|$ હોય.

4. જેના સભ્યો $a_{ij} = e^{i.x} sin\, jx$ થી મળે તેવો 3×2 શ્રેણિક રચો.

5. જો $A = \begin{bmatrix} a+4 & 3b \\ 8 & -6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2a+2 & b^2+2 \\ 8 & b^2-5b \end{bmatrix}$ માટે A = B હોય, તો a અને b નાં મૂલ્ય શોધો.

6. જો શ્રેણિકો $A = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ અને $B = \begin{bmatrix} x & y & z \\ a & b & 6 \end{bmatrix}$નો સરવાળો શક્ય હોય, તો શોધો.

7. જો $X = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 5 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ અને $Y = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 7 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ હોય, તો

(i) X +Y (ii) 2X – 3Y અને

(iii) X + Y + Z શૂન્ય શ્રેણિક થાય તેવો શ્રેણિક Z શોધો.

8. સમીકરણ $x\begin{bmatrix} 2x & 2 \\ 3 & x \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 8 & 5x \\ 4 & 4x \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} (x^2+8) & 24 \\ 10 & 6x \end{bmatrix}$નું સમાધાન કરે તેવો શૂન્યેતર x શોધો.

9. જો $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ અને $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ હોય, તો દર્શાવો કે $(A + B)(A - B) \neq A^2 - B^2$.

10. જો $[1 \quad x \quad 1]\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 15 & 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ x \end{bmatrix} = O$ હોય, તો x નું મૂલ્ય શોધો.

11. સાબિત કરો કે $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ સમીકરણ $A^2 - 3A - 7I = O$ નું સમાધાન કરે છે અને તે પરથી A^{-1} શોધો.

12. સમીકરણ$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$નું સમાધાન કરે તેવો શ્રેણિક A શોધો.

13. જો $\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} -4 & 8 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \\ -3 & 6 & 3 \end{bmatrix}$ હોય, તો A શોધો.

14. જો $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ અને $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ હોય, તો $(BA)^2 \neq B^2A^2$ ચકાસો.

15. જો $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ માટે શક્ય હોય, તો BA અને AB શોધો.

16. $A \neq O$, $B \neq O$ પરંતુ, $AB = O$ થાય તેવું એક ઉદાહરણ આપો.

17. $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 3 & 9 & 6 \end{bmatrix}$ અને $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ હોય, તો $(AB)' = B'A'$ થશે ?

18. x અને y માટે ઉકેલો :

$$x\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 \\ -11 \end{bmatrix} = O.$$

19. સમીકરણ $2X + 3Y = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$, $3X + 2Y = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$ નો ઉકેલ મેળવી 2×2 શ્રેણિકો X અને Y શોધો.

20. જો $A = [3 \quad 5]$, $B = [7 \quad 3]$, હોય, તો $AC = BC$ થાય તેવો શૂન્યેતર શ્રેણિક C શોધો.

21. શ્રેણિકો A, B અને C નાં એવાં ઉદાહરણો આપો કે જેથી $AB = AC$ થાય, પરંતુ $B \neq C$ અને A શૂન્યેતર શ્રેણિક હોય.

22. જો $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ અને $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ હોય, તો ચકાસો કે,

(i) $(AB)C = A(BC)$ (ii) $A(B + C) = AB + AC$.

23. જો $P = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix}$ અને $Q = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$ હોય, તો સાબિત કરો કે

$$PQ = \begin{bmatrix} xa & 0 & 0 \\ 0 & yb & 0 \\ 0 & 0 & zc \end{bmatrix} = QP.$$

24. જો $[2 \quad 1 \quad 3] \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = A$ હોય, તો A શોધો.

25. જો $A = [2 \quad 1]$, $B = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 8 & 7 & 6 \end{bmatrix}$ અને $C = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ હોય, તો $A(B + C) = (AB + AC)$ ચકાસો.

26. જો $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ હોય, તો $A^2 + A = A(A + I)$ ચકાસો, જ્યાં I એ 3×3 એકમ શ્રેણિક છે.

27. જો $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -4 \end{bmatrix}$ અને $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ હોય, તો

(i) $(A')' = A$

(ii) $(AB)' = B'A'$

(iii) $(kA)' = (kA')$ ચકાસો.

28. જો $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 4 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$ હોય, તો

(i) $(2A + B)' = 2A' + B'$

(ii) $(A - B)' = A' - B'$ ચકાસો.

29. કોઈ પણ શ્રેણિક A માટે સાબિત કરો કે $A'A$ અને AA' સંમિત શ્રેણિક છે.

30. 3×3 કક્ષાવાળા ચોરસ શ્રેણિકો A અને B માટે $(AB)^2 = A^2B^2$ થઈ શકે ? કારણ આપો.

31. $AB = BA$ થાય તેવા ચોરસ શ્રેણિકો A અને B હોય, તો $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ સાબિત કરો.

32. જો $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ અને $a = 4$, $b = -2$ હોય, તો સાબિત કરો કે,

(a) $A + (B + C) = (A + B) + C$

(b) $A(BC) = (AB)C$

(c) $(a + b)B = aB + bB$

(d) $a(C-A) = aC - aA$

(e) $(A^T)^T = A$

(f) $(bA)^T = b\,A^T$

(g) $(AB)^T = B^T A^T$

(h) $(A - B)C = AC - BC$

(i) $(A - B)^T = A^T - B^T$

33. જો $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ હોય, તો $A^2 = \begin{bmatrix} \cos2\theta & \sin2\theta \\ -\sin2\theta & \cos2\theta \end{bmatrix}$ સાબિત કરો.

34. જો $A = \begin{bmatrix} 0 & -x \\ x & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ અને $x^2 = -1$ હોય, તો $(A + B)^2 = A^2 + B^2$ સાબિત કરો.

35. જો $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{bmatrix}$ હોય, તો ચકાસો કે, $A^2 = I$.

36. જો $n \in \mathbf{N}$ હોય, તો કોઈ પણ ચોરસ શ્રેણિક A માટે ગાણિતિક અનુમાનના સિદ્ધાંતના ઉપયોગથી $(A')^n = (A^n)'$ સાબિત કરો.

37. જો શક્ય હોય, તો હાર સંક્ષેપન પદ્ધતિથી નીચેના શ્રેણિકોના વ્યસ્ત શ્રેણિક શોધો :

(i) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 7 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$

38. જો $\begin{bmatrix} xy & 4 \\ z+6 & x+y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & w \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$ હોય, તો x, y, z અને w નાં મૂલ્ય શોધો.

39. જો $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 12 \end{bmatrix}$ અને $B = \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$ હોય, તો 3A + 5B + 2C શૂન્ય શ્રેણિક બને તેવો શ્રેણિક C મેળવો.

40. જો $A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$ હોય, તો $A^2 - 5A - 14I$ શોધો. તે પરથી A^3 મેળવો.

41. જો $3\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 6 \\ -1 & 2d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & a+b \\ c+d & 3 \end{bmatrix}$ હોય, તો a, b, c અને d નાં મૂલ્ય શોધો.

42. જો $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} -1 & -8 & -10 \\ 1 & -2 & -5 \\ 9 & 22 & 15 \end{bmatrix}$ હોય, તો શ્રેણિક A શોધો.

43. જો $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ હોય, તો $A^2 + 2A + 7I$ શોધો.

44. જો $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ અને $A^{-1} = A'$ હોય, તો α નું મૂલ્ય શોધો.

45. જો શ્રેણિક $\begin{bmatrix} 0 & a & 3 \\ 2 & b & -1 \\ c & 1 & 0 \end{bmatrix}$ વિસંમિત શ્રેણિક હોય, તો a, b અને c શોધો.

46. જો $P(x) = \begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix}$ હોય, તો સાબિત કરો કે,

$P(x) \cdot P(y) = P(x + y) = P(y) \cdot P(x)$.

47. જો $A^2 = A$ થાય, તેવો ચોરસ શ્રેણિક A હોય, તો $(I + A)^3 = 7A + I$ સાબિત કરો.

48. જો A અને B સમાન કક્ષાવાળા ચોરસ શ્રેણિક તથા B વિસંમિત શ્રેણિક હોય, તો સાબિત કરો કે A′BA વિસંમિત શ્રેણિક છે.

વિસ્તૃત જવાબી પ્રશ્નો (L.A.)

49. કોઈ પણ બે ચોરસ શ્રેણિક માટે AB = BA હોય, તો ગાણિતિક અનુમાનના સિદ્ધાંતથી $(AB)^n = A^n B^n$ સાબિત કરો.

50. જો $A=\begin{bmatrix}0 & 2y & z\\ x & y & -z\\ x & -y & z\end{bmatrix}$ એ $A' = A^{-1}$ નું સમાધાન કરે, તો x, y, z શોધો.

51. જો શક્ય હોય, તો હાર સંક્ષેપન પદ્ધતિનો ઉપયોગ કરી નીચેના શ્રેણિકોના વ્યસ્ત શ્રેણિક શોધો :

(i) $\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\ -5 & 3 & 1\\ -3 & 2 & 3\end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix}2 & 3 & -3\\ -1 & -2 & 2\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix}2 & 0 & -1\\ 5 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 3\end{bmatrix}$

52. શ્રેણિક $\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\\ 1 & -1 & 2\\ 4 & 1 & 2\end{bmatrix}$ ને એક સંમિત અને એક વિસંમિત શ્રેણિકના સરવાળા સ્વરૂપમાં દર્શાવો.

હેતુલક્ષી પ્રશ્નો

નીચેનાં ક્રમાંક 53 થી 67 વાળા વિધાન સત્ય બને તે રીતે ચાર વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી ઉત્તર આપો :

53. શ્રેણિક $P = \begin{bmatrix}0 & 0 & 4\\ 0 & 4 & 0\\ 4 & 0 & 0\end{bmatrix}$ એ .... છે.

(A) ચોરસ શ્રેણિક (B) વિકર્ણ શ્રેણિક

(C) એકમ શ્રેણિક (D) $m \times n$ શ્રેણિક છે, જ્યાં $m \neq n$

54. પ્રત્યેક ઘટક 2 અથવા 0 હોય તેવા 3×3 કક્ષાવાળા શક્ય શ્રેણિકોની સંખ્યા .... છે.

(A) 9 (B) 27 (C) 81 (D) 512

55. જો $\begin{bmatrix}2x+y & 4x\\ 5x-7 & 4x\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7 & 7y-13\\ y & x+6\end{bmatrix}$ હોય, તો x; y ની કિંમત શોધો.

(A) $x = 3$, $y = 1$ (B) $x = 2$, $y = 3$ (C) $x = 2$, $y = 4$ (D) $x = 3$, $y = 3$

56. જો $A = \frac{1}{\pi}\begin{bmatrix}sin^{-1}(x\pi) & tan^{-1}\left(\frac{x}{\pi}\right)\\ sin^{-1}\left(\frac{x}{\pi}\right) & cot^{-1}(\pi x)\end{bmatrix}$, $B = \frac{1}{\pi}\begin{bmatrix}-cos^{-1}(x\pi) & tan^{-1}\left(\frac{x}{\pi}\right)\\ sin^{-1}\left(\frac{x}{\pi}\right) & -tan^{-1}(\pi x)\end{bmatrix}$ હોય, તો $A - B =$ ....

(A) I (B) O (C) 2I (D) $\frac{1}{2}I$

57. જો A અને B અનુક્રમે $3 \times m$ અને $3 \times n$ કક્ષાવાળા શ્રેણિક હોય તથા $m = n$ હોય, તો શ્રેણિક $(5A - 2B)$ ની કક્ષા .... થાય.

(A) $m \times 3$ (B) 3×3 (C) $m \times n$ (D) $3 \times n$

58. જો $A = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ હોય, તો $A^2 =$ ....

(A) $\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

59. જો શ્રેણિક $A = [a_{ij}]_{2 \times 2}$, $i \neq j$ માટે $a_{ij} = 1$ અને $i = j$ માટે $a_{ij} = 0$ હોય, તો $A^2 =$ ....

(A) I (B) A (C) 0 (D) આપેલ પૈકી એક પણ નહિ.

60. શ્રેણિક $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ એ .... છે.

(A) એકમ શ્રેણિક (B) સંમિત શ્રેણિક (C) વિસંમિત શ્રેણિક (D) આપેલ પૈકી એક પણ નહિ.

61. શ્રેણિક $\begin{bmatrix} 0 & -5 & 8 \\ 5 & 0 & 12 \\ -8 & -12 & 0 \end{bmatrix}$ એ .... છે.

(A) વિકર્ણ શ્રેણિક (B) સંમિત શ્રેણિક (C) વિસંમિત શ્રેણિક (D) અદિશ શ્રેણિક

62. જો $m \times n$ કક્ષાવાળા શ્રેણિક A અને કોઈક શ્રેણિક B માટે AB' અને $B'A$ બંને વ્યાખ્યાયિત હોય, તો B ની કક્ષા .... છે.

(A) $m \times m$ (B) $n \times n$ (C) $n \times m$ (D) $m \times n$

63. જો A અને B સમાન કક્ષાવાળા શ્રેણિકો હોય, તો $(AB'-BA')$ એ .... છે.

(A) વિસંમિત શ્રેણિક (B) શૂન્ય શ્રેણિક (C) સંમિત શ્રેણિક (D) એકમ શ્રેણિક

64. જો $A^2 = I$ થાય તેવો ચોરસ શ્રેણિક A હોય, તો $(A - I)^3 + (A + I)^3 - 7A =$ ....

(A) A (B) I – A (C) I + A (D) 3A

65. કોઈ પણ જો શ્રેણિકો A અને B માટે ....

(A) AB = BA (B) $AB \neq BA$ (C) AB = O (D) આપેલ પૈકી એક પણ નહિ.

66. શ્રેણિક સમીકરણ $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ માં સ્તંભ સંક્ષેપન ક્રિયા $C_2 \to C_2 - 2C_1$ નો ઉપયોગ કરતાં .... મળે.

(A) $\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

67. શ્રેણિક સમીકરણ $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ માં હાર સંક્ષેપન ક્રિયા $R_1 \to R_1 - 3R_2$ નો ઉપયોગ કરતાં .... મળે.

(A) $\begin{bmatrix} -5 & -7 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -7 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} -5 & -7 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} -5 & -7 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -5 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

નીચેનાં ક્રમાંક 68 થી 81 વાળા વિધાન સત્ય બને તે રીતે ખાલી જગ્યા પૂરો :

68. .... શ્રેણિક સંમિત અને વિસંમિત શ્રેણિક છે.

69. બે વિસંમિત શ્રેણિકનો સરવાળો હંમેશાં .... શ્રેણિક હોય છે.

70. શ્રેણિકને .... વડે ગુણવાથી તેનો વિરોધી શ્રેણિક મળે છે.

71. કોઈ પણ શ્રેણિકને .... અદિશ વડે ગુણવાથી શૂન્ય શ્રેણિક મળે છે.

72. જે શ્રેણિક ચોરસ શ્રેણિક નથી, તે શ્રેણિકને .... શ્રેણિક કહે છે.

73. શ્રેણિકોનો ગુણાકાર એ સરવાળા પરત્વે .... ના નિયમનું પાલન કરે છે.

74. જો A સંમિત શ્રેણિક હોય, તો A^3 .... શ્રેણિક છે.

75. જો A વિસંમિત શ્રેણિક હોય, તો A^2 .... શ્રેણિક છે.

76. જો A અને B સમાન કક્ષાવાળા ચોરસ શ્રેણિક હોય, તો

(i) $(AB)'$ = ...

(ii) $(kA)'$ = ... (k કોઈ પણ અચળ છે.)

(iii) $[k\ (A - B)]'$ = ...

77. જો A વિસંમિત શ્રેણિક હોય, તો kA .... છે. (k કોઈ પણ અચળ છે.)

78. જો A અને B સંમિત શ્રેણિક હોય, તો

(i) AB − BA ....

(ii) BA − 2AB ....

79. જો A સંમિત હોય, તો $B'AB$ .... છે.

80. A અને B સમાન કક્ષાવાળા સંમિત શ્રેણિક છે. જો .... તો અને તો જ AB સંમિત છે.

81. હાર સંક્ષેપનથી A^{-1} શોધવા માટે એક અથવા વધારે હાર-પ્રક્રિયાઓ પ્રયોજતાં, આપણને એક અથવા વધારે હારમાં બધાં જ શૂન્ય મળે, તો A^{-1} ....

નીચેના ક્રમાંક 82 થી 101 વાળાં વિધાનો સત્ય છે કે અસત્ય તે જણાવો :

82. શ્રેણિક એ સંખ્યા દર્શાવે છે.

83. કોઈ પણ કક્ષાવાળા શ્રેણિકનો સરવાળો શક્ય છે.

84. જો બે શ્રેણિકોની હારની સંખ્યા સમાન હોય તથા સ્તંભની સંખ્યા સમાન હોય, તો તે બે શ્રેણિક સમાન છે.

85. ભિન્ન કક્ષાવાળા શ્રેણિકનો તફાવત શક્ય નથી.

86. શ્રેણિકો સરવાળા વિશેના જૂથના નિયમ તેમજ ક્રમના નિયમનું પાલન કરે છે.

87. શ્રેણિક ગુણાકાર ક્રમના નિયમનું પાલન કરે છે.

88. જે ચોરસ શ્રેણિકના બધા જ ઘટકો 1 હોય તે શ્રેણિકને એકમ શ્રેણિક કહે છે.

89. જો બે શ્રેણિકો A અને B ની કક્ષા સમાન હોય, તો A + B = B + A.

90. જો બે શ્રેણિકો A અને B ની કક્ષા સમાન હોય, તો A − B = B − A.

91. જો શ્રેણિક AB = O, તો A = O અથવા B = O અથવા A અને B બંને શૂન્ય શ્રેણિક છે.

92. સ્તંભ શ્રેણિકનો પરિવર્ત શ્રેણિક સ્તંભ શ્રેણિક છે.

93. જો A અને B સમાન કક્ષાવાળા ચોરસ શ્રેણિક હોય, તો AB = BA.

94. જો સમાન કક્ષાવાળા ત્રણેય શ્રેણિકો સંમિત શ્રેણિક હોય, તો તેમના સરવાળાનો શ્રેણિક સંમિત શ્રેણિક છે.

95. સમાન કક્ષાવાળા કોઈ પણ બે શ્રેણિક માટે $(AB)' = A'B'$.

96. ચોરસ શ્રેણિક ન હોય તેવા બે શ્રેણિકો A અને B માટે જો $(AB)' = B'A'$ હોય, તો A ની હારની સંખ્યા એ B ના સ્તંભની સંખ્યાને સમાન છે અને A ના સ્તંભની સંખ્યા એ B ની હારની સંખ્યાને સમાન છે.

97. જો A, B અને C સમાન કક્ષાવાળા ચોરસ શ્રેણિક હોય, તો AB = AC પરથી હંમેશાં B = C મળે.

98. કોઈ પણ શ્રેણિક A માટે AA' હંમેશાં સંમિત શ્રેણિક છે.

99. જો $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ અને $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ હોય, તો AB અને BA વ્યાખ્યાયિત તથા સમાન છે.

100. જો A વિસંમિત શ્રેણિક હોય, તો A^2 સંમિત શ્રેણિક છે.

101. A અને B વ્યસ્તસંપન્ન શ્રેણિક હોય તથા તે ગુણાકાર પરત્વે ક્રમના ગુણધર્મનું પાલન કરતા હોય, તો $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.