கணிதம்

வகுப்பு VII

பகுதி - 2

Mathematics
Standard VII
Part - 2
Tamil Medium

கேரள அரசு
கல்வித்துறை

மாநிலக் கல்வியாராய்ச்சி மற்றும் பயிற்சி நிறுவனம் (SCERT), கேரளம்
2016

KT-623/1 / Maths 7 (T) Vol-2

தேசிய கீதம்

ஜன கண மன அதிநாயக ஜய ஹே
பாரத பாக்ய விதாதா
பஞ்சாப சிந்து குஜராத மராட்டா
திராவிட உத்கல பங்கா
விந்திய ஹிமாசல யமுனா கங்கா
உச்சல ஜலதி தரங்கா
தவ சுப நாமே ஜாகே
தவ சுப ஆசிஸ மாகே
காகே தவ ஜய காதா
ஜன கண மங்கள தாயக ஜய ஹே
பாரத பாக்ய விதாதா
ஜய ஹே! ஜய ஹே! ஜய ஹே!
ஜய ஜய ஜய ஜய ஹே!

- மகாகவி இரவீந்திரநாத் தாகூர்

உறுதிமொழி

இந்தியா எனது நாடு. இந்தியர் அனைவரும் எனது உடன் பிறந்தோர்.

எனது நாட்டை நான் உயிரினும் மேலாக மதிக்கிறேன். அதன் வளம் வாய்ந்த பல்வகைப் பரம்பரைப் புகழில் நான் பெருமை கொள்கிறேன். அதற்குத்தக நான் என்றும் நடந்துகொள்வேன்.

என் பெற்றோர், ஆசிரியர், மூத்தோர் இவர்களை நான் நன்கு மதிப்பேன்.

எல்லாருடனும் நான் பண்புடன் பழகுவேன். எனது நாட்டினிடமும் நாட்டு மக்களிடமும் பக்தியுடன் இருப்பேன் என உறுதி கூறுகிறேன். அவர்களின் நலத்திலும் வளத்திலும் தான் எனது இன்பமும் அடங்கியிருக்கிறது.

Prepared by

State Council of Educational Research and Training (SCERT)
Poojappura, Thiruvananthapuram 695 012, Kerala

Website : www.scertkerala.gov.in
E-mail : scertkerala@gmail.com
Phone : 0471-2341883, Fax : 0471-2341869
Typesetting and Layout : SCERT
First Edition : 2014, Reprint : 2016
Printed at : KBPS, Kakkanad, Kochi- 30
© Department of Education, Government of Kerala

அன்பான குழந்தைகளே,

கணிதத்தில் அடிப்படையான சிலவற்றை
நாம் புரிந்து கொண்டோம்.
இனி நாம் அதன் உயர்ந்த நிலைகளை நோக்கிச்
செல்கிறோம்.
எண் சிறப்புகள் நிறைந்த எண்கணித உலகத்திற்கு,
வடிவியலினுடையதும்,
இயற்கணிதத்தினுடையதுமான புதிய நிலைகளுக்கு,
கணிதத்தின் உத்தியைப் பகுத்தறிவதற்கும் புதிய
கண்டுபிடிப்புக்களைச் செயல்படுத்துவதற்கும்.
தன்னம்பிக்கையுடன் முன்னோக்கிச் செல்வோம்.

அன்பு கலந்த வாழ்த்துகளுடன்,

முனைவர் ஜெ. பிரசாத்
இயக்குநர்
எஸ்.சி.இ.ஆர்.டி.

Text Book Committee

Members

Anil Kumar .M.K, HSA
SKMJHSS Vayanad.

Arulal .M.J, UPSA
AUPS. Eramangalam, Kozhikode.

Kunju Abdullah. M. UPSA
Muyipoth, MUPS. Kozhikode.

Thulaseedharan Pillai .K.G
PD Teacher
GHSS Karucon, Kollam .

Balagangadharan. V.K,
GMHSS Calicut University Campus,
Malappuram.

Mani Kandan. K.O.V, UPSA
Pattiyamma AUPS, Kannur.

Rajesh .K.P
Lect., DIET Kannur.

Ramanujam. R, HSST
MNKMGHSS Pulappatt, Palakkad.

Sunil Kumar. V.P, HSA
Janatha HSS Thembammoode,
Thiruvananthapuram.

Experts

Dr.Krishnan.E
Prof.(Rtd) University College,
Thiruvananthapuram

Dr. Vijaya Kumar.A
Prof. Cochin University, Cochin.

Artists

Dhanesan.M.V,
AVSGHSS Karivalloor, Kannur.

Academic Co-Ordinators

Sujith Kumar.G
Research Officer, SCERT

Dr.Lidson Raj.J
Research Officer, SCERT

Tamil Version

Domanatha Sarath Kame, HSA
GHSS Anakkara, Idukki.

Krishnakumar.S, HSA
CPM GHSS Peermade.

Kumara Dass, H.M.(Rtd)
GHSS Kozhipara.

Dr.M.Nainar, Reader (Rtd)
University College, Thiruvananthapuram.

Academic Co-Ordinator

Dr.Sahayadhas.D
Research Officer, SCERT

State Council of Educational Research and Training (SCERT)
Vidhya Bhavan, Poojappura, Thiruvananthapuram - 695 012

உள்ளடக்கம்

8. முக்கோணம் உருவாக்குவோம் 103

9. விகிதம் 115

10. பண வாணிபம் 129

11. எண்களும் இயற்கணிதமும் 145

12. சதுரங்களும்
செங்கோண முக்கோணங்களும் 157

13. புதிய எண்கள் 177

14. வட்டப்படங்கள் 187

இந்தப் புத்தகத்தில் நம் வசதிக்காகச் சில அடையாளங்கள் பயன்படுத்தப்பட்டுள்ளன.

ICT உபயோகம்

கணிதச் செயல்பாடுகளைச் செய்து பார்ப்போம்

செயல்திட்டம்

மீள்பார்வை

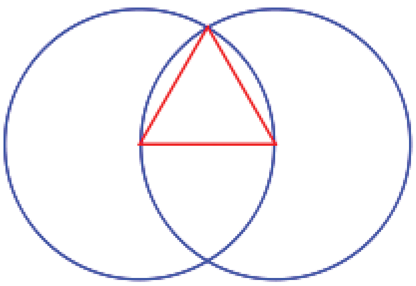
8

முக்கோணம் உருவாக்குவோம்

வட்டமும் முக்கோணமும்

கி.மு.மூன்றாம் நூற்றாண்டில் கிரேக்க நாட்டில் வாழ்ந்த யூக்கிளிட் என்பவர் வடிவியலின் தந்தையாகக் கருதப்படுகிறார். அவர் எழுதிய 'எலமென்ட்ஸ்' என்ற நூல் தான் சிறப்பு மிக்க முதல் வடிவியல் நூல்.

''குறிப்பிட்ட நீளமுள்ள பக்கத்திற்குச் சமபக்க முக்கோணம் வரைவதற்கு'' யூக்கிளிட்டின் வழிமுறை இவ்வாறாகும்:



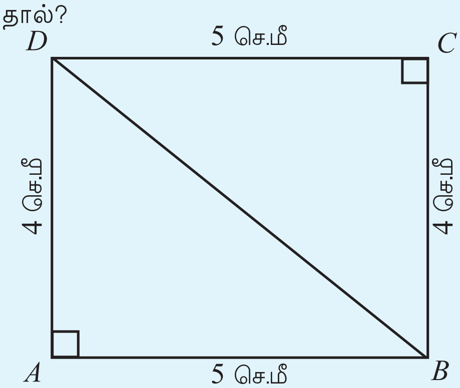
ஐரோப்பாவில் இடைக்காலத்தில் தேவாலயங்களில் இரண்டு வட்டங்கள் ஒன்றுக்கொன்று வெட்டும்படியான வடிவங்களை அதிகமாகப் பயன்படுத்தினர்.

செவ்வகத்தில் முக்கோணங்கள்

மட்டமானியைப் பயன்படுத்திச் செவ்வகம் வரைந்தது நினைவிருக்கிறதல்லவா.

$AB = 5$ செ.மீ, $BC = 4$ செ.மீட்டரும் உடைய $ABCD$ என்ற செவ்வகம் வரையவும்.

இந்தச் செவ்வகத்தின் ஏதேனும் எதிர் மூலைகளை இணைத்தால்?



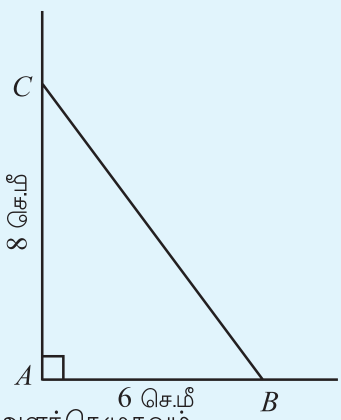
இரண்டு செங்கோணமுக்கோணங்கள் கிடைத்ததல்லவா. அவை எவையெல்லாம்? ஒவ்வொரு செங்கோண முக்கோணத் தின் செங்குத்துப் பக்கங்களின் நீளம் என்ன?

மேலும் செங்குத்துப் பக்கங்கள் 6 செ.மீ, 8 செ.மீ நீளமுடைய ஒரு செங்கோண முக்கோணம் வரைவோம்.

முதலில் இரண்டு செங்குத்துக் கோடுகள் வரையவும். அவை சந்திக்கும் புள்ளிக்கு A என்று பெயர் கொடுக்கவும்.

A யிலிருந்து 6 செ.மீ தூரத்தில் ஒரு கோட்டில் B யும், 8 செ.மீ தூரத்தில் அடுத்த கோட்டில் C யும் அடையாளப்படுத்தவும்.

B, C எனும் புள்ளிகளை இணைக்கும்போது நமக்குத் தேவையான முக்கோணம் கிடைத்தல்லவா.



BC ன் நீளம் அளந்தெழுதவும்.

இது போன்று செங்குத்துப் பக்கங்கள் 5 செ.மீ, 7 செ.மீ நீளமுடைய ஒரு செங்கோண முக்கோணம் வரைந்து பார்க்கவும்.

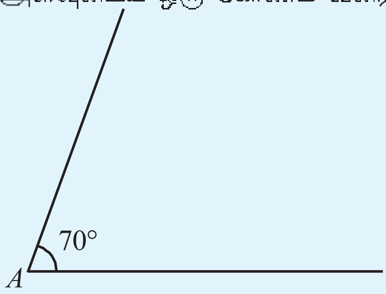
வேறொரு முக்கோணம்

இப்பொழுது வரைந்த இரண்டு முக்கோணங்களிலும் இரண்டு பக்கங்களின் நீளமும், அந்தப் பக்கங்களுக்கிடையேயுள்ள கோணம் செங்கோணம் என்றும் கொடுக்கப்பட்டிருந்தது. கோணம் செங்கோணமாக இல்லாவிடில் எப்படி வரையலாம்?

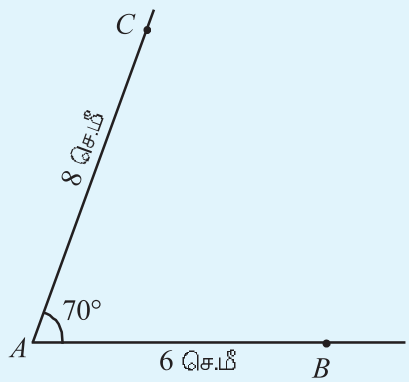
எடுத்துக்காட்டாக,

$AB = 6$ செ.மீ. $AC = 8$ செ.மீ, $\angle A = 70°$ எனில் ABC என்ற முக்கோணம் வரையவும்.

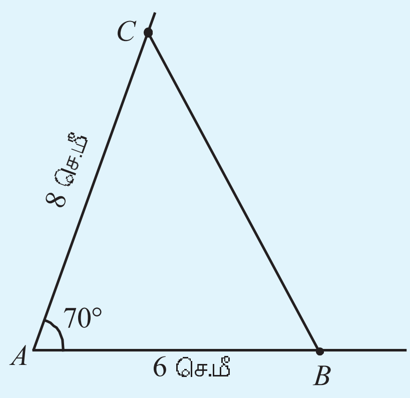
முதலில் $70°$ அளவுடைய ஒரு கோணம் வரையவும்:



இனி ஒரு கோட்டில் A யிலிருந்து 6 செ.மீ தூரத்தில் B என்ற புள்ளியும் அடுத்த கோட்டில் 8 செ.மீ. தூரத்தில் C என்ற புள்ளியும் அடையாளப்படுத்தவும்.

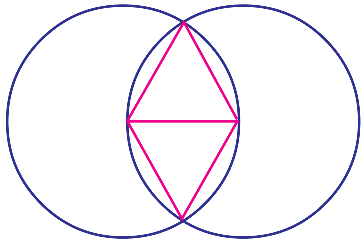


மேலும் B, C என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும்போது கொடுக்கப்பட்டுள்ள அளவுகளைக் கொண்ட முக்கோணம் கிடைக்கும்.

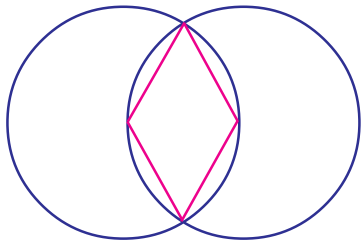


புதிய வடிவங்கள்

சமபக்க முக்கோணம் வரைவதற்குப் பயன் படுத்திய படத்தில், மேலும் கீழுமாக இரண்டு முக்கோணங்கள் வரைய வேண்டும்.

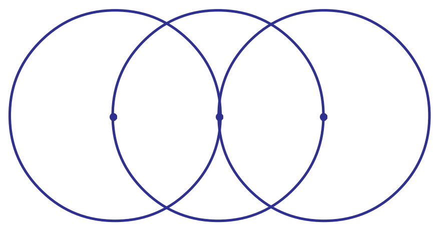


இதன் நடுவிலுள்ள கோட்டை நீக்கினால்?

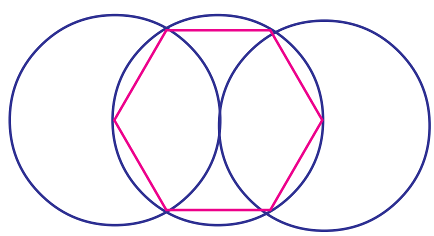


இந்த நாற்கரத்திற்கு என்னென்ன சிறப்புகள் உள்ளன?

இதுபோன்று இருவட்டங்களுக்குப் பதிலாக மூன்று வட்டங்கள் வரைந்தால்?



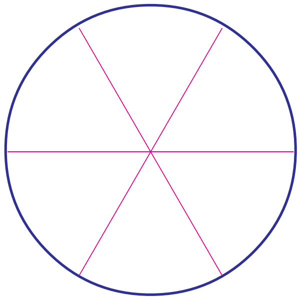
வட்ட மையங்களையும், வட்டம் ஒன்றை யொன்று வெட்டும் புள்ளிகளையும் இணைக்கும்போது இதுபோன்ற ஒருவடிவம் கிடைப்பதைப் பாருங்கள்:



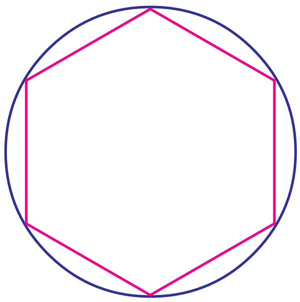
இந்த வடிவத்தின் பெயரென்ன?
பக்கங்களின் நீளத்திற்கு என்ன சிறப்பியல்பு உள்ளது?

வட்டத்தின் உள்ளே

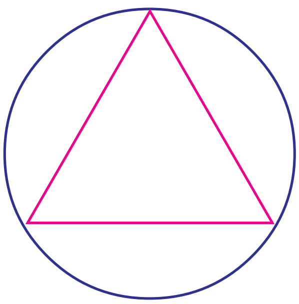
ஒரு வட்டத்தைக் கணிதக் கருவிப் பெட்டியிலுள்ள ஒரு மட்டமானியின் மூலையைப் பயன்படுத்தி ஆறு சம பாகங்களாக்கத் தெரியுமல்லவா:



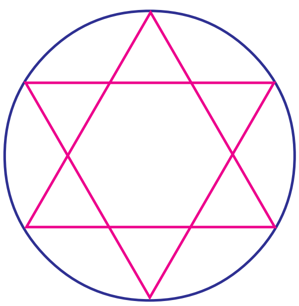
இந்தக் கோடுகளின் முனைகளையெல்லாம் இணைத்தால் கீழே இருப்பது போன்ற படம் கிடைக்கும்.



ஒன்றுவிட்ட புள்ளிகளை இணைத்தால் ?



விடுபட்ட புள்ளிகளை மட்டும் இணைத்தால் இது போன்ற நட்சத்திரம் கிடைக்கும்.



இதுபோன்று கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள அளவுகளில் முக்கோணம் வரையவும்.

- $MN = 6$ செ.மீ, $\angle M = 70°$, $ML = 5$ செ.மீ.
- $PQ = 7$ செ.மீ, $QR = 7$ செ.மீ, $\angle Q = 50°$.
- $XY = 6.5$ செ.மீ, $\angle Y = 110°$, $YZ = 7.5$ செ.மீ.
- $CD = 5$ செ.மீ, $DE = 5$ செ.மீ, $\angle D = 60°$.

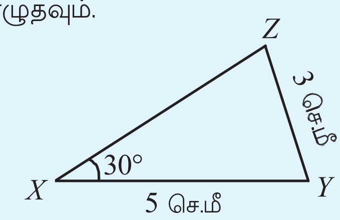
வேறொரு கோணம்

இரண்டு பக்கங்களின் நீளத்தையும், அவற்றிற்கிடையேயுள்ள கோணத்தின் அளவையும் பயன்படுத்தித் தான் நாம் இதுவரை முக்கோணம் வரைந்தோம். வேறொரு கோணத்தின் அளவு தெரிந்தால் முக்கோணம் வரைய முடியுமா?

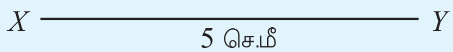
எடுத்துக்காட்டாக,

$XY = 5$ செ.மீ, $\angle X = 30°$, $YZ = 3$ செ.மீ உடைய XYZ என்ற முக்கோணம் வரையவும்.

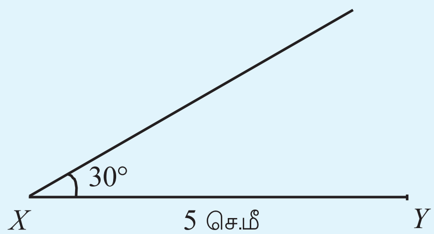
முதலில் முக்கோணவடிவில் ஒரு உதவிப்படம் வரைந்து அளவுகள் எழுதவும்.



சரியான அளவில் வரைவதற்கு முதலில் 5 செ.மீ நீளத்தில் XY வரையவும்.

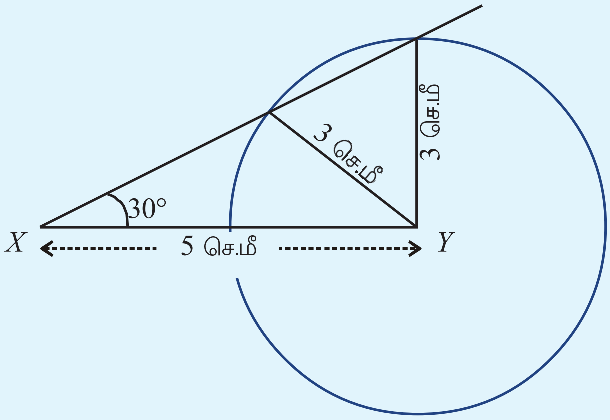


இனி X என்ற புள்ளியில் 30° அளவுடைய ஒரு கோணம் வரையவும்.



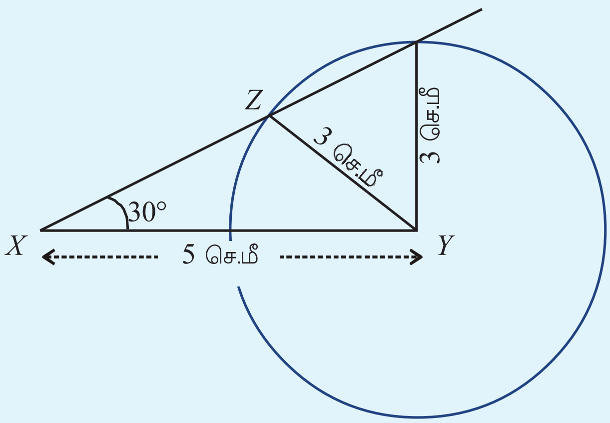
இதைத் தொடர்ந்து Z ன் இடத்தைக் கண்டுபிடிக்க வேண்டும். Y யிலிருந்து 3 செ.மீ தூரத்திலுள்ள புள்ளி Z; அது மேலேயுள்ள கோட்டிலும் இருக்க வேண்டும்.

Y யிலிருந்து 3 செ,மீ தூரத்திலுள்ள எல்லாப் புள்ளிகளும், Y ஐ மையமாகக் கொண்டு 3 செ,மீ ஆரத்திலுள்ள வட்டத்திலல்லவா. இந்த வட்டம் வரைவோம்.

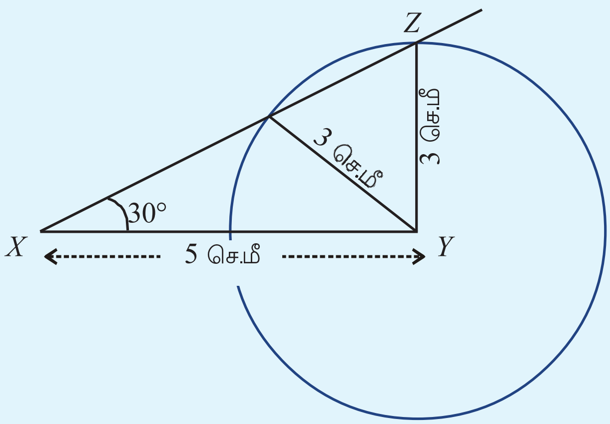


மேலே உள்ள கோட்டில் வட்டத்திலுள்ள எத்தனை புள்ளிகள் உள்ளன?

அவற்றில் ஒன்றை மட்டும் Z என எடுத்தால் நாம் நினைத்த ஒரு முக்கோணம் கிடைக்கும்.



இரண்டாவது புள்ளியை Z என எடுத்தால்?



பக்கங்களும் கோணங்களும்

இரண்டு பக்கங்களின் நீளங்கள் 3செ.மீ, 6செ.மீ, அவற்றிற்கிடையேயுள்ள கோணம் 60^0 எனும் அளவுகளில் ஒரு முக்கோணம் வரையவும்.

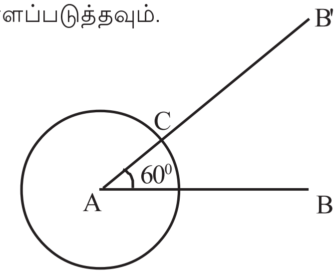
இதன் பிற இரு கோணங்களை அளந்து பார்க்கவும்.

மேலும் பக்கங்களின் நீளம் 4 செ.மீ-உம், 8 செ.மீ-உம் எனில் (கோணம் 60^0 தான்) வரைந்து பார்க்கவும். கோணங்களின் அளவுகளில் மாற்றம் உள்ளனதா?

இங்கு ஒவ்வொரு முக்கோணத்திலும் பக்கங்களிற்கிடையேயுள்ள தொடர்பு என்ன?

Min = 0, Max 10 ஆகும் விதத்தில் ஒரு சிலைடர் a உருவாக்கவும். நீளம் '2a' வரும் விதத்தில் AB எனும் ஒரு கோடு வரையவும். (Segment with given length கருவியைப் பயன்படுத்தலாம்)

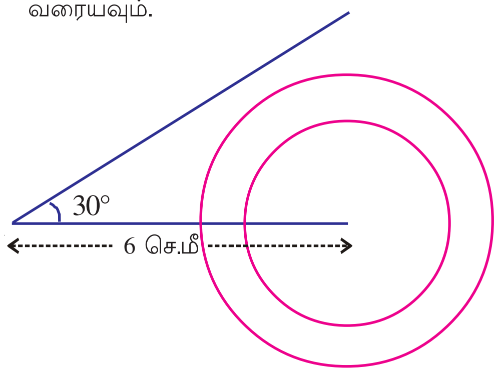
Angle with given size கருவியைப் பயன்படுத்தி AB யுடன் 60^0 சாய்வாக AB' என்ற ஒரு கோடு வரையவும். Circle with Centre and Radius கருவியைப் பயன்படுத்தி A இல் கிளிக் செய்யும் போது வரும் சாளரத்தில் வட்டத்தின் ஆரம் 'a' எனப் பெயர் கொடுக்கவும். வட்டம் சாய்வானக் கோட்டுடன் வெட்டும் புள்ளியை C என அடையாளப்படுத்தவும்.



இனி, படத்திலுள்ள கோடுகளையும் கோணத்தையும், வட்டத்தையும் மறைத்து வைப்போம். Polygon கருவியைப் பயன்படுத்தி முக்கோணம் ABC ஐ முழுமையாக்கவும். Distance or Length கருவியைப் பயன்படுத்தி முக்கோணத்தின் பக்கங்களிலும், Angle கருவியைப் பயன்படுத்தி முக்கோணத்தின் உள்ளேயும் கிளிக் செய்யும் போது பக்கங்களின் நீளமும், கோண அளவுகளும் காணமுடியும். இனி சிலைடரை மாற்றிப் பார்க்கவும். பக்கங்கள் எவ்வாறு மாறுகின்றன? கோணங்கள் மாறுகின்றனவா?

கோணமும் பக்கமும்

6 செ.மீ நீளத்தில் ஒரு கோடு வரைந்து அதன் ஒரு முனையில் 30° சாய்வாக வேறொரு கோடு வரையவும். மறுமுனையை மையமாகக் கொண்டு பல்வேறு ஆரங்களில் வட்டங்கள் வரையவும்.



வட்டம் மேலேயுள்ள கோட்டைத் தொட வேண்டுமானால் ஆரம் குறைந்தது எத்தனை செ.மீ., எடுக்க வேண்டும்?

எந்தெந்த எண்கள் ஆரமாகும் போது வட்டம் கோட்டை இரண்டு இடங்களில் வெட்டு கின்றது?

$AB = 6$ செ. மீட்டரும் $\angle B = 30^\circ$ உம் உடைய ABC என்ற முக்கோணம் வரைய வேண்டும். AC இன் நீளம் குறைந்தது எத்தனை செ.மீ ஆக இருக்க வேண்டும்?

AC இன் நீளம் எந்தெந்த எண்களுக்கு இடையில் இருக்கும்போது இந்த அளவுகளில் இரண்டு முக்கோணங்கள் கிடைக்கும்?

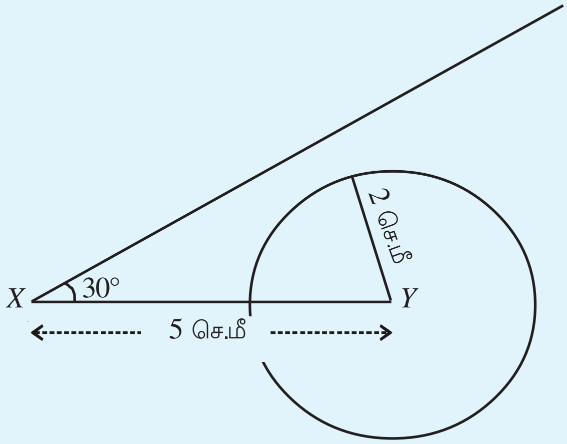
ஜியோஜிப்ராவின் உதவியுடன் இந்தச் செயல்பாட்டைச் செய்து பார்ப்போம். 6 அலகு நீளமுடைய AB என்ற கோடும் $\angle BAB' = 30^\circ$ கோணஅளவும் வரும் விதத்தில் AB' என்ற கோடும் வரையவும். ஒரு சிலைடர் 'a' உருவாக்கவும். Circle with centre and Radius கருவியைப் பயன்படுத்தி B இல் கிளிக் செய்யும்போது வரும் சாளரத்தில் வட்டத்தின் ஆரத்திற்கு a எனப் பெயரிடுக. சிலைடரின் மதிப்பை மாற்றிப் பார்க்கவும். எப்போ தெல்லாம் வட்டம் AB' என்ற கோட்டைத் தொடுகின்றது?

இந்தச் செயல்பாட்டில் YZ இன் நீளம் 4 செ.மீ என்று எடுப்போமா?

இப்பொழுதும் இரண்டு முக்கோணங்கள் கிடைக்கின்றனவா?

YZ இன் நீளம் 2.5 செ.மீ என எடுத்தால் எத்தனை முக்கோணங்கள் கிடைக்கும்?

2 செ.மீ என்று எடுத்துப் பார்ப்போமா?



இப்பொழுது முக்கோணம் வரைய முடியுமா?

YZ இன் நீளம் 6 செ.மீ என்று எடுத்தால் வரைய முடியுமா? எத்தனை முக்கோணங்கள் வரையலாம்?

இனி கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள அளவுகளில் முக்கோணம் வரைந்து பார்க்கவும்.

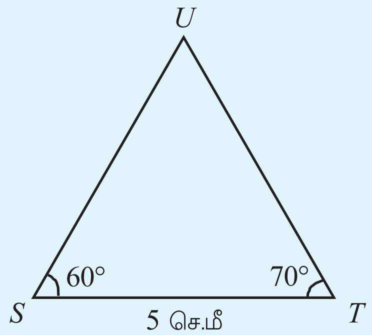
- $AB = 5$ செ.மீ, $BC = 6$ செ.மீ, $\angle A = 40^\circ$
- $PQ = 8$ செ.மீ, $PR = 7$ செ.மீ, $\angle Q = 50^\circ$
- $XY = 4$ செ.மீ, $YZ = 6$ செ.மீ, $\angle X = 70^\circ$

இரண்டு கோணங்கள்

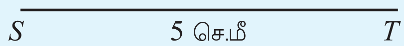
ஒரு பக்கத்தின் நீளமும் இரண்டு கோணங்களின் அளவும் கொடுக்கப்பட்டால் முக்கோணம் வரைய முடியுமா?

$ST = 5$ செ.மீ, $\angle S = 60^\circ$, $\angle T = 70^\circ$ என்னும் அளவுகளில் STU என்ற முக்கோணம் வரையவும்.

முதலில் ஒரு முக்கோணத்தின் உதவிப்படம் வரைந்து அளவுகளைக் குறிக்கவும்.

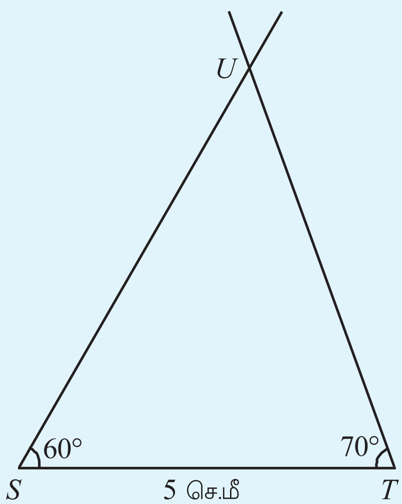


5 செ.மீ நீளமுள்ள ST வரையவும்.



இனி U ன் இடத்தைக் கண்டுபிடிக்க வேண்டும்.

S லிருந்து 60° சாய்வாகவும் T லிருந்து 70° சாய்வாகவும் உள்ள கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளிதான் U.

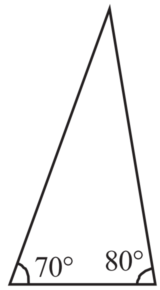


இனி கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள அளவுகளில் முக்கோணம் வரையலாமல்லவா?

- $YZ = 7$ செ.மீ, $\angle Y = 45°, \angle Z = 65°$
- $MN = 6.5$ செ.மீ, $\angle M = 60°, \angle N = 55°$
- $PQ = 4.5$ செ.மீ, $\angle P = 70°, \angle Q = 70°$
- $AB = 7$ செ.மீ, $\angle A = 60°, \angle B = 60°, \Delta ABC$ வரையவும். கோணம் $\angle C$ எவ்வளவு? BC, CA ஆகியவற்றின் நீளத்தை அளந்தெழுதவும். பிற பக்கங்கள், கோணங்களின் அளவுகளையும் அளந்தெழுதவும்.

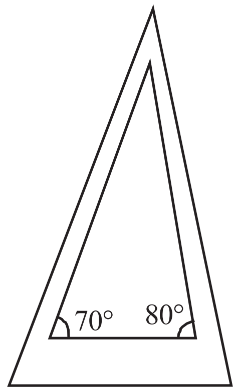
ஒத்த முக்கோணங்கள்

ஒரு கோட்டின் இரு முனைகளிலும் 70^0, 80^0 சாய்வாக வேறு இரு கோடுகள் வரைந்து ஒரு முக்கோணம் உருவாக்கவும்.



இதன் மூன்றாவது கோணம் எவ்வளவு?

இந்த முக்கோணத்தின் பக்கங்களுக்கு இணையாக மூன்று கோடுகள் வரைந்து மற்றொரு முக்கோணம் உருவாக்கவும்.



இந்த முக்கோணத்தின் கோணங்களை அளந்து பார்க்கவும். இதுபோன்று பல முக்கோணங்களை வரைந்து பார்க்கவும். கோணங்களில் மாற்றம் ஏற்படுகிறதா?

இச்செயல்பாட்டை ஜியோஜிப்ராவில் செய்து பார்ப்போம். Min = 0, Max = 2 ஆகுமாறு ஒரு சிலைடர் a உருவாக்கவும். Polygon கருவியைப் பயன்படுத்தி ஒரு முக்கோணம் வரையவும். இதனுள் D என்ற புள்ளியை அடையாளப் படுத்தவும். Dilate Object from Point by Factor கருவியைப் பயன்படுத்தி முக்கோணத்தின் உள்ளேயும் D யிலும் வரிசையாக கிளிக் செய்து தோன்றும் சாளரத்தில் Factor என்பதற்கு a எனப் பெயரிட்டு OK கொடுக்கவும். சிலைடரில் மதிப்பை மாற்றி பார்க்கவும். Angle கருவியைப் பயன்படுத்தி முக்கோணத்தினுள் கிளிக் செய்யும் போது கோணங்களின் அளவுகளைத் தெரிந்து கொள்ள முடியும். D யை முக்கோணத்தின் உச்சிகளுக்கு அருகில் நகர்த்திப் பார்க்கவும்.

மாறாத உறவு

AB = 6 அலகு, AC = 2 BC என்று அமையுமாறு ஒரு முக்கோணம் வரைய முடியுமா? இப்படிப்பட்ட முக்கோணங்களை ஜியோஜிப்ரா பயன்படுத்தி எவ்வாறு வரைவது எனப் பார்ப்போம்.

6 அலகு நீளமுள்ள AB என்ற ஒரு கோடு வரையவும். பொருத்தமான ஒரு minimum மதிப்பும் maximum மதிப்பும் கொடுத்து 'a' என்ற சிலைடர் உருவாக்கவும். B ஐ மையமாக வைத்து 'a' அலகு ஆரமுள்ள ஒரு வட்டமும், Aயை மையமாக வைத்து '2a' அலகு ஆரமுள்ள வேறொரு வட்டமும் வரையவும். இந்த இரண்டு வட்டங்களும் ஒன்றையொன்று வெட்டும் புள்ளிகளை C,D என அடையாளப் படுத்தவும். AC, BC என்ற கோடுகள் வரையவும். இனி வட்டங்களை மறைக்கவும். சிலைடரில் மதிப்பை மாற்றிப் பார்க்கவும். சிலைடரில் right click செய்து Animation கொடுத்தாலும் போதும். C என்ற புள்ளியில் right click செய்யும்போது வரும் சாளரத்தில் Trace on என்பதில் கிளிக் செய்து டிக் அடையாளம் கொடுக்கவும். இந்தப் புள்ளி நகரும் பாதையின் சிறப்பு என்ன? இதைப் போன்று AD, BD என்ற கோடுகள் வரைந்து D என்ற புள்ளிக்கும் trace கொடுத்துப் பார்க்கவும். சிலைடரின் increment குறைக்கும் போது இப்புள்ளிகளின் பாதை கொஞ்சம் கூடத் தெளிவாக இருக்கும். (இதற்காகச் சிலைடரில் right click செய்யலாம். Object Properties → Slider → increment)

AC = 2 BC என்பதற்குப் பதிலாக AC = 3 BC, 2 AC = 3 BC என்ற தொடர்புகளைப் பயன்படுத்தி முக்கோணங்கள் வரைந்து பார்க்கவும். C, D என்னும் புள்ளிகளின் நகரும் பாதையின் சிறப்பு என்ன? AC = BC ஆனால்?

முன்னர் வரைந்த முக்கோணத்தில் $\angle Q$ வின் அளவிற்குப் பதிலாக $\angle R$ இன் அளவு $70°$ என மாற்றினால்?

நாம் இதுவரை வரைந்த முக்கோணங்களில் ஒரு பக்கத்தின் நீளமும், அந்தப் பக்கத்தில் வரும் இரண்டு கோணங்களின் அளவுகளும் கொடுக்கப்பட்டிருந்தன.

$\angle P, \angle R$ என்பதன் அளவுகள்தான் தரப்பட்டுள்ளன.

$\angle P, \angle Q$ என்பதன் அளவுகள்தான் தேவைப்படுகின்றன.

$\angle Q$ ஐ எவ்வாறு கண்டுபிடிக்கலாம்?

$$\angle Q = 180° - (70° + 70°) = 40°$$

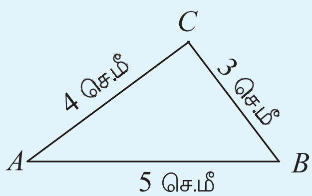
இனி முக்கோணம் வரையலாமல்லவா?

மூன்று பக்கங்கள்

மூன்று பக்கங்களின் நீளம் தரப்பட்டிருந்தாலும் முக்கோணம் வரையலாம்.

AB = 5 செ.மீ, BC = 3 செ.மீ, AC = 4 செ.மீ என்ற அளவுகளுடைய முக்கோணம் வரையவும்.

ஒரு உதவிப்படம் வரைந்து அளவுகளைக் குறிக்கவும்.



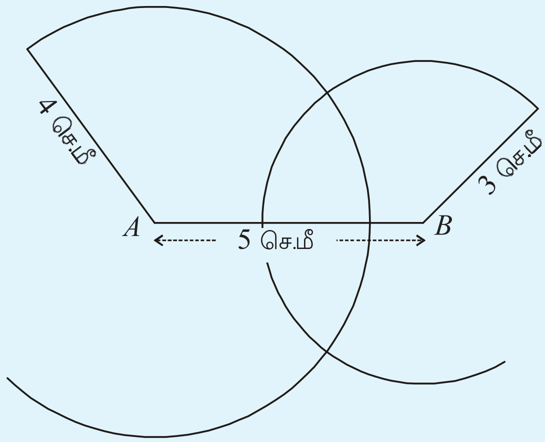
முதலில் 5 செ.மீ நீளமுள்ள AB வரையவும்.

இனி C ன் இடத்தைக் கண்டுபிடிக்க வேண்டும்.

A யிலிருந்து 4 செ.மீ தூரத்திலும் B யிலிருந்து 3 செ.மீ தூரத்திலும் உள்ள புள்ளியாகும் C.

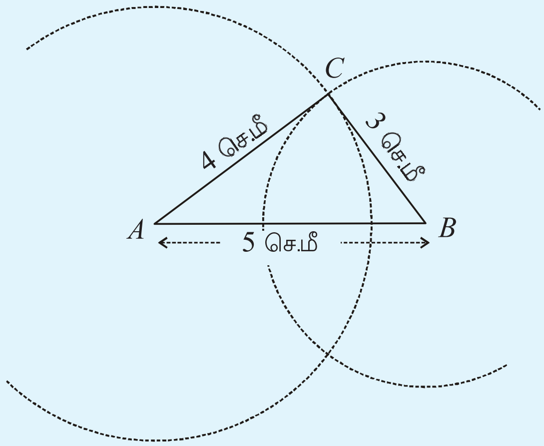
A யிலிருந்து 4 செ.மீ தூரத்திலுள்ள எல்லாப் புள்ளிகளும், A மையமான 4 செ.மீ ஆரத்திலுள்ள வட்டத்திலாகும்.

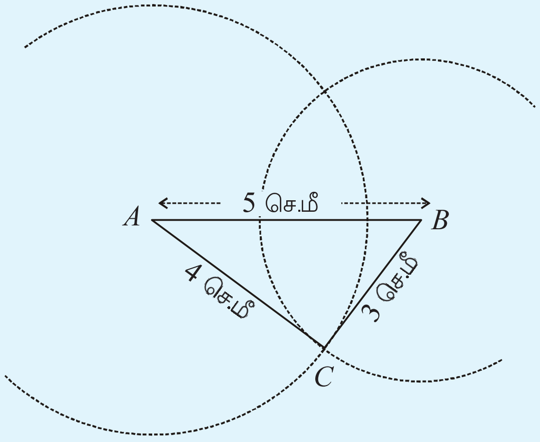
இது போன்று B மையமான 3 செ.மீ ஆரமுள்ள ஒரு வட்டம் வரைந்தால் B யிலிருந்து 3 செ.மீ தூரத்திலுள்ள எல்லாப் புள்ளிகளும் கிடைக்கும்.



இவ்விரு வட்டங்கள் வெட்டிக்கொள்ளும் இரு புள்ளிகளும் A யிலிருந்து 4 செ,மீ-உம் B யிலிருந்து 3 செ,மீ-உம் தூரத்திலல்லவா.

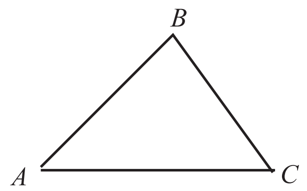
இதில் எதைப் பயன்படுத்தியும் முக்கோணம் வரையலாம்?





சரியான வழி

படத்தைப் பாருங்கள்.



A இல் இருந்து C ஐ சென்றடைய, AC என்ற கோட்டின் வழியே நேராகச் செல்லலாம். இல்லாவிடில், AB வழியாக B க்குச் சென்று அங்கிருந்து BC வழியாக C ஐ சென்றடையலாம். தூரம் குறைந்த வழி எது?

இதிலிருந்து ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்களிற் கிடையே ஏதேனும் தொடர்பு காணப்படு கின்றதா எனக் கண்டறிக.

ஈர்க்கில் கணிதம்

ஒரே நீளமுடைய இரண்டு ஈர்க்கில்களை எடுக்கவும். அதிலொன்றை இரண்டு துண்டாக் கவும்.

இந்த மூன்று ஈர்க்கில்களை வைத்து ஒரு முக்கோணம் உருவாக்க முடியுமா?

இதன் பின் பெரிய ஈர்க்கிலிலிருந்து ஒரு சிறிய துண்டை ஒடித்து நீக்கவும்.

இப்பொழுது முக்கோணம் உருவாக்க முடியுமா?

மாறாத சுற்றளவு

சுற்றளவு 15 அலகு வருமாறு ஒரு முக்கோணம் வரைய முடியுமா? இவ்வாறான முக்கோணங்கள் ஜியோஜிப்ராவில் எவ்வாறு வரையலாம் என்று பார்ப்போம். பக்கங்களின் நீளத்தை வரைமுறைபடுத்துவதற்காக இரண்டு சிலைடர்கள் முதலில் உருவாக்க வேண்டும். Min = 0, Max = 7.5 வருமாறு'a', 'b' என்ற இரண்டு சிலைடர்களை உருவாக்கவும். Segment with given length from point கருவியைப் பயன்படுத்தி நீளம், 'a' என்ற சிலைடரின் மதிப்பு வரும்படியாக AB என்ற கோடு வரையவும். இனி மற்ற பக்கங்களுக்கு நீளம் எவ்வாறு இருக்கலாம்? சுற்றளவு 15 அலகு ஆனால்,

$$AC + BC = 15 - AB$$
$$= 15 - a$$

இதில் ஒரு பக்கத்தின் நீளம் 'b' ஆனால் அடுத்த பக்கத்தின் நீளம் என்னவாயிருக்கும்? இதைப் பயன்படுத்தித் தான் அடுத்த இரண்டு பக்கங்கள் வரையப் போகிறோம். A ஐ மையமாக வைத்து 'b' ஆரத்தில் ஒரு வட்டமும், B ஐ மையமாக வைத்து 15 - a - b ஆரத்தில் மற்றொரு வட்டமும் வரையவும். இவ்விருவட்டங்கள் வெட்டும் புள்ளிகளை C, D என அடையாளப்படுத்தவும். Polygon கருவியைப் பயன்படுத்தி ABC என்ற முக்கோணம் வரையவும். Distance or Length கருவியைப் பயன்படுத்தி முக்கோணத்தினுள் கிளிக் செய்தால் அதன் சுற்றளவு எவ்வளவு எனக் காண முடியும். சிலைடர்களைப் பயன்படுத்தி a, b இவற்றின் மதிப்பை மாற்றிப் பார்க்கவும். ஒரே சுற்றளவையுடைய மாறுபட்ட பல முக்கோணங் கள் கிடைக்கின்றன அல்லவா? இதைப் பயன்படுத்தி மிக அழகான ஒரு படம் வரைவது எப்படி எனப் பார்ப்போம்.

AD, BD என்ற கோடுகளை வரையவும்.

AC, BC, AD, BD என்ற கோடுகளையும் C, D என்ற புள்ளிகளையும் Trace on கொடுக்கவும். மதிப்பை உறுதிபடுத்திக் கொண்டு சிலைடர் 'b' க்கு animation கொடுக்கவும். இவ்வாறு கிடைக்கின்ற படத்தைப் பார்க்கவும். C,D என்பன போகும் வழி என்ன?

இனி இந்த அளவுகளைப் பயன்படுத்தி முக்கோணம் வரைந்து பார்க்கவும்.

- $PQ = 5$ செ.மீ, $QR = 5$ செ.மீ, $PR = 4$ செ.மீ
- $XY = 7.5$ செ.மீ, $YZ = 6.5$ செ.மீ, $XZ = 5.5$ செ.மீ
- $DE = 7$ செ.மீ, $EF = 7$ செ.மீ, $DF = 7$ செ.மீ

- $AB = 6$ செ.மீ, $AC = 5$ செ.மீ, $\angle A = 85°$. எனும் அளவுகளுடைய ABC என்ற முக்கோணம் வரையவும்.
- $PQ = 5$ செ.மீ, $\angle Q = 60°$ $PR = 7$ செ.மீ. இந்த அளவுகளில் முக்கோணம் PQR வரையவும். மூன்றாவது பக்கத்தின் நீளத்தை அளந்தெழுதவும்.
- $MN = 8$ செ.மீ, $\angle M = 60°$ $\angle N = 50°$. முக்கோணம் MNT வரையவும்.
- $XY = 6$ செ.மீ, $YZ = 7$ செ.மீ, $XZ = 7$ செ.மீ இந்த அளவுகளில் முக்கோணம் XYZ வரையவும்.

செயல்திட்டம்

பக்கங்களின் நீளம் 5 செ.மீ, 4 செ.மீ, 10 செ.மீ, என்றால் ஒரு முக்கோணம் வரைய முடியுமா?

5 செ.மீ, 4 செ.மீ, 9 செ.மீ, ஆனால்?

இனி 5 செ.மீ, 4 செ.மீ, 8. 5 செ.மீ, என்றால் வரைய முடியுமா?

இரண்டு பக்கங்களின் நீளங்கள் 5 செ.மீ, 4 செ.மீ, என எடுத்துக் கொண்டால் மூன்றாவது பக்கத்தின் நீளம் எத்தனை செ.மீ. குறைவாக இருக்கலாம்?

முக்கோணங்கள் வரையத் தேவையான அளவுகளுக்கு இடையேயுள்ள தொடர்பென்ன?

ஏன் சில அளவுகளில் முக்கோணம் வரைய முடிவதில்லை?

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளவற்றில் ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் அளவுகளாக வருவன எவையெல்லாம் என்று கண்டுபிடிக்கவும்.

- 8 செ.மீ, 6 செ.மீ, 13 செ.மீ,
- 2 செ.மீ, 5 செ.மீ, 8 செ.மீ,
- 5 செ.மீ, 4 செ.மீ, 9 செ.மீ,
- 4 செ.மீ, 6 செ.மீ, 7 செ.மீ,

மாறாத கோணம்

AB = 5, $\angle C = 60^\circ$ என்ற அளவில் ABC என்ற முக்கோணம் வரையலாமா? ஜியோஜிப்ராவின் உதவியால் இதைப் போன்ற முக்கோணங்கள் வரைவது எவ்வாறு எனப் பார்ப்போம்.

5 அலகு நீளமுள்ள AB வரையவும். ஒரு சிலைடர் angle slider 'a' உருவாக்கவும். Angle with given size கருவியைப் பயன்படுத்தி முதலில் B யிலும் பின்பு A யிலும் கிளிக் செய்தவுடன் வரும் சாளரத்தில் கோணஅளவாக 'a' எனப் பெயரிட்டு OK கிளிக் செய்யவும். இப்பொழுது $\angle BAB'$ என்பது $'a'$ இன் மதிப்பாக வரும் B' என்ற ஒரு புள்ளி கிடைக்கும். இதே கருவியைப் பயன்படுத்தி முதலில் A யிலும் பின்பு B யிலும் கிளிக் செய்யும் போது வரும் சாளரத்தில் கோணஅளவாக 120° - a எனப் பெயரிட்டு, Clockwise என்பதில் கிளிக் செய்த பின்பு OK கிளிக் செய்யவும். இப்பொழுது A' என்ற புதிய புள்ளி கிடைக்கும். Ray through two points கருவியைப் பயன்படுத்தி AB', BA' என்ற கோடுகள் வரையவும். இந்தக் கோடுகள் வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளியை C என அடையாளப் படுத்தவும். Polygon கருவியைப் பயன்படுத்தி முக்கோணம் ABC வரையவும். இனி தேவை யில்லாத கோடுகளையும், புள்ளிகளையும் மறைத்து வைக்கவும். Angle கருவியைப் பயன்படுத்தி முக்கோணத்தினுள் கிளிக் செய்தால் அதன் கோண அளவுகள் காண முடியும். a இன் மதிப்பை மாற்றிப் பார்க்கவும். AC, BC என்ற கோடுகளையும் C என்ற புள்ளியையும் trace on கொடுத்து சிலைடருக்கு Animation கொடுத்துப் பார்க்கவும். C என்ற புள்ளி செல்லும் பாதை என்ன?

C இன் கோணஅளவு 60° என்பதற்குப் பதிலாக பிற கோணஅளவுகளிலும் செய்து பார்க்கவும்.

இந்தக் கோணத்தை மாற்றுவதற்கு ஒரு சிலைடர் பயன்படுத்தலாம்.

மீள்பார்வை

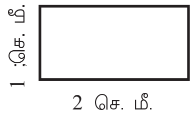
கற்றல் அடைவுகள்	என்னால் இயலும்	ஆசிரியர் உதவியுடன் இயலும்	இன்னும் மேம்பட வேண்டியுள்ளது
• இரண்டு பக்கங்கள், ஒரு கோணத்தின் அளவுகளும் தரப்பட்டிருந்தால் முக் கோணம் வரைதல்.			
• ஒரு பக்கமும் இரண்டு கோணங்களின் அளவுகளும் தரப்பட்டிருந்தால் முக்கோணம் வரைதல்.			
• மூன்று பக்கங்களின் அளவுகள் தரப்பட்டி ருந்தால் முக்கோணம் வரைதல்.			
• சில அளவுகளில் முக்கோணம் வரைய முடியாததன் காரணத்தை யுக்திபூர்வமாக நிறுவுதல்.			
• சரியாகவும் நுட்பமாகவும் வடிவியல் வடிவங்களை வரைதல்.			
• வடிவியல் வடிவங்களின் உருவாக்கத்திற்கு ஜியோஜிப்ராவிலுள்ள வழிகளைப் பயன் படுத்துதல்.			

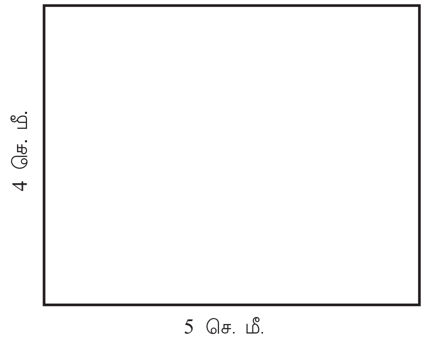
9

விகிதம்

ஒரே வடிவமாகும்

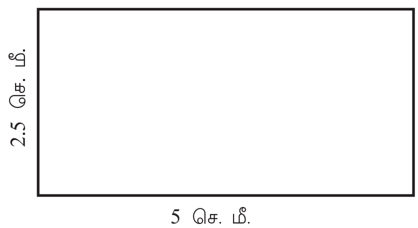
கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள இரண்டு செவ்வகங் களிலும் நீளம் அகலத்தை விட 1 சென்டிமீட்டர் கூடுதலாகும்.





இவ்விரு செவ்வகங்களுக்கும் அளவுகளில் மட்டுமல்ல வடிவத்திலும் வித்தியாசம் உண்டல்லவா? இரண்டாவது செவ்வகத்தில் அகலத் திற்கும் நீளத்திற்கும் இடையேயுள்ள வேறுபாடு பெரிதாகத் தோன்றவில்லை. மேலும் ஒரு பெரிய காகிதத்தில் 50 சென்டிமீட்டர் நீளமும் 49 சென்டி மீட்டர் அகலமும் உள்ள ஒரு செவ்வகம் வரைந்து பாருங்கள். அகலத்திற்கும் நீளத்திற்குமிடை யேயுள்ள வேறுபாடு கொஞ்சம் கூடத் தெரிவ தில்லை. இந்தச் செவ்வகம் ஒரு சதுரம் போன்று தோற்றமளிக்கும்.

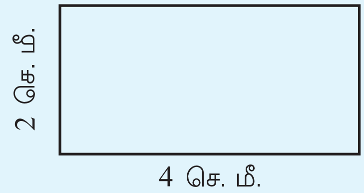
முதலிலுள்ள சிறிய செவ்வகத்தில் நீளம் அகலத்தை விட இரண்டு மடங்காகும். இனி இந்தச் செவ்வகத்தினைப் பாருங்கள்.

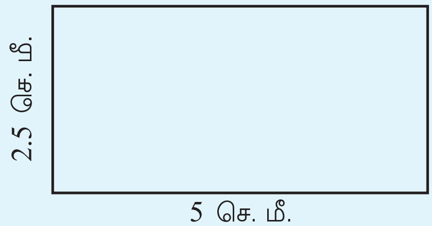


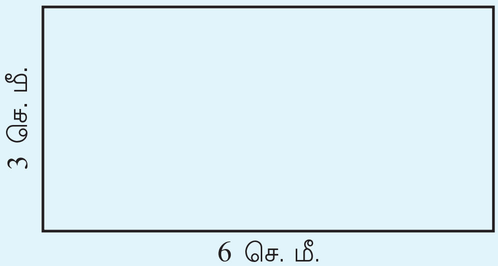
இங்கும் நீளம் அகலத்தின் இரண்டு மடங்குதான். முதல் செவ்வகத்தைவிடப் பெரியதாக இருந்தா லும் இரண்டின் வடிவமும் ஒரே மாதிரியல்லவா?

அகலமும் நீளமும்

இந்தச் செவ்வகங்களைப் பார்க்கவும்.







இவை அனைத்திலும் அகலத்துக்கும் நீளத்திற்குமிடையே ஏதேனும் பொதுவான தொடர்பிருக்கின்றதா?

எல்லாச் செவ்வகங்களிலும் நீளம் அகலத்தின் இரு மடங்கல்லவா (அகலம் நீளத்தின் பாதி என்றும் சொல்லலாம்).

இதைக் கணித மொழியில் இவ்வாறு சொல்லலாம்:

> இந்தச் செவ்வகங்களிலெல்லாம் அகலமும் நீளமும் ஒன்றிற்கு இரண்டு என்ற விகிதத்திலாகும். (in the ratio one to two).

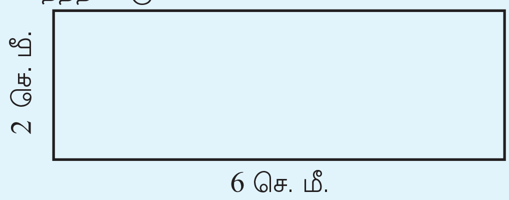
"ஒன்றிற்கு இரண்டு என்ற விகிதத்தை 1 : 2 என்று சுருக்கி எழுதலாம்.

> அதாவது, இந்தச் செவ்வகங்களிலெல்லாம் அகலமும் நீளமும் 1 : 2 என்ற விகிதத்தலாகும்.

அகலம் 1 சென்டிமீட்டரும் நீளம் 2 சென்டிமீட்டருமான செவ்வகத்திலும் நீளம் அகலத்தின் இருமடங்கல்லவா? அகலம் 1 மீட்டரும் நீளம் 2 மீட்டரும் ஆனாலும் தொடர்பு ஒன்றுதான்.

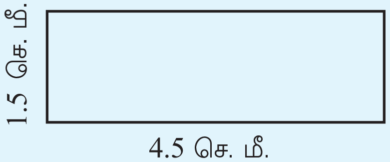
எனில், இந்தச் செவ்வகங்களில் அகலமும் நீளமும் ஒன்றிற்கு இரண்டு (1:2) என்ற விகிதத்திலாகும்.

மறுதலையாகச் சொன்னால், இந்தச் செவ்வகங்கள் அனைத்திலும் நீளமும் அகலமும் இரண்டிற்கு ஒன்று (2 : 1) என்ற விகிதத்திலாகும்.



இதுபோன்று கீழே தரப்பட்டுள்ள செவ்வகத்தின் அகலத்திற்கும் நீளத்திற்குமிடையேயுள்ள விகிதம் என்ன?

எனில், கீழ் வரும் செவ்வகத்தில்?

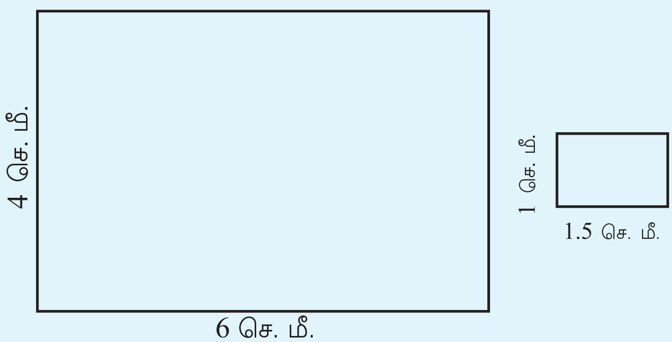


இவ்விரண்டிலும் நீளம் அகலத்தின் மூன்று மடங்கல்லவா? எனில், அகலத்திற்கும் நீளத்திற்குமிடையே உள்ள விகிதம் என்ன? அகலம் 2 சென்டிமீட்டரும் நீளம் 1 மீட்டரும் இருந்தால்?

அகலத்தின் எத்தனை மடங்கு நீளம்?

1 மீட்டர் என்பது 100 சென்டிமீட்டர் அல்லவா. அப்படியானால் இந்தச் செவ்வகத்தில்அகலத்திற்கும் நீளத்திற்கும் இடையே உள்ள விகிதம் 1 : 50 ஆகும்.

இனி, இவ்விரு செவ்வகங்களைப் பார்க்கவும்.



அளவு மாறினால்

இந்தப் புகைப்படத்தைப் பாருங்கள்.

இதன் சிறிய பக்கம் 2 சென்டிமீட்டரும் பெரிய பக்கம் 3 சென்டிமீட்டராகும். அதாவது சிறிய பக்கத்தின் $1\frac{1}{2}$ மடங்காகும் பெரிய பக்கம்.

சிறிய பக்கம் 3 சென்டிமீட்டரும், பெரிய பக்கம் 4.5 சென்டிமீட்டரும் ஆனால்?

இப்பொழுதும் பெரிய பக்கம் சிறிய பக்கத்தின் $1\frac{1}{2}$ மடங்குதான்.

இனி, சிறிய பக்கம் 3 சென்டிமீட்டர் ஆகும்போது பெரிய பக்கம் 1 சென்டிமீட்டர் மட்டும் அதிகரித்து 4 சென்டிமீட்டராக மாற்றினால்?

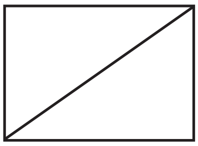
படம் சரிதானா?

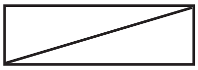
தொலைக்காட்சியில் கணிதம்

தொலைக்காட்சிப் பெட்டியின் அளவு சாதாரணமாக 14 அங்குலம், 17 அங்குலம், 20 அங்குலம் என்றுதான் சொல்கிறோம். இதன் பொருள்தான் என்ன?

தொலைக்காட்சியின் திரை ஒரு செவ்வகமல்லவா? அதன் மூலைவிட்டத்தின் அளவு தான் அவையெல்லாம்.

இதை மட்டும் வைத்துக் கொண்டு தொலைக்காட்சியின் அளவை நிர்ணயிக்க முடியுமா? நீளமும் அகலமும் வித்தியாசமான செவ்வகங்களின் மூலைவிட்டத்தைச் சமமாக்கலாமல்லவா?





திரையின் அளவு எவ்வளவாக இருந்தாலும் அதன் நீளத்திற்கும் உயரத்திற்கும் இடையே உள்ள விகிதம் தற்போதைய தொலைக்காட்சிப் பெட்டிகளில் 16 : 9 ஆகும். சில வருடங்களுக்கு முன்பு தொலைக்காட்சிப் பெட்டியின் விகிதம் 4:3ஆக இருந்தது. மூலைவிட்டத்தின் அளவு சமமாகவுள்ள இரண்டு தொலைக்காட்சிகளில் இந்த வித்தியாசத்தைப் பாருங்கள்.

4 : 3

16 : 9

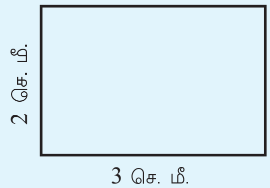
இரண்டிலும் நீளம் அகலத்தின் ஒன்றரை மடங்கல்லவா?

இதை விகிதமாகச் சொல்வதெப்படி?

ஒன்றிற்கு ஒன்றரை என்று சொல்லலாம். ஆனால் சாதாரணமாக விகிதத்தைச் சொல்லும் போது பின்ன எண்களைத் தவிர்ப்பதுண்டு.

அகலத்தை 2 சென்டிமீட்டர் என்று எடுத்தோமானால்?

2 இன் $1\frac{1}{2}$ மடங்கு எவ்வளவு?



அப்படியானால் இவ்வாறு வரும் செவ்வகங்களில் அகலமும் நீளமும் இரண்டிற்கு மூன்று எனும் விகிதத்தில் உள்ளது என்று கூறலாம். 2 : 3 என்றும் எழுதலாம்.

இங்கே விகிதத்தை 4 : 6 என்று கூறலாமா?

அவ்வாறு கூறினாலும் தவறில்லை. ஆனால் சாதாரணமாக முடிந்தவரை சிறிய எண்ணல் எண்கள் பயன்படுத்தித் தான் விகிதம் சொல்லப்படுகிறது. ஒரு செவ்வகத்தின் நீளம் அகலத்தின் $2\frac{1}{2}$ மடங்காகும் என்பதை விகிதத்தில் எவ்வாறு கூறலாம்? அகலம் 1 சென்டிமீட்டர் எனில் நீளம் $2\frac{1}{2}$ சென்டிமீட்டர்

அகலம் 2 சென்டிமீட்டராக இருந்தால்? நீளம் 5 சென்டிமீட்டர்.

அப்படியானால் அகலமும் நீளமும் 2 : 5 எனும் விகிதத்திலாகும் என்று கூறலாம்.

அகலத்தின் ஒன்றேகால் மடங்கு நீளமாக இருந்தால்?

அகலம் 1 சென்டிமீட்டர் எனில், நீளம் $1\frac{1}{4}$ சென்டிமீட்டர்.

அகலம் 2 சென்டிமீட்டர் எனில், நீளம் $2\frac{1}{2}$ சென்டிமீட்டர்.

அப்போதும் பின்ன எண் மாறவில்லை.

மேலும் அகலத்தை 4 சென்டிமீட்டராக மாற்றினால் நீளம் எவ்வளவாக இருக்கும்.?

எனில், இதுபோன்ற செவ்வகங்களில் அகலமும் நீளமும் 4 : 5 என்ற விகிதத்தில் உள்ளது.

இங்கெல்லாம் வேறொன்றைக் கவனித்தீர்களா?

அகலமும் நீளமும் ஒரே மடங்காகக் கூடினாலும், ஒரே பாகமாகக் குறைந்தாலும் விகிதம் மாறுவதில்லை. உதாரணமாகக் கீழே தரப்பட்டுள்ள அகலத்தையும் நீளத்தையும் பார்க்கவும்.

அகலம்	நீளம்
3 செ.மீ	9 செ.மீ
6 மீ.	18 மீ.
1 மீ.	3 மீ.
$\frac{1}{2}$ மீ.	$1\frac{1}{2}$ மீ.
$1\frac{1}{2}$ மீ.	$4\frac{1}{2}$ மீ.

இவற்றில் எல்லாம் நீளம் அகலத்தின் 3 மடங்காகும்.

மறுதலையாகக் கூறினால், அகலம் நீளத்தின் $\frac{1}{3}$ பாகமாகும்.

விகிதத்தில் கூறினால், அகலமும் நீளமும் 1 : 3 எனும் விகிதத்தில் ஆகும். நீளமும் அகலமும் 3 : 1 எனும் விகிதத்தில் ஆகும்.

- கீழே குறிப்பிடும் ஒவ்வொரு செவ்வகத்தின் அகலத்திற்கும் நீளத்திற்கும் இடையேயுள்ள விகிதத்தை முடிந்தவரை சிறிய எண்ணல் எண்களைப் பயன் படுத்திக் கூறவும்:
  - அகலம் 8 சென்டிமீட்டர், நீளம் 10 சென்டிமீட்டர்
  - அகலம் 8 மீட்டர், நீளம் 12 மீட்டர்
  - அகலம் 20 சென்டிமீட்டர், நீளம் 1 மீட்டர்
  - அகலம் 40 சென்டிமீட்டர், நீளம் 1 மீட்டர்
  - அகலம் 1.5 சென்டிமீட்டர், நீளம் 2 சென்டிமீட்டர்

கொடிகள்

நமது தேசியக் கொடியின் படம் வரையும் போது நிறங்கள் மட்டும் சரியாக இருந்தால் போதாது, செவ்வகத்தின் அகலத்திற்கும், நீளத்திற்கும் இடையேயுள்ள விகிதமும் சரியாக இருக்க வேண்டும். இது 2 : 3 ஆகும்.

அதாவது தேசியக்கொடி வரையும் போது நீளம் 3 சென்டிமீட்டர் எடுத்தால், அகலம் 2 சென்டி மீட்டர்தான் இருக்க வேண்டும்.

பல்வேறு நாடுகளின் கொடிகளில் இந்த விகிதம் மாறுபட்டதாகும். எடுத்துக்காட்டாக, ஆஸ்தி ரேலியாவின் கொடியில் இது 1 : 2 ஆகும்.

ஜெர்மனியின் கொடியில் இந்த விகிதம் 3 : 5 ஆகும்.

பின்னங்கள் இல்லாமல்

ஒரு குறிப்பிட்ட அலகைப் பயன்படுத்தி நீளத்தையும் பிற அளவுகளையும் அளவிடும் போது எப்பொழுதும் எண்ணல் எண்கள் கிடைப்பதில்லை என்ற உண்மையிலிருந்து தான் பின்னங்கள் எனும் கருத்து உருவானது. இரு அளவுகளை ஒப்பீடு செய்யும்போது தேவைக்கேற்பச் சிறிய அலகைப் பயன்படுத் தினால் இரண்டையும் எண்ணல் எண்களாக்க லாமா என்னும் சிந்தனைதான் விகிதம் என்ற கருத்திற்கு ஆதாரமானது. எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு கயிற்றைக் கொண்டு அளவிடும்போது, ஒரு பொருளின் நீளம் $\frac{2}{5}$ உம், மற்றொன்றின் நீளம் $\frac{3}{5}$ உம் கிடைக்கிறது எனக் கருதவும். கயிற்றின் $\frac{1}{5}$ பாகத்தை அலகாக எடுத்தால், முதலாவதின் நீளம் 2உம், இரண்டாவதின் நீளம் 3 என்றும் கூறலாம்.

நீளங்களின் விகிதம் 2 : 3 என்று சொல்வதன் பொருள் இதுவாகும்.

இரண்டு பொருட்களின் நீளம் கயிற்றின் $\frac{1}{3}$ பாகமும் $\frac{1}{5}$ பாகமும் ஆனால்?

இரண்டின் நீளமும் எண்ணல் எண்களாகக் கிடைக்கக் கயிற்றின் எவ்வளவு பாகத்தை அலகாக எடுக்க வேண்டும்?

- கீழே உள்ள அட்டவணையில் சில செவ்வகங்களின் அகலம், நீளம் இவற்றிற்கிடையேயுள்ள விகிதம் ஆகியவற்றில் ஏதாவது இரண்டு கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. விடுபட்டதைக் கண்டுபிடித்து அட்டவணையைப் பூர்த்தி செய்யவும்.

அகலம் (செ.மீ.)	நீளம் (செ.மீ.)	விகிதம்
6	8	
3		3 : 4
1		3 : 4
	1	3 : 4
6	15	
2		2 : 5
1		2 : 5
	1	2 : 5

- ஒரு செவ்வகத்தின் அகலமும், நீளமும் 1 : 1 எனும் விகிதமாகுமென்று கூறினால் அதன் பொருள் என்ன? இந்தச் செவ்வகம் எந்த வகையைச் சார்ந்தது?

வேறு அளவுகள்

இரண்டு கயிறுகள், சிறியதின் நீளம் $\frac{1}{3}$ மீட்டர், பெரியதின் நீளம் $\frac{1}{2}$ மீட்டர். இவற்றின் நீளங்களுக்கிடையேயுள்ள விகிதம் என்ன?

பல வழிகளில் கணக்கிடலாம். $\frac{1}{3}$ இன் எத்தனை மடங்கு $\frac{1}{2}$ எனப் பார்ப்போம்:

$$\frac{1}{2} \div \frac{1}{3} = \frac{3}{2}$$

அப்படியானால், சிறிய கயிற்றின் நீளத்தின் $\frac{3}{2}$ மடங்காகும் பெரிய கயிற்றின் நீளம். அதாவது $1\frac{1}{2}$ மடங்கு.

சிறியதின் நீளம் 1 என எடுத்தால் பெரியதின் நீளம் $1\frac{1}{2}$; 1-ற்குப் பதிலாக 2 என எடுத்தால் 3 கிடைக்கும்.

ஆகையால் சிறியது, பெரியது இவற்றின் நீளங்களுக்கு இடையேயுள்ள விகிதம் 2 : 3.

வேறொரு முறையிலும் சிந்திப்போம். செவ்வகத்தின் அகலமும் நீளமும் போன்று சிறியதையும், பெரியதையும் ஒரே மடங்காக கூட்டுகிறோம் என வைத்துக் கொள்வோம். அப்போதெல்லாம் விகிதம் மாறவில்லையல்லவா.

இரு கயிறுகளின் நீளத்தையும் இருமடங்காக்கினால்?

சிறியதின் நீளம் $\frac{2}{3}$ மீட்டரும், பெரியதின் நீளம் 1 மீட்டருமாகும். பின்ன எண் மாறவில்லை.

பின்ன எண்ணை நீக்குவதற்கு எத்தனை மடங்காக்க வேண்டும்?

ஆறு மடங்கு ஆனால்?

$\frac{1}{3}$ இன் 6 மடங்கு 2.

$\frac{1}{2}$ இன் 6 மடங்கு 3.

சிறியதின் நீளம் 2 மீட்டர், பெரியதின் நீளம் 3 மீட்டர்.

அப்படியானால், விகிதம் 2 : 3.

இன்னொரு வழியும் உண்டு.

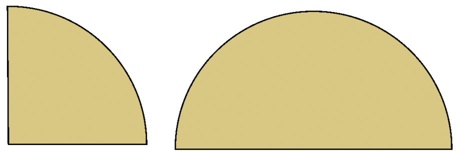
$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6} \qquad \frac{1}{2} = \frac{3}{6}$$

என்றும் எழுதலாமல்லவா? அதாவது சிறிய கயிற்றை $\frac{1}{6}$ மீட்டர் நீளமுடைய 2 துண்டுகள் சேர்ந்ததாகவும், பெரிய கயிற்றை $\frac{1}{6}$ மீட்டர் நீளமுடைய 3 துண்டுகள் சேர்ந்ததாகவும் வைத்துக் கொள்வோம். இப்படிப் பார்த்தாலும் விகிதம் 2 : 3 எனக் கணக்கிடலாம்.

மேலும் இந்தக் கணிதச் செயல்பாட்டைப் பாருங்கள். ஒரு பாத்திரத்தை நிரப்புவதற்கு முக்கால் குப்பி தண்ணீர் வேண்டும்.

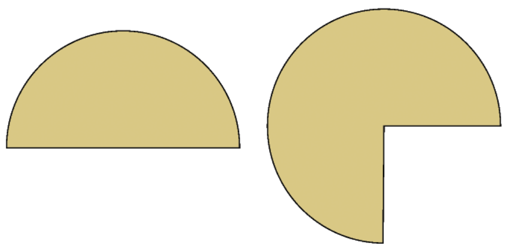
வட்டத்தில் விகிதம்

கீழேயுள்ள வட்டத்தின் பாகங்களைப் பார்க்கவும்.



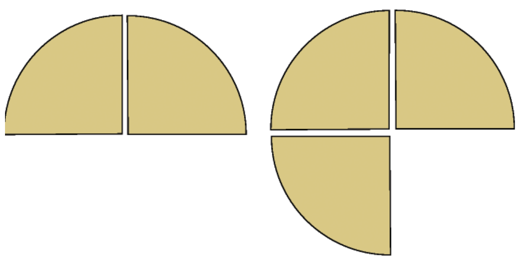
சிறிய துண்டு ஒரு வட்டத்தின் $\frac{1}{4}$ பாகமும், பெரிய துண்டு ஒரு வட்டத்தின் $\frac{1}{2}$ பாகமுமாகும். அதாவது பெரிய துண்டிற்குச் சிறிய துண்டின் இரண்டு மடங்கு அளவுண்டு. அப்படியானால் சிறிது, பெரியது இவற்றின் அளவுகள் இடையே யுள்ள விகிதம் 1 : 2 ஆகும்.

இனி இந்தத் துண்டுகளைப் பாருங்கள்:



இவற்றின் அளவுகளிற்கிடையே உள்ள விகிதம் என்ன?

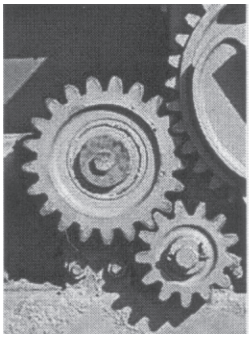
வட்டத்தின் $\frac{1}{4}$ பாகம் எடுத்து அளவிடுவோமானால், இங்கே சிறிய துண்டில் இரண்டு எண்ணிக்கை உள்ளது. பெரிய துண்டில் எண்ணிக்கை என்ன?



அப்படியானால் இந்தத் துண்டுகளின் அளவுகளிற்கிடையேயுள்ள விகிதம் என்ன?

அசைவும் விகிதமும்

விளையாட்டு வாகனங்களையோ பழைய கடிகாரத்தையோ கழற்றிப் பார்த்திருக்கிறீர்களா? அவற்றில் பல அளவுகளிலுள்ள பற்சக்கரங்களைக் காணலாம். படத்தைப் பாருங்கள்.



ஒரு இயந்திரத்தின் சிறிய ஒரு பாகம்தான் இது. இதில் முழுவதும் பார்க்க முடிகின்ற பற்சக்கரங்களின் சிறியதில் 13 பற்களும் பெரியதில் 21 பற்களும் உள்ளன. சிறிய சக்கரம் 21 முறை சுற்றிமுடியும் போது பெரிய சக்கரம் 13 முறை மட்டும்தான் சுற்றி இருக்க முடியும். இவ்வாறு பற்சக்கரங்களின் பற்களின் எண்ணிக்கை ஒரு குறிப்பிட்ட விகிதத்தில் ஒழுங்குப்படுத்தப்பட்டு இயந்திரங்கள் சுற்றுவதன் வேகம் கட்டுப்படுத்தப் படுகிறது.

விஷயம் பற்சக்கரம் எல்லாம் தான்
ஆனா பழையது மாதிரி ஓடமாட்டேங்குது!

அதைவிடப் பெரிய ஒரு பாத்திரம் நிரப்ப முக்கால்குப்பி தண்ணீர் வேண்டும். சிறிய பாத்திரம் பெரிய பாத்திரம் இவற்றின் உள் அளவுகளுக்கு இடையேயுள்ள விகிதம் என்ன?

இங்கே

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$$

என்றெழுதலாம். அப்படியானால் குப்பியின் $\frac{1}{4}$ பாகம் தண்ணீர் 2 முறை ஊற்றினால் சிறிய பாத்திரம் நிரம்பும்; பெரிய பாத்திரம் நிரம்ப குப்பியின் $\frac{1}{4}$ பாகம் தண்ணீர் 3 முறை ஊற்றவேண்டும். சிறிய பாத்திரம் பெரிய பாத்திரம் ஆகிய இவற்றின் உள்ளளவுகளுக்கு இடையே உள்ள விகிதம் 2 : 3.

வேறொரு கணக்கு: ராஜுவின் கையில் 200 ரூபாயும் ரஹீமின் கையில் 300 ரூபாயும் உள்ளன. ராஜு, ரஹீம் இவர்கள் கையிலுள்ள தொகையின் விகிதம் என்ன?

இருவரின் கையிலும் நூறுரூபாய் நோட்டுகள் மட்டும் உள்ளன என எடுத்துக் கொண்டால், ராஜுவின் கையில் 2உம் ரஹீமின் கையில் 3உம் தான் உள்ளன. அதாவது, விகிதம் 2 : 3.

கணக்கைக் கொஞ்சம் மாற்றி, ராஜுவின் கையில் 250 ரூபாயும், ரஹீமின் கையில் 350 ரூபாயும் உள்ளன என எடுத்துக் கொள்வோமா?

தொகையை 50 ரூபாய் நோட்டுகளாகக் கணக்கிட்டால், ராஜுவின் கையில் 5 நோட்டுகளும், ரஹீமின் கையில் 7 நோட்டுகளும் உள்ளன. விகிதம் 5 : 7.

தொகை 225 ரூபாயும் 325 ரூபாயும் உள்ளது என எடுத்துக்கொண்டால்?

ஒவ்வொன்றையும் 25 ரூபாய் வீதமுள்ள பொட்டலங்கள் என எடுத்துக்கொண்டால், ராஜுவின் கையில் 225 ÷ 25 = 9 பொட்டலங்கள். ரஹீமின் கையில் 325 ÷ 25 = 13 விகிதம் 9 : 13.

ஒரு கணிதச் செயல்பாட்டை மேலும் பார்ப்போம். ஒரு வகுப்பில் 25 பெண்களும், 20 ஆண்களும் உள்ளனர் இவர்களின் எண்ணிக்கை இடையேயுள்ள விகிதம் என்ன?

பெண்களையும், ஆண்களையும் 5 பேர் வீதமுள்ள குழுக்களாக்கினால் பெண்களின் 5 குழுக்களும், ஆண்களின் 4 குழுக்களும் இருப்பார்கள். அப்படியானால் விகிதம் 5 : 4.

இது போன்று கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள கணிதச் செயல்பாடுகளில் முடிந்தவரை சிறிய எண்ணல் எண்களைப் பயன்படுத்தி விகிதங்களைக் கணக்கிடவும்.

- இரு பென்சில்களில் சிறியதின் நீளம் 6 சென்டி மீட்டரும் பெரியதின் நீளம் 9 சென்டி மீட்ட ருமாகும். சிறிய, பெரிய பென்சில்களின் நீளங் களின் விகிதம் என்ன?
- ஒரு பள்ளியில் 120 ஆண்களும் 140 பெண்க ளும்உள்ளனர். ஆண், பெண் இவர்களின் எண்ணிக்கைக்கு இடையேயுள்ள விகிதம் என்ன?
- ஒரு பொதுக்கூட்டத்தில் 96 பெண்களும் 144 ஆண்களும் கலந்துகொண்டனர். பெண், ஆண் இவர்களின் எண்ணிக்கைக்கு இடையேயுள்ள விகிதம் என்ன?
- ஒரு கயிற்றைக் கொண்டு ஒரு செவ்வகத்தின் பக்கங்களை அளவிடும்போது அகலம் கயிற்றின் $\frac{1}{4}$ பாகமும், நீளம் கயிற்றின் $\frac{1}{3}$ பாகமும் எனக் கண்டனர். அகலத்திற்கும் நீளத்திற்கும் இடையே யுள்ள விகிதம் என்ன?
- ஒரு பெரிய குப்பியை நிரப்ப $3\frac{1}{2}$ டம்ளர் தண்ணீரும் சிறிய குப்பியை நிரப்ப $2\frac{1}{4}$ டம்ளர் தண்ணீரும் வேண்டும். பெரிய குப்பி, சிறிய குப்பி இவற்றின் உள் அளவுகளுக்கு இடையே உள்ள விகிதம் என்ன?

கலவைகளின் தொடர்பு

இட்லி செய்வதற்காக அம்முவின் அம்மா இரண்டு கிண்ணம் அரிசியும் ஒரு கிண்ணம் உளுந்தும் எடுத்து அரைக் கிறார்கள். விருந்தினர் வருவதற்கு முந்தைய நாள் நான்கு கிண்ணம் அரிசி எடுத்தார்கள். எனில் எத்தனை கிண்ணம் உளுந்து எடுக்க வேண்டும்?

சுவையும், குணமும் நன்றாகயிருக்க அரிசியின் அளவில் பாதி உளுந்து எடுக்கிறார்கள்.

அப்படியானால், நான்கு கிண்ணம் அரிசிக்கு இரண்டு கிண்ணம் உளுந்து எடுக்க வேண்டும்.

அரிசியும் உளுந்தும் 2 : 1 எனும் விகிதத்திலாக இருக்க வேண்டும் எனக் கூறலாம்.

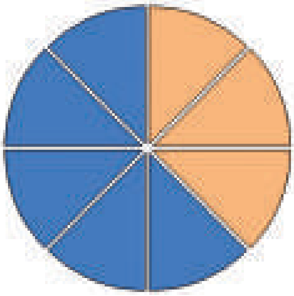
மேலும் வேறொரு கலவை கணிதச்செயல்; அபுவினுடைய வீட்டின் சுவர்களுக்கு வர்ணம் பூசுவதற்காக முதலில் 25 லிட்டர் பச்சை நிறமும், 20 லிட்டர் வெள்ளை நிற பெயிண்டும் கலந்து எடுத்தனர்.

சிமெண்டும் மணலும்

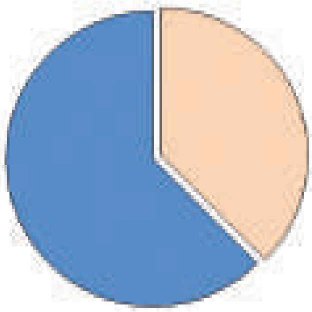
சிமெண்டையும் மணலையும் ஒரு குறிப்பிட்ட விகிதத்தில் சேர்த்துத்தான் கட்டடம் கட்டுவதற்கு உபயோகிக்கிறார்கள். ஆனால் எல்லாத் தேவை களுக்கும் ஒரே விகிதத்தில் இவற்றைச் சேர்ப்ப தில்லை. ஒரு சட்டி சிமெண்டும் ஐந்து சட்டி மணலும் சேர்த்துக் கலவை செய்யும்போது சிமெண்டிற்கும் மணலுக்கும் இடையேயுள்ள விகிதம் 1 : 5 ஆகும் எனக் கூறலாம். ஒரு மூடை சிமெண்டும் 5 மூடை மணலும் பயன்படுத்தி னாலும் விகிதம் இதுதான். ஆனால் செங்கல் கட்டும்போது தேவைக்கேற்ப 1 : 10, 1 : 12 என்ற விகிதங்களில் சிமெண்டையும் மணலையும் சேர்க்க வேண்டும்.

பாகங்களின் விகிதம்

ஒரு பொருளின் பாகங்களை ஒப்பிட்டுப் பார்க்க விகிதம் பயன்படுத்தலாம். உதாரணமாக, இந்தப் படத்தில் இளம் நிறமுள்ள பாகம் வட்டத்தின் $\frac{3}{8}$ பாகமும், அடர்நிறமுள்ள பாகம் வட்டத்தின் $\frac{5}{8}$ பாகமும் ஆகும்



இவை இரண்டும் சேர்ந்தால் முழு வட்டமாகும். இந்த இரு பாகங்களினுடைய அளவுகளுக் கிடையே உள்ள விகிதம் 3 : 5



இப்படிப் பார்க்கும் போது 3 : 5 எனும் விகிதம் $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$ என்ற இரண்டு பின்ன எண்களால் குறிப்பிடப்படுகிறது.

பொதுவாகக் கூறினால் இதுபோன்ற சூழ்நிலை களில் எல்லாம் இரண்டு எண்களினுடைய விகிதம் குறிப்பிடுவது தொகை 1ம் பகுதிகள் சமமானதுமான பின்ன எண்களாகும்.

இதுபோதாது என்றவுடன் மீண்டும் 15 லிட்டர் பச்சை பெயிண்ட் எடுத்தனர். இதில் எத்தனை லிட்டர் வெள்ளை சேர்க்க வேண்டும்?

முதலில் உள்ள நிறம் கிடைக்க வேண்டுமெனில் நிறங்களின் விகிதம் மாறக் கூடாது.

முதலில் பச்சையும் வெள்ளையும் எந்த விகிதத்தில் சேர்க்கப்பட்டது?

அதாவது, 5 லிட்டர் பச்சை நிறத்திற்கு 4 லிட்டர் வெள்ளை நிறம் என்பதுதான் கணக்கு.

இந்த விகிதத்தில்தான் இருக்க வேண்டுமெனில் 15 லிட்டர் பச்சைக்கு எத்தனை லிட்டர் வெள்ளை சேர்க்க வேண்டும்?

5 இன் எத்தனை மடங்கு 15?

அப்படியானால் 4 லிட்டரின் 3 மடங்கு வெள்ளை சேர்க்க வேண்டும்.

அதாவது 12 லிட்டர்,

இதே பச்சை நிறம் கிடைப்பதற்கு 16 லிட்டர் வெள்ளையுடன் எத்தனை லிட்டர் பச்சை சேர்க்க வேண்டும்?

இதுபோன்று இந்தக் கணிதச் செயல்களைச் செய்து பார்க்கவும்:

- தோசை செய்ய 6 கிண்ணம் அரிசிக்கு 2 கிண்ணம் உளுந்து என்பதுதான் கணக்கு. 9 கிண்ணம் அரிசி எடுத்தால், எத்தனை கிண்ணம் உளுந்து எடுக்க வேண்டும்?
- நிஸாரின் வீட்டின் சுவற்றைப் பூசுவதற்குச் சிமெண்டும் மணலும் 1:5 எனும் விகிதத்தில் பயன்படுத்தினார்கள். இதற்காக 45 மூடை சிமெண்ட் வாங்கினார்கள். மணல் எத்தனை மூடை வாங்க வேண்டும்?
- வீட்டிற்கு வர்ணம் அடிக்க 24 லிட்டர் வர்ணத்துடன் 3 லிட்டர் டர்பன்டைன் சேர்க்கப்பட்டது. 32 லிட்டர் வர்ணத்துடன் எத்தனை லிட்டர் டர்பன்டைன் சேர்க்க வேண்டும்?
- ஊராட்சிக்கு உட்பட்ட ஒன்றாம் வார்டில் பெண்கள், ஆண்களின் எண்ணிக்கை 11:10 என்ற விகிதத்தில் உள்ளது. இங்கே 3311 பெண்கள் இருக்கிறார்கள். இங்கே எத்தனை ஆண்கள் இருப்பார்கள்? மொத்த மக்கட்தொகை எவ்வளவு?
- ஒரு பள்ளியிலுள்ள ஆசிரியர்களில் பெண்களின் எண்ணிக்கைக்கும் ஆண்களின் எண்ணிக் கைக்கும் இடையேயுள்ள விகிதம் 5:1 ஆகும். 6 பேர் ஆண்கள் எனில் பெண்கள் எத்தனை பேர்?
- அலியும் அஜயனும் ஒன்றாகச் சேர்ந்து ஒரு கடை தொடங்கினார்கள். அலி 5000 ரூபாயும் அஜயன் 3000 ரூபாயும் முதலீடு செய்தார்கள். ஒரு மாதம் சென்றவுடன் கிடைத்த இலாபத்தை அவர்கள் செய்த முதலீட்டின் விகிதத்தில் பிரித்தார்கள். அலிக்கு 2000 ரூபாய் கிடைத்தது. அஜயனுக்கு எவ்வளவு கிடைத்திருக்கும்?மொத்தம் இலாபம் எவ்வளவு?

பங்குக் கணக்கு

இட்லி செய்வதற்கு அரிசியும் உளுந்தும் 2 : 1 என்ற விகிதத்தில் எடுக்க வேண்டும் என்று சொன்னோமல்லவா? அரிசியும் உளுந்தும் சேர்ந்து மொத்தம் 9 கிண்ணம் எடுக்கப்பட்டன. இதில் அரிசி எத்தனை கிண்ணம் எடுக்கப்பட்டன?

2 கிண்ணம் அரிசியும் 1 கிண்ணம் உளுந்தும் எடுத்தால் மொத்தம் 3 கிண்ணமானது.

இங்கு மொத்தம் 9 கிண்ணம் எடுக்கப்பட்டுள்ளது.

3 இன் எத்தனை மடங்கு 9?

விகிதம் கடைப்பிடிக்க, அரிசியும் உளுந்தும் 3 மடங்குதான் எடுக்க வேண்டும்.

அப்படியானால் அரிசி 6 கிண்ணமும், உளுந்து 3 கிண்ணமும் ஆகும்.

வேறொரு கணக்கு,

ஒரு கூட்டுறவுச் சங்கத்தில் உறுப்பினர்களாக 600 ஆண்களும், 400 பெண்களும் உள்ளனர். இதிலிருந்து 30 நபர்களைச் செயற்குழு உறுப்பினர்களாகத் தேர்வு செய்ய வேண்டும். சங்க உறுப்பினர்களின் விகிதத்தின் அடிப்படையில்தான் ஆண், பெண்களின் எண்ணிக்கை இருக்க வேண்டும். செயற்குழு உறுப்பினர்களாக எத்தனை ஆண்களும், எத்தனை பெண்களும் தேர்வு செய்யப்பட வேண்டும்?

சங்கத்தில் மொத்த ஆண்கள், பெண்களின் விகிதம் 3 : 2 அல்லவா?

3 ஆண்களும் 2 பெண்களும் சேர்ந்தால் 5 பேர்களாவர். இங்கே 30 பேர்கள் தேவைப்படுகிறார்கள்.

5 இன் எத்தனை மடங்கு 30?

அப்படியானால் செயற்குழுவில் $3 \times 6 = 18$ ஆண்களும் $2 \times 6 = 12$ பெண்களும் இருக்க வேண்டும்.

மேலும் ஒரு கணிதச் செயல்பாடு: பள்ளியில் செவ்வக வடிவிலான ஒரு காய்கறித்தோட்டம் உருவாக்க, ஒரு இடத்தைக் கயிறு கட்டி வேறுபடுத்த வேண்டும். ஹரியும், மேரியும் 24 மீட்டர் நீளமுள்ள கயிற்றால் செவ்வகமாக்கத் தொடங்கினார்கள். அகலமும் நீளமும் 3 : 5 என்ற விகிதத்தில் இருந்தால் நன்றாக இருக்கும் என்று விமலா ஆசிரியைக் கூறினார்கள். அகலமும் நீளமும் எத்தனை மீட்டராக இருக்க வேண்டும்?

கயிற்றின் நீளம் 24 மீட்டராகும். ஆகையால் செவ்வகத்தின் சுற்றளவும் இதுதான்.

3 மீட்டர் அகலமும், 5 மீட்டர் நீளமும் என எடுத்தால் சுற்றளவு எவ்வளவு?

விகிதமென்றால்

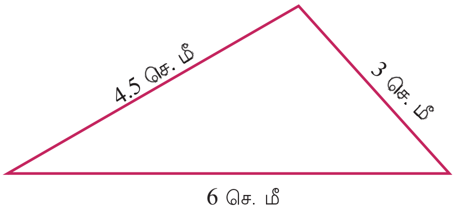
இரு அளவுகளின் விகிதம் மட்டும் தெரியுமானால் அது ஒவ்வொன்றும் எவ்வளவு எனக் கூற இயலாது. ஆனால் அவை ஒவ்வொன்றையும் பலவழிகளில் ஒப்பீடு செய்யலாம். எடுத்துக் காட்டாக, இரு பாத்திரங்களின் உள் அளவுகளுக்கிடையே உள்ள விகிதம் 2 : 3 என்பதைக் கீழே கூறப்பட்டுள்ளது போல் எல்லாம் விளக்கலாம்.

- சிறிய பாத்திரம் நிரப்ப, பெரிய பாத்திரத்தின் $\frac{2}{3}$ பாகம் தண்ணீர் போதும்.
- பெரிய பாத்திரம் நிரப்ப, சிறிய பாத்திரத்தின் $\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$ மடங்கு தண்ணீர் வேண்டும்.
- சிறிய பாத்திரத்தின் $\frac{1}{2}$ பாகம் தண்ணீர் எடுத்தாலும், பெரிய பாத்திரத்தின் $\frac{1}{3}$ பாகம் தண்ணீர் எடுத்தாலும் ஒரே அளவுதான் கிடைக்கும்.
- இரண்டு பாத்திரங்களிலும் நிரம்பத் தண்ணீர் எடுத்து வேறொரு பாத்திரத்தில் ஊற்றினால் அதன் $\frac{2}{5}$ பாகம் சிறிய பாத்திரத்தில் இருந்தும், $\frac{3}{5}$ பாகம் பெரிய பாத்திரத்தி லிருந்தும் கிடைத்ததாகும்.

இரு கயிறுகளின் நீளம் 3 : 5 எனும் விகிதத்திலாகும் என்று சொன்னால், இதுபோன்று என்னவெல்லாம் விளக்கங்கள் அதிலிருந்து புரிந்து கொள்ள முடியும்?

மூன்று அளவுகள்

இந்த முக்கோணத்தைப் பார்க்கவும்.



இந்த முக்கோணத்தில் மிகப் பெரிய பக்கம், மிகச் சிறிய பக்கத்தின் இரு மடங்காகும். மற்றொரு பக்கத்தின் அளவு, மிகச் சிறிய பக்கத்தின் ஒன்றரை மடங்காகும்.

விகிதத்தைப் பயன்படுத்திக் கூறுவோமானால் மிகச் சிறிய பக்கத்திற்கும், மிகப் பெரிய பக்கத்திற்கும் இடையேயுள்ள விகிதம் 1 : 2 ஆகும். மிகச் சிறிய பக்கத்திற்கும் மற்றொரு பக்கத்திற்கும் இடையேயுள்ள விகிதம் 2 : 3 ஆகும்.

மற்றொரு பக்கத்திற்கும், மிகப் பெரிய பக்கத்திற்கும் இடையேயுள்ள விகிதம் என்ன?

இவற்றையெல்லாம் வேறொரு முறையிலும் கூறலாம்: 1.5 சென்டிமீட்டர் நீளமுடைய ஒரு கயிற்றைக் கொண்டு அளவிடுவோமானால், மிகச் சிறிய பக்கத்தின் நீளம் 2, மற்றொரு பக்கத்தின் நீளம் 3, மிகப் பெரிய பக்கத்தின் நீளம் 4, இதைச் சுருக்கமாக மூன்று பக்கங்களுக்கு இடையேயுள்ள விகிதம் 2 : 3 : 4 என்றும் கூறலாம்.

பக்கம் தந்திருக்கே
பிறகு ஏன் விகிதம் கண்டுபிடிக்க
இவ்வளவு சோம்பேறித்தனம்?

16 இன் எத்தனை மடங்கு 24?

$$\frac{24}{16} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$$

அப்படியானால் அகலம், 3 மீட்டரின் $1\frac{1}{2}$ மடங்கு;

அதாவது $3 \times 1\frac{1}{2} = 4\frac{1}{2}$ மீட்டர்

நீளம், 5 மீட்டரின் $1\frac{1}{2}$ மடங்கு; அதாவது

$$5 \times 1\frac{1}{2} = 7\frac{1}{2} \text{ மீட்டர்}$$

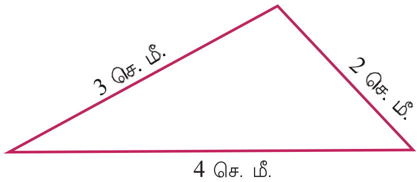
இந்தக் கணித செயல்களைச் செய்து பார்க்கவும்.

- சுஹ்ராவும், சீதாவும் சேர்ந்து ஒரு வியாபாரம் தொடங்கினர். சுஹ்ரா 40000 ரூபாயும், சீதா 30000 ரூபாயும் முதலீடு செய்தார்கள். இலாபமாகக் கிடைத்த 7000 ரூபாயை முதலீடு செய்த ரூபாயின் விகிதத்தில் பங்கிட்டார்கள். ஒவ்வொருவருக்கும் எவ்வளவு ரூபாய் பங்காகக் கிடைத்திருக்கும்?
- ஜானும், ரமேஷும் ஒரு வேலையைச் செய்தார்கள். ஜான் 7 நாட்களும் ரமேஷ் 6 நாட்களும் வேலை செய்தார்கள். வேலை செய்த நாட்களின் விகிதத்தின் அடிப்படையில் கூலியாகக் கிடைத்த 6500 ரூபாயைப் பங்கிட்டார்கள். ஒவ்வொருவருக்கும் எவ்வளவு ரூபாய் பங்காகக் கிடைக்கும்?
- ஒரு கோட்டுச் ஜோடியின் கோணங்கள் 4 : 5 எனும் விகிதத்திலாகும். ஒவ்வொரு கோணத்தின் அளவும் எவ்வளவு?
- 9 சென்டிமீட்டர் நீளத்தில் AB என்ற ஒரு கோடு வரையவும். கோட்டில் P என்ற புள்ளி அடையாளப் படுத்தவும். AP, PB என்பனவற்றின் நீளங்கள் $1 : 2$ என்ற விகிததில் இருக்கும். எனில் A யிலிருந்து எவ்வளவு தூரத்தில் P அடையாளப்படுத்த வேண்டும்? கணிதச் செயல்கள் செய்து அடையாளப் படுத்தவும்.
- 15 சென்டிமீட்டர் நீளமுள்ள ஒரு கோடு வரையவும். இந்தக் கோட்டை 2 : 3 என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளியை அடையாளப்படுத்தவும். நீளங்களைக் கணக்கிட்டுப் புள்ளியை அடையாளப்படுத்தவும்.

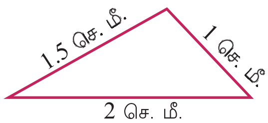
- சீதாவும், சோபியும் குறிப்பிட்ட ஒரு தொகையை 3: 2 என்ற விகிதத்தில் பங்கிட்டபோது சீதாவுக்கு 480 ரூபாய் கிடைத்தது. பங்கு வைத்த மொத்தத் தொகை எவ்வளவு?
- ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தில் செங்கோண மில்லாத கோணங்கள் 1 : 4 என்னும் விகிதத்திலாகும். கோணங்களைக் கண்டுபிடிக்கவும்..
- 30 சென்டிமீட்டர் சுற்றளவும், பக்கங்களின் நீளம் 1 : 2 என்ற விதத்தில் ஒரு செவ்வகம் வரையவும். இதே சுற்றளவில் பக்கங்களின் விகிதங்கள் 2 : 3உம், 3 : 7உம் ஆன செவ்வங்கள் வரையவும். மூன்று செவ்வகங்களின் பரப்பளவுகளைக் கணக்கிடவும்.

முக்கோணக் கணக்கு

பக்கங்களின் விகிதம் 2 : 3 : 4 என அமையும் எத்தனை முக்கோணங்கள் உள்ளன?
பக்கங்களின் நீளம் 2 சென்டிமீட்டர், 3 சென்டிமீட்டர், 4 சென்டிமீட்டர் ஆகலாம்.



இல்லாவிடில் 1 சென்டிமீட்டர் 1.5 சென்டிமீட்டர், 2 சென்டிமீட்டர்



சென்டிமீட்டருக்குப் பதிலாக மீட்டரும் ஆகலாம். இப்படிப் பல வழிகள் இருக்கின்றன.
இவ்வாறு வரும் முக்கோணங்களில் எல்லாம் மிகச் சிறிய பக்கம் சுற்றளவின் எத்தனை பாகமாகும்?
இடைப்பட்ட பக்கமாக இருந்தால்?
மிகவும் நீளம் கூடிய பக்கமானால்?
பக்கங்களின் விகிதம் 5 : 7 : 8 உம் சுற்றளவு 80 சென்டிமீட்டரும் ஆன முக்கோணத்தின் பக்கங் களின் நீளம் கண்டுபிடிக்கலாமா?
சுற்றளவு 1 மீட்டரானால்?

மீள்பார்வை

கற்றல் அடைவுகள்	என்னால் இயலும்	ஆசிரியர் உதவியுடன் இயலும்	இன்னும் மேம்பட வேண்டியுள்ளது
• இரண்டு அளவுகளுக்கு இடையேயுள்ள விகிதம் மிகவும் சிறிய எண்ணல் எண்களைப் பயன்படுத்திக் கூறுதல்			
• இரு அளவுகளுக்கு இடையேயுள்ள விகிதத்தை மாறுபட்ட வழிகளில் விளக்குதல்.			
• குறிப்பிட்ட விகிதத்திலுள்ள இரு அளவுகளில் ஒன்றின் அளவு தரப்பட்டிருந்தால் மற்றொன் றின் அளவு எவ்வளவு எனக் கணக்கீடு செய்யக் கூடிய வழியை விவரித்தல்.			
• ஒரு எண்ணைக் குறிப்பிட்ட விகிதத்தில் பாகங்களாக்குதல்.			
• நடைமுறைப் பிரச்சினைகளுக்கு விகிதங்கள் உபயோகித்துத் தீர்வு காணுதல்.			

10

பண வாணிபம்

10 பண வாணிபம்

வாணிபக் கணக்குகள்

மிகப் பழங்காலம் முதலே மனிதர்கள் பலவகை வாணிபங்கள் செய்து வந்தனர். ஒரு பசுவுக்கு இரண்டு ஆடுகள் என்றும், ஒரு பலாப்பழத்துக்கு ஐந்து மாம்பழங்கள் என்றும் பண்டமாற்று முறை முற்காலத்தில் நடைபெற்று வந்தது.

தொடர்ந்து, பொருட்களுக்குப் பதில் அவற்றின் மதிப்பைக் குறிப்பிடப் பலவித நாணயங்களைப் பயன்படுத்தத் தொடங்கினர். இத்தகைய வாணிபங்களைச் சரியாகச் செய்வதற்கு எண்களைப் பயன் படுத்திய செயல்பாடுகள் தேவைப்பட்டன. அவ்வாறே இத்தகைய கணக்குகளும் கணிதக் கற்றலின் பாகமாக மாறிற்று.

காய்கறி விலை

நாகர்கோவிலிலும் திருவனந்தபுரத்திலும் காய்கறிகளின் விலை விவரப் பட்டியல் கீழ்வருமாறு.

காய்கறி விலை (1 கிலோ கிராம்)		
இனம்	**திருவனந்தபுரம்**	**நாகர்கோவில்**
பீட்ரூட்	35 ரூபாய்	24 ரூபாய்
முட்டைக்கோஸ்	45 ரூபாய்	30 ரூபாய்
காரட்	60 ரூபாய்	50 ரூபாய்
மிளகாய்	76 ரூபாய்	60 ரூபாய்

விலை வேறுபாட்டுக்குக் காரணம் என்னவாக இருக்கும்?

- வாகன வாடகை
-
-

மஜித் ஒரு காய்கறிக்கடைக்காரர். அவர் 4000 ரூபாய்க்குச் சேனைக் கிழங்கு வாங்கினார். ஒரு கிலோகிராமுக்குக் கொடுத்தது ரூ.20. அங்கு வைத்தே கிலோகிராமுக்கு 25 ரூபாய்க்கு விற்றார். இந்த வியாபாரத்தில் அவருக்கு எவ்வளவு ரூபாய் இலாபம் கிடைத்திருக்கும்?

- எத்தனை கிலோகிராம் சேனை வாங்கினார்?
- மொத்தம் எத்தனை ரூபாயக்கு விற்றார்?
- வாங்குவதற்கு எவ்வளவு ரூபாய் செலவானது?
- இலாபம் எவ்வளவு ரூபாய்?

அடுத்த நாளும் மஜீது கிலோகிராமுக்கு 20 ரூபாய் வீதம் 200 கிலோ சேனை வாங்கினார். அருகிலுள்ள சந்தைக்கு கொண்டு செல்ல வாகனத்துக்கு ரூ.200 வாடகை ஆயிற்று. அங்கு, கிலோகிராமுக்கு ரூ.25 வீதம் விற்றார். அவருக்கு மொத்தம் எவ்வளவு இலாபம் கிடைத்தது?

இங்கு மஜீத் மொத்தம் எவ்வளவு ரூபாய் செலவாக்கினார்? கண்டுபிடிக்க வேண்டுமானால் சேனையின் விலையுடன் வாகன வாடகையையும் கூட்ட வேண்டுமல்லவா?

ஒரு கூட்டுறவுச் சங்கம் ஒரு கிலோகிராம் 25 ரூபாய் வீதம் 100கி.கி கோதுமை வாங்கியது. அதைக் கழுவி உலர்த்திப் பொடித்துப் பொட்டலங்களில் அடைப்பதற்கு ரூ.500 செலவாயிற்று. ஒரு பொட்டலம் கோதுமைமாவு ரூ.35 வீதம் 100 பொட்டலங்கள் விற்பனைக்குத் தயாராக்கப்பட்டன. இதில் 20 பொட்டலம் கோதுமைமாவு வீணாகிப்போனது. இந்த விற்பனையில் சங்கத்திற்கு இலாபமா, நஷ்டமா? எவ்வளவு ரூபாய்?

- சென்டுக்கு 75000 ரூபாய் வீதம் தோமஸ் 10 சென்டு இடம் வாங்கினார். 50000 ரூபாய் செலவு செய்து சுற்றுச்சுவர் கட்டினார். கிணறு வெட்ட ரூபாய் 60000 செலவாயிற்று. பின்னர், சென்று 90000 ரூபாய் விலைக்கு விற்றார். இந்த விற்பனையில் அவருக்கு இலாபமா, நஷ்டமா? எவ்வளவு ரூபாய்?
- ஒரு விற்பனையாளர் குவிண்டலுக்கு 19850 ரூபாய் வீதம் 20 குவிண்டல் ரப்பர் வாங்கினார். அதனைக் கடையில் கொண்டு சேர்க்க ரூபாய் 3000 செலவாயிற்று. ரப்பரின் விலை குறைந்ததால் குவிண்டலுக்கு 18250 ரூபாய்க்கு விற்க வேண்டியதாயிற்று. அவருக்கு எத்தனை ரூபாய் நஷ்டமானது?

பழ விற்பனை

சஜியின் பழக்கடையில் விலை விவரப் பட்டியல் கீழ் வருமாறு:

இனம்	விலை (1 கிலோ கிராமுக்கு)
ஆரஞ்சு	60
திராட்சை	52
ஆப்பிள்	110
மாம்பழம்	65

குவிண்டலும் டன்னும்

முன்பு நீளத்தையும் எடையையும் அளக்கப் பல இடங்களிலும் பல அலகுகள் பயன்படுத்தப் பட்டன. இப்போது பெரும்பாலும் எல்லா இடங்களிலும் இவற்றை ஒன்றாக்கி மெட்ரிக் முறையில் ஆக்கியுள்ளனர்.

பழைய காலத்திலிருந்தே எடையை அளக்க அடிப்படை அலகின் நூறு மடங்கு என்ற முறையில் பல இடங்களிலும் குவிண்டல் என்ற அலகு பயன்படுத்தப்பட்டுள்ளது. மெட்ரிக் முறை பயன்பாட்டில் வந்தபோது இது 100 கிலோகிராம் என முறைப்படுத்தப்பட்டது.

தொடக்கக் காலத்தில் இங்கிலாந்திலும் ஒரு டன் (ton) எனில் 2240 பவுண்டு (இன்றைய 1016 கிலோகிராம்) எனக் கணக்கிட்டார்கள். மெட்ரிக் முறையில் ஒரு டன் (tonne) என்பது 1000 கிலோகிராம் ஆகும். வேறுபடுத்தி அறிவதற்கு இதனை மெட்ரிக் டன் எனவும் கூறுவது உண்டு.

மெட்ரிக் முறையில் பொதுவான பெயர் பயன்படுத்தினால் ஒரு டன் என்பது ஒரு மெகா கிராம் (1000000 கிராம்) ஆகும்.

வணிகப் படிநிலைகள்

இன்றைய உலகில் பலவகைப் பொருட்கள் உற்பத்தியாளருக்கும் அவற்றை வாங்கிப் பயன் படுத்துபவருக்கும் இடையில் பல நிலைகள் உள்ளன. உற்பத்தி செய்பவரிடமிருந்து பலவித இடமாற்றம் பெற்று இறுதியில் பொருட்கள் பயனீட்டாளரை வந்து சேருகின்றன. சுருங்கக் கூறின், பல உற்பத்தியாளர்களிடமிருந்து விற்பனைப் பொருட்களை வாங்கிச் சேர்த்து அதனை வேறு விற்பனையாளருக்கோ அல்லது நிறுவனங்களுக்கோ விற்பவரே மொத்த விற்பனை யாளர். (Whole salers). உற்பத்திப் பொருட்கள் இறுதியில் பயனீட்டாளருக்கு விற்பவர் சில்லறை விற்பனையாளர் (Retailer). இவருக்கிடையில் வேறுபல பரிமாற்றங்கள் நடைபெறுகின்றன. ஒவ்வொரு நிலைகளிலும் செலவுகளுக்கு ஏற்ப விலை கூடுகிறது.

அவர் ஆரஞ்சும் மாம்பழமும் கிலோகிராமுக்கு 50 ரூபாய்க்கு வாங்குகிறார். திராட்சை கிலோகிராமுக்கு 40 ரூபாய்க்கும் ஆப்பிள் 100 ரூபாய்க்கும் வாங்குகிறார். எந்த விற்பனையில் அவருக்குக் கூடுதல் இலாபம் கிடைக்கும்?

50 ரூபாய்க்கு வாங்கும் ஆரஞ்சு 60 ரூபாய்க்கும் அதே விலைக்கு வாங்கும் மாம்பழம் 65 ரூபாய்க்கும் விற்கப்படுகின்றன. இதில் கூடுதல் இலாபம் மாம்பழம் அல்லவா? ஏனெனில் ஒரே தொகை செலவாக்கும்போது கூடுதல் இலாபம் கிடைப்பது மாம்பழத்தில்.

100 ரூபாய்க்கு ஆப்பிள் வாங்கி 110 ரூபாய்க்கு விற்கும் போது இலாபம் 10 ரூபாய்.

50 ரூபாய்க்கு ஆரஞ்சு வாங்கி 60 ரூபாய்க்கு விற்றால் எவ்வளவு இலாபம் கிடைக்கும்?

இவற்றில் எந்த விற்பனை சிறந்தது என எப்படிக் கணக்கிடலாம்?

50 ரூபாய்க்கு வாங்கின ஆரஞ்சு விற்றபோதும் 100 ரூபாய்க்கு வாங்கிய ஆப்பிள் விற்றபோதும் இலாபம் 10 ரூபாய். அதனால் குறைந்த அசல் உள்ள ஆரஞ்சு விற்பனைதான் கூடுதல் இலாபம்.

திராட்சை 40 ரூபாய்க்கு வாங்கி 52 ரூபாய்க்கு விற்றார்.

ஆரஞ்சு 50 ரூபாய்க்கு வாங்கி 60 ரூபாய்க்கு விற்றார்.

இவற்றில் எதன் விற்பனை இலாபமானது?

இவை இரண்டையும் நூறு ரூபாய்க்கு வாங்கினால்?

2 கிலோ கிராம் ஆரஞ்சு 100 ரூபாய்க்கு வாங்கலாம். அதை 60 x 2 = 120 ரூபாய்க்கு விற்றார். இலாபம் 20 ரூபாய்.

100 ரூபாய்க்கு எத்தனை கிலோ திராட்சை வாங்கலாம்?

80 ரூபாய்க்கு 2 கிலோகிராம் வாங்கலாம். மீதியுள்ள 20 ரூபாய்க்கு $\frac{1}{2}$ கிலோகிராம் அதிகமாக வாங்கலாம்.

மொத்தம் கிலோகிராம். இதை எவ்வளவு ரூபாய்க்கு விற்கலாம்?

$52 \times$ = 104 + 26 = 130 ரூபாய்.

இலாபம் = 30 ரூபாய்.

இரண்டிற்கும் செலவானது 100 ரூபாய் எனக் கணக்கிடும் போது ஆரஞ்சு விற்பனையை விட இலாபமானது திராட்சை விற்பனைதான் என்ற வேறுபாடு காணமுடிந்தது.

இந்த முறையை எளிதாக்கச் சதவீதம் பயன்படுத்தலாம்.

ஆரஞ்சு விற்கும்போது இலாபம், வாங்கிய விலையின் $\frac{10}{50} = \frac{1}{5}$ பாகமாகும்.

சதவீதமாகக் கூறினால்?

$\frac{1}{5}$ பாகம் என்றால், $\frac{1}{5} \times 100 = 20$ சதவீதம்

திராட்சை விற்கும்போது உள்ள இலாபம், வாங்கிய விலையின் $\frac{12}{40} = \frac{3}{10}$ பாகமாகும்.

இதை சதவீதமாக்கினால் $\frac{3}{10} \times 100 = 30\%$.

இதுபோன்று,

ஆப்பிளின் இலாபம் $= \frac{10}{100} \times 100 = 10\%$

மாம்பழத்தின் இலாபம் $= \frac{15}{50} \times 100 = 30\%$

ஆகவே 30% வீதம் இலாபம் கிடைத்த மாம்பழமும் திராட்சையும் தான் கூடுதல் இலாபமானது.
வேறொரு கணக்கைப் பார்க்கலாம்:

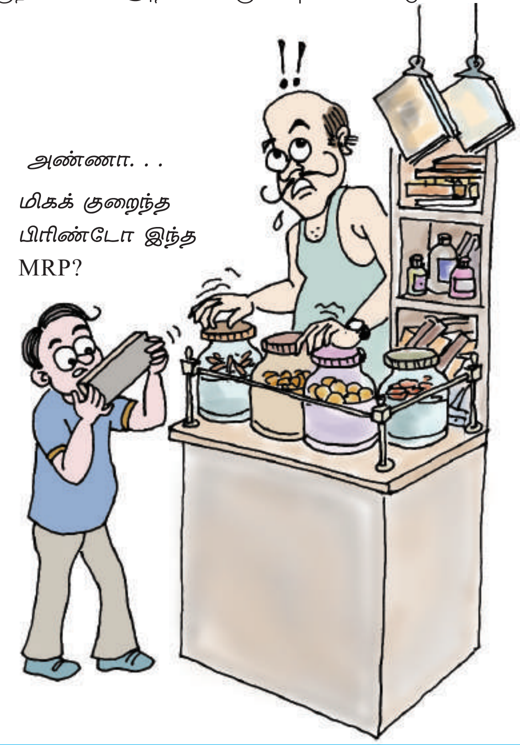
- ஒருவர் 650 ரூபாய்க்கு தேங்காய்கள் வாங்கி 598 ரூபாய்க்கு விற்றார். நஷ்டம் எத்தனை சதவீதம்?
  நஷ்டம் = 52 ரூபாய்

இது வாங்கிய விலையின் $\frac{52}{650} = \frac{2}{25}$ பாகமாகும்.

சதவீதமாக்கினால் $\frac{52}{650} \times 100 = 8\%$

மிகக்கூடிய சில்லறை விலை

இக்காலத்தில் குடி தண்ணீர் உட்படத் திரவங்களும், பலவகைத் தானியங்கள் உட்படும் உணவுப் பொருட்களும், சோப்பு, பற்பசை போன்றவையும் உறைகளிலும் புட்டிகளிலும் அடைத்து விற்கப்படுகின்றன. இந்தியாவில் இவ்வாறு அடைத்து விற்கப்படுபவற்றில் எல்லாவற்றிலும் மிகக் கூடுதல் சில்லறை விலை (maximum retail price - MRP) குறிப்பிட வேண்டும் என்பது சட்டம். எல்லா வரிகளும் சேர்ந்ததே இவ்விலை. பல வேளைகளிலும் சில்லறை விற்பனையாளர் MRP யை விடக் குறைந்த விலைக்குப் பொருட்கள் விற்பனை செய்வர். ஆனால் இந்த விலையை விடக் கூடுதல் விற்பனையாளர் வாங்கினால் பயனீட்டாளர் குறிப்பிட்ட அதிகாரிக்குப் புகார் கொடுக்கலாம்.



இப்படியும் ஒரு விற்பனை

ஒருவர் 10 ரூபாய்க்கு 12 பென்சில் வீதம் வாங்கினார். 10 பென்சிலுக்கு 12 ரூபாய் வீதத்தில் விற்கிறார் எனில் இந்த விற்பனையில் இலாபமா, நஷ்டமா? எத்தனை சதவீதம்?

- 5000 ரூபாய்க்கு வாங்கிய அலமாரியை 5600 ரூபாய்க்கு விற்றால் இலாபம் எவ்வளவு?
- 12000 ரூபாய்க்கு வாங்கின தொலைக்காட்சிப் பெட்டியை 10200 ரூபாய்க்கு விற்றால் நஷ்டம் எத்தனை சதவீதம்?
- அகில் ஒரு மீன் வியாபாரி. ஒருநாள் கிலோ கிராம் 140 ரூபாய் வீதம் 12 கிலோகிராம் மீன் வாங்கினார். அதைக் கடையில் கொண்டு சேர்க்க 120 ரூபாய் செலவானது. இதில் 4 கிலோகிராம் மீன் கெட்டுப் போயிற்று. மீதி உள்ளதைக் கிலோகிராம் 180 ரூபாய் வீதம் விற்றார். அவருக்கு இந்த விற்பனையில் இலாபமா, நஷ்டமா எத்தனை சதவீதம்?
- ஒமேகா ஸ்டோரில் 1728 ரூபாய்க்கு ஒரு மின் விசிறி விற்கும்போது 128 ரூபாய் இலாபம் கிடைக்கிறது. 2616 ரூபாய்க்கு ஒரு அலங்கார மின்விளக்கு விற்கும்போது 216 ரூபாய் இலாபம் கிடைக்கிறது. எந்தப் பொருள் விற்கும் போது விற்பனையாளருக்கு அதிக இலாபம் கிடைக்கிறது?
- ஒரு சில்லறை விற்பனையாளர் 150 கிலோகிராம் நல்ல மிளகு கிலோகிராமுக்கு 400 ரூபாய் வீதம் வாங்கி ஒரு கிலோகிராமுக்கு 60 ரூபாய் வீதம் இலாபத்தில் விற்கிறார்.
  - மொத்தம் எவ்வளவு ரூபாய்க்கு வாங்கினார்?
  - மொத்த விற்ற விலை எவ்வளவு ரூபாய்?
  - மொத்த இலாபம் எத்தனை ரூபாய்?
  - இலாப சதவீதம் எத்தனை?

வேறு சில கணக்குகள்

ஒரு கடைக்காரர் தேய்ப்புப் பெட்டி 1200 ரூபாய்க்கு வாங்கினார். அதனை விற்கும்போது 12 % இலாபம் கிடைக்க வேண்டும் என அவர் விரும்புகிறார். அப்படியென்றால் எத்தனை ரூபாய்க்கு இந்தத் தேய்ப்புப்பெட்டியை விற்க வேண்டும்?

இங்கு 1200 ரூபாய் கொடுத்துத் தேய்ப்புப்பெட்டி வாங்கப்பட்டது.

அதன் இலாபம் 12% வேண்டும்.

அதாவது, இலாபம் = 1200 × = 144 ரூபாய்

இனி விற்க வேண்டிய விலையைக் காண 1200 உடன் இலாபத்தைக் கூட்டினால் போதுமல்லவா?
நேரடியாக 1200 ரூபாயின் 112% கணக்கிட்டாலும் போதும்.

$$1200 \times \frac{112}{100} = 1344 \text{ ரூபாய்}$$

ஒரு விற்பனையில் 10% நஷ்டம் எனில் விற்ற விலை, வாங்கிய விலையின் எத்தனை சதவீதமாகும்?

விற்ற விலை கணக்கிடுக.

முதலீடு	இலாம்/நஷ்டம்
1500	15% இலாபம்
2400	20% நஷ்டம்
8000	8% இலாபம்
1650	13% நஷ்டம்

ஒரு சைக்கிள் 4500 ரூபாய்க்கு விற்றபோது 10% நஷ்டமானது. அதனை வாங்க விற்பனையாளர் எத்தனை ரூபாய் கொடுத்திருப்பார்?
நஷ்டம் 10% ஆனதால் வாங்கின விலையின் 90% விற்ற விலை ஆகும்.
அதாவது,

$$\text{வாங்கின விலை} \times \frac{90}{100} = 4500$$

இதிலிருந்து, வாங்கின விலை

$$= 4500 \times \frac{10}{9} = 5000 \text{ ரூபாய்}$$

எனக் கணக்கிடலாம்.

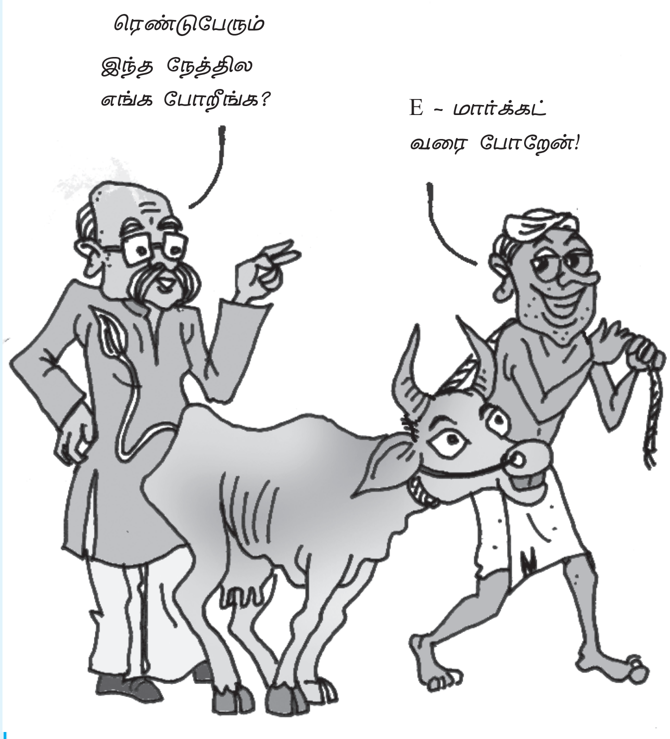
- முதலீடு கணக்கிடுக.

விற்ற விலை	இலாபம் / நஷ்டம்
4450	11% இலாபம்
8280	8% நஷ்டம்
6160	12% நஷ்டம்
1695	13% இலாபம்

- 270 ரூபாய்க்கு 10 கிலோகிராம் தக்காளி வாங்கியதில் ஒரு கிலோகிராம் அழுகிப் போயிற்று. அவருக்கு 20% இலாபம் கிடைக்க வேண்டுமெனில் மீதியுள்ளதை ஒரு கிலோ கிராம் எத்தனை ரூபாய்க்கு விற்க வேண்டும்?
- ஷைன் 3500 ரூபாய் வீதம் இரண்டு பெட்டி ஆப்பிள் விற்றபோது ஒரு பெட்டிக்கு 10% இலாபமும் ஒரு

கணினி வழியாக விற்பனை

கணினிச் செயல்பாடுகள் அதிகமானவுடன் இணைய தளங்கள் வழியாக உள்ள விற்பனைகள். (e-commerce) தொடங்கப்பட்டன. இவ்விதம் விற்பனை செய்யும் பல நிறுவனங்கள் இந்தியா விலும் உள்ளன. இவ்வலைத்தளங்களில் விற்கும் பொருட்களின் படமும் விலையும் காணலாம். நமக்கு வேண்டியதைத் தேர்ந்தெடுத்து இணைய தளம் வழியாக வங்கியிலிருந்து பணம் செலுத்தும் போது அது வீட்டில் கிடைக்கும்படியான வசதி செய்யப்பட்டிருக்கும். சில நிறுவனங்கள் பொருட் கள் கிடைக்கும்போது மட்டும் பணம் செலுத்தும் வசதியும் செய்துள்ளன.



பெட்டிக்கு 10% நஷ்டமும் ஆனது. இவ்வியாபாரத்தில் இலாபமா, நஷ்டமா? எத்தனை சதவீதம்?

ஒரு பெட்டி ஆப்பிளுக்கு 20% இலாபமும் வேறொன்றுக்கு 20% நஷ்டமும் ஆனால்?

- ஒரு சலவை இயந்திரத்தை 12000 ரூபாய்க்கு விற்றபோது, 20% இலாபம் கிடைத்தது. எனில், அதன் முதலீடு எவ்வளவு? புது வருடத்தில் அது 1200 ரூபாய் குறைவாக விற்கப்படுகிறது. இப்போது விற்பனையாளருக்கு இலாபமா, நஷ்டமா? எத்தனை சதவீதம்?

கூட்டிய பின் குறைத்தால்

50% விலை குறைத்து விற்கப்பட்ட ஆடைகள் மீண்டும் 50% விலை குறைத்து விற்கப்படுகிறது.

இந்த ஆடைகள் இலவசமாகக் கிடைக்குமா?

விற்பனையாளர் ஒரு உற்பத்திப் பொருளின் விலை 20% கூட்டிய பின் 20% விலை குறைத்து விற்கிறார். அவருக்கு லாபமா, நஷ்டமா? எத்தனை சதவீதம்?

25% விலை கூட்டிய பின்னர் 20% தள்ளுபடி செய்து விற்றால்?

தள்ளுபடி

பண்டிகைக் காலங்களில் இத்தகைய விளம்பரங்களைச் சாதாரணமாகக் காண்கிறோமல்லவா?.

பல நிறுவனங்கள் விற்பனையைப் பெருக்குவதற்காக முன்னர் விற்பனை செய்த விலையைப் குறைத்து விற்கின்றனர். இதனைத் தள்ளுபடி (Discount) என்கிறோம்.

எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு துணிக் கடையிலிருந்து 500 ரூபாய் விலை குறிப்பிட்ட ஒரு சட்டை வாங்கும் போது 20% தள்ளுபடி கொடுக்கப்படுகிறது. அதாவது சட்டை வாங்கும் போது 500 ரூபாயின் 20% குறைத்துக் கொடுத்தால் போதும்.

வேறொரு முறையில் கூறினால், 500 ரூபாயின் 80% தான் விலையாகும்.

$500 \times \quad = 400$ ரூபாய்

சட்டையில் குறித்த விலை 500 ரூபாய், அதன் விளம்பர விலை ஆகும். விளம்பர விலையின் அடிப்படையிலேயே பொதுவாகத் தள்ளுபடி கணக்கிடப்படுகிறது.

- ஜார்ஜ் ஒரு அலமாரி வாங்கியபோது 8% தள்ளுபடி கிடைத்தது. அதில் 960 ரூபாய் குறைந்தது. அந்த அலமாரியின் விளம்பர விலை என்ன? ஜார்ஜ் கொடுத்த ரூபாய் எவ்வளவு?

  தள்ளுபடியாகக் கிடைத்தது விளம்பர விலையின் 8% ஆகும். அதாவது

  விளம்பர விலை $\times \frac{8}{100} = 960$ ரூபாய்

இதிலிருந்து,

விளம்பர விலை $= 960 \times \frac{100}{8} = 12000$ ரூபாய்

எனக் கணக்கிடலாம்.

இனி விளம்பர விலையிலிருந்து தள்ளுபடியைக் குறைத்தால் ஜார்ஜ் கொடுத்த தொகை கிடைக்கும்.

- ஒரு சவரன் (8 கிராம்) தங்கத்தின் விலை 22500 ரூபாய். தங்கத்தின் விலையின் 6% செய்கூலி ஆகும். ஒரு கடை செய்கூலியில் 20% தள்ளுபடி கொடுக்கிறது. இங்கிருந்து ஒரு சவரன் எடை உள்ள ஒரு வளையல் வாங்க எத்தனை ரூபாய் கொடுக்க வேண்டும்?

  செய்கூலி தங்கத்தின் விலையில் 6% அல்லவா.

  செய்கூலி $= 22500 \times \frac{6}{100}$

  $= 1350$ ரூபாய்

1350 ரூபாயில் 20% தள்ளுபடி கொடுப்பதினால் அதன் 80% கொடுத்தால் போதுமல்லவா.

தள்ளுபடி கழித்துவரும் செய்கூலி $= 1350 \times \frac{80}{100}$

இனி, வளையலின் விலை கண்டுபிடிக்கத் தங்கத்தின் விலையுடன் செய்கூலி கூட்டினால் போதும்.

- காந்தி பிறந்த நாளுக்கு 30% தள்ளுபடி அனுமதித்த போது ஒருவர் 3500 ரூபாய் கொடுத்து கதர் ஆடைகள் வாங்கினார். அவருக்கு எவ்வளவு ரூபாய் மதிப்புள்ள ஆடைகள் கிடைத்தன?

  விலையின் 30% குறைவாகக் கிடைத்தது. எனவே கொடுத்தது 70%.

பலவகை தள்ளுபடிகள்

இந்தியாவில் அங்கீகரிக்கப்பட்ட நிறுவனங்களிலிருந்து காதி அல்லது கைத்தறி துணி வகைகள் வாங்கும்பொழுது 10% விலை தள்ளுபடியாகக் கிடைக்கும். சில விஷேச நாட்களில் இது 30% வரை கூட ஆகலாம். இதனுடைய தொகையை இந்த நிறுவனங்களுக்கு அரசு கொடுக்கிறது. இந்த விலைத் தள்ளுபடியை ஆங்கிலத்தில் Rebate என்று சொல்லுவர்.

அமெரிக்கா போன்ற நாடுகளில் Rebate என்ற சொல்லுக்கு வேறொரு பொருள் உண்டு. ஒரு பொருள் வாங்கிய பிறகு, சில விவரங்கள் நிரப்பி அனுப்பினால் விலையின் ஒரு குறிப்பிட்ட சதவிகிதம் திருப்பிக் கொடுப்பதென்பதாகும்.

அதாவது, விலை $\times \frac{70}{100} = 3500$

இதிலிருந்து விலை காணலாமா?

தொலைக்காட்சிப் பெட்டி விற்கும் கடையில் இரண்டு விளம்பரங்களைக் கவனியுங்கள்:

20 அங்குலம்	21 அங்குலம்
11900	12900
20% தள்ளுபடி	20% தள்ளுபடி

- 10,000 ரூபாய் கையிலுள்ள ஒருவருக்கு இதில் எந்தத் தொலைக்காட்சிப்பெட்டி வாங்க இயலும்?
- 20% தள்ளுபடி கிடைக்கும் போது இவ்விரு தொலைக்காட்சிப் பெட்டிகளின் விலைகளுக் கிடையே உள்ள வித்தியாசம் எவ்வளவு?
- ஒரு பர்னிச்சர் கடையில் 15000 ரூபாய்க்குக் கட்டிலும் 25000 ரூபாய்க்கு அலமாரியும் ஒன்றாக வாங்குபவருக்கு அவற்றை 36000 க்குக் கொடுக் கிறார்கள். அவர்கள் எத்தனை சதவீதம் தள்ளுபடி கொடுக்கிறார்கள்?

புத்தகக்கண்காட்சி

500 ரூபாய் வரை
10% தள்ளுபடி

500 - 1000
20% தள்ளுபடி

1000-க்கு மேல்
30% தள்ளுபடி

- சூசனும் காயத்ரியும் புத்தகக் கண்காட்சியிலிருந்து 490 ரூபாய் வீதம் விலை உள்ள ஒவ்வொரு ஆங்கிலம்-தமிழ் அகராதி வாங்கினார்கள். 20% தள்ளுபடி கிடைப்பதற்காக இருவரும் சேர்ந்து பணம் செலுத்தத் தீர்மானித்தார்கள். 1000 ரூபாய் விலைக்கு மேல் புத்தகம் வாங்கினால் 30% தள்ளுபடி கிடைக்குமென விற்பனையாளர் கூறியதால் 60 ரூபாய் விலையுள்ள ஒவ்வொரு படக்கதைப் புத்தகங்களும் இருவரும் வாங்கினர். இருவரும் சேர்ந்து பணம் செலுத்தினார்கள்.

தள்ளுபடி சதவீதம்

ஒரு நிறுவனம் 4 சோப்பு சேர்த்து வாங்கும்போது அதே போன்று ஒரு சோப்பு இலவசமாகக் கொடுக்கிறது. இது எத்தனை சதவீதம் தள்ளுபடி கொடுப்பதற்குச் சமமாகும்?

இங்கு நான்கு சோப்பின் விலைக்கு ஐந்து சோப்பு அல்லவா கிடைக்கிறது. அதாவது, ஐந்து சோப்பின் விலையில் ஒரு சோப்பின் விலை குறைவாகும். இனி யோசித்துப் பாருங்கள்.

- இருவரும் சேர்ந்து எவ்வளவு ரூபாய் கொடுத்தார்கள்? ஒவ்வொருவருக்கும் எவ்வளவு ரூபாய் செலவானது?
- அகராதி மட்டும் வாங்கியிருந்தால் இருவரும் சேர்ந்து மொத்தம் எத்தனை ரூபாய் செலுத்த வேண்டும்?
- ஒவ்வொருவருக்கும் எத்தனை ரூபாய் செலவாகும்?
- இருவரும் இதே இரு புத்தகங்கள் வெவ்வேறாக வாங்கினால் ஒவ்வொருவரும் எத்தனை ரூபாய் வீதம் கொடுக்க வேண்டும்?

காதி துணி வகைகள்
காட்டன்..... தள்ளுபடி30%
பாலிஸ்டர் . தள்ளுபடி20%
சில்க் .... தள்ளுபடி 20%

- காதி துணிக்கடையிலிருந்து கீழ்க்காணும் ரசீதில் காண்பித்த துணி இனங்கள் வாங்கினால் எத்தனை ரூபாய் கொடுக்க வேண்டும்?

கதர் துணிக்கடை				
எண் :777			தேதி.......................	
வ.எண்		எண்ணிக்கை	விலை	தொகை
1.	காட்டன் வேட்டி	1	350	
2.	காட்டன் சட்டை	1	550	
3.	பாலிஸ்டர் சட்டை	1	450	
4.	பட்டுசேலை	1	1500	

- ஒரு விற்பனையாளர் 2500 ரூபாய் கொடுத்து வாங்கிய மின்விசிறியை 40% விலை கூட்டி 15% தள்ளுபடி கொடுத்து விற்கிறார். அது எத்தனை ரூபாய்க்கு விற்கப்படும்?
- 3600 ரூபாய்க்கு வாங்கிய ஒரு எரிவாயு அடுப்புக்கு 10% தள்ளுபடி கொடுத்து விற்கும்போது 20% இலாபம் கிடைக்க வேண்டும் எனில் அதற்கு எத்தனை ரூபாய் விளம்பர விலை குறிப்பிட வேண்டும்?
- ஒரு குளிர்சாதனப் பெட்டி வாங்கும்போது ஒரு தேய்ப்புப் பெட்டி இலவசமாகக் கொடுக்கப்படுகிறது. குளிர் சாதனப்பெட்டி 9000 ரூபாய்க்கும் தேய்ப்புப் பெட்டி 1000 ரூபாய்க்கும் அவர் வாங்கினார். இரண்டும் சேர்த்துக் கொடுக்கும்போது 20% இலாபம் கிடைக்க வேண்டுமெனில் குளிர்சாதனப் பெட்டிக்கு எத்தனை ரூபாய் விளம்பர விலை குறிப்பிட வேண்டும்?

வட்டியின் வரலாறு

ஏறக்குறைய ஐயாயிரம் வருடங்களுக்கு முன்னரே மனிதன் ஒன்று சேர்ந்து பெருமளவில் விவசாயம் செய்யத் தொடங்கினான். அக்காலத்தில் விதைகளும் கால் நடைகள் போன்றவையும் கடன் கொடுத்திருந்தார்கள். ஒரு விதையிலிருந்து பல விதைகளை உருவாக்க முடியும். ஆதலால் கடனைத் தீர்க்கும்போது வாங்கியதை விடக் கூடுதல் திருப்பிக் கொடுக்கப்பட்டது.

விவசாய உற்பத்திப் பொருட்கள்தான் அன்றைய பணம். உலோக நாணயங்களைப் பணமாகப் பயன்படுத்தத் தொடங்கிய போதுதான் பிரச்சினை உண்டானது. விதையிலிருந்து விதை உண்டாவதுபோல உலோகத்திலிருந்து உலோகம் உண்டாவதில்லையே?

விளைச்சல் குறைவாகும் காலங்களில் பொருட்களின் விலை கூடும். விவசாயி கடன் வாங்க வேண்டும். விளைச்சல் கூடும் போது விலை குறையும். விவசாயிக்குக் கடனைத் திருப்பிச் செலுத்த வேண்டிய பணம் கிடைக்காமல் போகும்.

வட்டி

வங்கிகளுக்கு முன்னால் இது போன்ற விளம்பரங்களைப் பார்த்திருப்பீர்கள். பணம் கடன் பெறுவதற்கும் வைப்புத் தொகைகளுக்கும் நாம் வங்கிகளைச் சார்ந்திருக்கிறோமல்லவா.

கூட்டுறவு வங்கி
வைப்புத் தொகைக்கு
11% வரை வட்டி
45 நாள் வரை 6%

கவர்ச்சியான வட்டி வீதங்கள்
நகைக் கடனுக்கு
9% வட்டி
விவசாயக் கடனுக்கு
4% மட்டும்

அமல் ஒரு வங்கியில் 15000 ரூபாய் வைப்புத் தொகையாகச் செலுத்தினார். ஒரு வருடத்துக்குப் பின் 16500 ரூபாய் திரும்பக் கிடைத்தது. அவருக்கு எவ்வளவு ரூபாய் அதிகமாகக் கிடைத்தது?

இவ்வாறு அதிகமாகக் கிடைக்கும் ரூபாயை வட்டி (Interest) என்று கூறுகிறோம்.

இதுபோன்று வங்கியிலிருந்து கடன் வாங்கினால்?

வட்டி வீதம்

தாமஸ் 50000 ரூபாய் வங்கியிலிருந்து விவசாயக் கடன் பெற்றார். ஒரு வருடத்துக்குப் பின் 52000 ரூபாய் செலுத்தினார். வட்டி வீதம் எத்தனை ரூபாய்?

இது கடன் வாங்கின 50000 ரூபாயின் எத்தனை சதவீதம்?

$$\times 100 = 4\%$$

ஒரு வருடத்துக்குப் பின் கடன் வாங்கியதிலிருந்து 4% அதிகமாகத் திருப்பிக் கொடுத்தார்.

இதனை வட்டி வீதம் என்கிறோம்.

இதுபோன்று 15000 ரூபாய்க்கு ஒரு வருடம் 1500 ரூபாய்

வட்டி கிடைத்தால் வட்டி வீதம் = $\times 100 = 10\%$

நந்தினி வங்கி
100 ரூபாய்க்கு ஒரு மாதம் ஒன்றரை ரூபாய் வட்டி

கெ. எஸ். வங்கி
50 ரூபாய்க்கு 4 மாதங்களுக்கு 3 ரூபாய் வட்டி

எந்த வங்கி கூடுதல் வட்டி தருகிறது?

நந்தினி வங்கியில்,

100 ரூபாய்க்கு ஒரு மாத வட்டி $= 1\frac{1}{2}$ ரூபாய்

100 ரூபாய்க்கு ஒரு வருட வட்டி $12 \times 1\frac{1}{2} = 18$ ரூபாய்

வட்டி வீதம் 18%

கெ.எஸ். வங்கியில்,

50 ரூபாய்க்கு 4 மாத வட்டி = 3 ரூபாய்

100 ரூபாய்க்கு 4 மாத வட்டி $3 \times 2 = 6$ ரூபாய்

100 ரூபாய்க்கு 1 வருட வட்டி $6 \times 3 = 18$ ரூபாய்

வட்டி வீதம் 18%

இரண்டு வங்கிகளிலும் வட்டி வீதம் சமம் அல்லவா

அட்டவணையிலுள்ள கணிதச் செயல்களுக்கு வட்டிவிகிதம் கணக்கிடவும்.

தொகை	காலம்	வட்டி
500 ரூபாய்	1 வருடம்	30 ரூபாய்
1000 ரூபாய்	4 மாதம்	40 ரூபாய்
200 ரூபாய்	2 மாதம்	2 ரூபாய்
2 ரூபாய்	1 மாதம்	3 பைசா
5000 ரூபாய்	2 வருடம்	1200 ரூபாய்

காலம் மாறும்போது

கூட்டுறவு வங்கியில் முதலீடுகளுக்கு 9% வட்டி கிடைக்கிறது. ரவி வங்கியில் 30000 ரூபாய் முதலீடு செய்தார். ஒரு வருடத்திற்குப் பின் எத்தனை ரூபாய் கிடைக்கும்?

முதலீடு செய்த தொகையின் 9% ஒரு வருட வட்டி ஆகும். அதாவது,

$$30000 \times \frac{9}{100} = 2700 \text{ ரூபாய்}$$

எனில், ஒரு வருடத்திற்குப்பின் 32700 ரூபாய் திரும்பக் கிடைக்கும்.

இரண்டு வருடத்துக்குப் பின்னரே திருப்பி எடுக்க வேண்டுமென்றால்?

கடன் தள்ளுபடி

விவசாயக் கடன்களைத் தள்ளுபடி செய்யும்முறை பழங்காலத்திலும் வழக்கத்தில் இருந்தது. எகிப்திலும் பாபிலோனியாவிலும் அன்று நாணயங்கள் பயன்படுத்திப் பண வாணிபம் செய்யப்பட்டுள்ளது. விளைச்சலின் ஏற்றத் தாழ்வுகள் விலையைத் பாதிக்காமலிருக்க அன்றைய அரசர்கள் விவசாய உற்பத்திக்கும் நாணயங்களுக்குமிடையேயுள்ள கைமாற்று வீதங்களைத் திட்டமிட்டு நிச்சயித்திருந்தனர். வறட்சிக் காலங்களில் விவசாயிகளின் கடன்கள் தவிர்த்த முறையும் இருந்தது.

சோளோனின் சீர்திருத்தம்

பழங்கால கிரேக்க நாட்டில் விவசாயிகள் கடன் திருப்பிச் செலுத்த இயலாதிருந்தால் அவரது நிலங்களைப் பிடித்தெடுப்பதும், சிலவேளைகளில் அவர்களையே அடிமையாக்கும் முறையும் வழக்கத்திலிருந்தது.

கி.மு.ஆறாம் நூற்றாண்டில் ஏதென்சில் ஆட்சி செய்த சோளோன் என்பவர் இதுபோன்ற நடவடிக்கைகளை நிறுத்தினார். அடிமைகளாக வெளிநாடுகளில் விற்கப்பட்ட விவசாயிகளைத் திரும்பக் கொண்டு வந்தார். விவசாய விளைபொருட்களுக்குக் குறிப்பிட்ட விலையை நடைமுறைப்படுத்தினார்.

ஏதென்சில் மக்களாட்சி நடைமுறைப்படுத்தியதும் இவரே எனக் கருதப்படுகிறார்.

இரண்டு வருட வட்டி கிடைக்கும், அதாவது

2 × 2700 = 5400 ரூபாய்

இரண்டு வருடவட்டி நேரடியாகக் கணக்கிடலாம்.

30000 × × 2 = 5400 ரூபாய்

மூன்று வருட வட்டி எவ்வாறு கணக்கிடலாம்?

இதுபோன்று 20000 ரூபாய்க்கு 8% வீதம் 4 வருடத்துக்கு வட்டி எவ்வளவு ஆகும்?

- சுமன் ஒரு வங்கியில் 25000 ரூபாய் முதலீடு செய்தார். வட்டிவீதம் 11% ஆகும். 3 வருடத்துக்குப் பின் எவ்வளவு ரூபாய் திரும்பக் கிடைக்கும்?

மூன்று வருட வட்டி நேரடியாகக் கணக்கிடலாம்.

25000 × × 3 = 8250 ரூபாய்

திரும்பக் கிடைக்கும் தொகை காண முதலீடு செய்த தொகையுடன் வட்டியும் கூட்டினால் போதும்.

அது எவ்வளவு?

- விஜயன் வங்கியிலிருந்து 12% வட்டிவிகிதத்தில் 50000 ரூபாய் கடன் வாங்கினார். இரண்டு வருடங்களுக்குப் பின் 25000 ரூபாய் திரும்பச் செலுத்தினார். மேலும் ஒரு வருடத்துக்குப்பின் கடனைத் தீர்க்க எவ்வளவு ரூபாய் திரும்பச் செலுத்த வேண்டும்?

  இங்கு இரண்டு வருடத்திற்குப்பின் குறிப்பிட்ட தொகையைத் திரும்பச் செலுத்தினார். ஆகவே 2 வருட வட்டி காண வேண்டும்.

இரண்டு வருட வட்டி

50000 × × 2 = 12000 ரூபாய்

இரண்டு வருடத்துக்குப்பின் திருப்பிச் செலுத்த வேண்டியது

50000 + 12000 = 62000 ரூபாய்

இதில் 25000 ரூபாய் திரும்பச் செலுத்தப்பட்டது. மீதி

62000 - 25000 = 37000 ரூபாய்.

இனி, திரும்பச் செலுத்த வேண்டியது 37000 ரூபாயும் அதன் ஒரு வருடத்துக்கான வட்டியும் ஆகும். கணக்கிட்டுப் பாருங்கள்.

- பாபு 25000 ரூபாய் வங்கியில் முதலீடு செய்தார். வங்கி 15% வீதம் வட்டி கணக்கிடுகிறது. 2 வருடத்துக்குப்பின் எத்தனை ரூபாய் திரும்பக் கிடைக்கும்?
- திலீப் ஒரு வங்கியிலிருந்து 36000 ரூபாய் கடன் வாங்கினார். வட்டி வீதம் 10% ஆகும். 2 வருடத்துக்குள்ள வட்டி உட்பட இத்தொகையை 24 மாதத் தவணைகளாகத் திருப்பிச் செலுத்த அவர் தீர்மானிக்கிறார். ஒவ்வொரு மாதமும் எவ்வளவு ரூபாய் வீதம் திருப்பிச் செலுத்த வேண்டும்?
- ஜோனி ஒரு வங்கியில் 60000 ரூபாய் முதலீடு செய்தார். வங்கி ஒரு ரூபாய்க்கு மாதத்திற்கு ஒரு பைசா வட்டி கொடுக்கிறது. இரண்டு வருடத்துக்குப்பின் எத்தனை ரூபாய் திரும்பக் கிடைக்கும்?
- சுஜித்தும் அனீசும் வங்கியிலிருந்து 50000 ரூபாய் வீதம் கடன் வாங்கினார்கள். வட்டிவீதம் 4% ஆகும். சுஜித் ஒரு வருடம் கழிந்த போது கடனைத் தீர்த்தார். அன்றைய தினத்தில் 50000 ரூபாய் கடன் வாங்கினார். அடுத்த வருடம் முழுத் தொகையையும் திருப்பிச் செலுத்தினார். அனீஷ்க்கு ஒரு வருடத்துக்குப்பின் கடனைத் தீர்க்க முடியவில்லை. இரண்டு வருடத்துக் குப்பின் வங்கி 7% வட்டி வேண்டும் என்றது.
  ஒவ்வொருவரும் வட்டியாக எவ்வளவு ரூபாய் வீதம் செலுத்தி இருப்பார்கள்?
- ராகுலும் ரஜனியும் ஒரு வங்கியில் ஒரே நாளில் 8000 ரூபாய் வைப்பு நிதியாகச் செலுத்தினர். வங்கி 10% வீதம் வட்டி கணக்கிடுகிறது. ஒரு வருடத்துக்குப்பின் வட்டியுடன் முழுத்தொகையையும் திரும்ப பெற்று ராகுல் அன்றைய தினமே மீண்டும் முதலீடு செய்தார். மேலும் ஒரு வருடம் பூர்த்தியாகும் நாளில் 2 பேரும் முழுத் தொகையும் வட்டியுடன் திரும்பப் பெற்றனர். ஒவ்வொருவருக்கும் எத்தனை ரூபாய் வீதம் கிடைக்கும்? கிடைக்கும் தொகையில் வித்தியாசம் வருவதற்குக் காரணம் என்ன?

மாறும் காலம்

பண்டைய காலத்தில் வட்டி என்ற வழக்கத்திற்கு எதிர்ப்பு இருந்தது. கி.மு. ஐந்தாம் நூற்றாண்டில் சில இந்திய நூல்களில் வட்டி வாங்க மத முறைப்படியான தடைகள் கூறப்பட்டுள்ளன.

கி.மு. மூன்றாம் நூற்றாண்டில் சிறப்பு வாய்ந்த கிரேக்க சிந்தனையாளரான அரிஸ்டாட்டில் வட்டியைக் கடுமையாக விமர்சித்துள்ளார். ''பொருளீட்டுவதின் மிகவும் வெறுக்கப்பட வேண்டிய முறை'' என்று அவர் வட்டியைக் குறித்துக் கூறுகிறார்.

சிறிது காலம் சென்றபின் கி,பி. இரண்டாம் நூற்றாண்டின் போது பெரும்பாலான இடங் களிலும் இந்த எதிர்ப்பு **அளவுக்கதிகமான** வட்டிக்கெதிராக மட்டும் சுருங்கியது.

மீள்பார்வை

கற்றல் அடைவுகள்	என்னால் இயலும்	ஆசிரியர் உதவியுடன் இயலும்	இன்னும் மேம்பட வேண்டியுள்ளது
• முதலீடு, விற்றவிலை, லாபம், நஷ்டம், லாப நஷ்ட சதவீதம் என்பவை தொடர்பான நடைமுறைப் பிரச்சினைகளைத் தீர்க்கச் சதவீதம் என்ற கருத்தைப் பயன்படுத்துதல்.			
• தள்ளுபடி, கழிவு (Rebate) என்பவை தொடர்பான நடைமுறைப் பிரச்சினை களுக்குத் தீர்வு காண முடிதல்.			
• விளம்பர விலை, தள்ளுபடி போன்ற விற்பனை தந்திரங்களை விவாதித்து விளக்குதல்.			
• ஒரு தொகையின் குறிப்பிட்ட வருடத்துக் குள்ள வட்டி காண இயலுதல்.			
• வட்டி, அசல், வட்டிவீதம், காலம் இவற்றிற்கிடையேயுள்ள உறவைக் கண்டு பிடிக்கவும் விளக்கவும் செய்தல்.			
• வருட அளவில் குறிப்பிடப்படாத வட்டி யை வருட வட்டிவீதம் கண்டுபிடித்துப் பிரச்சினைக்குத் தீர்வு காணுதல்.			
• பிரச்சினைத் தீர்வுக்கான பொருத்தமான வழியை ஏற்றுக் கொண்டு பிரச்சினைக்குத் தீர்வு காணும் முறையை விளக்குதல்.			

11

எண்களும் இயற்கணிதமும்

ஒற்றையும் இரட்டையும்

இந்தத் தொகைகளைப் பாருங்கள்:

$1+2 = 3$

$2+3 = 5$

$3+4 = 7$

எல்லாத் தொகைகளும் ஒற்றை எண் களல்லவா?

அடுத்தடுத்த இரண்டு எண்ணல் எண்களின் தொகை ஒற்றை எண்ணாவது ஏன்?

n ஏதேனும் ஒரு எண்ணல் எண் எனக் கருதவும். அப்படியானால் அடுத்த எண்ணல் எண்ணை $n + 1$ என எழுத வேண்டும். இவற்றின் தொகை என்ன?

$$n+(n+1)=2n+1$$

$2n + 1$ என்ற எண்ணை 2 ஆல் வகுத்தால் ஈவு n, மீதி 1

அதாவது n என்பது எந்த எண்ணல் எண் ஆனாலும், $2n + 1$ என்பது ஒற்றை எண் ஆகும்.

இவ்வாறு அடுத்தடுத்த எந்த இரண்டு எண்ணல் எண்களுடைய தொகையும் ஒரு ஒற்றை எண் எனக் காணலாம்.

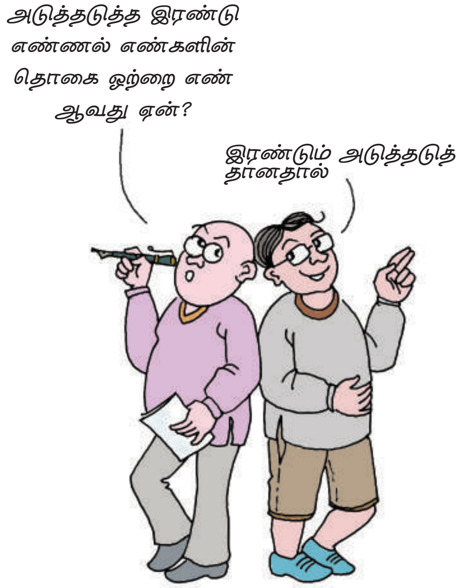
இனி இந்தத் தொகைகளைப் பாருங்கள்:

$1+3=4$

$2+4=6$

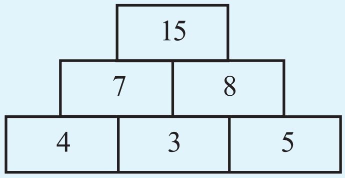
$3+5=8$

ஒன்றுவிட்ட எந்த இரு எண்ணல் எண் களுடைய தொகையும் இரட்டை எண் என இயற்கணிதம் பயன்படுத்தித் தெளிவாக்க இயலுமா?



எண் கோபுரம்

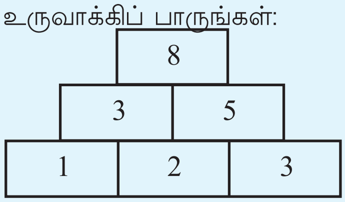
இந்தப் படத்தைப் பாருங்கள்:



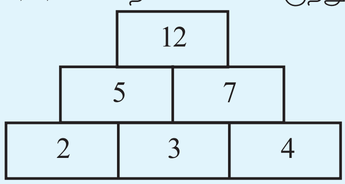
எண்களுக்கிடையே ஏதேனும் உறவு காணப்படுகிறதா?

கீழே உள்ள மூன்று எண்களில் அடுத்தடுத்துள்ளவற்றைக் கூட்டி வருவது அதன் மேல் வரிசையிலுள்ள எண்கள். அவை இரண்டும் கூட்டியதுதான் மிகவும் மேலே உள்ள எண்.

1, 2, 3 என்ற மூன்று எண்களிலிருந்து தொடங்கி இவ்விதம் ஒரு கோபுரம் உருவாக்கிப் பாருங்கள்:



தொடங்குவது 2, 3, 4 என்ற எண்களிலிருந்து என்றால்?



இதுபோன்று அடுத்தடுத்த வேறு ஏதாவது மூன்று எண்ணல் எண்களில் தொடங்கி எழுதிப் பாருங்கள்.

கடைசியில் கிடைக்கும் எண்களைக் குறித்துப் பொதுவாக ஏதாவது கூற இயலுமா?

அடுத்தடுத்த எந்த மூன்று எண்களில் தொடங்கினால் கடைசியில் 100 கிடைக்கும்?

இயற்கணிதப் பயன்பாடு

அடுத்தடுத்துள்ள எந்த மூன்று எண்ணல் எண்களிலிருந்து தொடங்கினாலும் நமது எண் கோபுரம் 4-இன் மடங்கில்

முடிவுறுவது எதனால்?

தொடங்கும் எண் x என எடுத்துப் பார்க்கலாம். அப்போது கீழ் வரிசையில் $x, x + 1, x + 2$

x	$x + 1$	$x + 2$

மேலே அடுத்த வரிசையில் வரும் எண்கள் யாவை?

$$x + (x + 1) = 2x + 1$$

$$(x + 1) + (x + 2) = 2x + 3$$

$2x + 1$	$2x + 3$	
x	$x + 1$	$x + 2$

எனில், மிகவும் உயரத்தில் உள்ள எண் யாது?

$$(2x + 1) + (2x + 3) = 4x + 4$$

$4x + 4$		
$2x + 1$	$2x + 3$	
x	$x + 1$	$x + 2$

இதில் $4x + 4$ என்பதைச் சிறிது மாற்றி எழுதலாம்.

$$4x + 4 = 4(x + 1)$$

அதாவது, அடுத்தடுத்த எந்த மூன்று எண்களிலிருந்து தொடங்கினாலும், முடிவில் கிடைப்பது அதன் நடுவிலுள்ள எண்ணின் நான்கு மடங்காகும். (இதை முன்னரே கவனித்தீர்களா?)

ஆகவே 100 இல் முடிய வேண்டுமெனில் 24, 25, 26 என்ற எண்களிலிருந்து தொடங்க வேண்டும்.

இனி தொடங்குவது ஒன்றுவிட்ட மூன்று எண்கள் ஆனாலோ?

இரண்டு விட்ட எண்களானால்?

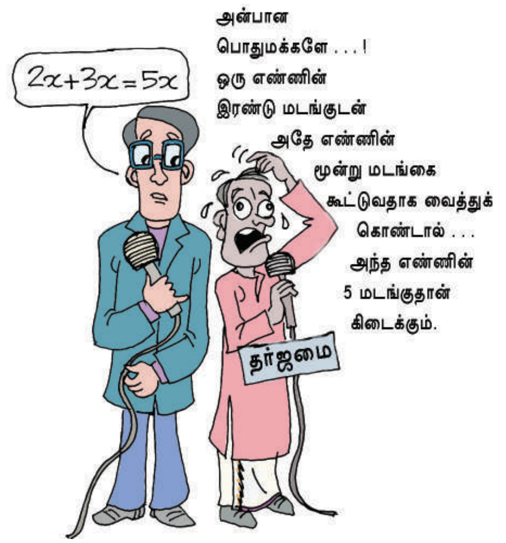
எழுதிப் பாருங்கள்.

எண் தத்துவங்கள்

எண்களைப் பற்றிய சில விபரங்கள் எல்லா எண்களுக்கும் சரியாகும் என விளக்குவதற்கு இயற்கணிதம் தேவையாகும். எடுத்துக்காட்டாக, அடுத்தடுத்த எந்த இரண்டு எண்ணல் எண்களின் தொகையும் ஒற்றை எண் ஆகும் எனத் தெளிவாக்க, n என்ற ஏதாவது எண்ணல் எண்ணைக் குறிப்பிட்டால் அதற்கு அடுத்தது $n + 1$ என்றும் அவற்றின் தொகை $2n + 1$ என்றும் அறிந்து கொள்ள வேண்டும். மேலும் n எந்தவொரு எண்ணல் எண் ஆனாலும் $2n + 1$ ஒற்றை எண் எனவும் காண வேண்டும். வேறு பல அறிவியல் பாடங்களிலும் பல்வேறு சூழ்நிலைகளில் ஒரு கருத்து சரியானால் அது ஒரு பொது தத்துவமாக அங்கீகரிக்கப்படும். கணிதத்தில் இது போதாது. எதனால் அது சரி ஆகிறது எனத் தெளிவாக்க வேண்டும். எண்களைப் பொறுத்தமட்டில் இந்தக் காரிய காரண உறவை இயற்கணிதம் மூலம் வெளிப் படுத்துகிறோம்.

பல எண்களுக்குச் சரியாகும் தத்துவங்கள் பின்னர் தவறாகும் பல சந்தர்ப்பங்களும் கணிதத்தில் உள்ளன. எடுத்துக்காட்டாக, 2^2 ஐ 2 ஆலும், 2^3 ஐ 3 ஆலும் 2^4 ஐ 4 ஆலும் வகுத்தால் மீதி 3 கிடைக்காது. பொதுவாகக் கூறினால், 4700063497 ஐவிடச் சிறிய எந்தவொரு எண் n என எடுத்தாலும் 2^n ஐ n ஆல் வகுக்கும்போது மீதி 3 கிடைக்காது. ஆனால் n ஆக 4700063497 எடுத்தால் மீதி 3 தான் கிடைக்கும்.

இங்கு நானூற்றி எழுபது கோடியை விடக் கூடுதலான எண்களுக்குச் சரியாகும் ஒரு கருத்து பின்னர் தவறாகிறது!



மூன்று எண்கள்

அடுத்தடுத்த எந்த இரண்டு எண்ணல் எண்களின் தொகை ஒற்றை எண் என்று கண்டோமல்லவா? அடுத்தடுத்த மூன்று எண்ணல் எண்களின் தொகை என்னவாகும்?

$$1 + 2 + 3 = 6$$

$$2 + 3 + 4 = 9$$

$$3 + 4 + 5 = 12$$

இவையாவும் மூன்றின் மடங்குகளாகும். எந்த எண்ணிலிருந்து தொடங்கினாலும் இது சரியாகுமா?

முதல் எண்ணை n என எழுதினால் அடுத்த இரண்டு எண்கள் $n + 1$, $n + 2$ என்பவை அல்லவா? இவற்றின் தொகை

$$n + (n + 1) + (n + 2) = 3n + 3$$

மேலும்,

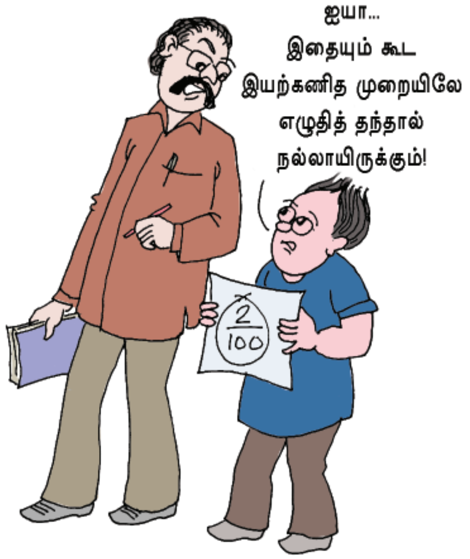
$$3n + 3 = 3(n + 1)$$

என்றெழுதினால், தொகை 3ன் மடங்காகும் எனக் காணலாம்.

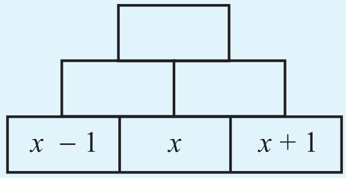
இங்கு மற்றொரு விஷயத்தையும் நாம் பார்க்கலாம். நடுவிலுள்ள எண்ணின் மூன்று மடங்காகும் தொகை. அப்போது மேலும் சற்று மேம்பட்ட ஒரு பொதுத் தத்துவம் கிடைக்கிறது.

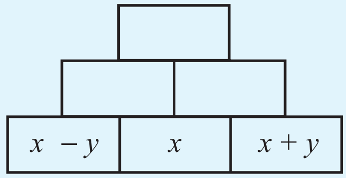
அடுத்தடுத்த மூன்று எண்ணல் எண்களின் தொகை, நடு எண்ணின் மூன்று மடங்காகும்.

அடுத்தடுத்த நான்கு எண்ணல் எண்களின் தொகை நான்கின் மடங்காகுமா?



இந்தக் கோபுரங்களை முழுமையாக்குங்கள்:

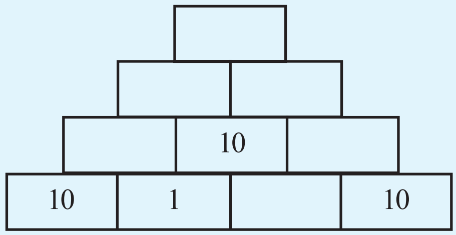




இரண்டு கோபுரங்களிலும் மேலே வருவதின் சிறப்பினைச் சாதாரண மொழியில் எழுதலாமா?

வேறொரு கோபுரம்

சற்று உயரம் கூடிய கோபுரம்:



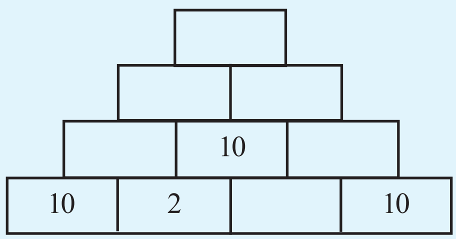
இதில் பிற எண்களை எல்லாம் எழுதலாமா?

கீழ் வரிசையில் இனி எந்த எண் கூட எழுத வேண்டும்?

அதனுடன் 1 கூட்டினால் 10 கிடைக்க வேண்டுமல்லவா?.

இனி உள்ள எண்களும் கூட எழுதுங்கள். எல்லாவற்றுக்கும் மேலாக 50 கிடைத்ததல்லவா?

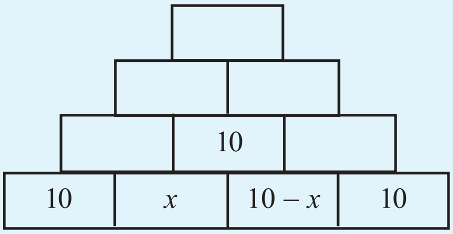
இனி இந்தக் கோபுரத்தில் எல்லா எண்களையும் எழுதுங்கள்.



இப்போது எல்லாவற்றுக்கும் மேலே உள்ள எண் 50 தானே?

2-க்குப் பதிலாக வேறொரு எண் எழுதிச் செய்து பாருங்கள். எப்போதும் 50ல் முடிவது ஏன்?

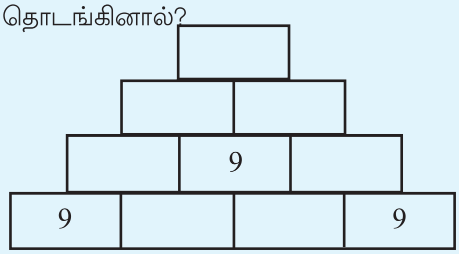
இயற்கணிதம் பயன்படுத்திப் பார்க்கலாம். கீழ்வரிசையில் இரண்டாவது எண் x என்று எழுதலாம். அப்போது அடுத்த எண் என்ன எழுத வேண்டும்?



இனி, இதற்கு மேலே உள்ள இரு வரிசைகளை எழுதலாம் அல்லவா? மூன்றாவது வரிசையில் இரண்டு எண்கள் $20 + x$, $30 - x$ எனக் கிடைத்ததல்லவா? எனில், கடைசி எண்

$$(20 + x) + (30 - x) = 50$$

இனி 10-க்குப் பதிலாக 9ஐப் பயன்படுத்தி இப்படியொரு கோபுரம் தொடங்கினால்?



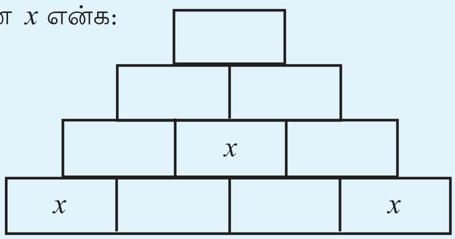
கீழ் வரிசையில் இரண்டாவது எண் 9க்குக் கீழ் உள்ள ஏதாவது எண் பயன்படுத்திக் கோபுரத்தை முழுமையாக்குங்கள். (எண் 9-க்குக் கீழ் இருக்க வேண்டும் ஏன்?)

நண்பர்கள் செய்தவற்றை ஒப்பிட்டுப் பாருங்கள். அனைவருக்கும் கிடைத்தது 45 தானே?

இனி, 9க்குப் பதிலாக 11 பயன்படுத்தித் தொடங்கினால், தொடர்ந்து (11ஐ விடச் சிறிய) எந்த எண் எடுத்தாலும் கடைசியில் கிடைக்கப்போவது என்ன என்று கூறலாமா?

எப்போதும் முதல் எண்ணின் 5 மடங்கு தான் கிடைக்கிறது. ஏன்?

முதல் எண் x என்க:



வேறொரு வழி

தொடர்ச்சியான எந்த மூன்று எண்ணல் எண்களின் தொகை, நடுவிலுள்ள எண்ணின் மூன்று மடங்கு என்று காண வேறொரு முறையும் உண்டு.

நடுவிலுள்ள எண்ணை n என எடுத்தால் முதலாவது எண் $n - 1$, கடைசி எண் $n + 1$. இவற்றின் தொகை

$$(n-1) + n + (n + 1) = 3n$$

இதில் $n - 1$, $n + 1$ என்பவற்றின் தொகை $2n$ என எளிதாகக் காணலாம்.

இனி, தொடர்ச்சியான ஐந்து எண்ணல் எண்களில் நடுவிலுள்ள (மூன்றாவது) எண் n என்றெடுத்தால் இந்த ஐந்து எண்களை

$$n-2,\quad n-1,\quad n,\quad n+1,\quad n+2$$

என எழுதலாம். இவற்றின் தொகை காண, முதலில்

$$(n-2) + (n+2) = 2n$$

$$(n-1) + (n+1) = 2n$$

எனக் கிடைத்தால்

$$\begin{aligned}(n-2) + (n-1) + n + (n+1) + (n+2) &= (n-2) + (n+2) + (n-1) + (n+1) + n \\ &= 2n + 2n + n \\ &= 5n\end{aligned}$$

என வேகமாகக் கண்டுபிடிக்கலாம். தொகை நடுவிலுள்ள எண்ணின் 5 மடங்காகும் எனப் புரிந்து கொள்ளவும் இயலும்.

தொடர்ச்சியான ஏழு எண்ணல் எண்களின் தொகை குறித்து என்ன கூறலாம்?

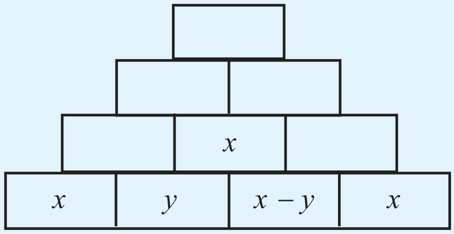
பொது வடிவங்கள்

2, 4, 6, 8 என்னும் இரட்டை எண்களெல்லாம் 2இன் மடங்கு தானே. அதாவது, 1, 2, 3... என்ற எண்ணல் எண்களை 2 ஆல் பெருக்கிக் கிடைப்பவை இரட்டை எண்கள் ஆகும். எனவே n எந்தவொரு எண்ணல் எண் ஆனாலும் $2n$ என்பது இரட்டை எண் ஆகும். மாறாக எந்த இரட்டை எண்ணையும் $2n$ என்ற வடிவத்தில் எழுதலாம்.

2,4,6,8...என்னும் இரட்டை எண்களிலிருந்து 1 குறைத்தால் 1, 3, 5, 7... என்ற ஒற்றை எண்கள் கிடைக்கும். பொதுவாகக் கூறினால் எண்ணல் எண்களை 2 ஆல் பெருக்கி 1 ஐ குறைத்தால் கிடைப்பவை ஒற்றை எண்கள் ஆகும். இயற்கணிதத்தில் கூறினால், n என்ற எண்ணல் எண்ணை 2 ஆல் பெருக்கினால் $2n$ ம் 1 குறைத்தால் $2n-1$ ம் ஆகும். அதாவது n எந்தவொரு எண்ணல் எண் ஆனாலும் $2n - 1$ ஒற்றை எண் ஆகும். மாறாக, எந்த ஒற்றை எண்ணையும் $2n - 1$ என்ற வடிவில் எழுதலாம்.

n எந்த எண்ணல் எண் ஆனாலும் $2n + 1$ என்பதும் ஒற்றை எண்தான். ஆனால், n ஆக 1, 2, 3... என்ற எண்ணல் எண்களை எடுத்துக் கொண்டால் $2n+1$ என்பதிலிருந்து 1 கிடைக்காது. எல்லா ஒற்றை எண்களும் கிடைக்க n ஆக 0, 1, 2... என எடுக்க வேண்டும்.

அடுத்த எண் y என எடுக்கலாம். அப்போது முதல் வரிசை இவ்வாறு வரும்.

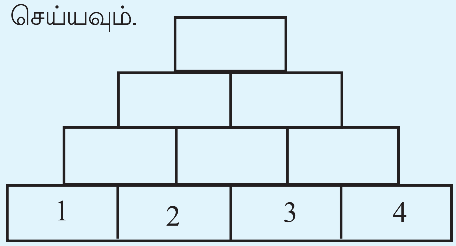


அடுத்த படியிலுள்ள எண்கள் எவை?

அதற்கு அடுத்த படியில் எப்படி வரும்? $2x+y, 3x-y$ என்று கிடைக்குமா? எனில், கடைசி எண்?

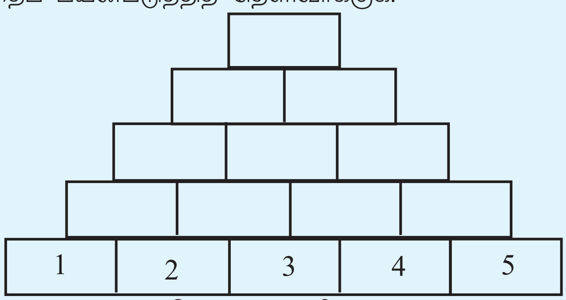
$$(2x + y) + (3x - y) = 5x$$

- கீழே உள்ள கோபுரங்களில் எல்லாக் கட்டங்களையும் பூர்த்தி செய்யவும்.



தொடர்ச்சியான நான்கு எண்களைப் பயன்படுத்தி இதுபோன்று பலவற்றை எழுதிப் பாருங்கள். முதல் எண்ணுக்கும், முடிவில் கிடைக்கும் எண்ணுக்கும் இடையே யுள்ள தொடர்பு என்ன? கீழே உள்ள படியில் நடுவி லுள்ள இரண்டு எண்களுக்கும் மிகவும் உயரத்தில் உள்ள எண்ணிற்கும் உள்ள தொடர்பு என்ன? இந்த உறவுகளை இயற்கணிதம் மூலம் தெளிவாக்குக.

- இனி, எண்கள் ஐந்தானால்? மிகவும் உயரத்தில் உள்ள எண்ணுக்குக் கீழ்ப்படியில் நடுவில் இருக்கும் எண் களுக்கும் இடையேயுள்ள தொடர்பை இயற்கணிதத் தைப் பயன்படுத்தித் தெளிவாக்குக.



- மேற்காணும் கோபுரங்களில் அடுத்தடுத்த எண் களுக்குப் பதிலாக ஒன்றுவிட்ட, இரண்டுவிட்ட எண்கள் எழுதி செய்து பாருங்கள். தொடர்புகளை இயற்கணிதம் பயன்படுத்தித் தெளிவாக்குக.

11 இன் வித்தைகள்

இந்த எண்களைப் பாருங்கள்:

12, 23, 34, ..., ...

12 லிருந்து தொடங்கி, 11ஐக் கூட்டி, மீண்டும் 11ஐக் கூட்டி, அவ்வாறு செல்லுகின்றன.

இப்படித் தொடர்ந்தால் 100 கிடைக்குமா?

எழுதிப்பார்க்கலாம்:

12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89, 100

இன்னும் தொடர்ந்தால் எப்போதாவது 1000 கிடைக்குமா?

எல்லாவற்றையும் எழுதிப்பார்ப்பது எளிதாக இருக்குமா?

எண்களை ஒருமுறை கூடப் பாருங்கள்:

11 உடன் 1ஐக் கூட்டினால் 12

22 உடன் 1ஐக் கூட்டினால் 23

33 உடன் 1ஐக் கூட்டினால் 34

இந்த எண்கள் யாவும் 11-ன் பெருக்கற்பலனுடன் 1ஐக் கூட்டியதாகும்.

வேறு விதமாகக் கூறினால் இவற்றை 11-ஆல் வகுக்கும் போது 1 மீதி வரும் எண்களாகும்.

இனி, இக்கூட்டத்தில் 1000 வருமா எனக் கண்டுபிடிப்பது கடினமில்லையே!

1000 ஐ 11 -ஆல் வகுக்கும் போது மீதி 1 வராததால், இந்த எண் வரிசையில் 1000 இருப்பதில்லை.

இனி இதில் 10000 வருமா எனப் பாருங்கள்?

100000 ஆனால்?

இந்த வரிசை வருவதைக் குறித்து முதலாவது கூறியது,

12 லிருந்து தொடங்கி, தொடர்ந்து 11ஐக் கூட்ட வேண்டும் என்பதல்லவா?

இப்போது இந்த எண் வரிசை முழுவதையும் ஒரு செயல்பாடாக எழுதலாம்:

> எண்ணல் எண்களை 11-ஆல் பெருக்கி 1-ஐக் கூட்டவும்.
>
> இதனை இயற்கணிதம் பயன்படுத்தி எழுதினால் எப்படி வரும்?
>
> $11n+1$ என்பதில் n ஆக, $1, 2, 3, \ldots$ என வரிசையாக எடுக்கவும்.

(எண்ணல் எண்களைக் குறிப்பிட இயற்கணிதத்தில் சாதாரணமாக n, m, p, k போன்ற எழுத்துகள் பயன்படுத்து கிறோம். இது கட்டாயம் ஒன்றுமில்லை. இது ஒரு வழக்கம் மட்டுமே)

மீண்டும் சில தொகைகள்

இரண்டு இரட்டை எண்களைக் கூட்டினால் கிடைப்பது இரட்டை எண்ணாகும். இரண்டு ஒற்றை எண்களைக் கூட்டினால்?

எதனால் இப்படி நிகழ்கிறது?

இயற்கணிதம் பயன்படுத்திப் பார்க்கலாம். இரண்டு இரட்டை எண்களை $2m, 2n$ என வைத்துக் கொள்வோம். இவற்றின் தொகை

$$2m+2n=2(m+n)$$

இதிலிருந்து தொகையும் 2-ன் மடங்காகும். அதாவது இரட்டை எண் எனக் காணலாம்.

இனி இரண்டு ஒற்றை எண்களைக் கூட்டுவதானால்? அவற்றை $2m-1,\ 2n-1$ என்றெடுத்தால் தொகை

$$\begin{aligned}(2m-1)+(2n-1) &= 2m+2n-2\\ &= 2(m+n-1)\end{aligned}$$

இது இரண்டின் மடங்கல்லவா, அதாவது இரட்டை எண்.

இரண்டு இரட்டை எண்களுக்குப் பதிலாக மூன்று இரட்டை எண்களைக் கூட்டினால்? நான்கு இரட்டை எண்களைக் கூட்டினாலோ?

மூன்று ஒற்றை எண்களின் தொகையைக் குறித்து என்ன கூறலாம்? நான்கு ஒற்றை எண்களின் தொகை எப்படி வரும்?

எண்களும் எழுத்துக்களும்

பொதுவான தத்துவங்களைக் கூற இயற்கணிதத்தைப் பயன்படுத்தும்போது எழுத்துகள் எந்த வகை எண்களைக் குறிப்பிடுகிறது எனத் தெளிவாக்க வேண்டும். எடுத்துக்காட்டாக, $2n - 1$ என்ற வடிவத்திலுள்ள எண்கள் ஒற்றை எண்களாகும் எனக் கூறும்போது, இதில் n என்பது எண்ணல் எண்களை மட்டுமே குறிப்பிடுகிறது என்றும் கூற வேண்டும்.

$2n - 1$ இல் n ஆக $1\frac{1}{2}$ என்ற பின்ன எண் எடுத்தால்,

$$2n - 1 = (2 \times \quad) - 1 = 2$$

என்ற இரட்டை எண் கிடைக்கும்.

இனி, 12லிருந்து தொடங்குவதற்குப் பதிலாக 21லிருந்து ஆரம்பித்துத் தொடர்ச்சியாக 11ஐக் கூட்டினால்?

21, 32, 43, ...

இந்த எண்களையும் இயற்கணிதம் பயன்படுத்தி எழுதலாமா?

இவற்றை 11 + 10, 22 +10, 33 + 10, ...

என்றும் எழுதலாமல்லவா? அதாவது

$11n + 10$ என்பதில் n என்ற எண் 1, 2, 3, ... என வரிசையாக எடுக்கவும்.

இந்த வரிசை தொடர்ந்தால், 100, 1000, 10000, 100000 என்பனவற்றில் எவையெல்லாம் கிடைக்கும் எனக் கூறலாமா?

இனி இந்த இரு எண்வரிசைகளையும் இணைத்துக் காணலாம்:

12	23	34	45	...
21	32	43	54	...

மேலாகவும், கீழாகவும் உள்ள எண்களை வரிசையாகக் கூட்டினால்?

33 55 77 99 ...

எப்போதும் 11-இன் மடங்குகள் கிடைக்கிறது. ஏன்?

இயற்கணிதத்தைப் பயன்படுத்திப் பார்க்கலாம். முதல் வரிசையில் எந்த எண்ணையும் $11n + 1$ என எழுதலாமல்லவா? இரண்டாவது வரிசையில் அதே இடத்தில் வரும் எண் $11n + 10$ ஆகும். (முதலாவது n தான் இதிலும்).

இவற்றின் தொகை என்ன?

$$\begin{aligned}(11n + 1) + (11n + 10) &= 22n + 11\\ &= 11(2n + 1)\end{aligned}$$

11 -இன் மடங்கு கிடைப்பதற்கான காரணம் புரிகிறதல்லவா?

இவ்வாறு கிடைத்த தொகைகளை மீண்டும் பார்க்கவும்:

ஏன் ஒற்றை எண்களின் மடங்குகள் மட்டும் கிடைக்கின்றன?

தொகையின் இயற்கணித வடிவம் எழுதிப்பாருங்கள்: அதில் n ஆக 1, 2, 3, ... என்று எண்ணல் எண்கள் எடுத்தால் $2n + 1$ ஆக எவ்வித எண்கள் கிடைக்கும்?

இங்கு $11n + 1$, $11n + 10$, $2n + 1$ என இவ்வாறுள்ள இயற்கணித வடிவங்கள் கண்டீர்களல்லவா. இவை எல்லாம் ஒவ்வொரு செயல்பாடுகளைக் குறிக்கும். எடுத்துக்காட்டாக $11n + 1$ என்பதன் பொருள், n என்ற எழுத்து குறிப்பிடும்

எண்ணை 11-ஆல் பெருக்கி 1-ஐக் கூட்ட வேண்டும் என்பதாகும். இவ்வாறு செயல்பாடுகளைக் குறிப்பிடுகின்ற இயற்கணித வடிவங்களை இயற்கணிதச் சொற்றொடர் (algebraic expressions) என்று கூறுகிறோம்.

எடுத்துக்காட்டாக, 1 உடன் தொடர்ச்சியாக 11 கூட்டிக் கிடைக்கின்ற 12, 23, 34, ... என்ற எண்களை $11n + 1$ என்ற ஒரு இயற்கணிதச் சொற்றொடராக எழுதலாம்.

- 1 உடன் திரும்பத் திரும்ப 10 கூட்டிக் கிடைக்கின்ற எண்களின் இயற்கணிதச் சொற்றொடர் காண்க.
- 9 உடன் தொடர்ச்சியாக 10 கூட்டிக் கிடைக்கின்ற எண்களின் இயற்கணிதச் சொற்றொடர் காண்க.
- முதல் இரண்டு வரிசைகளிலும் ஒரே இடத்திலுள்ள எண்களைக் கூட்டவும். எப்போதும் 10 இன் மடங்குகள் கிடைப்பது ஏன்? 10-இன் எல்லாப் மடங்குகளும் இவ்வாறு கிடைக்குமா?

இரண்டிலக்க எண்கள்

10-இன் மடங்குகளான 10, 20, 30, ... என்ற எண்களைப் பொதுவாக $10n$ என்றெழுதலாம்; இதில் n ஆக எந்த எண்ணல் எண்ணையும் எடுக்கலாம்.

இதில் இரண்டிலக்க எண்கள் மட்டும் போதும் என்றால்? n ஆக 1 முதல் 9 வரையுள்ள எந்த எண்ணல் எண்ணையும் எடுத்தால் போதும்.

$$10n \ \ (n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$$

என எழுதலாம். மேலும் சுருக்கினால்,

$$10n \ \ (n = 1, 2, 3, ..., 9)$$

என்றும் எழுதலாம்.

இது போன்று 10ன் மடங்குகளோடு 1 ஐக் கூட்டிக்கிடைக்கின்ற 11, 21, 31, ... என்ற எண்களை எல்லாம் பொதுவாக $10n + 1$ என எழுதலாம். இதில் n ஆக எந்தெந்த எண்ணல் எண்ணையும் எடுக்கலாம்.

இவற்றில் இரண்டிலக்க எண்கள் மட்டும் போதுமெனில்,

$$10n + 1 \ \ \ (n = 1, 2, 3, ..., 9)$$

என்றும் எழுதலாம்.

10இன் மடங்குகளுடன் 2ஐக் கூட்டிக் கிடைக்கும் 12, 22, 32, ... என்ற எண்களை எப்படி இயற்கணிதச் சொற்றொடராக எழுதுவீர்கள்?

இதுவரை கிடைத்த இரண்டிலக்க எண்களெல்லாம் இணைத்துப் பார்க்கலாம்:

இயற்கணித வடிவங்கள்

எந்த எண்ணையும் 10-ஆல் பெருக்குவது எளிதானது; கடைசியில் ஒரு பூஜியம் சேர்த்தால் போதும்.

$$18 \times 10 = 180$$

$$250 \times 10 = 2500$$

ஆனால் இயற்கணிதத்தில் எழுதும்போது

$$10 \times n = 10n$$

என்றே எழுத இயலும்; $n0$ என எழுதுவதில்லை.

இதுபோன்று 10-இன் மடங்குகளுடன் 1ஐக் கூட்டினால் கிடைக்கும் எண்களுடைய கடைசி இலக்கங்கள் 1 ஆகும். ஆனால் இவற்றின் இயற்கணித வடிவும் $10\,n + 1$ என்பதை $n1$ என்று எழுதப்படுவதில்லை.

10இன் மடங்குகளுடன் 1ஐக் கூட்டினால் கிடைக்கும் எண்கள் என்பதற்குப் பதிலாக 10-ஆல் வகுத்தால் மீதி 1 கிடைக்கும் எண்கள் என்றும் கூறலாம். இவற்றை 5ஆல் வகுத்தாலும் மீதி 1 தான். காரணம்

$$10\,n + 1 = (5 \times 2n\,) + 1$$

என்றெழுதலாம். இதுபோன்ற எண்களை $n1$ என்றெழுதினால் இதுபோன்ற விவரிக்க இயலாது.

இரண்டிலக்க எண்கள்

3ஐ 10ஆல் பெருக்கி 5ஐக் கூட்டினால் கிடைக்கும் எண்ணின் சுருங்கிய வடிவம் 35 என்ற இரண்டிலக்க எண்.

பொதுவாகக் கூறினால், ஏதேனும் இரண்டு ஓரிலக்க எண்களை எடுத்து முதலாவதை 10–ஆல் பெருக்கி, இரண்டாவதுடன் கூட்டினால் கிடைப்பது, இவற்றைச் சேர்த்து வைத்த இரண்டிலக்க எண் என்று கூறலாம்.

இயற்கணிதத்தில் m என்ற ஓரிலக்க எண்ணை 10 ஆல் பெருக்கி n என்ற ஓரிலக்க எண் கூட்டினால் கிடைக்கும் இரண்டிலக்க எண்ணை $10m + n$ என்று மட்டுமே எழுத இயலும்.

m, n இவற்றைச் சேர்த்து mn என்று எழுதுவதில்லை.

ஆனால் ஏதேனும் ஓரிலக்க எண்ணை 10–ஆல் பெருக்கி, அந்த எண்ணைக் கூட்டினால் கிடைப்பதை

$$10\,n + n = 11n$$

என்று எழுதலாம். இதிலிருந்து இவ்வாறு கிடைக்கும் எண்களை 11-இன் மடங்குகள் எனக் காணலாம்.

$10n$	:	10	20	30	40	50	60	70	80	90
$10n + 1$	:	11	21	31	41	51	61	71	81	91
$10n + 2$	:	12	22	32	42	52	62	72	82	92

இவ்வாறு எல்லா இரண்டிலக்க எண்களும் கிடைக்க வேண்டுமெனில் என்னென்ன இயற்கணிதச் சொற்றொடர்கள் எடுக்க வேண்டும்?

$10n$, $10n + 1$, $10n + 2$ என்றிவ்வாறு $10n + 9$ வரையுள்ள இயற்கணிதச் சொற்றொடர்களின் பொதுவான வடிவம் என்ன?

$10n$ என்ற இயற்கணித சொற்றொடருடன் பல எண்களைக் கூட்டுகிறோம். (முதலாவது கூட்டியது 0).

இங்குக் கூட்டும் எண்களையும் ஓர் எழுத்தால் குறிப்பிடலாமல்லவா? அப்போது இவற்றை எல்லாம் $10n + m$ என்று எழுதலாம். இதில் m ஆக 0 முதல் 9 வரையுள்ள எண்களைத்தான் எடுக்க வேண்டும்.

சுருங்கக் கூறின், எல்லா இரண்டிலக்க எண்களும்

$$10n + m \ (n = 1, 2, 3, ..., 9;\ m = 0, 1, 2, ..., 9)$$

என்ற வடிவில் வரும். எடுத்துக்காட்டாக $n = 5$, $m = 3$ என்றெடுத்தால்,

$$10n + m = (10 \times 5) + 3 = 53$$

என்பது கிடைக்கும்.

$n = 3$, $m = 5$ என்று ஆனால்?

அப்போது இரண்டிலக்க எண்களின் பொதுவடிவமான $10n + m$ ல் முதலாவது (பத்தின் இடத்தில்) இலக்கம் n; இரண்டாவது இலக்கம் (ஒன்றின் இடத்தில்) m.

இனி ஏதேனும் இரண்டிலக்க எண்ணை எடுத்துக்கொள்க. எடுத்துக்காட்டாக 25. இது இடம் மாற்றி எழுதினால் 52; அவற்றைக் கூட்டினால் 77.

36 ம் 63 ம் கூட்டினாலோ?

எப்போதும் இலக்கங்கள் திரும்ப வருமா?

28 ம் 82 ம் ஆனாலோ?

இவ்வாறு கிடைக்கும் எல்லா எண்களிலும் பொதுவாக ஏதேனும் காணப்படுகிறதா?

ஏன் எப்போதும் 11–ன் மடங்குகள் கிடைக்கின்றன?

பொதுப்பண்புகளை அறிந்து கொள்ள இயற்கணிதம் பயன்படுகிறது.

எந்த இரண்டிலக்க எண்ணையும் $10m + n$ என்ற வடிவத்தில் எழுதலாமல்லவா. இதைத் திருப்பி எழுதுவதாக இருந்தால்,

இலக்கங்களின் இடத்தை ஒன்றுக்கொன்று மாற்றவும் $10n + m$.

இவற்றைக் கூட்டினால்,

$$\begin{aligned}(10m + n) + (10n + m) &= (10m + m) + (10n + n)\\ &= 11m + 11n\\ &= 11(m + n)\end{aligned}$$

இனி ஏதேனும் இரண்டிலக்க எண்ணைத் திருப்பி எழுதிக் கூட்டுவதற்குப் பதில் பெரியதிலிருந்து சிறியதைக் கழித்துப் பார்க்கவும். பல இரண்டிலக்க எண்களில் இதனைச் செய்து பார்க்கவும்.

கழித்துக் கிடைக்கும் எண்களெல்லாம் ஒரு எண்ணின் மடங்குதானா?

என்ன காரணம்?

$$\begin{aligned}(10m + n) - (10n + m) &= 10m + n - 10n - m\\ &= 9m - 9n\\ &= 9(m - n)\end{aligned}$$

இனி இந்தக் கணக்குகளைச் செய்து பாருங்கள்:

- ஏதேனும் இரண்டிலக்க எண்ணை எடுத்து அதன் இலக்கங்களைக் கூட்டவும். இத்தொகையை எண்ணிலிருந்து கழிக்கவும். இதனைப் பல எண்களிலும் செய்து பார்க்கவும். இவ்வாறு கழித்துக் கிடைத்த எண்களுக்கு ஏதேனும் பொதுவான பண்புகள் உள்ளனவா?
- எந்த இரண்டிலக்க எண்ணிலிருந்தும் அதன் இலக்கங்களின் தொகையைக் கழித்தால் 9 இன் மடங்காக கிடைப்பது எதனால் என இயற்கணிதம் உபயோகித்து விளக்குக.

- மூன்றிலக்க எண்களின் பொதுவான இயற்கணித வடிவம் எழுதுக.
- ஒரு மூன்றிலக்க எண்ணின் முதலாவது, இரண்டாவது, மூன்றாவது (நூறு, பத்து, ஒன்று) m, n, p இலக்கங்களை என எழுதினால் அந்த எண்ணை எவ்வாறு எழுதலாம்? இந்த எண்ணைத் திருப்பி எழுதினால் கிடைக்கும் எண்ணை எவ்வாறு எழுதலாம்?
- எந்த மூன்றிலக்க எண்ணையும், திருப்பி எழுதிப் பெரிய எண்ணிலிருந்து சிறிய எண்ணைக் கழித்தால் கிடைப்பது 99 இன் மடங்கு என இயற்கணிதம் உபயோகித்து விளக்கவும்.
- எந்த மூன்றிலக்க எண்ணிலிருந்தும் அதன் இலக்கங்களின் தொகையைக் கழித்தால் 9 இன் மடங்கு கிடைக்குமா என இயற்கணிதம் பயன்படுத்தி விளக்குக.

மீண்டும் மூன்று எண்கள்

அடுத்தடுத்த மூன்று எண்ணல் எண்களை எடுத்து, அவற்றில் முதல் மற்றும் கடைசி எண்களைக் கூட்டவும். இத்தொகைக்கு நடுவிலுள்ள எண்ணுடன் உள்ள உறவு என்ன?

இவ்வாறு அடுத்தடுத்த எந்த மூன்று எண்களை எடுத்துச் செய்தாலும் அவற்றின் தொகை நடுவிலுள்ள எண்ணின் இருமடங்காகும் என இயற்கணிதத்தைப் பயன்படுத்தித் தெளிவாக்குக.

அடுத்தடுத்த மூன்று இரட்டை எண்கள் (எடுத்துக் காட்டு 2, 4, 6) எடுத்தாலும் இது சரியாகுமா? ஒற்றை எண்கள் ஆனால்?

இனி, 3இன் அடுத்தடுத்த மூன்று மடங்குகள் (எடுத்துக்காட்டாக 3, 6, 9) எடுத்தால் இது சரியாகுமா?

3 இன் மடங்குகளோடு 1ஐக் கூட்டிய எண்கள் (எடுத்துக்காட்டாக 4, 7, 10) ஆனால்?

3இன் மடங்குகளுக்குப் பதிலாக 4இன் அல்லது வேறெதேனும் எண்ணின் மடங்குகள் ஆனால்?

இவ்வாறு கிடைக்கும் முடிவுகளை இயற்கணிதத்தைப் பயன்படுத்தி நிரூபிக்கவும்.

மீள்பார்வை

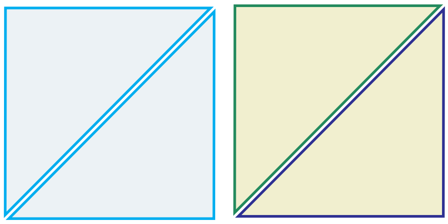
கற்றல் அடைவுகள்	என்னால் இயலும்	ஆசிரியர் உதவியுடன் இயலும்	இன்னும் மேம்பட வேண்டியுள்ளது
• எண்களின் உறவுகளை இயற்கணித உதவியுடன் விளக்குதல்.			
• செயல்பாடுகளைக் குறிக்கும் இயற்கணிதச் சொற்றொடர்களைக் கண்டுபிடித்து விளக்குதல்			
• எண்களின் பொதுவடிவங்களை இயற்கணிதச் சொற்றொடர்களைப் பயன்படுத்தி விளக்குதல்.			
• எண்களின் தனித்தன்மைகளை இயற்கணிதச் சொற்றொடர்கள் பயன்படுத்தி நிரூபித்தல்.			

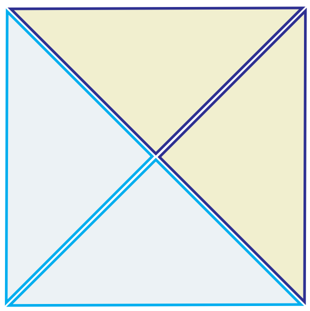
12

சதுரங்களும் செங்கோணமுக்கோணங்களும்

வேறொருமுறை

ஒரே அளவுள்ள இரண்டு சதுரங்களை வெட்டி இணைத்து ஒரே சதுரமாக்குவதற்கு வேறொரு முறையுள்ளது.

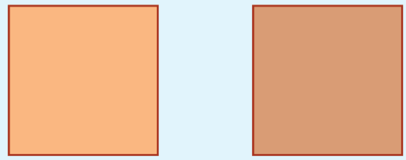




பெரிய சதுரத்தின் பக்கத்தின் நீளம், சிறிய சதுரத்தின் ஏதேனும் அளவிற்குச் சமமாகுமா?

இரு மடங்கு அளவு

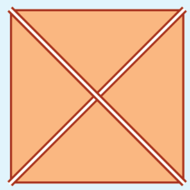
ஒரே அளவுள்ள இரண்டு சதுரத்தைக் கட்டியான காகிதத்தில் வெட்டி எடுக்கவும்.



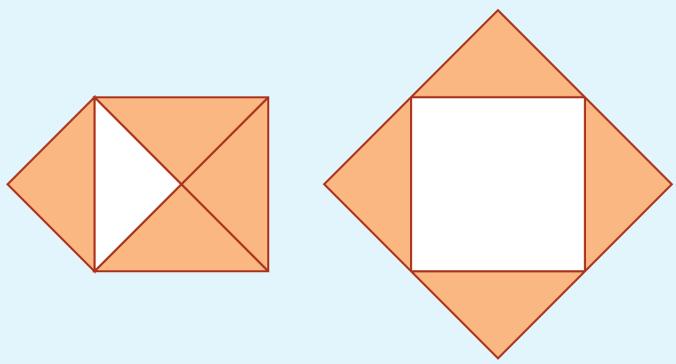
இவற்றை வெட்டியெடுத்துத் துண்டுகளை மாற்றி அடுக்கிப் பெரிய ஒரு சதுரத்தை உருவாக்கவும்.

அதற்கொரு வித்தை உள்ளது.

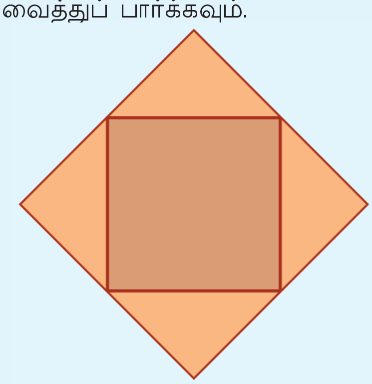
முதலில் ஒரு சதுரத்தின் இரண்டு மூலைவிட்டங்களையும் மடக்கி வெட்டி நான்கு முக்கோணங்களாக்கவும்.



இந்த முக்கோணங்களையெல்லாம் வெளிப்பக்கமாக விரித்து வைக்கவும்.



மேலும் வெட்டி எடுக்காத சதுரத்தை நடுவிலுள்ள வெற்றிடத்தில் வைத்துப் பார்க்கவும்.



இரண்டாவது சதுரம் இதனுள் சரியாகப் பொருந்துவதற்கான காரணமென்ன?

முதன்முதலில் வெட்டிய சிறிய சதுரங்கள் ஒவ்வொன்றினுடைய பக்கங்களின் நீளம் 2 சென்டிமீட்டர் எனக் கருதுக. அவை ஒவ்வொன்றினுடைய பரப்பளவு எவ்வளவு?

அப்படியென்றால் இறுதியாக உருவாக்கிய பெரிய சதுரத்தின் பரப்பளவு எவ்வளவு?

இனிமேல் 9 சதுர சென்டிமீட்டர் வீதம் பரப்பளவுள்ள இரண்டு சதுரங்களை வெட்டி இணைத்துப் பெரிய சதுரம் ஒன்றை உருவாக்குவோம். 9 சதுர சென்டிமீட்டர் பரப்பளவுள்ள ஒரு சதுரம் உருவாக்குவதற்குப் பக்கங்களின் நீளங்கள் எவ்வளவாக இருக்க வேண்டும்?

இதைப் போன்று இரண்டு சதுரங்களை வெட்டியெடுத்துப் பெரிய சதுரம் ஒன்றை உருவாக்குக. அதனுடைய பரப்பளவு எவ்வளவு?

50 சதுர சென்டிமீட்டர் பரப்பளவுடைய சதுரம் உருவாக்குவது எங்ஙனம்?

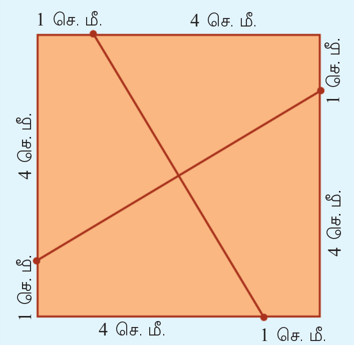
32 சதுர சென்டிமீட்டர் பரப்பளவுடைய சதுரம் உருவாக்குவது எப்படி?

அளவைக் கூட்டுவோம்

ஒரு சதுரத்தின் மூலை விட்டங்களின் வழியே வெட்டி, அதே அளவுடைய வேறொரு சதுரம் சேர்த்து இரண்டு மடங்கு அளவுடைய ஒரு சதுரம் உருவாக்கலாம் எனக் கண்டோம்.

இனி வேறொரு முறையில் வெட்டிப் பார்ப்போம்: 5 சென்டி மீட்டர் பக்கம் கொண்ட சதுரத்தைக் கட்டியான காகிதத்தில் வெட்டி எடுக்கவும்.

எதிர் மூலைகளை இணைத்து மூலை விட்டம் வரைவதற்குப் பதில் மூலைகளிலிருந்து 1 சென்டிமீட்டர் தூரத்தில் புள்ளிகளை வைத்து அப்புள்ளிகளை இணைக்கவும்.



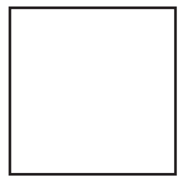
இந்தக் கோடுகளின் வழியே வெட்டி கிடைக்கும் நான்கு

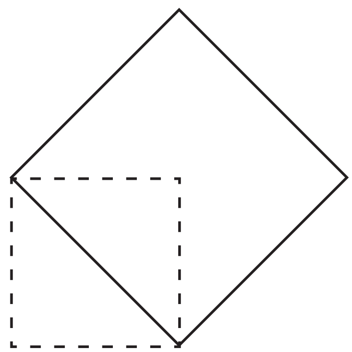
வரைவதற்கொரு வழி

ஒரே வடிவமுள்ள இரண்டு சதுரங்களை வெட்டி அடுக்கி ஒரு பெரிய சதுரம் உருவாக்கும் போது பெரிய சதுரத்தின் பக்கங்களின் நீளம் சிறிய சதுரத்தின் மூலைவிட்டத்தின் நீளமல்லவா.

அப்படியென்றால் ஒரு சதுரம் வரைந்துவிட்டால் அதன் இருமடங்கு பரப்புளவுடைய சதுரம் வரைவது மிகவும் எளிதாகும்.

அதனுடைய மூலைவிட்டம் பக்கமாக வரும்படியாக ஒரு சதுரம் வரைந்தால் போதுமானதாகும்.





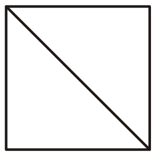
இதைப் பயன்படுத்தி 50 சதுர சென்டிமீட்டர் பரப்பளவுள்ள சதுரம் வரைய முடியுமா?

32 சதுர சென்டிமீட்டர் வரும்படி சதுரம் வரையலாமா?

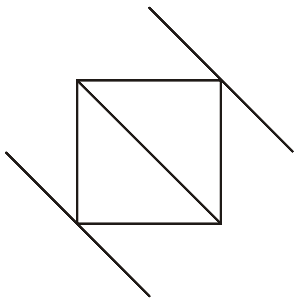
இணையான முறை

ஒரு சதுரத்தின் இருமடங்கு பரப்பளவுடைய சதுரம் வரைவதற்கு வேறொரு முறையுள்ளது.

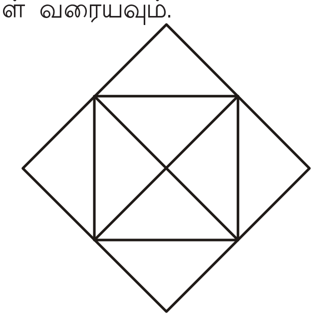
முதலில் சதுரத்தின் ஒரு மூலைவிட்டம் வரைக.

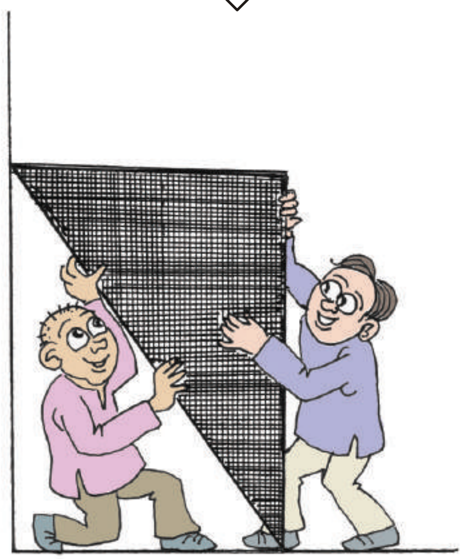


இனி சதுரத்தின் மற்ற இரண்டு மூலைகளின் வழியாக இந்த மூலைவிட்டத்திற்கு இணையாக இணைகோடுகள் வரையவும்.

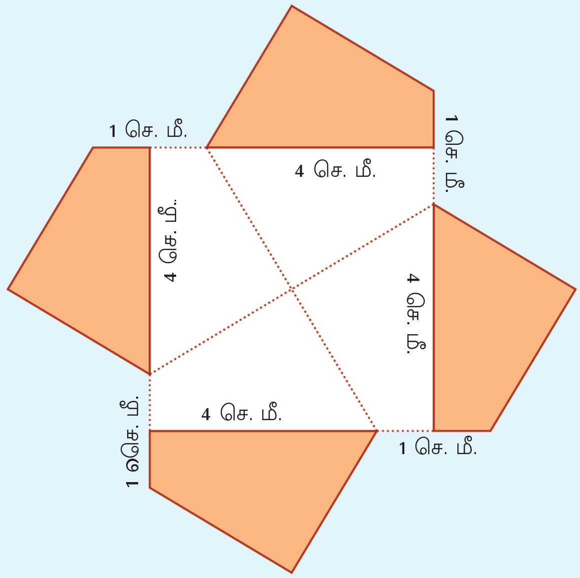


இரண்டாவது மூலைவிட்டமும் வரைந்து அதற்கு இணையாக இதைப் போன்று கோடுகள் வரையவும்.

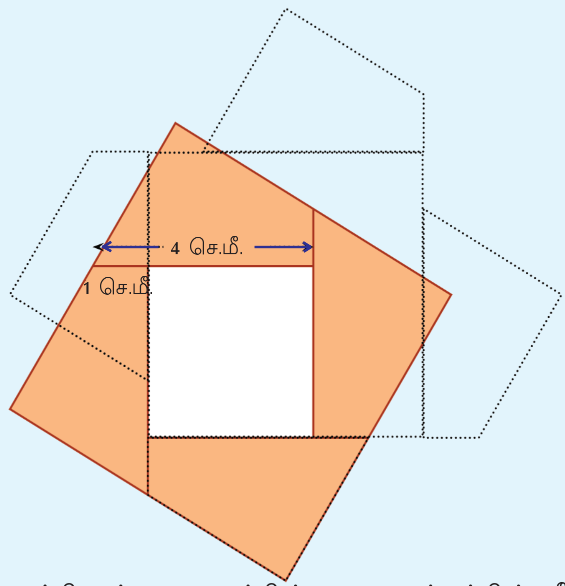




துண்டுகளையும் முன்னர் செய்தது போன்று வெளிப்பக்கம் விரித்து வைக்கவும்.

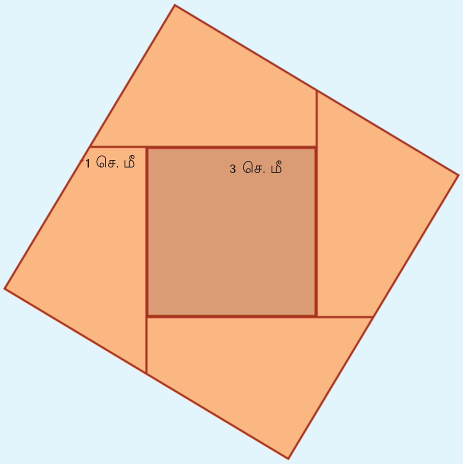


இடது பக்கத்துண்டைச் சிறிது கீழ்ப்பக்கமாகவும், வலது பக்கத்துண்டை சிறிது இடது பக்கமாகவும், மேல்பக்கத் துண்டை சிறிது இடபக்கமாகவும் கீழ்ப்பக்கமாகவும் அசைத்து நீக்கினால், வெளியே ஒரு சதுரமும், உள்பக்கமொரு சிறிய சதுரமும் கிடைக்கும்.



உட்பாகத்திலுள்ள சதுரத்தின் ஒரு பக்கத்தின் நீளம் எவ்வளவு?

எனில் 3 சென்டி மீட்டர் பக்கஅளவுடைய வேறொரு சதுரம் வெட்டியெடுத்தால் இதனுள் சரியாகப் பொருத்தலாம்.



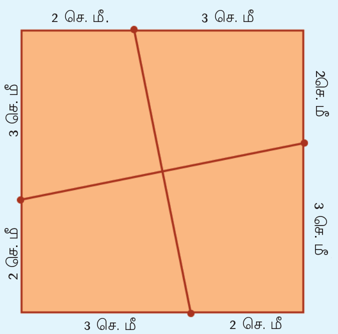
முதலில் வெட்டியெடுத்த சதுரத்தை நான்கு துண்டகளாக அடுக்கினோம். எனில் இந்த நான்கு துண்டுகளிலுடைய மொத்த பரப்பளவு, முதல் சதுரத்தின் பரப்பளவிற்குச் சமமாகும். அதாவது $5^2 = 25$ சதுர சென்டி மீட்டர்.

பின்னர் வெட்டியெடுத்து உட்பாகத்தில் சேர்த்து வைத்த சதுரத்தின் பரப்பளவோ?

எனில் இறுதியாக உருவாக்கிய பெரிய சதுரத்தின் பரப்பளவு

$$5^2 + 3^2 = 34 \text{ ச.செ.மீ}$$

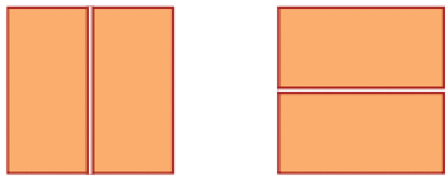
இனி 5 சென்டிமீட்டர் பக்கமுள்ள வேறொரு சதுரம் வெட்டியெடுத்து மூலைகளிலிருந்து 2 சென்டிமீட்டர் தூரத்தில் புள்ளிகளை வைத்து வரையவும்.



இந்தக் கோடுகளின் வழியாக வெட்டி, நான்கு துண்டுகளையும் விரித்து வைத்தால் இவ்வாறாகும்.

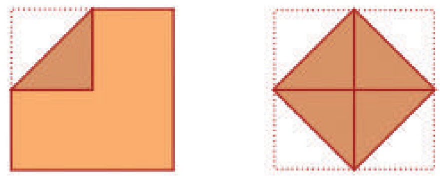
பாதியாக்குவதற்கு

ஒரு சதுரத்தின் பரப்பளவின் பாதி பரப்பளவுடைய செவ்வகம் வெட்டி எடுப்பதற்கு மையத்தின் வழியாக நேராகவோ குறுக்காகவோ வெட்டினால் போதுமானது.

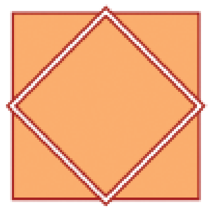


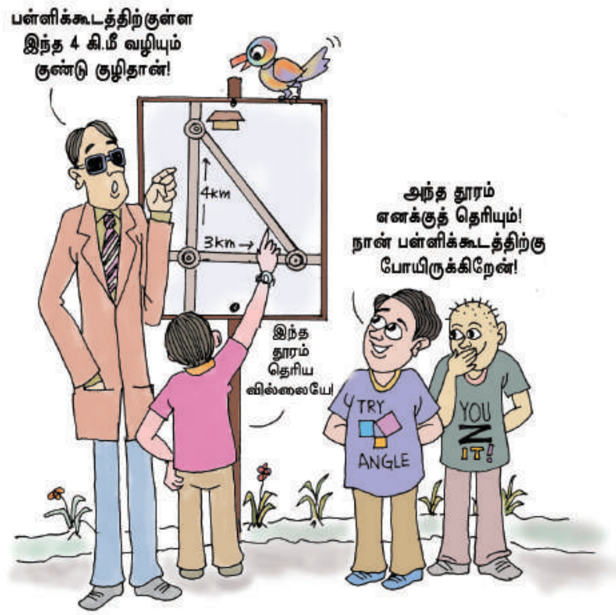
பாதி பரப்பளவுள்ள சதுரமாக இருக்க வேண்டுமெனில்?

சதுரத்தின் மூலைகளை எல்லாம் மையப் பகுதியை நோக்கி மடக்கவும்.



மீண்டும் விரித்து மடக்கியதின் வழியாக வெட்டி எடுத்தால் பாதி சதுரமாகும்.

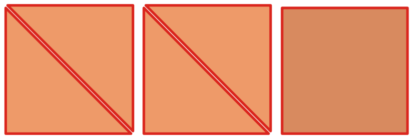




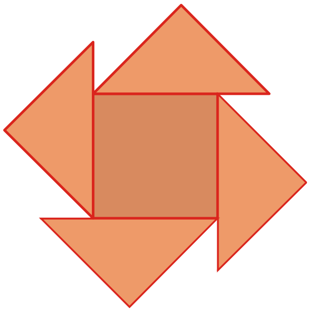
மூன்று சதுரங்கள்

ஒரே அளவுள்ள மூன்று சதுரங்களை வெட்டி அடுக்கி ஒரு சதுரமாக்கலாம்.

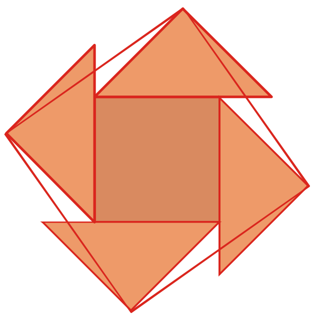
அதற்கு முதலில் இரண்டு சதுரங்களை மூலைவிட்டம் வழியாக வெட்டவும்.



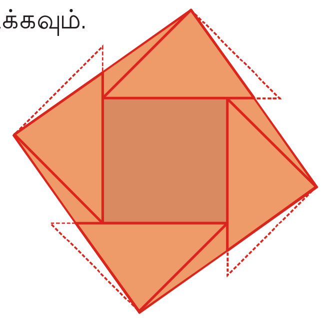
வெட்டி எடுத்த முக்கோணங்களை வெட்டாத சதுரத்தைச் சுற்றி இவ்வாறு அடுக்கவும்.

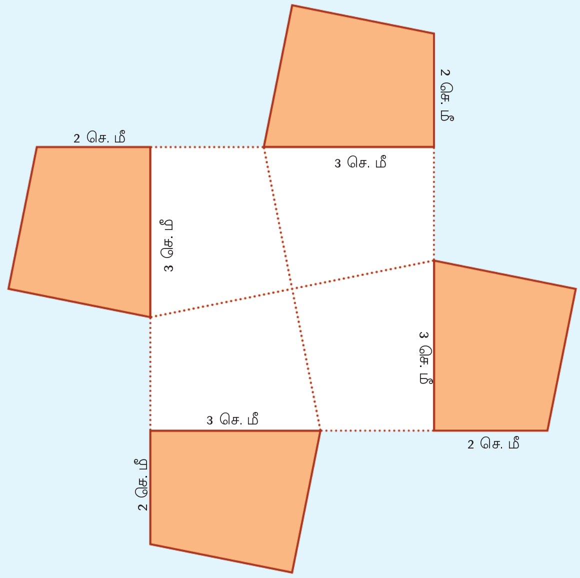


முக்கோணங்களின் மூலைகளைக் கீழே காண்பது போல் இணைத்து ஒரு சதுரம் வரையவும்.

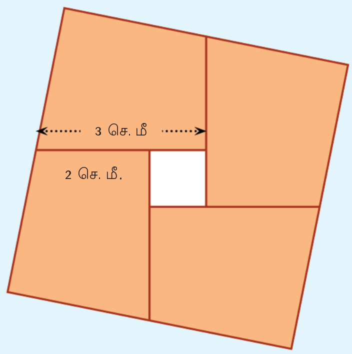


சதுரத்தின் வெளிப்புறமாக நீண்டு அமைந்துள்ள முக்கோணத்தின் நான்கு முக்கோண பாகங்களை வெட்டி எடுத்து உட்புறமாக உள்ள இடைவெளிகளை அடைக்கவும்.

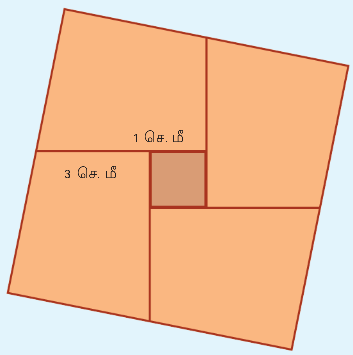




இனித் துண்டுகளை உட்புறமாக நீக்கிச் சதுரத்தை உருவாக்கினால்?



மையத்திலுள்ள இடைவெளியை நிரப்பப் பக்கம் எந்த அளவுடைய சதுரம் வேண்டும்?



தற்பொழுது கிடைத்த பெரிய சதுரத்தின் பரப்பளவு எவ்வளவு?

$5^2 + 1^2 = 26$ ச.செ.மீ

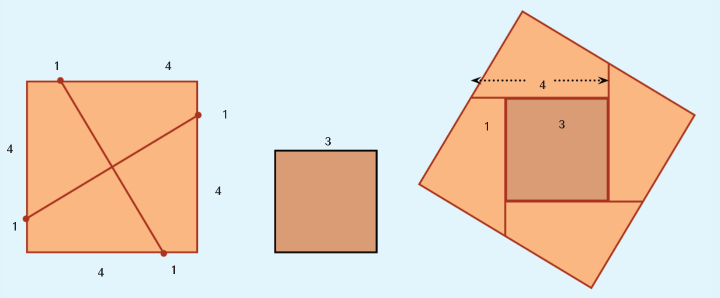
இதைப்போன்ற 5 சென்டிமீட்டர் பக்கமுடைய சதுரம் காகிதத்தில் வெட்டி எடுத்து மூலைகளிலிருந்து 1.5 சென்டிமீட்டர் தூரத்தில் புள்ளிகளை வைத்து வரைந்து வெட்டிப் பார்க்கவும்.

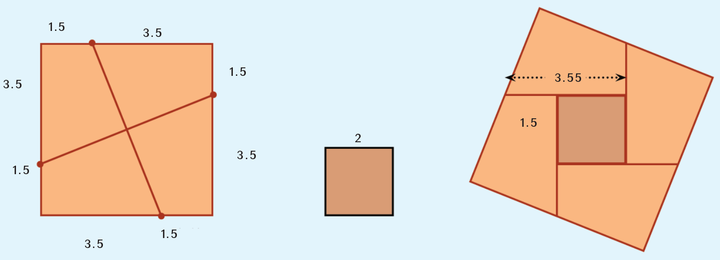
மையப்பகுதியில் வைப்பதற்கு எத்தனை சென்டிமீட்டர் பக்கமுடைய சதுரம் வெட்டியெடுக்க வேண்டும்?

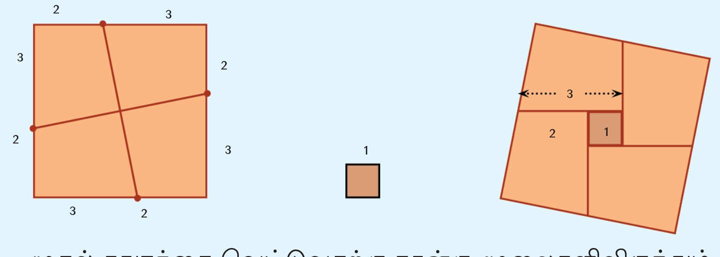
இவ்வாறு கிடைக்கும் பெரிய சதுரத்தின் பரப்பளவு எவ்வளவு?

இரண்டு சதுரங்கள்

5 சென்டிமீட்டர் பக்கமுள்ள சதுரத்தைப் பல்வேறு முறைகளில் வெட்டி, வேறொரு சதுரமும் சேர்த்துப் பல அளவுகளிலான சதுரங்களை உருவாக்கினோமல்லவா:





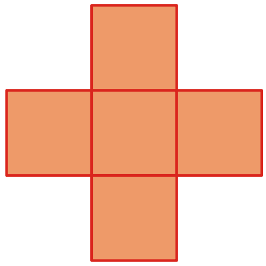


முதல் சதுரத்தை வெட்டுவதற்கு நான்கு மூலைகளிலிருந்தும் ஒரே தூரத்தில் புள்ளிகள் வைக்கப்படுகின்றன. இந்தச் தூரமும் இறுதியாக இடைவெளியை நிரப்ப வெட்டி எடுக்கப்படும். சதுரத்தின் பக்கத்தின் நீளத்திற்கும் இடையேயான தொடர்பென்ன?

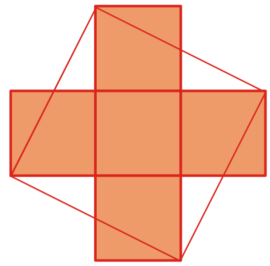
பெரிய சதுரம் உருவாக்கிய முறையை மேலும் ஒரு முறை பார்க்கவும் :

ஐந்து சதுரங்கள்

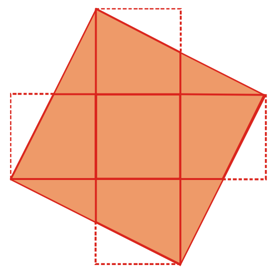
ஒரே அளவுள்ள ஐந்து சதுரங்களைக் கீழே தரப்பட்டுள்ளதைப் போல் வைக்கவும்.



மூலைகளைக் கீழே படத்தில் காண்பது போல் இணைத்துச் சதுரம் வரையவும்.



இனிமேல் சதுரத்திற்கு வெளியே அமைந்துள்ள முக்கோணங்களை வெட்டி எடுத்து உட்பாகத்திலுள்ள இடைவெளி களை அடைக்கவும்.

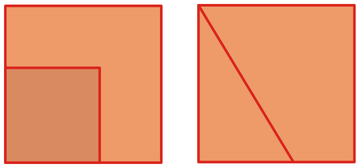


இதே படத்தை வேறேதேனும் பாடப் பகுதியில் பார்த்ததுண்டா?

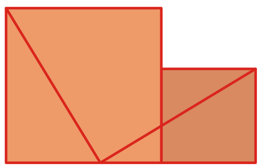
அவ்வாறும் வெட்டலாம்

இரண்டு சதுரங்களை வெட்டி அடுக்கிப் பெரிய சதுரம் உருவாக்க வேறு முறைகளும் உள்ளன.

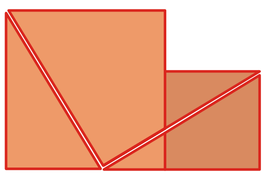
பெரிய சதுரத்தின் ஒரு பக்கத்தில் சிறிய சதுரத்தினுடைய பக்க அளவை அடையாளப்படுத்தவும். இந்த அடையாளத்தையும் பெரிய சதுரத்தின் ஒரு மூலையையும் கீழே உள்ளவாறு இணைக்கவும்.



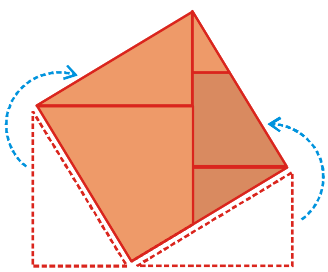
இனிமேல் சதுரங்களைச் சேர்த்து வைத்துக் கீழே காண்பதுபோல ஒரு கோடு வரையவும்.



இந்தக் கோடுகளின் வழியாக வெட்டவும்.

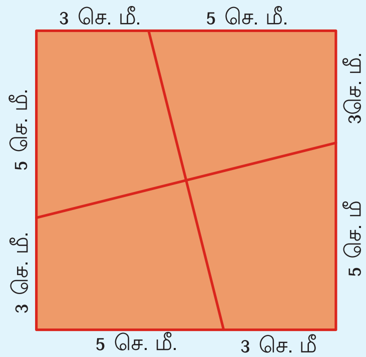


கீழ்ப்பகுதியிலுள்ள துண்டுகளை மேல் பக்கமாக மாற்றிப் படத்தில் காண்பதுபோல் ஒரு சதுரம் உருவாக்குக.



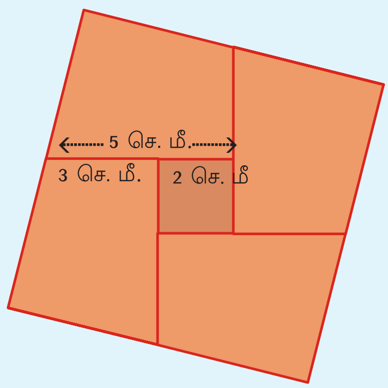
புள்ளிகள் வைக்கும் போது முதல் சதுரத்தின் பக்கத்திலிருந்து இந்தத் தூரம் குறைக்கப்படுகிறது. நகர்த்தி நீக்கும் போது இந்தத் தூரம் மீண்டும் குறைக்கப்படுகிறது. அவ்வாறு முதல் சதுரத்தினுடைய நீளத்திலிருந்து, புள்ளிகளுக்குள்ள தூரம் இரண்டு தடவை குறைந்தால் மையப்பகுதியிலுள்ள சதுரவடிவ இடைவெளியின் பக்கம் கிடைக்கும்.

எனில் 8 சென்டிமீட்டர் பக்க அளவுடைய சதுரத்தின் மூலைகளிலிருந்து 3 சென்டி மீட்டர் தூரத்தில் புள்ளிகளை வைத்து வெட்டினால்?



இந்தக் கோடுகளின் வழியாக வெட்டி மாற்றி அடுக்கினால், உட்பகுதியில் இணைக்க வேண்டிய சதுரத்தின் பக்கம் கிடைக்கும்.

$$8 - (2 \times 3) = 2$$ ச.செ.மீ



இந்தப் பெரிய சதுரத்தின் பரப்பளவு எவ்வளவு?

மற்றொரு கேள்வி

8 சென்டிமீட்டர் பக்கஅளவுடைய ஒரு சதுரத்தை வெட்டி அடுக்கி அதன் உட்பகுதியில் 6 சென்டிமீட்டர்

பக்கஅளவுடைய சதுரம் இணைத்து வைத்துப் பெரிய சதுரம் உருவாக்க முதல் சதுரத்தை எவ்வாறு வெட்ட வேண்டும்?

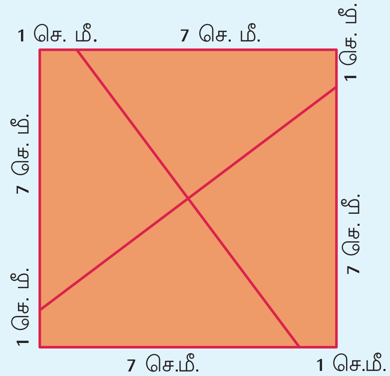
வெட்டுயெடுப்பதற்காக வைக்கப்படும் புள்ளிகளுக்கு மூலைகளிலிருந்து உள்ள தூரத்தின் இரு மடங்கு 8 லிருந்து குறைந்ததாகும். உட்பகுதியிலுள்ள சதுரத்தின் பக்கம் 6 சென்டிமீட்டர்.

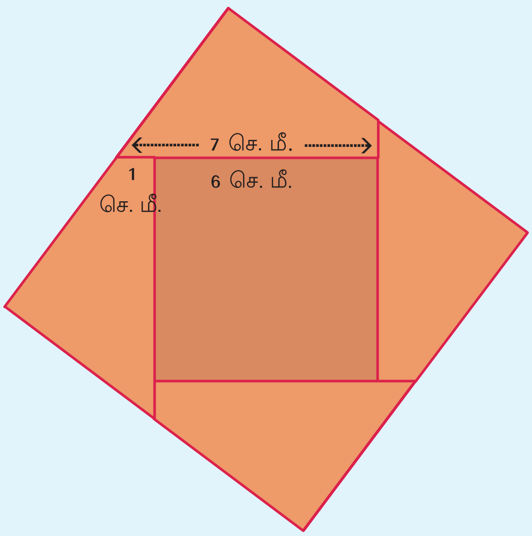
எனில், இந்த தூரத்தின் இருமடங்கு

$$8 - 6 = 2 \text{ ச.செ.மீ}$$

இந்தத் தூரம் 2 சென்டிமீட்டரின் பாதி அதாவது 1 சென்டிமீட்டர்.

8 சென்டிமீட்டர் பக்கமுள்ள ஒரு சதுரத்தை வெட்டியெடுத்து, முன்னர் செய்தது போல் துண்டுகளை வெட்டி அடுக்கிப் பார்க்கவும். மையப்பகுதியில் கிடைப்பது 6 சென்டிமீட்டர் பக்க அளவுடைய சதுரம் அல்லவா?





இந்தப் பெரிய சதுரத்தின் பரப்பளவு எவ்வளவு?

$$8^2 + 6^2 = 100 \text{ ச.செ.மீ.}$$

சிறிய வரலாறு

கி,பி. 10ஆம் நூற்றாண்டில் பாக்தாதில் வாழ்ந்த புகழ்பெற்ற கணிதமேதையும், விண்வெளி ஆராய்ச்சியாளருமாவார் அபு அல் வாஃபெ.

அவருடைய ஒரு படைப்பு கைத்தொழில் செய்பவர்களுக்குத் தேவையான வடிவியல் வரைமுறைகள் என்பதாகும். சிறிய சதுரங் களை ஒன்று சேர்த்துப் பெரிய சதுரங்களை உருவாக்கவும் பெரிய சதுரங்களை வெட்டிச் சிறிய சதுரங்களை உருவாக்குவதற்கான பல வழிமுறைகளும் இந்தப் புத்தகத்தில் விவாதிக்கப்படுகின்றன.

இதன் ஒரு பகுதியில் மூன்று சதுரங்களை வெட்டி இணைத்துப் பெரிய சதுரம் உருவாக்க அக்காலத்தில் சிற்பிகள் பயன் படுத்திய முறைகள் துல்லியமாக இல்லை என நிரூபித்து எடுத்துரைக்கப்படுகிறது. இதுவே இப்பாடப்பகுதியில் மூன்று சதுரங் கள் என்ற பகுதியில் விவரிக்கப்படுகிறது.

கலையும் வடிவியலும்

அபு அல் வாஃபெயின் காலத்திற்கு முன்பிருந்தே இஸ்லாமியப் பள்ளிகளின் சுவர்களிலும் தரையிலும் அழகான வேலைப்பாடுகள் செய்த சதுரங்கள் பதிக்கப்பட்டிருந்தன. இவ்வாறான சதுரங்களைச் சரியாக வெட்டி எடுத்துப் பெரிதும் சிறிதுமான சதுரங்களை உருவாக்குவதற்கான வடிவியல் வழிமுறைகளை அபு அல் வாஃபெ விவரித்துள்ளார்.

மிக அழகான அநேக வடிவியல் வடிவங்களை இவ்வாறான சதுரங்களில் காண முடிகிறது. கி.பி. 18ஆம் நூற்றாண்டில் இரானில் கட்டப்பட்ட புகழ்பெற்ற ஜாமே அப்பாசி பள்ளியில் இவ்வாறு வேலைப்பாடுகள் நிறைந்த ஒரு சுவரின் படம் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

- 7 சென்டிமீட்டர் பக்க அளவுடைய சதுரமும் 3 சென்டிமீட்டர் பக்க அளவுடைய வேறொரு சதுரமும் வெட்டி எடுக்கவும். பெரிய சதுரத்தைத் தேவைக்கேற்ப வெட்டி, சிறிய சதுரமும் சேர்த்து வைத்து ஒரு சதுரம் உருவாக்குக.

  இந்தச் சதுரத்தின் பரப்பளவு எவ்வளவு?

- 8 சென்டிமீட்டர் பக்க அளவுடைய ஒரு சதுரம் வெட்டி எடுக்கவும். இதை வெட்டி வேறொரு சதுரத்துடன் இணைத்து, 80 சதுர சென்டிமீட்டர் பரப்பளவுள்ள சதுரம் உருவாக்குக.

- 117 சதுர சென்டிமீட்டர் பரப்பளவுள்ள ஒரு சதுரம் உருவாக்குவதற்கு 9 சென்டிமீட்டர் பக்க அளவுடைய ஒரு சதுரத்துடன் எத்தனை சென்டிமீட்டர் பக்க அளவுடைய சதுரத்தைச் சேர்க்க வேண்டும்? பெரிய சதுரம் வெட்டுவதற்கு மூலைகளிலிருந்து எத்தனை சென்டி மீட்டர் தூரத்தில் புள்ளிகள் வைக்க வேண்டும்?

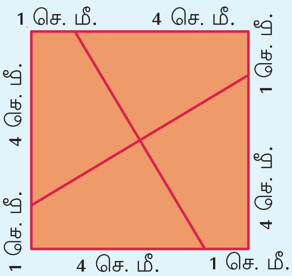
சதுரம் வரையலாம்

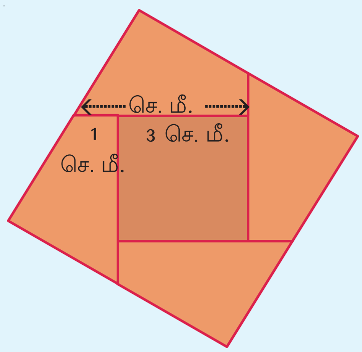
5 சென்டிமீட்டர் பக்கஅளவுடைய சதுரமும், 3 சென்டிமீட்டர் பக்க அளவுடைய சதுரமும் இணைத்து பெரிய சதுரம் உருவாக்கியது நினைவிருக்கிறதா?

முதலில் பக்கங்களினுடைய வித்தியாசத்தின் பாதி கண்டுபிடிக்கவும்.

$$(5 - 3) \div 2 = 1$$

இனி, இவற்றில் பெரிய சதுரத்தின் மூலைகளிலிருந்து 1 சென்டிமீட்டர் தூரத்தில் புள்ளிகளை அடையாளப்படுத்தி அவற்றை இணைக்கும் கோடுகளின் வழியாக வெட்டி, நான்கு துண்டுகளாக்கவும். அவற்றை மாற்றி அடுக்கி மையப்பகுதியில் சிறிய சதுரம் வைத்தால் $25 + 9 = 34$ சதுர சென்டிமீட்டர் பரப்பளவுடைய சதுரம் கிடைக்கும்.



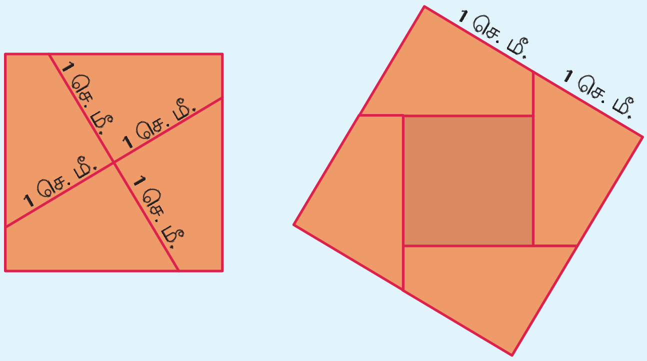


இவ்வாறான பரப்பளவில் சதுரம் இருப்பதில்லை, வரைந்தால் மட்டும் போதுமானதெனில், சதுரத்தின் பக்கங்களின் நீளமுள்ள கோடு மட்டும் வரைந்தால் போதுமானதாகும். அது எவ்வாறு எனப் பார்ப்போம்.

5 சென்டிமீட்டர் பக்க அளவுடைய சதுரத்தை வெட்டிக் கிடைக்கும் நான்கு துண்டுகளினுடைய இரண்டு பக்கங்கள் 4 சென்டிமீட்டரும் 1 சென்டிமீட்டருமாகும்.

இந்தத் துண்டுகளை இணைத்துப் பார்த்தோமானால் அவற்றின் ஏனைய பக்கங்களின் நீளங்கள் எல்லாம் சமம் எனக் காணலாம்.

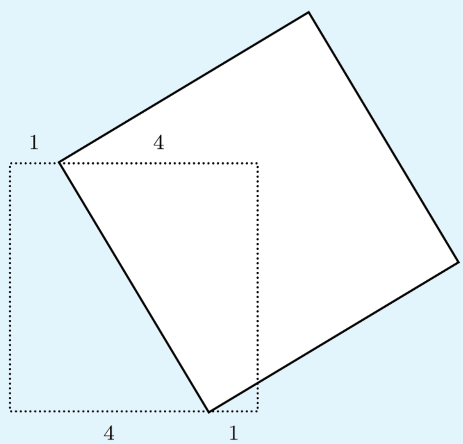
இனி, இந்தப் படங்களைப் பார்க்கவும்.



முதல் சதுரத்தை வெட்டுவதற்கு வரைந்த கோடுகளின் நீளமும் இறுதியாக கிடைத்த சதுரத்தின் பக்கங்களின் நீளமும் சமமாகும்.

எனில் 34 சதுர சென்டிமீட்டர் பரப்பளவுள்ள சதுரத்தின் பக்கம் வரைவதற்கான எளியமுறை கிடைத்தல்லவா?

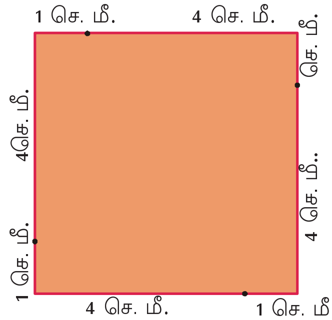
முதலில் 5 சென்டிமீட்டர் பக்க அளவுடைய சதுரம் வரைந்து, அதனுடைய இரு எதிர் மூலைகளிலிருந்து 1 சென்டிமீட்டர் தூரத்தில் ஒவ்வொரு புள்ளியை அடையாளப்படுத்தி இணைக்கவும்.



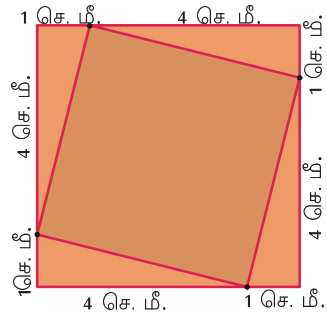
இந்தக் கோடு பக்கமாக வரையக்கூடிய சதுரத்தின் பரப்பளவு 34 சதுர சென்டிமீட்டராகும்.

சிறியதாகும் சதுரம்

5 சென்டிமீட்டர் பக்க அளவுடைய ஒரு சதுரம் வரைந்து மூலைகளிலிருந்து 1 சென்டிமீட்டர் தூரத்தில் கீழ்க் காண்பது போன்று புள்ளிகளை அடையாளப்படுத்தவும்.



இந்த புள்ளிகளை இணைத்தால் இதைவிட சிறிய அளவிலான வேறொரு சதுரம் கிடைக்கும்.

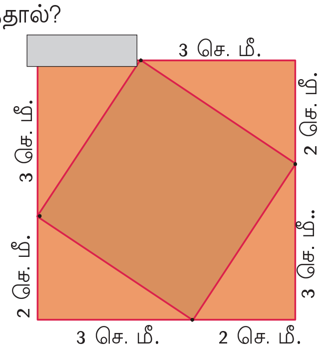


இதனுடைய பரப்பளவு எவ்வளவு?

பெரிய சதுரத்தின் பரப்பளவிலிருந்து நான்கு செங்கோண முக்கோணங்களின் பரப்பளவை கழித்தால் போதுமல்லவா?

$$25 - 4 \times \frac{1}{2} \times 4 \times 1 = 25 - 8 = 17 \text{ ச.செ.மீ}$$

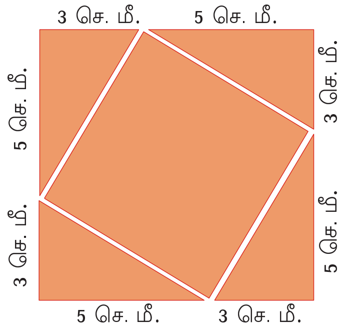
மூலைகளிலிருந்து 2 சென்டிமீட்டர் தூரத்தில் புள்ளிகளை அடையாளப்படுத்தி அவற்றை இணைத்தால்?



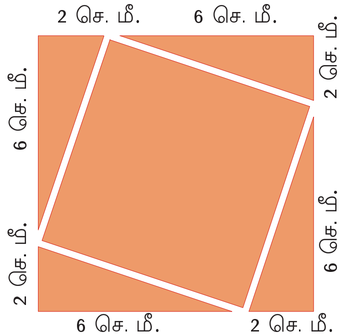
சிறிய சதுரத்தின் பரப்பளவு எவ்வளவு?

வெட்டி மாற்றினால்

பக்கங்களின் நீளம் 8 சென்டிமீட்டரான ஒரு சதுரத்திலிருந்து கீழ் காண்பித்திருப்பது போல் நான்கு செங்கோணமுக்கோணங்களை வெட்டி மாற்றி 34 சதுர சென்டிமீட்டர் பரப்பளவுடைய சதுரம் உருவாக்கலாம்.



கீழ்க் காணும் படத்தில் உள்ளது போல் செங்கோண முக்கோணங்களை வெட்டி மாற்றினாலோ?

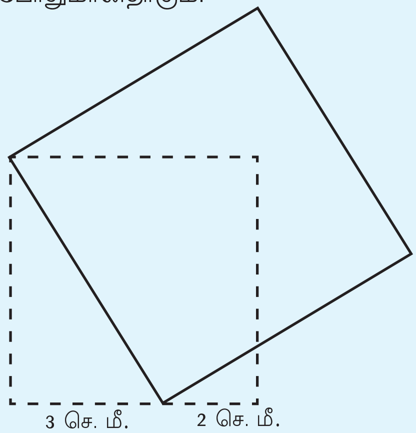


மீதமுள்ள சதுரத்தின் பரப்பளவு எவ்வளவு?

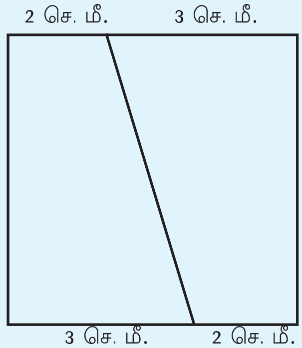
இதைப்போன்று பெரிய சதுரத்திலிருந்து 50 சதுர சென்டிமீட்டர் பரப்பளவுடைய சதுரத்தை வெட்டி எடுக்கலாமா?

44 ½ சதுர சென்டிமீட்டர் பரப்பளவுடைய சதுரமானாலோ?

எதிர் மூலைகள் ஒவ்வொன்றிலிருந்தும் 1 சென்டிமீட்டர் நீக்குவதற்குப் பதிலாக ஒரு மூலையிலிருந்து $2 \times 1 = 2$ நீக்கினால் போதுமானதாகும்.

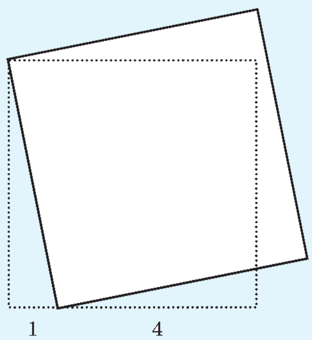


இதைப் போன்று 5 சென்டிமீட்டர் பக்க அளவுடைய சதுரத்தையும் 1 சென்டிமீட்டர் பக்க அளவுடைய சதுரத்தையும் இணைத்து $25 + 1 = 26$ சதுர சென்டிமீட்டர் பரப்பளவுடைய சதுரம் வரைவதற்குப் பெரிய சதுரத்தின் எதிர் மூலைகளிலிருந்து $(5 - 1) \div 2 = 2$ சென்டிமீட்டர் தூரத்தில் புள்ளிகளை அடையாளப்படுத்தி இணைக்க வேண்டும்.

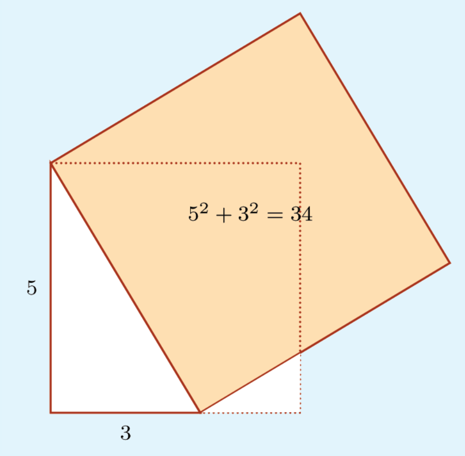


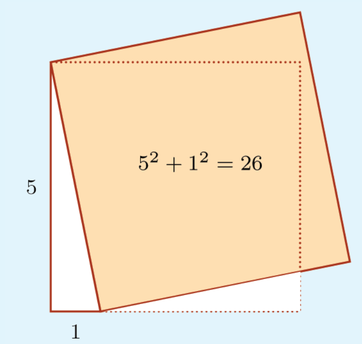
இனி, இந்தக் கோட்டைப் பக்கமாகக் கொண்ட சதுரம் வரைந்தால் போதுமானது.

$5 - 1 = 4$ ன் பாதியை எடுக்காமலும் சதுரம் வரையலாம். ஒவ்வொரு பக்கத்திலும் 2 சென்டிமீட்டர் எடுப்பதற்குப் பதிலாக ஒரு பக்கத்தில் 4 சென்டிமீட்டர் எடுத்தால் போதுமானது.



இப்பொழுது வரைந்த இரண்டு சதுரங்களையும் மேலும் ஒரு முறை பார்க்கவும்.

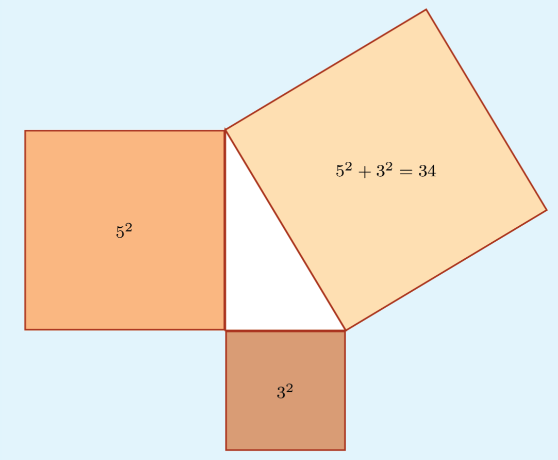




இரண்டு படங்களிலும் சதுரத்தின் ஒரு பக்கம் ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் மிகவும் நீளம் கூடிய பக்கமாகும்.

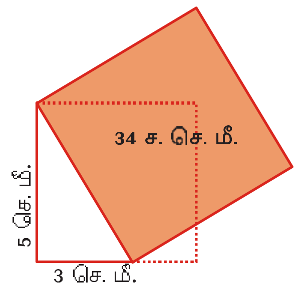
அதனுடைய பரப்பளவு?

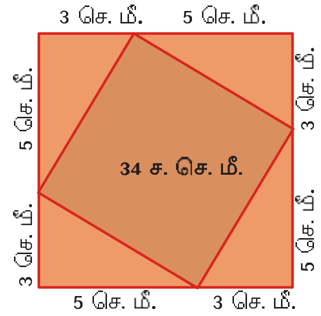
செங்கோண முக்கோணத்தின் ஏனைய இரு பக்கங்களைப் பக்க அளவுகளாகக் கொண்டு வரையப்படும் சதுரங்களின் பரப்பளவுகளின் தொகையாகும்.



செங்கோண முக்கோணங்கள்

34 சதுர சென்டிமீட்டர் பரப்பளவுடைய சதுரம் வரைவதற்கான இரண்டு முறைகளைக் கண்டோமல்லவா?



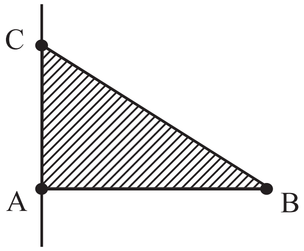


இரண்டு படங்களிலும் இந்தச் சதுரத்தின் பக்கம் ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் மிகவும் நீளம் கூடிய பக்கமாகும்.

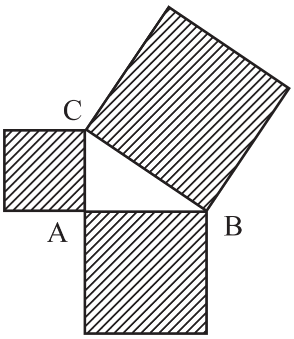
இந்தச் செங்கோணமுக்கோணத்தின் செங்குத்துப் பக்கங்களின் நீளங்களுக்கும் சதுரத்தின் பரப்பளவிற்கும் இடையேயுள்ள தொடர்பு என்ன?

ஒரு செங்கோணமுக்கோணத்தின் பக்கங்களில் வரையப்படும் சதுரங்களின் பரப்பளவுகளுக்கிடையே உள்ள தொடர்பை ஜியோஜிப்ரா பயன்படுத்திப் பரிசோதனை செய்யலாம்.

படத்தில் உள்ளவாறு AB என்ற கோடும் அதற்குச் செங்குத்தாக A யின் வழியாக வேறொரு கோடும் வரைக.

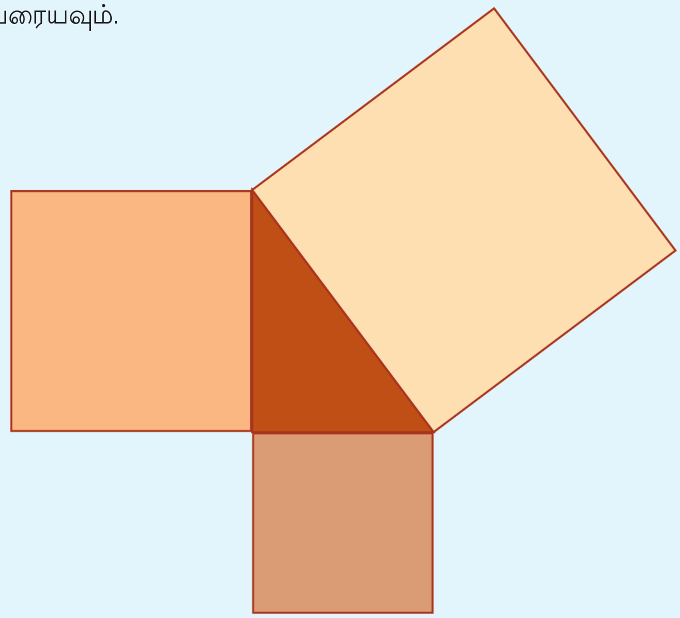


செங்குத்துக்கோட்டில் C என்ற புள்ளியை அடையாளப்படுத்துக. இனி AC என்ற கோட்டை மறைக்கவும். Polygon கருவியைப் பயன்படுத்தி ABC வரையவும். Regular Polygon கருவியை பயன்படுத்தி AB, BC, AC என்ற பக்கங்களில் ஒவ்வொரு சதுரம் வரைக. Area கருவியைப் பயன் படுத்திச் சதுரங்களில் கிளிக் செய்தால் அவற்றின் பரப்பளவைக் காணலாம்.

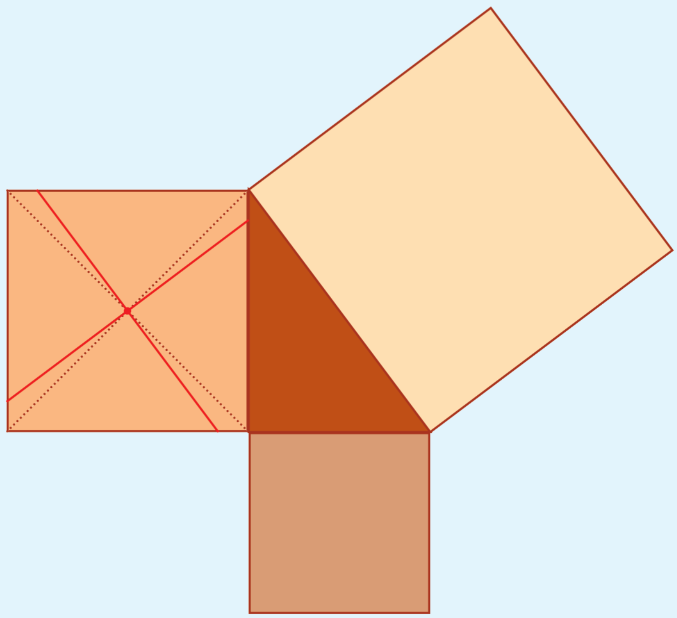


மூன்று சதுரங்களின் பரப்பளவுகளுக் கிடையே உள்ள தொடர்பு என்ன? முக்கோணத்தின் உச்சிகளை மாற்றிப் பார்க்கவும், பரப்பளவுகளுக்கிடையே ஏதேனும் மாற்றம் நிகழ்கிறதா? பெரிய சதுரத்தின் பரப்பளவு 25 சதுர அலகுகளாக வேண்டுமெனில் சிறிய சதுரங்களின் பக்கங்கள் எந்த அளவுகளாக இருக்க வேண்டும்? பெரிய சதுரத்தின் பரப்பளவு 41 சதுர அலகுகள் ஆக வேண்டுமெனில்?

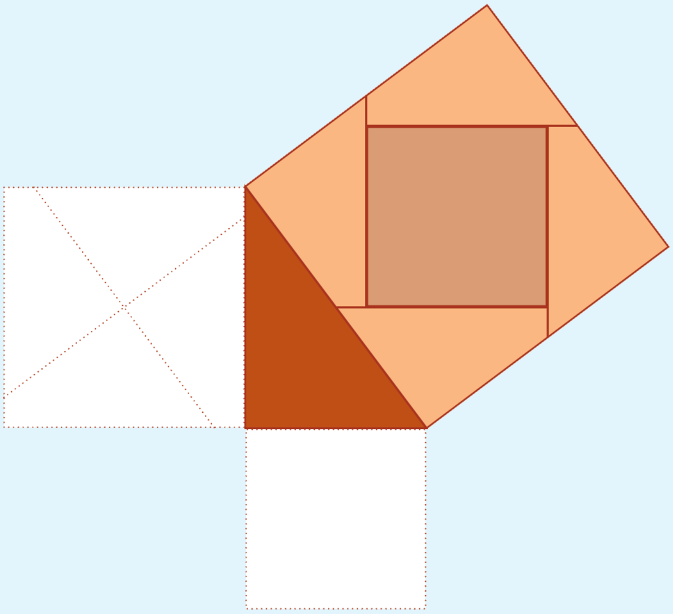
இனிமேல் கட்டியான காகிதத்தில் ஒரு செங்கோண முக்கோணமும் அதன் மூன்று பக்கங்களில் சதுரங்களும் வரையவும்.



இடைப்பட்ட அளவுடைய சதுரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றையொன்று வெட்டிக் கொள்ளும் இடத்தில் ஒரு புள்ளியை அடையாளப்படுத்தவும். அப்புள்ளியின் வழியாக மிகப் பெரிய சதுரத்தின் செங்குத்துப் பக்கங்களுக்கு இணையாக இரண்டு கோடுகள் வரையவும்.



இனிமேல் இந்தக் கோடுகளின் வழியாக வெட்டிக் கிடைக்கும் நான்கு துண்டுகளும் மிகவும் சிறிய சதுரமும் வெட்டி எடுத்து மிகப் பெரிய சதுரத்தினுள் கீழே உள்ளவாறு அடுக்கி வைக்கவும்.



இதிலிருந்து நீங்கள் புரிந்து கொண்டதென்ன?

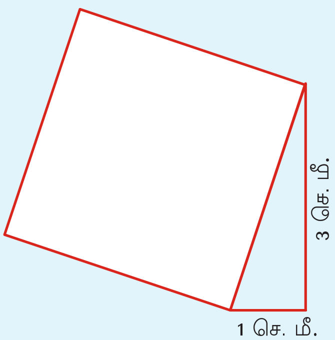
ஒரு செங்கோணமுக்கோணத்தின் மிகப் பெரிய பக்கத்தில் வரையப்படும் சதுரத்தின் பரப்பளவு மற்ற இரண்டு பக்கங்கள் மீது வரையப்படும் சதுரங்களின் பரப்பளவுகளின் தொகைக்குச் சமமாகும்.

கிரீஸ் நாட்டில் மிகப் பழங்காலத்தில் வாழ்ந்திருந்த பைதகோரஸ் என்ற தத்துவஞானியின் பெயரால் இந்தத் தத்துதவம் பைதகோரஸ் தேற்றம் என அழைக்கப்படுகிறது.

இதைப் பயன்படுத்தி, 10 சதுரசென்டிமீட்டர் பரப்பளவுள்ள சதுரம் வரையலாம்.

$$10 = 3^2 + 1^2$$

ஆகுமல்லவா, எனில், பைதகோரஸ் தேற்றத்தின்படி செங்குத்துப் பக்கங்கள் 3 சென்டிமீட்டரும் 1 சென்டிமீட்டரு மான செங்கோணமுக்கோணம் வரைந்து அதன் மூன்றாவது பக்கத்தின் மேல் சதுரம் வரைந்தால் போதும்



7 சதுர சென்டிமீட்டர் பரப்பளவுள்ள சதுரமானால்?

பைதகோரஸ்

பழங்கால கணிதமேதைகளில் புகழ்பெற்ற பைதகோரஸைப் பற்றி நமக்கு அதிகமாக ஒன்றும் தெரியாது. கி.மு. 570 ம் ஆண்டில் கிரீஸிலுள்ள சமோஸ் தீவில் அவர் பிறந்தார்.

இளைஞனாக இருந்தபோது எகிப்து நாட்டிற்குச் சென்று கல்வி பயின்றார் என்றும் பின்னர் நாட்டிற்குத் திரும்பி வந்து பள்ளிக்கூடம் அமைத்தார் என்றும் வரலாறு கூறுகிறது.

‘‘உண்மைகளின் நிலையைக் கணிதத்தின் வாயிலாக மட்டும் அறிய முடியும்” என்று அவர் கற்பித்தார்.

பிறந்த நாடாகிய சமோஸில் நிறுவப்பட்டுள்ள பைதகோரஸின் சிலை படத்தில் காணப் படுகிறது.

பாரத கணிதம்

பழங்கால பாரதத்தின் சில வடிவியல் நூலாகும் சுல்வ சூத்திரங்கள்.

வேறுபட்ட கணிதமேதைகள் பல்வேறு கால கட்டங்களில் எழுதியவை இதில் அடங்கியுள்ளன.

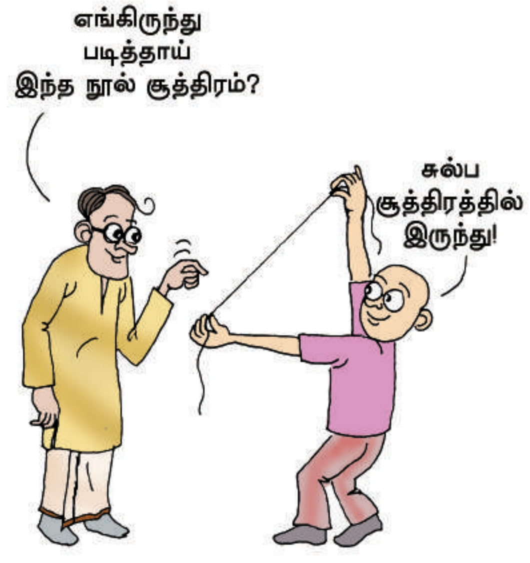
கி.மு. 800ல் எழுதப்பட்டிருக்கலாம் எனக் கருதப் படுகின்ற பௌத்தாயன சுல்வ சூத்திரத்தில், சதுரம் இரு மடங்காகும் முறை கூறப்பட்டுள்ளது.

சதுரத்தின் மூலைவிட்டத்தில் இழுத்துப்பிடித்து கயிற்றினால் இரு மடங்கு பெரிய சதுரம் உருவாக்க வேண்டும்.

கி.மு. 200ல் எழுதப்பட்டது எனக் கருதப்படும் காத்தியாயன சுல்வ சூத்திரத்தில் மேலும் கூடுதலாக பொதுவான முறை கூறப்பட்டுள்ளது:

சதுரத்தின் மூலைவிட்டம் மீது இழுத்து பிடிக்கப்படும் கயிற்றினால் குறுக்காகவும் நெடுக்காவும் உருவாக்கப்படும் சதுரங்களின் பரப்பளவுகளின் தொகை காணலாம்.

சுல்வ என்ற சமஸ்கிருத சொல்லுக்கு கயிறு, நூல் எனப் பொருள். சூத்திர என்ற சொல்லிற்கு தத்துவத்தின் சுருக்கம் என்ற பொருளும் உண்டு.



7ஐக் கொண்டு முழுவர்க்கங்களின் தொகையாக எழுத முடியாதல்லவா.

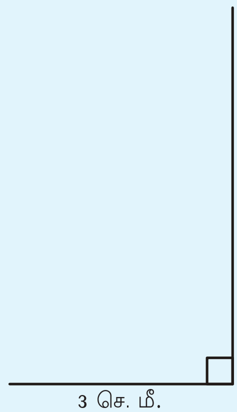
இருப்பினும்

$$7 = 4^2 - 3^2$$

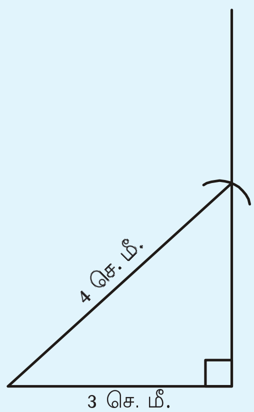
என எழுதலாம். எனில் பிதாகரஸ் தேற்றத்தின் படி இது போன்று ஒரு சதுரம் வரைவதற்கு மிகப் பெரிய பக்கம் 4 சென்டிமீட்டரும் வேறொரு பக்கம் 3 சென்டிமீட்டருமுடைய செங்கோண முக்கோணம் வரைந்தால் போதுமானது

அதை எவ்வாறு வரைவது?

முதலில் 3 சென்டிமீட்டர் நீளமுடைய ஒரு கோடும் அதன் ஒரு முனையில் அதற்கு ஒரு செங்குத்துக்கோடும் வரைக.

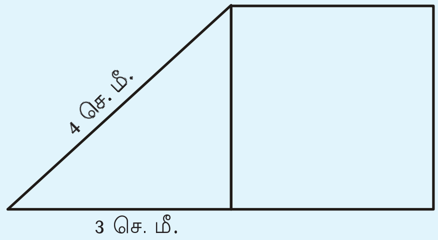


இனி வட்டமானி பயன்படுத்தி, கோட்டின் மறுநுனியிலிருந்து 4 சென்டிமீட்டர் தூரத்தில் செங்குத்துக்கோட்டில் ஒரு புள்ளியை அடையாளப்படுத்தி இணைக்கவும்.



இந்த முக்கோணத்தில் செங்குத்துக்கோட்டின் மீது வரையப்படும் சதுரத்தின் பரப்பளவு, பிதாகரஸ் தேற்றத்தின் படி

$4^2 - 3^2 = 7$ சதுர சென்டிமீட்டரல்லவா.



இதைப்போன்று கீழே தரப்பட்டுள்ள பரப்பளவுகளுடைய சதுரங்களை வரையவும்.

- 20 சதுர சென்டிமீட்டர்
- 39 சதுர சென்டிமீட்டர்
- 40 சதுர சென்டிமீட்டர்
- 65சதுர சென்டிமீட்டர்

வர்க்கத்தின் தொடர்பு

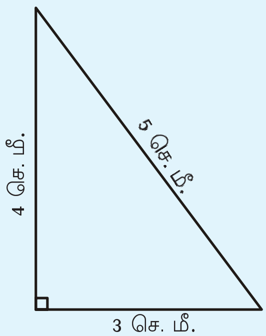
பைதகோரஸ் தேற்றம் ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் மூன்று பக்கங்களின் நீளங்களுக்கிடையே உள்ள தொடர் பாகக் கூறலாம். ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் மிகவும் நீளம் கூடிய பக்கம் அதனுடைய கர்ணம் (Hypotenuse) எனக் கூறப்படுகிறது.

> ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் கர்ணத்தின் வர்க்கம் அதன் பிற இரு பக்கங்களின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகைக்குச் சமம்.

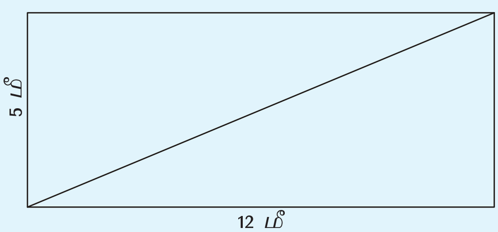
எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் செங்குத்துப் பக்கங்களின் நீளம் 3 சென்டிமீட்டரும், 4 சென்டி மீட்டரும் ஆகுமெனில், கர்ணத்தின் வர்க்கம்

$$3^2 + 4^2 = 25$$

ஆகும். எனில் கர்ணத்தின் நீளம் 5 சென்டிமீட்டர்.



இந்தக் கணக்கைப் பார்க்கவும். படத்தில் செவ்வகத்தின் மூலைவிட்டத்தின் நீளம் என்ன?



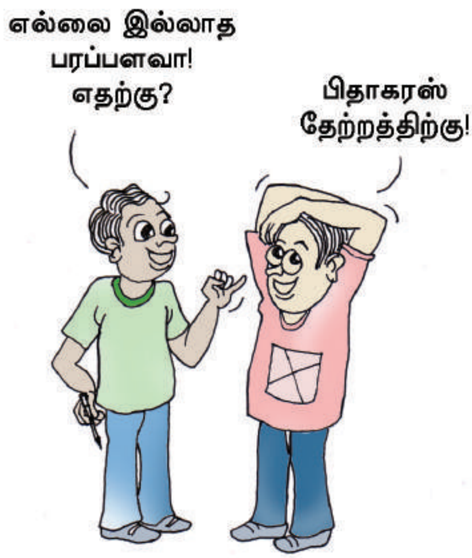
பைதகோரஸ் தொடர்பு

ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் மிகவும் நீளம் கூடிய பக்கத்தின் வர்க்கம் பிற இரு பக்கங்களின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகைக்குச் சமமாகும்.

மாறாக, ஏதாவது ஒரு முக்கோணத்தின் மிகப் பெரிய பக்கத்தின் வர்க்கம் பிற இரு பக்கங்களின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகைக்குச் சமம் எனில் அது ஒரு செங்கோண முக்கோணம் ஆகும்.

அதாவது, ஒரு பக்கத்தின் வர்க்கம் பிற இரு பக்கங்களின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகைக்குச் சமமாவது என்பது செங்கோண முக்கோணங் களின் தனித்தன்மையாகும்.

எடுத்துக்காட்டாக, $3^2 + 4^2 = 5^2$ ஆகையால், பக்கங்களின் நீளம் 3, 4, 5 உடைய முக்கோணம் ஒரு செங்கோண முக்கோணமாகும். பக்கங்களின் நீளம் 6, 8, 10 ஆனால்?

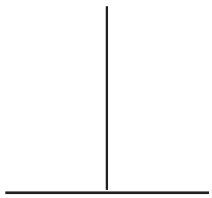


பல்வகைப் பயன்கள்

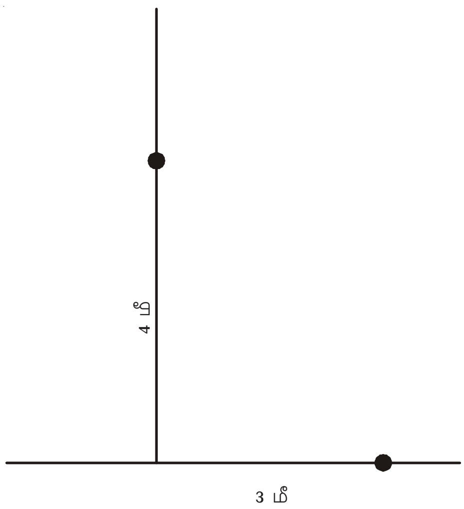
இரண்டு சதுரங்கள் சேர்த்துப் பெரிய சதுரம் உருவாக்கவும். குறிப்பிட்ட பரப்பளவுள்ள சதுரம் உருவாக்குவதற்கும் தேற்றத்தைப் பயன் படுத்தலாம்.

செங்குத்துக்கோடுகள் வரைவதற்கும் செங்குத்தா எனப் பரிசோதிக்கவும். இந்தத் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக, இந்தக் கோடுகளைப் பார்க்கவும்:

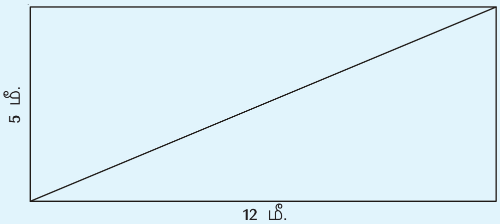


இவை ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தா என கண்டறியக் கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளியிலிருந்து 3 சென்டிமீட்டர் தொலைவில் கிடைமட்டக் கோட்டில் ஒரு புள்ளியை அடையாளப் படுத்தவும். 4 சென்டிமீட்டர் தொலைவில் குத்துக் கோட்டிலும் ஒரு புள்ளியை அடையாளப் படுத்தவும்.



இவ்விரண்டு புள்ளிகளுக்கிடையே உள்ள தூரம் 5 சென்டிமீட்டரெனில் கோடுகள் செங்குத்தாகும். கூடுதலாகவோ குறைவாகவோ இருந்தால் செங்குத்தல்ல.

செவ்வகத்தின் மூலைவிட்டம் ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் கர்ணமல்லவா.



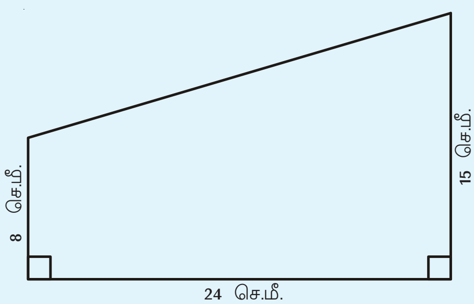
மூலைவிட்டத்தின் வர்க்கம்

$$5^2 + 12^2 = 169$$

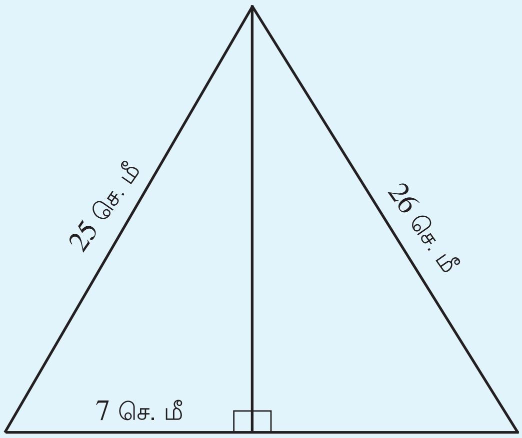
எனில், மூலைவிட்டத்தின் நீளம்

$$\sqrt{169} = 13 \text{ மீ.}$$

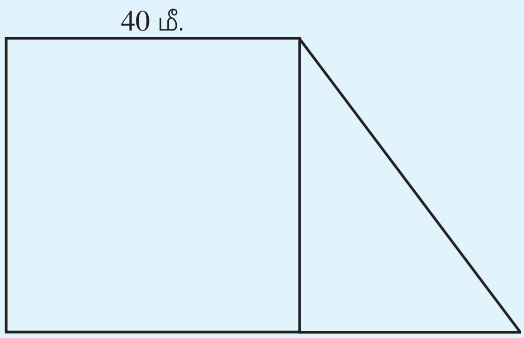
- கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள படத்தில் நாற்கரத்தின் நான்காவது பக்கத்தின் நீளம் எவ்வளவு?



- கீழேக் கொடுக்கப்பட்டுள்ள முக்கோணத்தின் பரப்பளவு காண்க?



- ஒரு சதுரத்துடன் செங்கோண முக்கோணம் சேர்ந்த நிலத்தின் வடிவம் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.



நிலத்தின் மொத்தப் பரப்பளவு 2200 சதுர மீட்டராகும். அதன் சுற்றளவு என்ன?

பைதகோரஸ் மூவெண்கள்

இரண்டு எண்ணல் எண்களின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை, வேறொரு எண்ணல் எண்ணின் வர்க்கமாக இருக்க வேண்டியதில்லை.

எடுத்துக்காட்டாக,

$$1^2 + 2^2 = 5$$

ஆனால்,

$$3^2 + 4^2 = 25 = 5^2$$

$$5^2 + 12^2 = 169 = 13^2$$

$$8^2 + 15^2 = 289 = 17^2$$

என்றிவ்வாறு காணலாம்.

இங்ஙனம் மூன்று எண்ணல் எண்களில் இரண்டு எண்களின் வர்க்கங்களின் தொகை மூன்றாவது எண்ணின் வர்க்கத்திற்குச் சமமாக வேண்டுமெனில், இந்த மூன்று எண்களை ஒரு பைதகோரஸ் மூவெண் எனக் கூறலாம்.

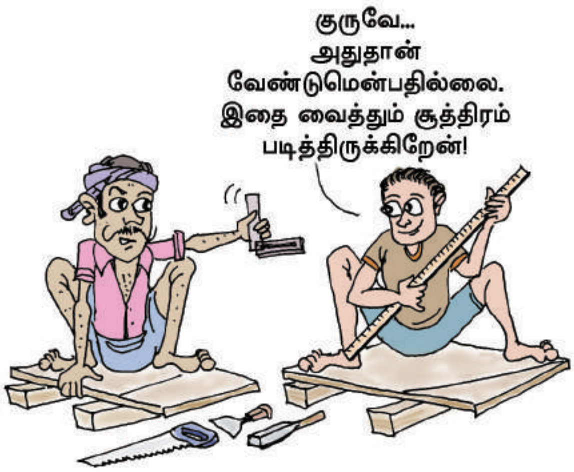
எடுத்துக்காட்டாக,

3, 4, 5

5, 12, 13

8, 15, 17

இவையனைத்தும் பைதகோரஸ் மூவெண்களாகும். இது போன்று வேறு சில மூவெண்களைக் கண்டுபிடிக்கலாமா?



மீள் பார்வை

கற்றல் அடைவுகள்	என்னால் இயலும்	ஆசிரியர் உதவியுடன் இயலும்	இன்னும் மேம்பட வேண்டியுள்ளது
• இரண்டு சதுரங்களுடைய பரப்பளவிற்குச் சமமான மற்றொரு பெரிய சதுரம் உருவாக்குதல்.			
• இவ்வாறு உருவாகும் சதுரத்தின் பரப்பளவு சிறிய சதுரங்களின் பரப்பளவிற்குச் சமமாகும் எனக் காரணக் காரியத்துடன் நிரூபித்தல்.			
• ஒரு குறிப்பிட்ட பரப்பளவு உடைய சதுரம் உருவாக்கும் முறையை விவரித்தல்.			
• செங்கோண முக்கோணத்தின் பக்கங் களில் வரையப்படும் சதுரங்களின் பரப்பளவுகளுக்கிடையே உள்ள தொடர்பைக் காரண காரியத்துடன் நிரூபித்தல்.			
• பைதகோரஸ் தேற்றத்தைத் தகுந்த ஆதாரத்துடன் நிரூபித்தல்.			
• பிரச்சினைகளுக்குத் தீர்வுகாண பைத கோரஸ் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்துதல்.			
• வடிவியல் வடிவங்கள் வரைவதற்கும், உருவாக்குவதற்கும் தெளிவும் நுட்பமும் கவனத்தில் கொள்ளுதல்.			

13

புதிய எண்கள்

குறைந்த வெப்பநிலை

நாளிதழ்களிலும் தொலைக்காட்சியிலும் ஒவ்வொரு நாளும் பல்வேறு இடங்களின் வெப்பநிலைகளைக் கூறுவதைக் கவனித்திருப்பீர்களல்லவா. வடஇந்தியாவில் பல இடங்களிலும் வெப்பநிலை குளிர் காலத்தில் $-1°C$, $-2°C$ என்றெல்லாம் சொல்வதுண்டு. இதனுடைய பொருள் என்ன?

தண்ணீர் உறைந்து பனிக்கட்டியாகும் வெப்பநிலையை பூஜியம் டிகிரி செல்சியஸ் $(0°C)$ என்று கூறுவர். இதற்கும் குறைவான வெப்பநிலைகளைக் குறை அடையாளம் சேர்த்துக் கூறுவர்.

ஒரு கண்ணாடிக் குழலிலுள்ள பாதரசம் வெப்பம் கூடுவதற்கேற்ப விரிவடைந்து உயருவதும் வெப்பம் குறைவதற்கேற்பச் சுருங்கித் தாழ்வதும் உண்டு. இதைப் பயன்படுத்திச் சாதாரணமாக வெப்ப நிலை அளக்கப்படுகிறது. குளிர் பிரதேசங்களில் பயன்படுத்தப்படும் வெப்பநிலைமானிகளில் பூஜியத்தை விடக் குறைந்த எண்களும் அடையாளப்படுத்தப்பட்டிருக்கலாம்.

படத்தில் உள்ள வெப்பநிலைமானியில் $-20°C$க்கும் $-15°C$க்கும் இடைப்பட்ட வெப்பநிலை குறிப்பிடப்பட்டுள்ளது.

வர்ண எண்கள்

நீதுவும் ஹரியும் அன்வரும் எண்களை வைத்துச் சீட்டு விளையாடுகிறார்கள். 1 முதல் 5 வரையுள்ள எண்கள் எழுதப்பட்ட 50 சீட்டுகள். ஒவ்வொரு எண்ணும் 10 வீதம். அதில் பகுதிச் சீட்டுகளில் கறுப்பு நிற எண்களும் மீதமுள்ளவை சிவப்பு நிற எண்களும் ஆகும்.

முதலில் ஒவ்வொருவரும் ஒரு கறுப்பு நிறமுடைய 5 எடுக்கிறார்கள். மீதமுள்ள சீட்டுகளெல்லாம் கலைத்து அடுக்காக நடுவில் கவிழ்த்து வைக்கப்படுகின்றன. இதன் பிறகு ஒவ்வொருவரும் ஆரவாரத்துடன் ஒவ்வொரு சீட்டை அடுக்கிலிருந்து எடுக்கிறார்கள். கிடைப்பது கறுப்பு எண் எனில் அதைக் கூட்டலாம். சிவப்பு எண் எனில் குறைக்க வேண்டும். இவ்வாறு கூட்டியும் குறைத்தும் விளையாட்டு தொடர்கிறது. முதலில் 10 ஐவிடக் கூடுதல் கிடைத்தவர் வெற்றி பெறுவார்.

அவர்களுக்கு முதலில் இவ்வாறு கிடைத்தன:

நீது [2] அன்வர் [1] ஹரி [3]

அப்படியென்றால் விளையாட்டு விதிக்குட்பட்டு ஒவ்வொருவருடைய இப்போதைய எண்களை எழுதலாம்:

நீது	5	7
அன்வர்	5	6
ஹரி	5	2

இரண்டாவது முறை கிடைத்தவை இவ்வாறாகும்:

நீது [1] அன்வர் [3] ஹரி [3]

இப்போது ஒவ்வொருவருடைய நிலையும் எவ்வாறு எழுதலாம்?

நீது	5	7	8
அன்வர்	5	6	3
ஹரி	5	2	

ஹரியின் விஷயம் விவாதமானது.

2-லிருந்து 3-ஐக் கழிக்க இயலாது. அதனால் தனது இப்போதைய எண்ணை 0 என்றெழுதலாம் என ஹரி கூறினான்.

அவ்வாறல்ல, ஹரி விளையாட்டில் தோற்றுவிட்டான். இனிமேல் நீதுவும் நானும் மட்டும் விளையாடினால் போதும் என்றான் அன்வர்.

அது வேண்டாம், ஹரி இனிமேலும் விளையாடட்டும், அடுத்தமுறை கிடைக்கும் எண்ணிலிருந்து 1 கழித்தால் போதும் என்பது நீதுவின் கருத்தாகும்.

இதை அனைவரும் ஏற்றுக்கொண்டனர். ஹரியினுடைய கட்டத்தில் "1 கழிக்கணும்" என எழுதலாம் என்று தீர்மானிக்கப்பட்டது.

என்றால் மேலும் சுருக்கி –1 என்றெழுதினால் போதுமே என்றான் அன்வர். அதையும் எல்லோரும் ஏற்றுக் கொண்டனர்.

நீது	5	7	8
அன்வர்	5	6	3
ஹரி	5	2	–1

அடுத்தமுறை ஹரி தப்பித்துவிட்டான்.

நீது 4 அன்வர் 5 ஹரி 3

விளையாடுபவர்களின் இப்போதைய நிலையை எழுதலாமா?

நீது	5	7	8	4
அன்வர்	5	6	3	
ஹரி	5	2	–1	

ஹரிக்கு இப்பொழுது கிடைத்தது 3; முன்னர் இருந்த 1ன் கடன் கழித்தால் 2.

அன்வரின் விஷயத்தில் என்னவாயிற்று?

3 லிருந்து 5 கழிக்க இயலாது. முன்னர் ஹரிக்கு செய்ததைப் போன்று அடுத்தமுறை கிடைக்கும் எண்ணிலிருந்து கழித்தால் போதும் எனத் தீர்மானிக்கப்பட்டது.

எவ்வளவு கழிக்க வேண்டும்?

2 கழிக்கணும் என்பதை முன்னர் செய்தது போன்று –2 என்றெழுதலாம்.

நீது	5	7	8	4
அன்வர்	5	6	3	–2
ஹரி	5	2	–1	2

நான்காவது முறை கிடைத்த சீட்டுகள் இவ்வாறாகும்:

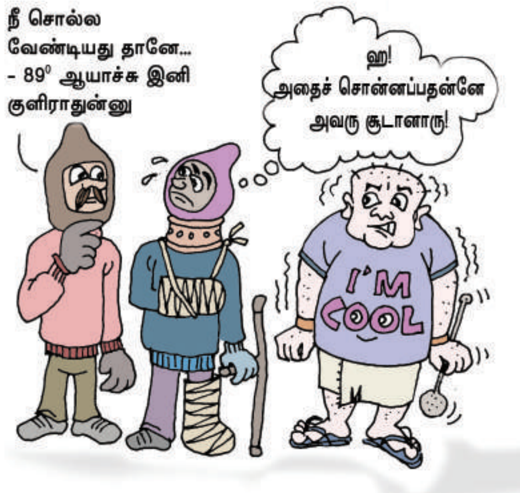
நீது 1 அன்வர் 3 ஹரி 3

குளிர், கடுங்குளிர்

இந்தியாவில் மிகக்கூடிய குளிர்ப் பிரதேசம் காஷ்மீரிலுள்ள கார்கில் மாவட்டத்தில் திராஸ் என்ற நகரமாகும். இங்கு வெப்பநிலை –60 டிகிரி வரை குறைந்ததாகப் பதிவுசெய்யப்பட்டுள்ளது.

பூமியில் அதிகக் குளிர் அனுபவப்படும் இடம் அன்டார்டிகா பூகண்டலத்திலாகும்.

இங்குதான் பூமியில் மிகக் குறைந்த வெப்ப நிலையாகிய –89 டிகிரி அடையாளப்படுத்தப் பட்டுள்ளது.



குளிரின் எல்லை

நமக்குத் தெரிந்த பிரபஞ்சத்தை எடுத்தோமே யானால் மிகக் குறைந்த வெப்பநிலை கண்டறியப் பட்டுள்ளது, பூமியிலிருந்து (5×10^{16}) ஐந்நூறு கோடி கோடி தொலைவிலுள்ள "பூமராங் நெபுல" எனப் பெயரிடப்பட்டுள்ள ஒரு நட்சத்திரக் கூட்டத்திலாகும். அது $-272.15°C$ ஆகும்.

இயற்கையில் மிகக் குறைந்த வெப்பநிலை இது எனினும் இதைவிடக் குறைந்த வெப்பநிலை சோதனைச்சாலைகளில் செயற்கையாக உருவாக் கப்பட்டுள்ளது.

ஆனால் இயற்பியலில் $-273.15°C$ டிகிரி செல்சியஸோ அதைவிடக் குறைவாகவோ வெப்பநிலையை உருவாக்கவோ உருவாகவோ சாத்தியமில்லை.

இப்போதைய நிலையை எழுதலாமா?

நீது	5	7	8	4	
அன்வர்	5	6	3	–2	
ஹரி	5	2	–1	2	

பூஜியத்திற்கும் கீழ்

சீட்டு விளையாட்டில் 2 லிருந்து 3 கழிக்க வேண்டியிருந்த போது அதை –1 என எழுதினோம் அல்லவா? இதனை

$$2 - 3 = -1$$

என எழுதலாம். இதன் பொருள் என்ன?

2லிருந்து 2 கழித்தால் 0 ஆகும். இங்குக் கழிக்க வேண்டியது 3 ஆனதால் 1 கூட கழிக்க வேண்டும். இதனை –1 என எழுதலாம்.

$$0 - 1 = -1$$

இதைப்போல் 3 லிருந்து 5 கழித்தது எவ்வாறு?

3லிருந்து 3 கழித்தால் 0; இன்னும் எத்தனை கழிக்க வேண்டும்?

$$0 - 2 = -2$$

இவ்வாறு குறை அடையாளத்தைச் சேர்த்து எழுதும் எண்களைக் குறை எண்கள் (Negative numbers) எனக் கூறுகிறோம்.

வேறொரு கணக்கைப் பார்ப்போம்:

ஒரு தேர்வில் 25 வினாக்கள் உள்ளன. சரியாக விடை எழுதினால் 2 மதிப்பெண்கள் வீதம் கிடைக்கும். தவறான விடைகள் ஒவ்வொன்றிற்கும் 1 மதிப்பெண் குறையும்.

எடுத்துக்காட்டாக, 19 விடைகள் சரியானதாகவும் 6 விடைகள் தவறானதாகவும் இருந்தால், மொத்தம் கிடைக்கும் மதிப்பெண்

$$(19 \times 2) - 6 = 32$$

மாறாக ஆனால்?

சரியான 6 விடைகளுக்கு $(6 \times 2) = 12$ மதிப்பெண்கள் கிடைக்கும். தவறான 19 விடைகளுக்கு 19 மதிப்பெண்கள் குறையும்.

மதிப்பெண் $12 - 19$

இதை எவ்வாறு காணலாம்?

12 லிருந்து 12 கழிக்கும்போது 0 ஆகும்; மேலும் எத்தனை கழிக்க வேண்டும்?

$$19 - 12 = 7$$

எனில்,

$$12 - 19 = 0 - 7 = - 7$$

பின்ன எண்களின் குறையும் சில நேரங்களில் தேவைப்படும். இந்தக் கணக்கைப் பார்க்கவும்.

ஒரு தேர்வில் 10 வினாக்கள் உள்ளன. சரியான ஒவ்வொரு விடைக்கும் 1 மதிப்பெண். தவறான ஒவ்வொரு விடைக்கும் $\frac{1}{2}$ மதிப்பெண்கள் குறைக்கப்படும்.

3 சரியான விடைகள் எழுதிய ஒருவருக்கு எத்தனை மதிப்பெண்கள் கிடைக்கும்?

சரியான 3 விடைகளுக்கு 3 மதிப்பெண்கள் கிடைக்கும். தவறான 7 விடைகளுக்கு, 7ன் பாதி $3\frac{1}{2}$ மதிப்பெண்கள் குறையும். 3லிருந்து 3 கழித்தால் 0. மேலும் $\frac{1}{2}$ கூட கழிக்க வேண்டும். அப்போது மொத்த மதிப்பெண்கள்

$$3 - 3\frac{1}{2} = 0 - \frac{1}{2} = - \frac{1}{2}$$

இந்தத் தேர்வில் ஒரு சரியான விடை மட்டும் எழுதிய ஒருவருக்கு எத்தனை மதிப்பெண்கள் கிடைக்கும்?

$$1 - 4\frac{1}{2}$$

இதை எவ்வாறு காண்பாய்?

$$1 - 1 = 0$$

மேலும் கழிக்க வேண்டியது

$$4\frac{1}{2} - 1 = 3\frac{1}{2}$$

எனில்

$$1 - 4\frac{1}{2} = 0 - 3\frac{1}{2} = - 3\frac{1}{2}$$

குறை எண்களையும் பயன்படுத்தி ஆரம்பிக்கும்போது $1, 2, 1\frac{1}{2}$ என்றிவ்வாறான (குறையல்லாத) எண்கள் மிகை எண்கள் (Positive numbers) எனக் கூறப்படுகின்றன.

அப்படியானால் 0 என்ற எண்ணோ? அது மிகை எண்ணும், குறை எண்ணும் அல்ல.

சிறிய மிகை எண்ணிலிருந்து பெரிய மிகை எண்ணைக் கழிக்கும்போது கிடைக்கும் குறை எண்களைக் கண்டு பிடிப்பதற்கு முதலில் பூஜியத்தை வந்தடைந்து பின்னர்

குறை மதிப்பு

கி.பி. ஏழாம் நூற்றாண்டிலிருந்தே இந்தியாவில் பணப்பரிமாற்றங்களில் கடனைக் குறிப்பிட்ட குறை எண்கள் பயன்படுத்தப்பட்டன. இந்தக் காலத்திலும் இவ்வாறான சூழ்நிலைகளில் குறை எண்கள் பயன்படுத்தப்படுகினறன.

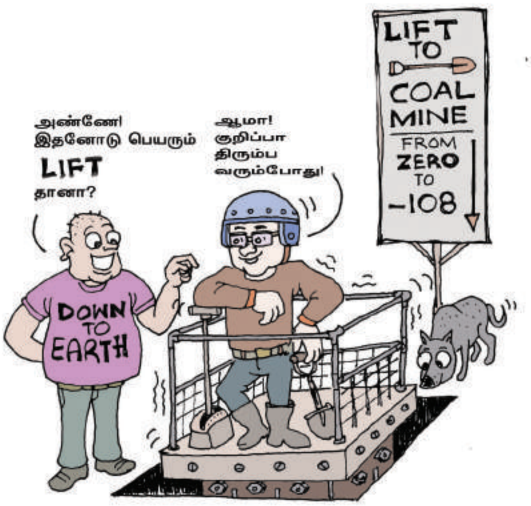
எடுத்துக்காட்டாக, பல்வேறு தரப்பினரும் கைபேசி பயன்படுத்துவது முன்கூட்டியே குறைந்த அளவிலான பணம் செலுத்தியபின் தான் பயன்படுத்துவதற்கேற்ப இது குறைந்து கொண்டே வரும். எந்தச் சூழ்நிலையிலும் எவ்வளவு பணம் மீதமுள்ளது என்பதனைத் தெரிந்து கொள்வதற்கான முறை உள்ளது. செலுத்திய பணம் தீர்ந்து விட்டாலும் மேலும் பயன்படுத்தலாம். இவ்வாறான நேரங்களில் தொகையை -2 ரூபாய், -3 ரூபாய் என்றிவ்வாறு காணமுடிகின்றது. தொடர்ந்து பணம் செலுத்தும் போது இந்தத் தொகை குறைக்கப்படும் என்பதே இதன் பொருளாகும்.

குறை மாடிகள்

மிகவும் உயரமான கட்டிடங்களில் ஒரு மாடியிலிருந்து மற்றொன்றிற்குச் செல்வதற்கு லிப்ட் என்ற இயந்திரம் பயன்படுத்தப்படுகிறது. இதில் பல்வேறு மாடிகளைக் குறிப்பிடும் எண்கள் எழுதிய பொத்தான்கள் காணப்படும். இதை அழுத்தினால் செல்ல வேண்டிய மாடியை அடையலாம். ஒரு லிப்டின் சில பொத்தான்கள் படத்தில் காண்பிக்கப்பட்டுள்ளன.

இதில் $-1, -2$ என்ற குறை எண்கள் எதற்காக?

இந்தக் கட்டிடத்தில் தரைமட்டத்திற்குக் கீழ்ச் சில மாடிகள் உள்ளன. அவற்றில் முதலாவதை -1 என்றும் அதற்கும் கீழ் உள்ள மாடி -2 எனவும் காண்பிக்கப்பட்டுள்ளன.



பூஜ்யத்திலிருந்து குறைத்து தான் செய்தது. இதற்குப் பதில் நேராகக் கணக்கிடலாமா?

மேலே எழுதிய கணக்குகளையெல்லாம் மேலும் ஒரு முறை பார்க்கவும்.

$2 - 3 = -1$	$3 - 2 = 1$
$3 - 5 = -2$	$5 - 3 = 2$
$12 - 19 = -7$	$19 - 12 = 7$
$3 - 3\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{2} - 3 = \frac{1}{2}$
$1 - 4\frac{1}{2} = -3\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{2} - 1 = 3\frac{1}{2}$

இதிலிருந்து என்ன புரிந்து கொண்டாய்?

> மிகை எண்களில் சிறியதிலிருந்து பெரியதைக் கழித்தால் கிடைப்பது. பெரியதிலிருந்து சிறியதைக் கழித்தால் கிடைப்பதன் குறையாகும்.

இதை இயற்கணித முறையைப் பயன்படுத்தியும் எழுதலாம்.

> x, y என்ற எந்த இரண்டு மிகை எண்களில் $x < y$ எனில்
>
> $$x - y = -(y - x)$$

மேலும் இந்தக் கணக்குகளைச் செய்து பார்க்கவும்:

- $4 - 9$
- $14 - 29$
- $\frac{1}{2} - \frac{3}{4}$
- $5 - 10$
- $25 - 65$
- $\frac{1}{3} - \frac{1}{2}$

கூட்டலும் கழித்தலும்

எண்களைப் பயன்படுத்தும் சீட்டு விளையாட்டில் ஒருவரின் எண் -2 என்பதன் பொருள், இனிமேல் கிடைப்பதிலிருந்து 2 கழிக்க வேண்டுமென்பதல்லவா. அப்போது அடுக்கிலிருந்து கறுப்புநிற 2 கிடைத்தால் அவருடைய எண்

$$2 - 2 = 0$$

எண் -2 ஆக இருக்கும்போது 2 கூட்டுவதை

$$-2 + 2$$

என எழுதலாம். அதாவது,

$$-2 + 2 = 2 - 2 = 0$$

10 வினாக்கள் உள்ள தேர்வில் சரியான விடைகளுக்கு 1 மதிப்பெண் கொடுக்கவும். தவறான விடைகளுக்கு 1 மதிப்பெண் குறைக்கவும் செய்யப்படும்.

முதலில் 5 தவறான விடைகளும் பின்னர் 5 சரியான விடைகளும் எழுதினால் எத்தனை மதிப்பெண்கள் கிடைக்கும்?

சரியான 5 விடைகளுக்கான 5 மதிப்பெண்களிலிருந்து தவறான விடைகளுக்கான 5 மதிப்பெண்களைக் கழித்தால் மொத்த மதிப்பெண் 0.

விடை எழுதியதிற்கேற்பக் கணக்கிட்டுப் பார்த்தால், மொத்த மதிப்பெண் $-5+5$ என்றெழுதலாம். அதாவது

$$-5+5=5-5=0$$

முதல் 4 விடைகள் தவறானதும் அடுத்த 6 விடைகள் சரியானவை எனில்?

அதை $-4+6$ என்றெழுதலாம். சரியான விடைகளுக்குக் கிடைத்த 6 மதிப்பெண்களிலிருந்து தவறான விடைகளுக்கு நஷ்டமாகும் 4 மதிப்பெண்களைக் கழித்தால் $6-4=2$. அப்பொழுது

$$-4+6=6-4=2$$

முதல் 6 தவறாகவும் அடுத்த 4 சரியாகவும் இருந்தால்?

மொத்த மதிப்பெண்கள் $-6+4$ என எழுதலாம்.

சரியான விடைகளுக்குக் கிடைத்த 4 மதிப்பெண்களிலிருந்து, தவறான விடைகளுக்கு நஷ்டமாகும் 6 மதிப்பெண்ணைக் கழித்தால் $4-6=-2$ எனில்

$$-6+4=4-6=-2$$

10 வினாக்களில் சரியான விடைகளுக்கு 1 மதிப்பெண் கொடுத்தும் தவறான விடைகளுக்கு $\frac{1}{2}$ மதிப்பெண் கழித்தும் நடத்தப்படும். தேர்வில் கடைசி 3 விடைகள் மட்டுமே சரியானவை எனில் மொத்த மதிப்பெண்கள் எத்தனை? மொத்த மதிப்பெண்கள் $3-3\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$ என முன்னரே கண்டோம். விடைகளுக்கேற்ப மதிப்பெண் கணக்கிட்டால், மொத்த மதிப்பெண் $-3\frac{1}{2}+3$ எனக் கூறலாம். அதாவது,

$$-3\frac{1}{2}+3=3-3\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$$

இந்தக் கணக்குகளை எல்லாம் ஒவ்வொன்றாகப் பார்ப்போம்.

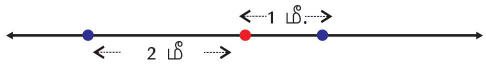
$$-2+2 = 2-2=0$$

$$-5+5 = 5-5=0$$

$$-4+6 = 6-4=2$$

திசை மாற்றம்

ஒரு நேர்க்கோட்டின் வழியேயுள்ள அசைவைக் குறித்துக் கூறும்போது, கோட்டின் ஒரு குறிப் பிட்டப் புள்ளியிலிருந்து ஒரு திசைக்குள்ள தூரங்களை மிகை எண்களாகவும், எதிர் திசைக் குள்ள தூரங்களைக் குறை எண்களாகவும் குறிப்பிடுவது உண்டு.



படத்தில் சிவப்புநிறப்புள்ளியிலிருந்து வலது பக்கமுள்ள தூரங்கள் மிகை எண்களாகவும், இடது பக்கமுள்ள தூரங்கள் குறை எண்களாக வும் எடுக்கப்பட்டுள்ளன.

இப்புள்ளியிலிருந்து முதலில் 3 மீட்டர் வலது பக்கமாகப் பயணம் செய்தபின், 5 மீட்டர் இடது பக்கம் பயணம் செய்தால் சென்றடைவது புள்ளிக்கு இடது பக்கமா? வலது பக்கமா? எவ்வளவு தூரத்தில்?

இச்செயலை

$$3-5=-2$$

என்று எழுதலாம்.

முதலில் 5 மீட்டர் இடது பக்கமாகப் பயணம் செய்தபின், 3 மீட்டர் வலது பக்கமாகப் பயணம் செய்தால்?

$$-5+3=-2$$

முதலில் 5 மீட்டர் இடது பக்கமாகப் பயணம் செய்தபின் மீண்டும் 3 மீட்டர் இடது பக்கமாகவே பயணம் செய்தால்?

வேகக் கணக்கு

பூமியிலிருந்து மேல்நோக்கி எறியப்பட்ட ஒரு பொருள் உயர்ந்து கொண்டே செல்லும் போது ஒவ்வொரு பொழுதும் வேகம் குறையும். அவ்வாறு வேகம் குறைந்து பூஜியம் ஆகும் போது கீழ்நோக்கி விழத் தொடங்குகிறது. இந்த கீழ்க்நோக்கி உள்ள பயணத்தில் வேகம் அதிகரித்துக் கொண்டே வரும். முடிவில் பூமியில் விழும்.

நேராக மேல்நோக்கி எறியப்பட்டால், ஒவ்வொரு வினாடியிலும் 9.8 மீட்டர்/வினாடி என்ற அளவில் வேகம் குறைகிறது. எடுத்துக்காட்டாக, 49 மீட்டர்/வினாடி என்ற வேகத்தில் மேல்நோக்கி எறியப்பட்ட ஒரு பொருளின் வேகம் ஒரு வினாடிக்குப்பின் $49 - 9.8 = 39.2$ மீட்டர் / வினாடி ஆகும்; 2 வினாடிக்குப்பின் $49 - (2 \times 9.8) = 29.4$ மீட்டர் / வினாடி ஆகும்.

5 வினாடிகளுக்குப்பின் வேகம்

$$49 - (5 \times 9.8) = 0$$

ஆகும். தொடர்ந்து ஒவ்வொரு வினாடியிலும் 9.8 மீட்டர் / வினாடி என்ற அளவில் கூடுதலான வேகத்தோடு கீழே விடத்தொடங்கும்.

எறிந்த பின் 7 வினாடிகள் ஆகும் போதோ?

விழத்தொடங்கி $7 - 5 = 2$ வினாடி ஆனது. அப்பொழுது வேகம் பூஜ்ஜியத்திலிருந்து 2×9.8 மீட்டர் / வினாடி அதிகரித்து விட்டது. அதாவது 19.6 மீட்டர் / வினாடி.

இச்செயலை இயற்கணித முறையில் சுருக்கி எழுதலாம். எறிந்த பின் t வினாடி ஆகும்போது வேகம் எவ்வளவு?

$t < 5$ எனில் வேகம்

$49 - 9.8\,t$ மீட்டர் / வினாடி

$t > 5$ எனில்? கீழ்நோக்கிப் பயணம் ஆரம்பித்து $t - 5$ வினாடி ஆனது. அப்பொழுது வேகம்

$(t - 5) \times 9.8 = 9.8t - 49$ மீட்டர் / வினாடி.

$$-6 + 4 = 4 - 6 = -2$$

$$-3\frac{1}{2} + 3 = 3 - 3\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

இதிலிருந்து என்ன புரிந்தது?

ஒரு மிகை எண்ணின் குறையுடன் ஒரு மிகை எண்ணைக் கூட்டுவது என்பதன் பொருள். இரண்டாவது எண்ணிலிருந்து முதல் எண்ணைக் கழிப்பது என்பதாகும்.

இயற்கணித முறையில் கூறினால்

x, y என்ற எந்த மிகை எண்களை எடுத்தாலும்

$$-x + y = y - x$$

இனி இந்தக் கணக்குகளைச் செய்து பார்க்கவும்.

- $-4 + 9$
- $-15 + 8$
- $-\frac{1}{2} + \frac{3}{4}$
- $-9 + 4$
- $-8 + 15$
- $-\frac{3}{4} + \frac{1}{2}$

மீண்டும் கழிப்போம்

தவறான விடைகளுக்கு 1 மதிப்பெண் குறைக்கும் தேர்வில் முதல் இரண்டு விடைகளும் தவறானால் மொத்த மதிப்பெண்கள் எத்தனை?

அடுத்த விடையும் தவறானால்?

3 விடைகள் தவறானதால் மதிப்பெண்கள் -3 அல்லவா?

இதை வேறொரு முறையிலும் கூறலாம். முதல் இரண்டு விடைகள் தவறான போது மதிப்பெண் -2. அடுத்ததும் தவறானதால் மேலும் 1 மதிப்பெண் கழிக்க வேண்டும். அதாவது $-2 - 1$. அதாவது

$$-2 - 1 = -3$$

அடுத்த இரண்டு விடைகளும் தவறானவை என்றால்?

5 விடைகள் தவறு; மதிப்பெண்கள் -5. வேறொரு முறையில் பார்த்தோமேயானால்,

-3 லிருந்து மீண்டும் 2 குறைந்தது. அதாவது $-3 - 2$

இதனை இவ்வாறு எழுதலாம்:

$$-3 - 2 = -5$$

அப்பொழுது $-5 - 3$ எவ்வளவு?

-5 என்றால் 0விட 5 குறைவு. மீண்டும் 3 கழித்தால் மொத்தம் எத்தனை குறையும்?

அதாவது

$$-5-3=-(5+3)=-8$$

இதைப்போன்று $-5-7$ கணக்கிடலாமா?

$$-5-7=-(5+7)=-12$$

பொதுவாகக் கூறினால்,

ஒரு மிகை எண்ணின் குறையிலிருந்து வேறொரு மிகை எண்ணைக் கழித்தால், இந்த மிகை எண்களின் தொகையின் குறை கிடைக்கும்.

இதனை இயற்கணிதமுறையில் கூறினாலோ?

x, y என்ற எந்த மிகை எண்களானாலும்

$$-x-y=-(x+y)$$

இதைப் பயன்படுத்திக் கீழேயுள்ள கணக்குக்களைச் செய்து பார்க்கவும்.

- $-1-1$
- $-7-8$
- $-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}$
- $-2-2$
- $-8-7$
- $-2\frac{1}{2}-1\frac{1}{2}$
- $8-12$
- $-10-4$
- $1\frac{1}{2}-7\frac{1}{2}$
- $-25-3\frac{1}{2}$
- $-8+8$
- $-10+20$
- $-3\frac{1}{2}+3\frac{1}{2}$
- $-20+40$
- $-7+4$
- $-4\frac{1}{2}+5\frac{1}{2}$
- $-12\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$

குறைவேகம்

49 மீட்டர்/வினாடி என்ற வேகத்தில் மேல்நோக்கி எறிந்த பொருளின் வேகம் இயற்கணித முறையில் இரண்டு இயற் கணிதச் சமன்பாடுகளைப் பயன்படுத்தி அல்லவா?

$t<5$ எனில் $v=49-9.8\text{ t}$

$t>5$ எனில் $v=9.8\text{ t}-49$

மேல்நோக்கி செல்லும் வேகத்தை மிகை எண்களினாலும் கீழ்நோக்கி வரும் வேகத்தைக் குறை எண்களைக் கொண்டும் குறிப்பிடுவோமே யானால், எந்த நேரத்தில் வேகம் காண்பதற்கும்

$$v=49-9.8t$$

என்ற ஒரு இயற்கணிதச் சமன்பாடு போதும். எடுத்துக்காட்டாக, எறிந்து 8 வினாடி சென்றபின் வேகம்

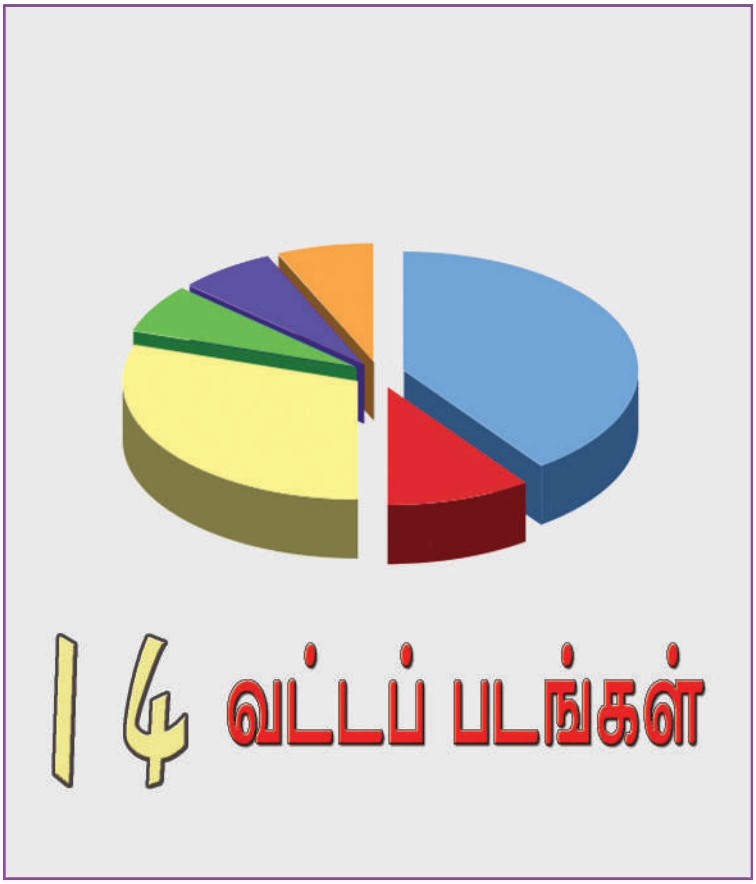
$49-(9.8\times 8)=-29.4$ மீட்டர் / வினாடி

மீள்பார்வை

கற்றல் அடைவுகள்	என்னால் இயலும்	ஆசிரியர் உதவியுடன் இயலும்	இன்னும் மேம்பட வேண்டியுள்ளது
• சிறிய எண்ணிலிருந்து பெரிய எண்ணைக் கழிக்க வேண்டிய சூழ்நிலைகளில் குறை எண்களை விவரித்தல்.			
• குறை எண்களைப் பயன்படுத்த வேண்டிய சூழ்நிலைகளைக் கண்டறிந்து விவரித்தல்.			
• ஒரு குறை எண்ணுடன் ஒரு மிகை எண்ணைக் கூட்டுவதற்கும், ஒரு குறை எண்ணிலிருந்து ஒரு மிகை எண்ணைக் கழிப்பதற்குமான செயல்முறை விவரித்தல்.			
• விளையாட்டுகளிலும் புள்ளிகள் அடையாளப்படுத்துகின்ற பிற சூழ்நிலைகளிலும் குறை எண்களைப் பயன்படுத்துதல்.			

14

வட்டப் படங்கள்

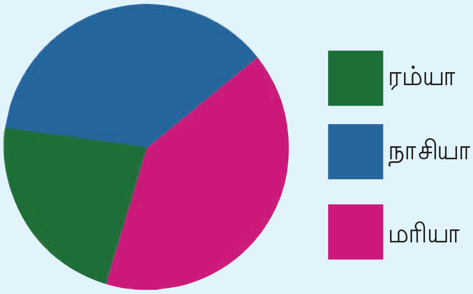


வட்டப்படங்கள் (Pie diagrams)

எண்களிலான ஒரு உண்மையைப் பல பாகங்களாக வகைப்படுத்தி அவைகளுக் கிடையே ஒப்புமை தேவைப்படும்போது வட்டப் படங்கள் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. இதில் ஒவ்வொரு வட்ட பாகத்தின் அளவும் அது குறிப்பிடும் எண்ணிற்கேற்றவாறு வரையப்படுகிறது.

தேர்தல்

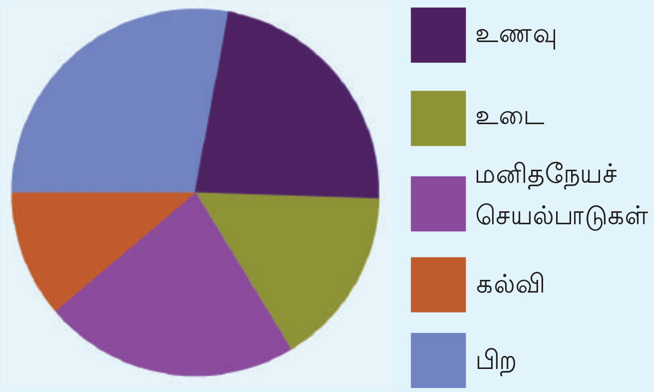
பள்ளியின் தேர்தலில் மூன்று வேட்பாளர்களுக்குக் கிடைத்த வாக்குகள் படவடிவத்தில் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.



- வெற்றி பெற்றவர் யார்?
- வேறு என்னென்ன விவரங்களைப் படத்திலிருந்து புரிந்து கொள்ள முடிகின்றது?

வீட்டுச் செலவுகள்

பாத்திமாவின் வீட்டில் பல்வேறு செலவுகளைக் குறிப்பிடும் படத்தைப் பார்க்கவும்.



மிகக் கூடுதல் செலவு எதற்காக?

மிகக் குறைந்தது?

ஒரே தொகை செலவானது எவற்றிற்கெல்லாம்?

ஒரே செலவு என்பதை எவ்வாறு புரிந்துகொண்டாய்?

-
-

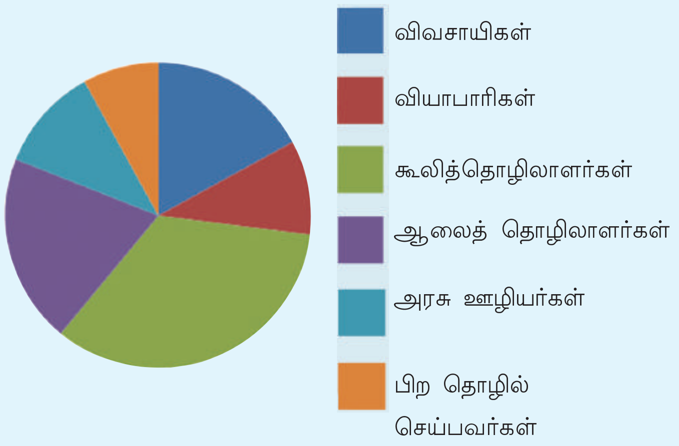
படத்திலிருந்து வேறு என்னென்ன தகவல்களைப் புரிந்து கொண்டாய்?

-
-
-

இவ்வாறு விவரங்களை வட்டத்தின் பாகங்களாகக் குறிப்பிடும் படங்களை வட்டப் படங்கள் (Pie Diagrams) எனக் கூறுகிறோம்.

தொழில்கள்

- ஒரு ஊராட்சியில் பல்வேறு தொழில் செய்பவர்களின் விவரங்களைக் குறிப்பிடும் வட்டப்படம் கீழே தரப்பட்டுள்ளது.



- மிகக் கூடுதல் பேர் செய்யும் தொழில் என்ன?
- விவசாயிகளின் தோராயமாக எத்தனை மடங்கு கூலித் தொழிலாளர்கள்?
- ஆலைத் தொழிலாளர்கள் மொத்த தொழிலாளர்களில் தோராயமாக எத்தனை பாகம்?
- ஒவ்வொரு தொழில் புரிபவர்களையும் அவர்களின் எண்ணிக்கையின் அடிப்படையில் வரிசையாக எழுதுக.
- இந்தப் படத்தைக் குறித்து மேலும் சில வினாக்கள் தயாரிக்கவும்.

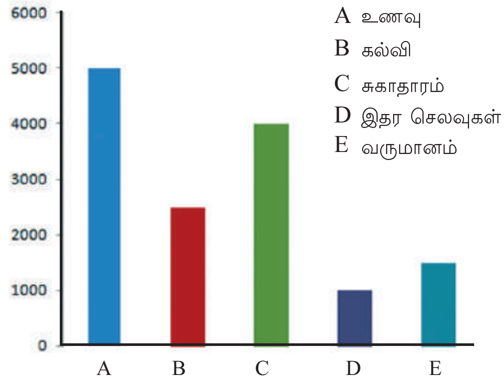
பலகாரப் படம்

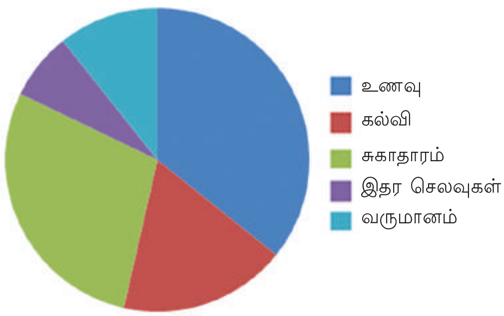
ஆங்கிலேயர்களுக்கும் அமெரிக்கர்களுக்கும் மிகவும் விருப்பமான ஒரு பலகாரத்தின் பெயர் பை (Pie) ஆகும்.

படத்தில் காணப்படுவதுபோல துண்டுகளாக்கி இது சாதாரணமாகப் பங்கிடப்படுகிறது. அதிலிருந்துதான் வட்டப் படங்களுக்கு ''பை டயகிராம்'' எனப் பெயர் வந்தது.

செவ்வகப்படமும் வட்டப்படமும்

ரேணுவின் வீட்டின் பல்வேறு தேவைகளுக்கான செலவுகளைக் குறிக்கும் செவ்வகப் படமும் வட்டப்படமும் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

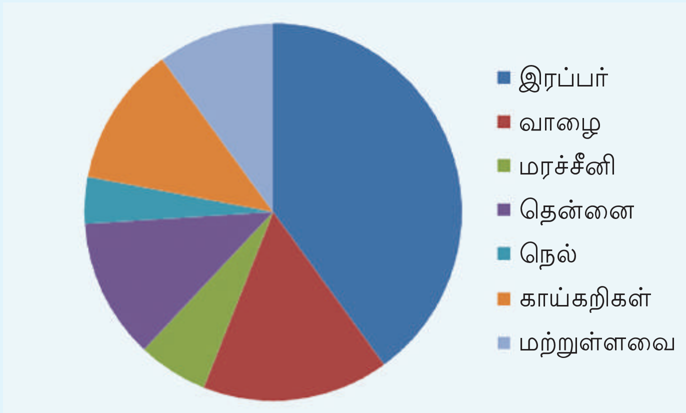




செவ்வகப்படத்தைப் பார்க்கவும். ஒவ்வொரு பிரிவிற்கும் ஆகும் செலவுகள் எத்தனை ரூபாய் என்பதனை மிக எளிதாகக் கூறவும் ஒப்புமைப்படுத்தவும் முடிகிறதல்லவா? ஆனால் ஒவ்வொரு பிரிவினுடைய செலவு மொத்த செலவின் எத்தனை பாகம் என்பதனை எளிதாகக் கூற முடிகிறதா? வட்டப் படத்தில் ஒவ்வொரு பிரிவினுடைய செலவுகள் மொத்த செலவின் எத்தனை பாகம் என்பதனை ஒப்புமைப்படுத்தக் கொஞ்சங்கூட எளிதாகவுள்ளது. ஆனால் எவ்வளவு செலவானது என்பதனை எளிதாகக் கூற முடியாது. இங்ஙனம் ஒவ்வொரு வடிவத்திலான படங்களுக்கும் அதற்கேற்ற நிறைகளும் குறைகளும் உள்ளன. நாம் விளக்கும் விபரங்களின் சிறப்பியல்களுக்கு ஏற்ற முறையில் படங்களைத் தேர்வு செய்ய வேண்டும்.

வேளாண்மை

- ஓர் ஊராட்சியில் மொத்த விளைநிலத்தைப் பல்வேறு வேளாண்மைகளுக்காக எவ்வாறு பயன்படுத்துகிறார்கள் என்பதனை விளக்கும் வட்டப்படம் கீழே தரப்பட்டுள்ளது. படத்தைப் பார்த்துக் கீழே தரப்பட்டுள்ள வினாக்களுக்கு விடை எழுதவும்.



- எந்த வேளாண்மைக்கு மிகக் குறைவான நிலம் பயன்படுத்தப்படுகிறது?
- எந்த வேளாண்மைக்கு மிகக் கூடுதல் நிலம் பயன்படுத்தப்படுகிறது?
- மொத்த விளை நிலத்தின் சுமார் எத்தனை பகுதியில் காய்கறிப் பயிர் செய்யப்படுகிறது?

வட்டப் படங்கள் வரைவோம்

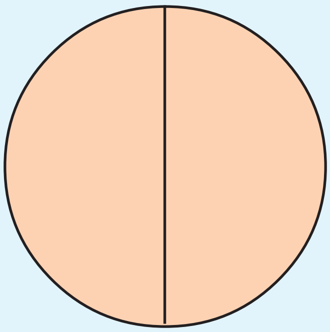
ஒரு பள்ளியில் காய்கறிகள் பயிரிடுவதற்குத் தீர்மானிக்கப் பட்டது. மொத்தமுள்ள இடத்தின் பாதி பாகம் கீரைக்கும் மீதமுள்ள இடத்தில் சமஅளவு பயறும் கத்தரிக்காயும் பயிரிடத் தீர்மானிக்கப்பட்டது.

ஒவ்வொன்றும் பயரிடப்படும் இடத்தின் அளவைக் குறிப்பிடும் ஒரு வட்டப்படம் வரைவோம்.

முதலில் ஒரு வட்டம் வரையவும். கீரைப் பயிர் இடுவதற்கு மொத்த இடத்தின் பாதியை ஒதுக்கினார்கள்.

இதை எவ்வாறு குறிப்பிடலாம்?

வட்டத்தின் பாதியை எவ்வாறு வரைவது?



இனி, பிற இரு காய்கறிகள் பயிரிடுவதற்கான இடத்தைப் படத்தில் எவ்வாறு காண்பிக்கலாம்?

வட்டத்தில் பாதியை மீண்டும் பாதியாக்க வேண்டும். செய்து பார்க்கவும்.

ஒவ்வொரு பகுதியையும் தெரிந்து கொள்வதற்காக வித்தியாசமான நிறங்களைப் பயன்படுத்தலாம்.

பயணக் கணக்கு

ஓர் இடைநிலைப்பள்ளியில் 7ஆம் வகுப்பில் 40 மாணவர்கள் உள்ளனர். இதில் 20 பேர் பள்ளிக்கூட பேருந்தில் பயணம் செய்பவர்களாவர். 15 பேர் நடந்தும், 5 பேர் மிதிவண்டியிலும் வருபவர்களாவர். இவற்றைக் குறிப்பிட்டு ஒரு வட்டப்படம் வரைந்து பார்ப்போம்.

மொத்த மாணவர்களின் எத்தனை பாகம் பள்ளிக்கூட பேருந்தில் வருகிறார்கள்?

இதை முன்னர் செய்தது போன்று வட்டத்தில் அடையாளப் படுத்தலாமல்லவா?

மிதிவண்டியில் வருவது மொத்த மாணவர்களின் எத்தனை பாகம்?

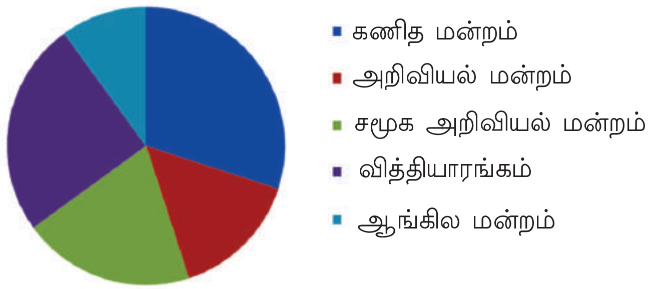
வட்டத்தின் $\frac{1}{8}$ பாகம் எவ்வாறு அடையாளப்படுத்தலாம்?

அதற்கு எத்தனை டிகிரி கோணம் வரைய வேண்டும்?

$360°$ இன் $\frac{1}{8}$ பாகம் $= 45°$

அட்டவணைப்படுத்தலாம்

ஒரு பள்ளியில் ஏழாம் வகுப்பு மாணவர்கள் அனைவரும் ஏதாவதொரு மன்றத்தின் உறுப்பினர்களாவர். ஒவ்வொரு மன்றத் தினுடைய உறுப்பினர்களின் விபரங்களை குறிக்கும் ஒரு வட்டப்படம் கீழே கொடுக்கப் பட்டுள்ளது.



வித்யாரங்கத்தில் மாணவர்களின் எண்ணிக்கை 50 ஆகும். ஒவ்வொரு மன்றத்தினுடைய மாணவர்களின் எண்ணிக்கையைக் குறிக்கும் அட்டவணை ஒன்றைத் தயார் செய்க.

வட்டப்படங்கள் கணினியில்

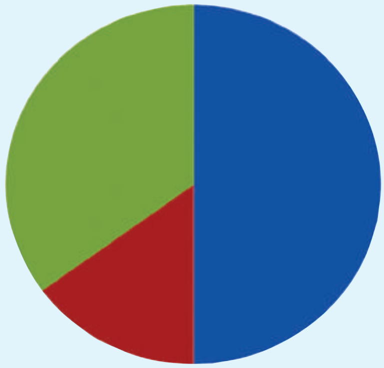
கணினியின் உதவியுடன் வட்டப்படங்கள் வரைவது எவ்வாறு எனப் பார்ப்போம்.

Libre Office Calc திறந்து, வட்டப்படம் வரைய வேண்டிய விபரங்களைக் கீழ்க் காண்பித்திருப்பது போன்று கொடுக்கவும்.

கணித மன்றம்	30
அறிவியல் மன்றம்	20
சமூக அறிவியல் மன்றம்	25
வித்தியாரங்கம்	15
ஆங்கில மன்றம்	10

இதில் ஏதாவதொரு கட்டத்தில் கிளிக் செய்து

Insert → Chart → Pie என்ற முறையில் வட்டப்படம் வரையலாம். ஒவ்வொரு பிரிவினுடைய எண்ணிக்கையையும் மாற்றிக் கொடுத்துப் பார்க்கவும். படத்தில் என்ன நிகழ்கிறது?



வட்டத்தில் மீதியுள்ள பாகம் நடந்து வருபவர்களைக் குறிப்பிடுகின்றது.

- இது வட்டத்தின் எத்தனை பாகம்?
- இந்தப் பாகத்தின் கோண அளவு எத்தனை டிகிரி?

பள்ளி மன்றங்கள்

ஓர் இடைநிலைப்பள்ளியில் 7ஆம் வகுப்பிலுள்ள 100 மாணவர்களும் ஏதாவதொரு மன்றத்தின் உறுப்பினர்களாவர். ஒவ்வொரு மன்றத்தின் உறுப்பினர்களின் எண்ணிக்கை கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

மன்றம்	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை
கணித மன்றம்	30
அறிவியல் மன்றம்	20
சமூக அறிவியல் மன்றம்	25
வித்யாரங்கம்	15
ஆங்கில மன்றம்	10

இந்த விபரங்களைக் குறிக்கும் ஒரு வட்டப்படம் வரைய வேண்டும்.

ஒவ்வொரு மன்றத்தினுடைய உறுப்பினர்களின் எண்ணிக்கையைக் குறிப்பிட வட்டத்தின் எத்தனை பாகம் வீதம் அடையாளப்படுத்த வேண்டும்?

மொத்தம் 100 மாணவர்கள் அல்லவா இருக்கின்றனர்.

கணித மன்ற உறுப்பினர்கள் 30 பேர்.

இவர்களின் எண்ணிக்கையைக் குறிப்பிடுவது வட்டத்தின் $\frac{30}{100}$ பாகம் ஆகும்.

அதற்கு அடையாளப்படுத்த வேண்டிய கோணத்தின் அளவு எவ்வளவு?

$$360^o \times \frac{30}{100} = 108^o$$

இதைப்போன்று ஒவ்வொரு மன்றத்தினுடைய உறுப்பினர்களின் எண்ணிக்கையைக் குறிப்பிட எந்தெந்த அளவில் கோணம் வரைய வேண்டும்?

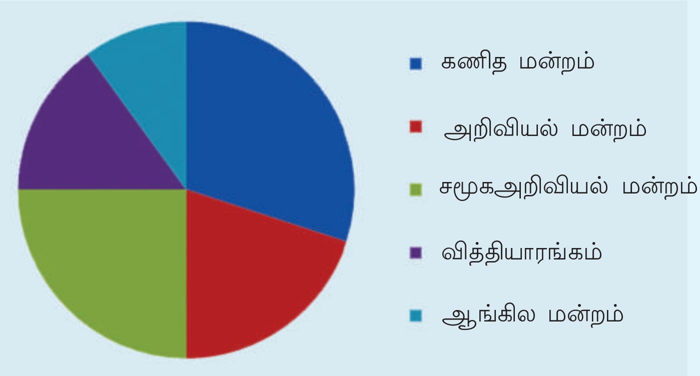
அறிவியல் மன்றம் $= 360^o \times \frac{20}{100} = 72^\circ$

சமூக அறிவியல் மன்றம் =

வித்யாரங்கம் =

ஆங்கில மன்றம் =

இனிமேல் படம் வரையலாமல்லவா.



தரத்தின் (grade) கணக்கு

ஓர் இடைநிலைப்பள்ளியில் 7ஆம் வகுப்பிலுள்ள மாணவர் களில் 25% பேருக்குத் தரம் (grade) Aயும், 45% பேருக்குத் தரம் Bயும், 20% பேருக்குத் தரம் Cயும், மீதமுள்ளவர் களுக்குத் தரம் Dயும் கிடைத்தன. இவற்றைக் குறிப்பிடும் வட்டப்படம் வரையவும்.

ஒவ்வொரு தரமும் கிடைத்தவர்களைக் குறிப்பிட வட்டத் தினுடைய எவ்வளவு பாகம் அடையாளப்படுத்த வேண்டு மென்றும் அதற்கு எந்தெந்த அளவுகளில் கோணங்கள் வரைய வேண்டுமென்றும் கணக்கிடுவோம்.

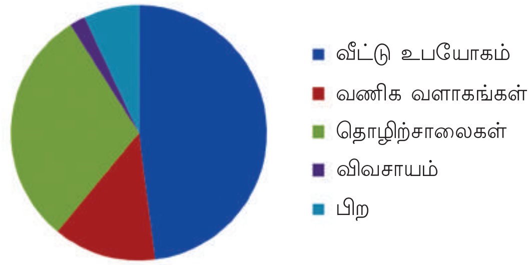
தரம் A கிடைத்தவர் 25% ஆகும்.

இதனைக் குறிப்பிட வட்டத்தின் 25% பயன்படுத்த வேண்டும்.

$$360^o \times \frac{25}{100} = 90^\circ$$

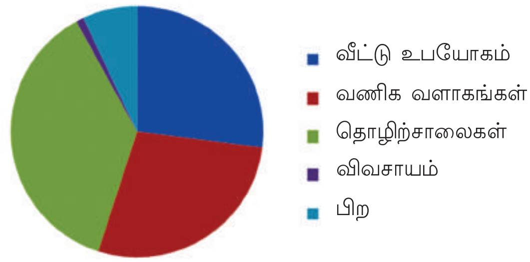
மின்சார விநியோகம்

கேரள மாநில மின்சார வாரியம் 2011-12-ம் ஆண்டு மின்பகிர்மானம் நடத்திய மின்சாரம் பற்றிய விபரங்கள் இந்த வட்டப்படத்தில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.



இந்தப் படத்திலிருந்து என்னென்ன விபரங்களைப் புரிந்துகொள்ள முடியும்?

2011-12ஆம் ஆண்டு மின்பகிர்மானம் வழியாகக் கிடைத்த வருவாயைக் குறித்த விபரங்கள் இந்த வட்டப்படத்தில் கொடுக்கப் பட்டுள்ளன.

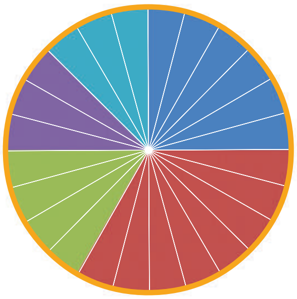


இதிலிருந்து என்னென்ன விபரங்களைப் புரிந்துகொள்ள முடியும்?

இரண்டு வட்டப்படங்களையும் ஒப்பீடு செய்யுங்கள்.

அரவிந்தனின் ஒருநாள்

ஏழாம் வகுப்பில் பயிலும் அரவிந்தன் ஒரு நாளில் பல்வேறு தேவைகளுக்கு எடுத்துக் கொள்ளும் நேரத்தைக் குறிப்பிடும் வட்டப் படும் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.



வட்டம் 24 சமபாகங்களாக்கப்பட்டுள்ளது.
ஒரு பாகம் = 1 மணிநேரம்.

வெவ்வேறு வர்ணங்களால் குறிப்பிடப்பட்டிருப்பது என்னவெல்லாம் எனக் கீழே கூறப்படுகிறது.

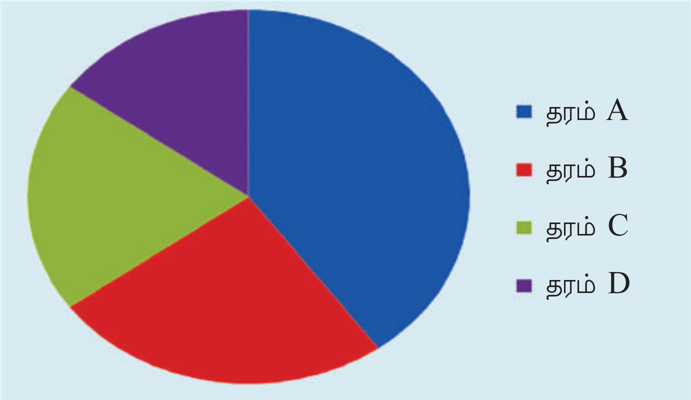
- பள்ளிக்கூடத்தில்
- தூக்கம்
- கல்வி
- விளையாட்டு / உடற்பயிற்சி
- பிறதேவைகள்

இந்த விவரங்களைக் குறிப்பிடும் ஒரு செவ்வகப்படம் வரைய இயலுமா?

B தரம் கிடைத்தவர் 45%

கோணத்தின் அளவு $= 360° \times \frac{45}{100} = 162°$

இதைப்போன்று C, D தரம் கிடைத்தவர்களைக் குறிப்பிடுவதற்கு வரைய வேண்டிய கோணஅளவைக் கணக்கிட்டு வட்டப்படத்தை முழுமையாக்கலாமல்லவா?



உங்களது பள்ளிக்கூடத்திலும் வகுப்பறையிலும் இவ்வாறான விவரங்களைச் சேகரித்து வட்டப்படங்கள் வரைந்து கணித மன்றத்தில் பார்வைக்கு வைக்கவும்.

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களைக் குறிப்பிடும் வட்டப்படங்கள் வரையவும்.

- பள்ளிக்கூடக் கிரிக்கெட் போட்டியின் இறுதி ஆட்டத்தில் ராமானுஜன் குழுவும் சி.வி.ராமன் குழுவும் போட்டியிட்டனர். ஒவ்வொரு குழுவிற்கும் கிடைத்த ஓட்டங்களின் விவரங்கள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. ஒவ்வொரு குழுவிலும் ஒவ்வொருவரும் எடுத்த ஓட்டங்களைக் குறிப்பிடும் வட்டப்படங்களை வரைக.

  பள்ளிக்கூடப் படிப்பகத்தில் மொத்தம் 1600 புத்தகங்கள் உள்ளன. அவற்றை வகைப்படுத்தியது இம்முறை

சி.வி.ராமன் குழு	
ஆட்டக்காரர்	**ஓட்டங்கள்**
ஜிஷ்னு	56
எபின்	35
சச்சு	7
அஜ்மல்	21
பிறர்	21
மொத்தம்	**140**

ராமானுஜன் குழு	
ஆட்டக்காரர்	**ஓட்டங்கள்**
தொபீக்	36
அனந்து	72
அபிலாஷ்	18
பிறர்	18
மொத்தம்	**144**

யிலாகும்.

கதை	-	320
கவிதை	-	192
புதினம்	-	384
அறிவியல் சார்ந்தவை	-	544
வாழ்க்கை வரலாறு	-	160

ஒவ்வொரு வகை புத்தகத்தின் எண்ணிக்கையைக் குறிப்பிடும் வட்டப்படம் வரைக.

பள்ளிக்கூடத்தில் 240 மாணவர்களுக்கிடையே நடத்திய ஓர் ஆய்வில் ஒவ்வொரு வகை புத்தகங்களையும் விரும்புவர்களின் எண்ணிக்கை கண்டுபிடிக்கப்பட்டது.

கதை	-	84
கவிதை	-	36
புதினம்	-	48
அறிவியல் சார்ந்தவை	-	60
வாழ்க்கை வரலாறு	-	12

இவற்றைக் குறிப்பிடும் ஒரு வட்டப்படம் வரைக.

இரண்டு வட்டப்படங்களையும் ஒப்பிடுக.

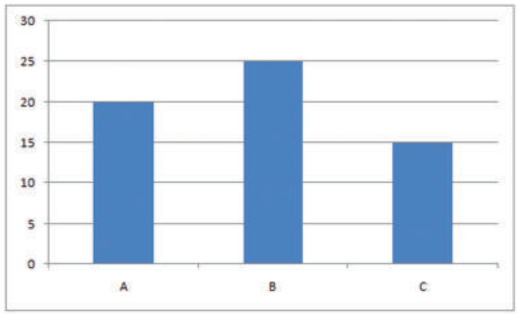
மாணவர்களின் விருப்பத்திற்கு ஏற்றவாறு படிப்பகத்தில் புத்தகங்கள் வாங்கப்பட்டுள்ளனவா?

செயல்திட்டம்

- நாளிதழ்களிலும் மாத இதழ்களிலும் காணப்படும் படவிளக்கங்கள், செவ்வகப் படங்கள், வட்டப்படங்கள் போன்றவற்றைச் சேகரித்து அவற்றைப் பகுப்பாய்வு செய்து ஒப்பிட்டுப் பார்க்கவும்.
- உங்களது பள்ளியில் ஒவ்வொரு வகுப்பிலும் உள்ள மாணவர்களின் எண்ணிக்கையைக் குறிப்பிடும் வட்டப் படமொன்றைக் கணினியில் உருவாக்குக.

வட்டப்படமாக்கலாம்

ஒரு பள்ளிக்கூடத்தில் ஏழாம் வகுப்பிலுள்ள மூன்று பிரிவுகளில் பயிலும் மாணவிகளின் எண்ணிக்கையைக் குறிக்கும் செவ்வகப்படம் கீழே தரப்பட்டுள்ளது.



இந்த விவரங்களைக் குறிப்பிடும் ஒரு வட்டப்படம் வரைக.

மீள்பார்வை

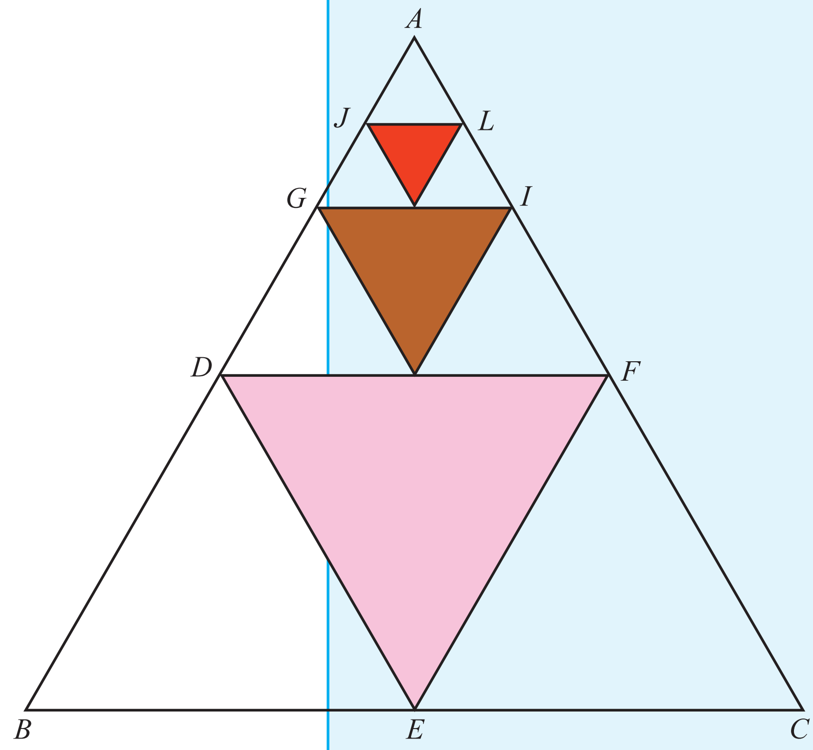
கற்றல் அடைவுகள்	என்னால் இயலும்	ஆசிரியர் உதவியுடன் இயலும்	இன்னும் மேம்பட வேண்டியுள்ளது
• வட்டப்படங்களைப் பயன்படுத்திக் குறிக்கும் விவரங்களை விவரிக்கவும், விளக்கவும் செய்தல்.			
• கொடுக்கப்படும் விவரங்களைப் பயன்படுத்தி வட்டப்படங்கள் வரைதல்.			
• வட்டப்படங்கள் வரைவதற்குக் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் விவரங்களுக்கேற்ப வட்டத்தைப் பாகங்களாக்கும் முறையை விளக்குதல்.			
• வட்டப்படங்கள் வரைவதற்குத் தகவல் தொழில் நுட்பம் பயன்படுத்துதல்.			

கலைச்சொற்கள் (Glossary)

கோட்டு சோடி (Linear pair)
இணைகோடுகள்(Parallel lines)
இணைகரம்(Parallelogram)
ஒத்த கோணங்கள்(Corresponding angles)
ஒன்றுவிட்ட கோணங்கள்(Alternate angles)
உள்அடுத்த கோணங்கள் Co-interior angles)
வெளிஅடுத்த கோணங்கள் (Co-exterior angles)
செவ்வகம் (Rectangle)
முக்கோணம் (Triangle)
செங்குத்து (Perpendicular)
கோணம் (Angle)
சரிவகம் (Trapezium)
இயற்கணிதம் (Algebra)
அடுக்குகளாக்குதல் (Exponentiation)
பூரண எண்கள் (Perfect numbers)
காரணிகள் (Factors)
பரப்பளவு (Area)
செங்கோணமுக்கோணம் (Right angled triangle)
வர்க்கம் (Square)
வர்க்கமூலம் (Square root)
பூரணவர்க்கங்கள் (Perfect squares)
வர்க்க எண்கள் (Square numbers)
முக்கோண எண்கள் (Triangular numbers)
இலக்க மூலம் (Digital root)
வேகம் (Speed)
சராசரி வேகம் (Average speed)
வட்டம் (Circle)
விகிதம் (Ratio)
இலாபம் (Profit)
நஷ்டம் (Loss)
வட்டி (Interest)
கர்ணம் (Hypotenuse)
குறை எண்கள் (Negative numbers)
மிகை எண்கள் (Positive numbers)
வட்டப்படம் (Pie diagram)
கோடு (Line)
புள்ளி (Point)
பக்கம் (Side)
செங்கோணம் (Right angle)
சதுரம் (Square)
செங்கோணமானி (Set square)

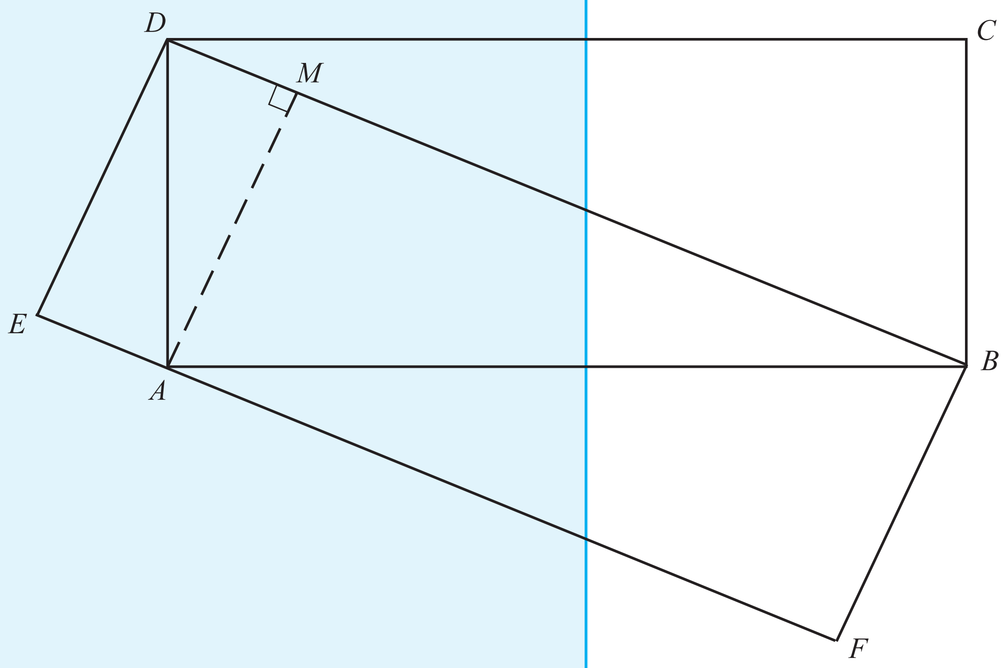
சிறிது யோசிப்போம்

1. படத்தில் AB, BC, AC இவற்றின் நடுப்புள்ளிகள் D, E, F ஆகும்.
AD, DF, AF என்பனவற்றின் நடுப்புள்ளிகள் G, H, I ஆகும்.
AG, GI, AI என்பனவற்றின் நடுப்புள்ளிகள் J, K, L ஆகும்.
நிழலிடப்பட்ட பகுதியின் மொத்தப்பரப்பளவு 21 ச.செ.மீ. ஆனால் ΔABC இன் பரப்பளவு என்ன?



2. படத்தில் ஒரு பெரிய செவ்வகம் நான்கு சிறிய செவ்வகமாக்கப்பட்டுள்ளது. ஒவ்வொரு செவ்வகத்தின் பரப்பளவும் அந்தந்தச் செவ்வகங்களில் குறிப்பிடப்பட்டுள்ளது. நான்காவது செவ்வகத்தின் பரப்பளவு என்ன?

3. படத்தில் *ABCD*; *BDEF* என்பன இரண்டு செவ்வகங்களாகும். *ABCD* என்ற செவ்வகத்தின் பரப்பளவு 50 ச.செ.மீ ஆகும். *BDEF* என்ற செவ்வகத்தின் பரப்பளவு என்ன?



4. படத்தில் *A*, *B*, *C*, *D* என்பன சதுரங்களாகும். *A* ன் ஒரு பக்கம் 3 சென்டி மீட்டரும், *MN* = 20 சென்டிமீட்டரும் ஆனால் நிழலிடப்பட்ட செவ்வகத்தின் பரப்பளவு, பெரிய செவ்வகத்தின் பரப்பளவில் எத்தனை பாகமாகும்?