1. **નીચે આપેલાં વિધેયોમાંથી કયું વિધેય અંતરાલ $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ પર ચુસ્ત ઘટતું વિધેય છે ?**

(A) $\cos x$ (B) $\cos 4x$ (C) $\cos 3x$ (D) $\tan x$

જવાબ (A) $\cos x$

➡ **(A)** $f(x) = \cos x \quad \therefore f'(x) = -\sin x$

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ હોય ત્યારે $\sin x > 0 \therefore -\sin x < 0$

$\therefore f'(x) < 0$

$\therefore \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ અંતરાલમાં $\cos x$ એ ચુસ્ત ઘટતું વિધેય છે.

➡ **(C)** $f(x) = \cos 3x \quad \therefore f'(x) = -3 \sin 3x$

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ હોય ત્યારે $0 < 3x < \frac{3\pi}{2}$

પરંતુ $0 < 3x < \pi$ માટે $f'(x) < 0$ થાય. તથા $\pi < 3x < \frac{3\pi}{2}$ માટે $f'(x) > 0$ થાય.

આમ, $0 < x < \frac{\pi}{2}$ માટે વિધેય $f(x)$ એ ચુસ્ત વધતું કે ચુસ્ત ઘટતું વિધેય નથી.

➡ **(D)** $f(x) = \tan x \quad \therefore f'(x) = \sec^2 x$

$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ અંતરાલમાં $f'(x) > 0$

$\therefore \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ અંતરાલમાં $f(x)$ એ ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.

$\therefore$ (A) માં આપેલ વિધેયો એ $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$માં ચુસ્ત ઘટતા વિધેયો છે.

2. **વિધેય $f(x) = x^{100} + \sin x - 1$ એ નીચે આપેલાં અંતરાલો પૈકી કયા અંતરાલમાં ચુસ્ત રીતે ઘટે છે ?**

(A) $(0, 1)$ (B) $\frac{\pi}{2}, \pi$

(C) $0, \frac{\pi}{2}$ (D) આમાંથી એકપણ નહીં.

જવાબ (D) આમાંથી એકપણ નહીં.

➡ $f(x) = x^{100} + \sin x - 1$

$\therefore f'(x) = 100\, x^{99} + \cos x$

(A) $x \in (0, 1) \quad \therefore x^{99} > 0$

$\therefore 100\, x^{99} > 0$

x એ 0 અને 1 રેડિયન વચ્ચે આવેલો છે.

$\therefore x$ એ $0°$ અને $57°$ વચ્ચે આવેલ છે.

$\therefore x$ એ પ્રથમ ચરણમાં છે.

$\therefore \cos x > 0$

$\therefore x \in (0, 1) \quad \therefore 100x^{99} + \cos x > 0$

$\therefore f'(x) > 0$

$\therefore f(x)$ એ $(0, 1)$માં ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.

(B) $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \therefore \frac{\pi}{2} < x < \pi$

$\therefore x^{99} > 1$

$\therefore 100\,x^{99} > 100$ ....(i)

વળી, $\frac{\pi}{2} < x < \pi$

$\therefore \cos\pi < \cos x < \cos\frac{\pi}{2}$ ($\because$ cos ઘટતું વિધેય છે.)

$\therefore -1 < \cos x < 0$ ....(ii)

(i) અને (ii) ઉપરથી $100x^{99} + \cos x > 100 - 1$

$= 99 > 0$

$\therefore f'(x) > 0$

$\therefore f(x)$ એ $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ અંતરાલમાં ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.

(C) $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \therefore 0 < x < \frac{\pi}{2}$

$\therefore x^{99} > 0$ અને $\cos x > 0$

$\therefore 100\,x^{99} + \cos x > 0$

$\therefore f'(x) > 0$

$\therefore \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ અંતરાલમાં $f(x)$ ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.

$\therefore$ વિકલ્પ (A), (B) તથા (C)માં આપેલ અંતરાલ માટે વિધેય $f(x)$ ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.

$\therefore$ વિકલ્પ (D) આવે.

3. સાબિત કરો કે $f(x) = 3x + 17$ એ R પર ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.

➡ $f(x) = 3x + 17$

$\therefore f'(x) = 3 > 0$

Rની કોઈપણ કિંમત માટે $f'(x) > 0$ થાય છે.

$\therefore$ વિધેય $f(x)$ એ Rમાં ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.

4. સાબિત કરો કે $f(x) = e^{2x}$, R પર ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.

➡ $f(x) = e^{2x}$

$f'(x) = 2e^{2x}$

$\forall x \in$ R માટે $e^{2x} > 0$ તથા $2 > 0$

$\therefore f'(x) = 2e^{2x} > 0$

$\therefore$ વિધેય $f(x)$ એ Rમાં ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.

5. સાબિત કરો કે $f(x) = \sin x$,

(a) $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ માં ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.

(b) $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ માં ચુસ્ત ઘટતું વિધેય છે.

(c) $(0, \pi)$ માં વધતું કે ઘટતું વિધેય નથી.

➡ $f(x) = \sin x$

$\therefore f'(x) = \cos x$

➡ (a) $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ અંતરાલ એ પ્રથમ ચરણ દર્શાવે છે.

પ્રથમ ચરણમાં $\cos x > 0$

$\therefore f'(x) > 0$

$\therefore \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ અંતરાલમાં વિધેય $f(x)$ એ ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.

➡ **(b)** $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ અંતરાલ એ દ્વિતીય ચરણ દર્શાવે છે.

દ્વિતીય ચરણમાં $\cos x < 0$

$\therefore f'(x) < 0$

$\therefore \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ અંતરાલમાં વિધેય $f(x)$ એ ચુસ્ત ઘટતું વિધેય છે.

➡ **(c)** $(0, \pi)$ એ પ્રથમ તથા દ્વિતીય ચરણ દર્શાવે છે.

$\forall x \in (0, \pi)$ માટે $\cos x$ ધન કે ઋણ છે. તે નક્કી કરી શકાતું નથી. xની અમુક કિંમત માટે $\cos x > 0$ છે તથા અમુક કિંમત માટે $\cos x < 0$ છે.

$\therefore f(x)$ એ અંતરાલ $(0, \pi)$માં વધતું કે ઘટતું વિધેય નથી.

6. 'a'ની નાનામાં નાની કઈ કિંમત માટે વિધેય $f(x) = x^2 + ax + 1$ એ અંતરાલ $[1, 2]$ પર ચુસ્ત રીતે વધે છે ?

➡ $f(x) = x^2 + ax + 1$

$\therefore f'(x) = 2x + a$

$f(x)$ એ $[1, 2]$ અંતરાલમાં ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.

$\therefore f'(x) > 0 \therefore 2x + a > 0$

હવે $1 < x < 2 \quad \therefore 2 < 2x < 4$

$\therefore 2 + a < 2x + a < 4 + a$

$2x + a > 0 \quad \therefore 2 + a > 0$

$\therefore a > -2$

$\therefore a$ની ન્યૂનતમ કિંમત -2 છે.

7. જો I કોઈ વિવૃત અંતરાલ હોય અને $I \cap [-1, 1] = \phi$ હોય, તો સાબિત કરો કે, $f(x) = x + \frac{1}{x}$ એ I પર ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.

➡ $f(x) = x + \frac{1}{x}$

$\therefore f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$

$= \frac{x^2 - 1}{x^2}$

હવે $x \in I \quad \therefore x \notin [-1, 1]$

$\therefore x < -1$ અને $x > 1$

$\therefore x^2 > 1$

$\therefore x^2 - 1 > 0$

$\therefore \frac{x^2 - 1}{x^2} > 0 \qquad (\because x^2 > 1)$

$\therefore f'(x) > 0$

$\therefore f(x)$ એ $\forall x \in I$ માટે ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.

8. સાબિત કરો કે $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 100$ એ R પર વધતું વિધેય છે.

➡ $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 100$

$\therefore f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$

$= 3(x^2 - 2x + 1)$

$= 3(x - 1)^2$

$\forall x \in R$ માટે $\quad (x - 1)^2 \geq 0$

$\therefore 3(x - 1)^2 \geq 0$

$\therefore f'(x) \geq 0$

$\therefore$ $f(x)$ એ Rમાં વધતું વિધેય છે.

9. સાબિત કરો કે લઘુગણકીય વિધેય અંતરાલ $(0, \infty)$ પર ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.

➡ વિધેય $f(x) = \log x,\ x > 0$

$\therefore f'(x) = \frac{1}{x}$

$x > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} > 0$

$\Rightarrow f'(x) > 0$

$\therefore$ $(0, \infty)$ અંતરાલમાં લઘુગુણકીય વિધેય એ વધતું વિધેય છે.

10. સાબિત કરો કે $f(x) = x^2 - x + 1$, અંતરાલ $(-1, 1)$ પર ચુસ્ત વધતું કે ઘટતું વિધેય નથી.

➡ $f(x) = x^2 - x + 1$

$\therefore f'(x) = 2x - 1$

$f'(x) = 0$ હોય તો $2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

➡ **(1)** જો $-1 < x < \frac{1}{2}$ હોય તો $f'(x) < 0$ થાય.

$\therefore$ $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$ અંતરાલમાં વિધેય $f(x)$ એ ચુસ્ત ઘટતું વિધેય છે.

➡ **(2)** જો $\frac{1}{2} < x < 1$ હોય તો $f'(x) > 0$ થાય.

$\therefore$ $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ અંતરાલમાં વિધેય $f(x)$ એ ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.

$\therefore$ $(-1, 1)$ અંતરાલમાં વિધેય $f(x)$ એ ચુસ્ત વધતું કે ચુસ્ત ઘટતું વિધેય નથી.

11. સાબિત કરો કે વિધેય $f(x) = \log \sin x$ એ $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ પર ચુસ્ત વધતું વિધેય છે તથા $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ પર ચુસ્ત ઘટતું વિધેય છે.

➡ $f(x) = \log \sin x$

$\therefore\ f'(x) = \frac{1}{\sin x} \times \cos x = \cot x$

$x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore$ x એ પ્રથમ ચરણમાં આવેલ છે.

$\therefore \cot x > 0$

$\therefore f'(x) > 0$

$\therefore$ $f(x)$ એ ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.

$x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

$\therefore$ x એ દ્વિતીય ચરણમાં આવેલ છે.

$\therefore \cot x < 0$

$\therefore f'(x) < 0$

$\therefore$ $f(x)$ એ ચુસ્ત ઘટતું વિધેય છે.

12. સાબિત કરો કે વિધેય $f(x) = \log|\cos x|$ એ $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ પર ચુસ્ત ઘટતું વિધેય છે તથા $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ પર ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.

➡ $f(x) = \log|\cos x|$

($|\cos x|$ ધન છે. $\therefore$ $\log|\cos x|$ વ્યાખ્યાયિત છે.)

$\therefore f'(x) = \dfrac{1}{\cos x}(-\sin x) = -\tan x$

$x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ $\therefore$ x પ્રથમ ચરણમાં આવેલ છે.

$\therefore \tan x > 0$

$\therefore -\tan x < 0$

$\therefore f'(x) < 0$

$\therefore f(x)$ એ ચુસ્ત ઘટતું વિધેય છે.

$x \in \left(\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ $\therefore$ x એ ચતુર્થ ચરણમાં છે.

$\therefore \tan x < 0$

$\therefore -\tan x > 0$

$\therefore f'(x) > 0$

$\therefore f(x)$ એ ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.

13. બતાવો કે $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 18$ એ R ઉપર વધતું વિધેય છે.

➡ **સ્વપ્રયત્ને**

14. $f(x) = x^2 + ax + 1$ એ (1, 2) માં ચુસ્ત વધતું વિધેય હોય તો aનું ઓછામાં ઓછું મૂલ્ય મેળવો.

➡ $a = -2$

15. સાબિત કરો કે, $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ પર $f(x) = x^2 - x\sin x$ વધતું વિધેય છે.

➡ **સ્વપ્રયત્ને**

16. બતાવો કે $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x,\ x \in$ R એ R ઉપર ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.

➡ **સ્વપ્રયત્ને**

17. વિકલનનો ઉપયોગ કર્યા વગર સાબિત કરો કે, $f(x) = ax + b$, જ્યાં $a > 0$ એ $\forall x \in$ R માટે ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.

➡ **સ્વપ્રયત્ને**

18. સાબિત કરો કે x પરનું વિધેય $y = \log(1 + x) - \dfrac{2x}{2 + x},\ x > -1$ એ તેના પ્રદેશ પર વધતું વિધેય છે.

➡ $y = \log(1 + x) - \dfrac{2x}{2 + x},\ x > -1$

$\log(1 + x)$ એ ફક્ત $x > -1$ માટે વ્યાખ્યાયિત છે.

$y = f(x) = \log(1 + x) - \dfrac{2x}{2 + x}$

x પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{(2+x)(2) - 2x(1)}{(2+x)^2}$$

$$= \frac{1}{1+x} - \frac{4 + 2x - 2x}{(2+x)^2}$$

$$= \frac{(2+x)^2 - 4(1+x)}{(1+x)(2+x)^2}$$

$$= \frac{4 + 4x + x^2 - 4 - 4x}{(1+x)(2+x)^2}$$

$$= \frac{x^2}{(1+x)(2+x)^2}$$

$f'(x) = 0$ હોય ત્યારે $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

વિકલ્પ : I જો $-1 < x < 0$ હોય તો $f'(x) > 0$ થાય. કારણ કે $x + 1 > 0$ તથા x^2 અને $(2 + x)^2$ તો xની કોઈપણ કિંમત માટે ધન જ છે.

$\therefore$ $(-1, 0)$ અંતરાલમાં $f(x)$ એ વધતું વિધેય છે.

વિકલ્પ : II જો $x > 0$ હોય તો $f'(x) > 0$ થાય.

$\therefore$ $(0, \infty)$ અંતરાલમાં $f(x)$ એ વધતું વિધેય છે.

આમ, આપેલ વિધેય $f(x)$ એ તેનાં પ્રદેશમાં વધતું વિધેય છે.

19. $y = [x(x - 2)]^2$ એ xની જે કિંમતો માટે વધતું વિધેય હોય તે કિંમતો શોધો.

➥ $y = [x(x - 2)]^2$

$= [x^2 - 2x]^2$

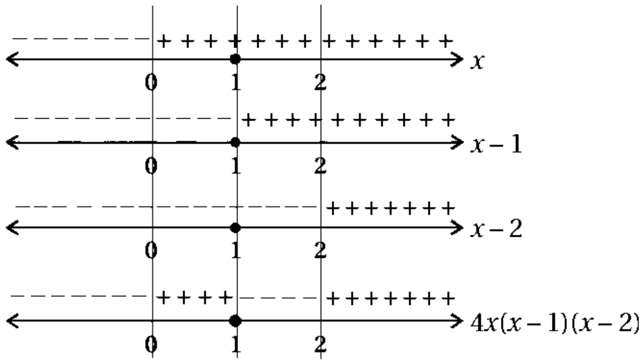
$= x^4 - 4x^3 + 4x^2$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left[x^4 - 4x^3 + 4x^2\right]$$

$= 4x^3 - 12x^2 + 8x$

$= 4x(x^2 - 3x + 2)$

$= 4x(x - 2)(x - 1)$



આકૃતિ પરથી સ્પષ્ટ છે કે,

$0 < x < 1$ હોય ત્યારે $ax(x - 1)(x - 2) > 0$ છે.

અર્થાત્ $\frac{dy}{dx} > 0$

$\therefore$ $(0, 1)$ અંતરાલમાં આપેલ વિધેય એ વધતું વિધેય છે.

વળી, $x > 2$ માટે પણ $\frac{dy}{dx} > 0$ છે.

$\therefore$ $(2, \infty)$ અંતરાલમાં આપેલ વિધેય એ વધતું વિધેય છે.

આમ, $0 < x < 1$ અને $x > 2$ માટે આપેલ વિધેય એ વધતું વિધેય છે.

20. સાબિત કરો કે $y = \frac{4\sin\theta}{(2 + \cos\theta)} - \theta$ એ $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$માં વધતું વિધેય છે.

➥ $y = \frac{4\sin\theta}{(2 + \cos\theta)} - \theta, \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$$y = f(\theta) = \frac{4\sin\theta}{(2 + \cos\theta)} - \theta$$

$$\therefore f'(\theta) = \frac{(2 + \cos\theta)\, 4\cos\theta - 4\sin\theta\, (-\sin\theta)}{(2 + \cos\theta)^2} - 1$$

$$= \frac{8\cos\theta + 4\cos^2\theta + 4\sin^2\theta}{(2 + \cos\theta)^2} - 1$$

$$= \frac{8\cos\theta + 4 - (2 + \cos\theta)^2}{(2 + \cos\theta)^2} \quad (\because \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1)$$

$$= \frac{8\cos\theta + 4 - 4 - 4\cos\theta - \cos^2\theta}{(2 + \cos\theta)^2}$$

$$= \frac{4\cos\theta - \cos^2\theta}{(2 + \cos\theta)^2}$$

$$= \frac{\cos\theta\,(4 - \cos\theta)}{(2 + \cos\theta)^2}$$

હવે $f'(\theta) = 0$ હોય તો $\cos\theta(4 - \cos\theta) = 0$ થાય.

$\therefore \cos\theta = 0$ અથવા $4 - \cos\theta = 0$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{2}$ $\quad$ ($\because \cos\theta = 4$ શક્ય નથી.)

$\therefore 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ હોય ત્યારે $f'(\theta) > 0$ થાય છે.

પ્રથમ ચરણમાં cos વિધેય ધન હોય છે. વળી, $0 < \cos\theta < 1$

$\therefore 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ માટે આપેલ વિધેય એ વધતું વિધેય છે.

$\therefore \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ અંતરાલમાં વિધેય $f(\theta)$ એ વધતું વિધેય છે.

21. નીચે આપેલાં અંતરાલો પૈકી કયા અંતરાલમાં $y = x^2 e^{-x}$ વધતું વિધેય છે ?

(A) $(-\infty, \infty)$ (B) $(-2, 0)$ (C) $(2, \infty)$ (D) $(0, 2)$

➡ $y = x^2 e^{-x}$

x પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$$\frac{dy}{dx} = 2xe^{-x} - x^2 e^{-x}$$

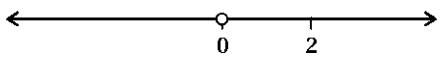
$$= xe^{-x}(2 - x)$$

વધતાં કે ઘટતાં વિધેયો માટે, $\frac{dy}{dx} = 0$

$\therefore xe^{-x}(2 - x) = 0$

$\therefore x = 0, e^{-x} = 0, 2 - x = 0$

$\therefore x = 0$ તથા $x = 2$ ($e^{-x} = 0$ શક્ય નથી.)



સંખ્યા રેખા ઉપર $x = 0$ તથા $x = 2$ લેતાં આપણને ત્રણ અંતરાલ મળશે. $(-\infty, 0)$, $(0, 2)$ તથા $(2, \infty)$.

$x \in (-\infty, 0)$ $\therefore xe^{-x}(2 - x) < 0$

$\therefore \frac{dy}{dx} < 0$

$\therefore y$ એ ઘટતું વિધેય છે.

$0 < x < 2$ $\therefore xe^{-x}(2 - x) > 0$

$\therefore \frac{dy}{dx} > 0$

$\therefore y$ એ વધતું વિધેય છે.

$2 < x < \infty$ $\therefore xe^{-x}(2 - x) < 0$

$\therefore \frac{dy}{dx} < 0$

$\therefore y$ એ ઘટતું વિધેય છે.

$\therefore$ આપેલ વિકલ્પો પૈકી વિકલ્પ (D) આવે.

$\therefore x \in (0, 2)$ માટે વિધેય $f(x)$ એ વધતું વિધેય છે.

22. $f(x) = \dfrac{4x^2 + 1}{x}$ જે અંતરાલમાં વધે કે ઘટે તે અંતરાલ મેળવો.

➡ $\left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right) \cup \left(\dfrac{1}{2}, \infty\right)$ માં વધે, $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ માં ઘટે.

23. aની જે કિંમતો માટે $f(x) = ax^3 - 3(a + 2)x^2 + 9(a + 2)x - 1, \forall x \in R$ ઘટતું વિધેય હોય તે કિંમતો શોધો.

➡ $a < -2$

24. જે અંતરાલોમાં $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$ વધતું વિધેય છે કે ઘટતું વિધેય છે તે નક્કી કરો. $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

➡ $\left(0, \dfrac{\pi}{4}\right)$માં ઘટે, $\left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right)$માં વધે.

25. $f : (0, \pi) \to R$, $f(x) = 2x + \cot x$ જે અંતરાલમાં ચુસ્ત વધે કે ચુસ્ત ઘટે તે અંતરાલ મેળવો.

➡ $\left(0, \dfrac{\pi}{4}\right)$માં ઘટે, $\left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right)$માં વધે, $\left(\dfrac{3\pi}{4}, \pi\right)$માં ઘટે.

26. $f : R^+ \to R^+$, $f(x)\ \dfrac{\log x}{\sqrt{x}}$ વિધેય $f(x)$ જે અંતરાલમાં વધે કે ઘટે તે અંતરાલ નક્કી કરો.

➡ $(0, e^2)$માં વધે, (e^2, ∞)માં ઘટે.

27. વિધેય $f(x) = 2x^2 - 3x$ કયા અંતરાલમાં

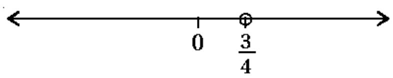
(a) ચુસ્ત રીતે વધે (b) ચુસ્ત રીતે ઘટે તે શોધો.

➡ $f(x) = 2x^2 - 3x$

$\therefore f'(x) = 4x - 3$

હવે $f'(x) = 0$ લેતાં $x = \dfrac{3}{4}$ મળે.

$x = \dfrac{3}{4}$ એ સંખ્યારેખાને બે ભાગમાં વહેંચે છે.



$\left(-\infty, \dfrac{3}{4}\right)$ અંતરાલ તથા $\left(\dfrac{3}{4}, \infty\right)$ અંતરાલ $x \in \left(-\infty, \dfrac{3}{4}\right)$ હોય ત્યારે $4x - 3 < 0$ થાય.

$\therefore f'(x) < 0$

$\therefore \left(-\infty, \dfrac{3}{4}\right)$ અંતરાલમાં $f(x)$ એ ચુસ્ત ઘટતું વિધેય છે.

$x \in \left(\dfrac{3}{4}, \infty\right)$ હોય ત્યારે $4x - 3 > 0$ થાય.

$\therefore f'(x) > 0$

$\therefore \left(\dfrac{3}{4}, \infty\right)$ અંતરાલમાં $f(x)$ એ ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.

28. વિધેય $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 7$ કયા અંતરાલમાં (a) ચુસ્ત રીતે વધે ,(b) ચુસ્ત રીતે ઘટે તે નક્કી કરો.

➡ $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 7$

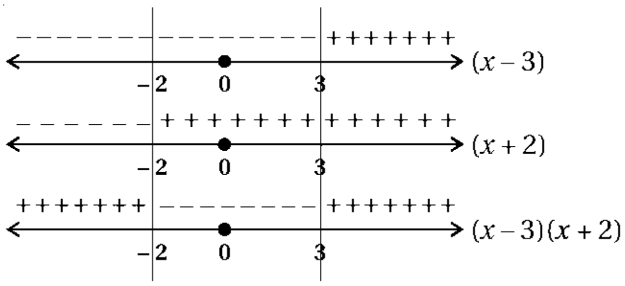
$\therefore f'(x) = 6x^2 - 6x - 36$

$= 6(x^2 - x - 6)$

$= 6(x - 3)(x + 2)$

$f'(x) = 0$ લેતાં $x = -2$ તથા 3 મળે છે.

બિંદુઓ $x = -2$ તથા $x = 3$ એ સંખ્યારેખાને ત્રણ ભાગમાં વિભાજીત કરે છે.



અંતરાલ	$f'(x)$ની નિશાની $f'(x) = 6(x-3)(x+2)$	વિધેય fનો સ્વભાવ
$(-\infty, -2)$	$f'(x) > 0$	ચુસ્ત વધતું
$(-2, 3)$	$f'(x) < 0$	ચુસ્ત ઘટતું
$(3, \infty)$	$f'(x) > 0$	ચુસ્ત વધતું

(a) અંતરાલ $(-\infty, -2)$ અને $(3, \infty)$માં વિધેય $f(x)$ એ ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.

(b) અંતરાલ $(-2, 3)$માં વિધેય $f(x)$ એ ચુસ્ત ઘટતું વિધેય છે.

29. નીચેનાં વિધેયો કયા અંતરાલમાં ચુસ્ત રીતે વધે છે અથવા ચુસ્ત રીતે ઘટે છે તે નક્કી કરો :

(a) $x^2 + 2x - 5$ **(b)** $10 - 6x - 2x^2$

(c) $-2x^3 - 9x^2 - 12x + 1$ **(d)** $6 - 9x - x^2$

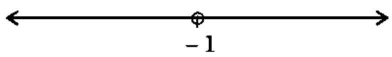
(e) $(x + 1)^3 (x - 3)^3$

➥ **(a)** $f(x) = x^2 + 2x - 5$

$f'(x) = 2x + 2$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = -1$

$x = -1$ એ સંખ્યારેખાને બે ભાગમાં વહેંચે છે.



$(-1, \infty)$ અંતરાલમાં $f'(x) > 0$ થાય છે.

$\therefore$ $(-1, \infty)$ અંતરાલમાં $f(x)$ એ ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.

$(-\infty, -1)$ અંતરાલમાં $f'(x) < 0$ થાય છે.

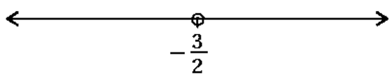
$\therefore$ $(-\infty, -1)$ અંતરાલમાં $f(x)$ એ ચુસ્ત ઘટતું વિધેય છે.

➥ **(b)** $f(x) = 10 - 6x - 2x^2$

$\therefore f'(x) = -6 - 4x$

$f'(x) = 0$ લેતાં, $x = -\frac{3}{2}$ મળે છે.

$x = -\frac{3}{2}$ એ સંખ્યારેખાને બે ભાગમાં વહેંચે છે.



$\left(-\frac{3}{2}, \infty\right)$ અંતરાલમાં $f'(x) < 0$ છે.

$\therefore$ $\left(-\frac{3}{2}, \infty\right)$ અંતરાલમાં વિધેય $f(x)$ એ ચુસ્ત ઘટતું વિધેય છે.

$\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$ અંતરાલમાં $f'(x) > 0$ છે.

$\therefore \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$ અંતરાલમાં વિધેય $f(x)$ એ ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.

➥ **(c)** $f(x) = -2x^3 - 9x^2 - 12x + 1$

$\therefore f'(x) = -6x^2 - 18x - 12$

$= -6(x^2 + 3x + 2)$

$= -6(x + 2)(x + 1)$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = -1,\ x = -2$

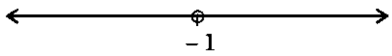
$\therefore x = -1$ તથા $x = -2$ એ સંખ્યારેખાને ત્રણ ભાગમાં વહેંચે છે.

➥ **(a)** $f(x) = x^2 + 2x - 5$

$f'(x) = 2x + 2$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = -1$

$x = -1$ એ સંખ્યારેખાને બે ભાગમાં વહેંચે છે.



$(-1, \infty)$ અંતરાલમાં $f'(x) > 0$ થાય છે.

$\therefore (-1, \infty)$ અંતરાલમાં $f(x)$ એ ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.

$(-\infty, -1)$ અંતરાલમાં $f'(x) < 0$ થાય છે.

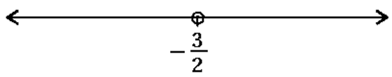
$\therefore (-\infty, -1)$ અંતરાલમાં $f(x)$ એ ચુસ્ત ઘટતું વિધેય છે.

➥ **(b)** $f(x) = 10 - 6x - 2x^2$

$\therefore f'(x) = -6 - 4x$

$f'(x) = 0$ લેતાં, $x = -\frac{3}{2}$ મળે છે.

$x = -\frac{3}{2}$ એ સંખ્યારેખાને બે ભાગમાં વહેંચે છે.



$\left(-\frac{3}{2}, \infty\right)$ અંતરાલમાં $f'(x) < 0$ છે.

$\therefore \left(-\frac{3}{2}, \infty\right)$ અંતરાલમાં વિધેય $f(x)$ એ ચુસ્ત ઘટતું વિધેય છે.

$\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$ અંતરાલમાં $f'(x) > 0$ છે.

$\therefore \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$ અંતરાલમાં વિધેય $f(x)$ એ ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.

➥ **(c)** $f(x) = -2x^3 - 9x^2 - 12x + 1$

$\therefore f'(x) = -6x^2 - 18x - 12$

$= -6(x^2 + 3x + 2)$

$= -6(x + 2)(x + 1)$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = -1,\ x = -2$

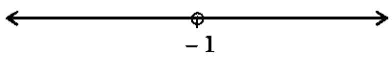
$\therefore x = -1$ તથા $x = -2$ એ સંખ્યારેખાને ત્રણ ભાગમાં વહેંચે છે.

➥ **(a)** $f(x) = x^2 + 2x - 5$

$f'(x) = 2x + 2$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = -1$

$x = -1$ એ સંખ્યારેખાને બે ભાગમાં વહેંચે છે.



$(-1, \infty)$ અંતરાલમાં $f'(x) > 0$ થાય છે.

$\therefore$ $(-1, \infty)$ અંતરાલમાં $f(x)$ એ ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.

$(-\infty, -1)$ અંતરાલમાં $f'(x) < 0$ થાય છે.

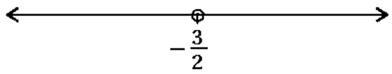
$\therefore$ $(-\infty, -1)$ અંતરાલમાં $f(x)$ એ ચુસ્ત ઘટતું વિધેય છે.

➥ **(b)** $f(x) = 10 - 6x - 2x^2$

$\therefore$ $f'(x) = -6 - 4x$

$f'(x) = 0$ લેતાં, $x = -\frac{3}{2}$ મળે છે.

$x = -\frac{3}{2}$ એ સંખ્યારેખાને બે ભાગમાં વહેંચે છે.



$\left(-\frac{3}{2}, \infty\right)$ અંતરાલમાં $f'(x) < 0$ છે.

$\therefore$ $\left(-\frac{3}{2}, \infty\right)$ અંતરાલમાં વિધેય $f(x)$ એ ચુસ્ત ઘટતું વિધેય છે.

$\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$ અંતરાલમાં $f'(x) > 0$ છે.

$\therefore$ $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$ અંતરાલમાં વિધેય $f(x)$ એ ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.

➥ **(c)** $f(x) = -2x^3 - 9x^2 - 12x + 1$

$\therefore$ $f'(x) = -6x^2 - 18x - 12$

$= -6(x^2 + 3x + 2)$

$= -6(x + 2)(x + 1)$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = -1, x = -2$

$\therefore$ $x = -1$ તથા $x = -2$ એ સંખ્યારેખાને ત્રણ ભાગમાં વહેંચે છે.