हल कार की गतिज ऊर्जा अधिकतम संपीडन पर संपूर्ण रूप से स्प्रिंग की स्थितिज ऊर्जा में परिवर्तित हो जाती है। गतिमान कार की गतिज ऊर्जा :

$$K = \frac{1}{2} m v^2$$

$$= \frac{1}{2} \times 10^3 \times 5 \times 5$$

$$K = 1.25 \times 10^4 \text{J}$$

जहाँ कार की चाल 18 km h^{-1} को इसके SI मान 5 m s^{-1} में परिवर्तित कर दिया गया है। **[यहाँ यह ध्यान रखने योग्य है कि $36 \text{ km h}^{-1} = 10 \text{ m s}^{-1}$]**। यांत्रिक ऊर्जा-संरक्षण नियम के अनुसार अधिकतम संपीडन x_m पर स्प्रिंग की स्थितिज ऊर्जा (V), गतिशील कार की गतिज ऊर्जा (K) के बराबर होती है।

अतः $$V = \frac{1}{2} k x_m^2$$

$$= 1.25 \times 10^4 \text{J}$$

हल करने पर हम प्राप्त करते हैं कि $x_m = 2.00 \text{ m}$

ध्यान दें कि यहाँ इस स्थिति को हमने आदर्श रूप में प्रस्तुत किया है। यहाँ स्प्रिंग को द्रव्यमानरहित माना है और सड़क का घर्षण नगण्य लिया है। ◂

हम संरक्षी बलों पर कुछ टिप्पणी करते हुए इस अनुभाग का समापन करते हैं :

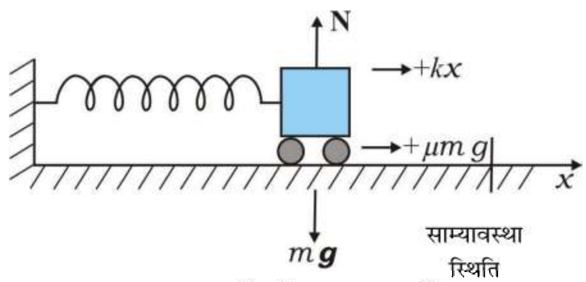
(i) उपरोक्त विवेचना में समय के विषय में कोई सूचना नहीं है। इस उदाहरण में हम संपीडन का परिकलन कर सकते हैं लेकिन उस समय अंतराल का परिकलन नहीं कर सकते जिसमें यह संपीडन हुआ है। अतः कालिक सूचना प्राप्त करने के लिए, इस निकाय के लिए न्यूटन के द्वितीय नियम के हल की आवश्यकता है।

(ii) सभी बल संरक्षी नहीं हैं। उदाहरणार्थ, घर्षण एक असंरक्षी बल है। इस स्थिति में, ऊर्जा-सरंक्षण नियम में किंचित परिवर्तन करना पड़ेगा। इसे उदाहरण 6.9 में स्पष्ट किया गया है।

(iii) स्थितिज ऊर्जा का शून्य स्वेच्छा से लिया गया है जिसे सुविधानुसार निश्चित कर लिया जाता है। स्प्रिंग-बल के लिए, $x = 0$ पर हम $V = 0$ लेते हैं, अर्थात् बिना खिंचे स्प्रिंग की स्थितिज ऊर्जा शून्य थी। नियत गुरुत्वाकर्षण बल mg के लिए हमने पृथ्वी की सतह पर $V = 0$ लिया था। अगले अध्याय में हम देखेंगे कि गुरुत्वाकर्षण के सार्वत्रिक नियमानुसार बल के लिए, गुरुत्वाकर्षण स्रोत से अनन्त दूरी पर शून्य सर्वोत्तम रूप से परिभाषित होती है तथापि, किसी विवेचना में स्थितिज ऊर्जा के लिए एक बार शून्य की स्थिति निश्चित करने के पश्चात्, शुरू से अंत तक विवेचना में उसी नियम का पालन करना चाहिए।

▸ ***उदाहरण 6.9*** उदाहरण 6.8 में घर्षण गुणांक μ का मान 0.5 लेकर कमानी के अधिकतम संपीडन का परिकलन कीजिए।

हल : स्प्रिंग बल और घर्षण बल, दोनों ही संपीडन का विरोध करने में संयुक्त रूप से कार्य करते हैं, जैसा कि चित्र 6.9 में दिखाया गया है।



चित्र 6.9 किसी कार पर आरोपित बल।

यहाँ हम यांत्रिक ऊर्जा-संरक्षण के सिद्धांत के बजाय कार्य-ऊर्जा प्रमेय का प्रयोग करते हैं।

गतिज ऊर्जा में परिवर्तन है :

$$\Delta K = K_f - K_i = 0 - \frac{1}{2} m v^2$$

कुल बल द्वारा किया गया कार्य :

$$W = -\frac{1}{2} k x_m^2 - \mu m g x_m$$

ΔK और W को समीकृत करने पर हम प्राप्त करते हैं

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} k x_m^2 + \mu m g x_m$$

यहाँ $\mu mg = 0.5 \times 10^3 \times 10 = 5 \times 10^3 \text{N}$ ($g = 10 \text{ m s}^{-2}$ लेने पर)। उपरोक्त समीकरण को व्यवस्थित करने पर हमें अज्ञात x_m के लिए निम्न द्विघातीय समीकरण प्राप्त होती है :

$$k x_m^2 + 2\mu m g x_m - m v^2 = 0$$

$$x_m = \frac{-\mu m g + \left[\mu^2 m^2 g^2 + m k v^2\right]^{1/2}}{k}$$

जहाँ हमने x_m धनात्मक होने के कारण इसका धनात्मक वर्गमूल ले लिया है। आंकिक मानों को समीकरण में प्रतिस्थापित करने पर हम प्राप्त करते हैं

$$x_m = 1.35 \text{ m}$$

जो आशानुसार उदाहरण 6.8 में प्राप्त परिणाम से कम है। ◂

यदि मान लें कि पिंड पर लगने वाले दोनों बलों में एक संरक्षी बल F_c और दूसरा असंरक्षी बल F_{nc} है तो यांत्रिक ऊर्जा-संरक्षण के सूत्र में किंचित् परिवर्तन करना पड़ेगा। कार्य-ऊर्जा प्रमेय से :

$$(F_c + F_{nc})\,\Delta x = \Delta K$$

परंतु $$F_c\,\Delta x = -\,\Delta V$$

अतः $$\Delta(K + V) = F_{nc}\,\Delta x$$

$$\Delta E = F_{nc}\,\Delta x$$

जहाँ E कुल यांत्रिक ऊर्जा है। समस्त पथ पर यह निम्न रूप ले लेती है

$$E_f - E_i = W_{nc}$$

जहाँ W_{nc} असंरक्षी बल द्वारा किसी पथ पर किया गया कुल कार्य है। ध्यान दीजिए कि W_{nc} i से f तक एक विशेष पथ पर निर्भर करता है जैसा कि संरक्षी बल में नहीं है।

6.10 ऊर्जा के विभिन्न रूप : ऊर्जा-संरक्षण का नियम

पिछले अनुभाग में हमने यांत्रिक ऊर्जा की विवेचना की और यह पाया कि इसे दो भिन्न श्रेणियों में विभाजित किया जा सकता है। पहली गति पर आधारित है अर्थात् गतिज ऊर्जा, और दूसरी संरूपण अथवा स्थिति पर आधारित अर्थात् स्थितिज ऊर्जा। ऊर्जा बहुत से रूपों में प्राप्त होती है जिनको एक रूप से दूसरे रूप में कई विधियों द्वारा रूपान्तरित किया जाता है जो प्राय: हमें भी कभी-कभी स्पष्ट नहीं होते।

6.10.1 ऊष्मा

हम पहले ही देख चुके हैं कि घर्षण बल संरक्षी बल नहीं है। लेकिन कार्य, घर्षण बल से संबंधित है (उदाहरण 6.5)। कोई m द्रव्यमान का गुटका रूक्ष क्षैतिज पृष्ठ पर v_0 चाल से फिसलता हुआ x_0 दूरी चलकर रुक जाता है। x_0 पर गतिज घर्षण बल f द्वारा किया गया कार्य $-f\,x_0$ है। कार्य-ऊर्जा प्रमेय से $\frac{1}{2}mv_0^2 = f\,x_0$ प्राप्त होता है। यदि हम अपने विषय-क्षेत्र को यांत्रिकी तक ही सीमित रखें तो हम कहेंगे कि गुटके की गतिज ऊर्जा, घर्षण बल के कारण क्षयित हो गई है। मेज और गुटके का परीक्षण करने पर हमें पता चलेगा कि इनका ताप मामूली-सा बढ़ गया है। घर्षण बल द्वारा किया गया कार्य क्षयित नहीं हुआ है अपितु ऊष्मीय ऊर्जा के रूप में मेज और गुटके को स्थानान्तरित हो गया है जो गुटके और मेज की आंतरिक ऊर्जा को बढ़ा देता है। शीतकाल में हम अपनी हथेलियों को आपस में जोर से रगड़कर ऊष्मा उत्पन्न करते हैं। हम बाद में देखेंगे कि आंतरिक ऊर्जा प्राय: अणुओं की निरंतर यादृच्छिक गति से संबंधित है । ऊष्मीय ऊर्जा के स्थानान्तरण की परिमाणात्मक धारणा इस लक्षण से प्राप्त की जा सकती है कि 1 kg जल 10° C ठंडा होने पर 42000 J ऊर्जा मुक्त करता है।

6.10.2 रासायनिक ऊर्जा

मानव जाति ने महानतम् तकनीकी सफलता प्राप्त की जब यह पता लगा कि अग्नि को कैसे प्रज्वलित और नियंत्रित किया जाता है। हमने दो फ्लिन्ट पत्थरों को आपस में रगड़ना (यांत्रिक ऊर्जा), उन्हें गर्म होने देना और पत्तियों के ढेर को सुलगाना (रासायनिक ऊर्जा) सीखा जिसके कारण हम सतत् ऊष्मा प्राप्त कर पाए। माचिस की एक तीली जब विशेष रूप से तैयार की गई रासायनिक सतह पर रगड़ी जाती है तो एक चमकीली ज्वाला के रूप में प्रज्वलित होती है। जब सुलगाई गई माचिस की तीली पटाखे में लगाई जाती है तो उसके परिणामस्वरूप ध्वनि एवं प्रकाश ऊर्जाओं का भव्य

ERROR: stackunderflow
OFFENDING COMMAND: ~

STACK:

अध्याय 7

कणों के निकाय तथा घूर्णी गति

7.1 भूमिका

पिछले अध्यायों में हमने मुख्य रूप से आदर्श बिन्दु कण (एक कण जिसे द्रव्यमान युक्त बिन्दु के रूप में व्यक्त किया जाए तथा इसका कोई आकार नहीं हो) की गति का अध्ययन किया था। फिर, यह मानते हुए कि परिमित आकार के पिण्डों की गति को बिन्दु कण की गति के पदों में व्यक्त किया जा सकता है, हमने उस अध्ययन के परिणामों को परिमित आकार के पिण्डों पर भी लागू कर दिया था।

दैनिक जीवन में जितने पिण्ड हमारे संपर्क में आते हैं वे सभी परिमित आकार के होते हैं। एक विस्तृत पिण्ड (परिमित आकार के पिण्ड) की गति को पूरे तौर पर समझने के लिए आमतौर पर उसका बिन्दुवत् आदर्श अपर्याप्त रहता है। इस अध्याय में हम इस प्रतिबंध के परे जाने की चेष्टा करेंगे और विस्तृत, पर परिमित पिण्डों की गति को समझने का प्रयास करेंगे। एक विस्तृत पिण्ड प्रथमतया कणों का एक निकाय है। अतः हम अपना विवेचन एक निकाय की गति से ही शुरू करना चाहेंगे। यहाँ कणों के निकाय का द्रव्यमान केन्द्र एक मुख्य अवधारणा होगी। हम कणों के निकाय के द्रव्यमान केन्द्र की गति का वर्णन करेंगे और फिर, परिमित आकार के पिण्डों की गति को समझने में इस अवधारणा की उपयोगिता बतायेंगे।

बड़े पिण्डों से जुड़ी बहुत सी समस्याएं उनको दृढ़ पिण्ड मानकर हल की जा सकती हैं। *आदर्श दृढ़ पिण्ड एक ऐसा पिण्ड है जिसकी एक सुनिश्चित और अपरिवर्तनीय आकृति होती है। इस प्रकार के ठोस के सभी कण युग्मों के बीच की दूरियाँ परिवर्तित नहीं होती।* दृढ़ पिण्ड की इस परिभाषा से यह स्पष्ट है कि कोई भी वास्तविक पिण्ड पूरी तरह दृढ़ नहीं होता, क्योंकि सभी व्यावहारिक पिण्ड बलों के प्रभाव से विकृत हो जाते हैं। परन्तु ऐसी बहुत सी स्थितियाँ होती हैं जिनमें विकृतियाँ नगण्य होती हैं। अतः कई प्रकार की स्थितियों में यथा पहिये, लट्टू, स्टील के शहतीर और यहाँ तक कि अणु, ग्रह जैसे पिण्डों की गति का अध्ययन करते समय, हम ध्यान न देंगे कि उनमें विकृति आती है, वे मुड़ते हैं या कम्पन करते हैं। हम उन्हें दृढ़ पिण्ड मान कर उनकी गति का अध्ययन करेंगे।

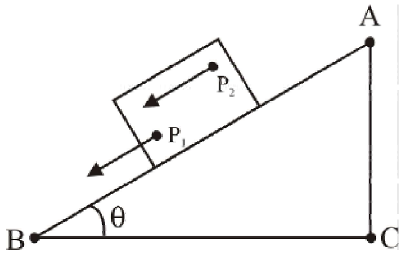
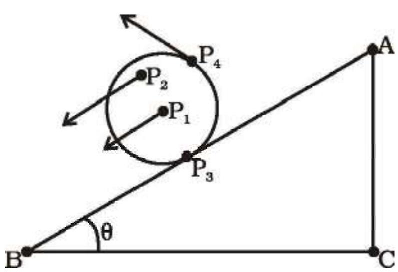


Fig 7.1 *नत-तल पर एक ब्लॉक की अधोमुखी स्थानांतरण (फिसलन) गति (ब्लॉक का प्रत्येक बिंदु यथा P_1, P_2.... किसी भी क्षण समान गति में हैं)*

7.1.1 एक दृढ़ पिण्ड में किस प्रकार की गतियाँ हो सकती हैं?

आइये, दृढ़ पिण्डों की गति के कुछ उदाहरणों से इस प्रश्न का उत्तर ढूंढ़ने की कोशिश करें। प्रथम एक आयताकार ब्लॉक पर विचार करें जो एक नत तल पर सीधा (बिना इधर-उधर हटे) नीचे की ओर फिसल रहा है। ब्लॉक एक दृढ़ पिण्ड लिया है। नत तल पर नीचे की ओर इसकी गति ऐसी है कि इसके सभी कण साथ-साथ चल रहे हैं, अर्थात् किसी क्षण सभी कण समान वेग से चलते हैं (चित्र 7.1)। यहाँ यह दृढ़ पिंड शुद्ध स्थानांतरण गति में है।

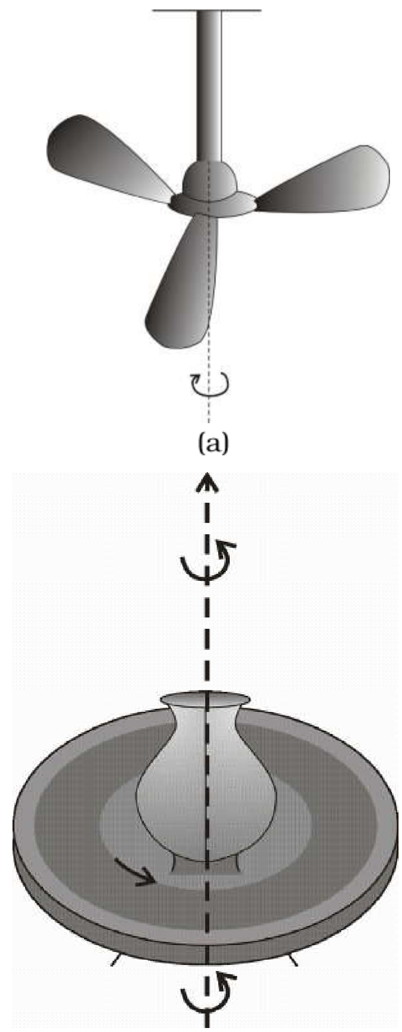
शुद्ध स्थानांतरण गति में किसी क्षण विशेष पर पिण्ड का प्रत्येक कण समान वेग से चलता है।



चित्र 7.2 *नत तल पर नीचे की ओर लुढ़कता सिलिंडर (बेलन)। यह शुद्ध स्थानांतरण गति नहीं है। किसी क्षण पर बिन्दु P_1, P_2, P_3 एवं P_4 के अलग-अलग वेग हैं (जैसा कि तीर दर्शाते हैं)। वास्तव में सम्पर्क बिन्दु P_3 का वेग किसी भी क्षण शून्य है यदि बेलन बिना फिसले हुए लुढ़कता है।*

आइये, अब उसी नत तल पर नीचे की ओर लुढ़कते हुए एक धातु या लकड़ी के बेलन की गति पर विचार करते हैं (चित्र 7.2)। यह दृढ़ पिण्ड (बेलन) नत तल के शीर्ष से उसकी तली तक स्थानांतरित होता है, अतः इसमें स्थानांतरण गति प्रतीत होती है। लेकिन चित्र 7.2 यह भी दर्शाता है कि इसके सभी कण क्षण विशेष पर एक ही वेग से नहीं चल रहे हैं। अतः पिण्ड शुद्ध स्थानांतरण गति में नहीं है। अतः इसकी गति स्थानांतरीय होने के साथ-साथ 'कुछ और अलग' भी है।

यह 'कुछ और अलग' भी क्या है? यह समझने के लिए, आइये, हम एक ऐसा दृढ़ पिंड लें जिसको इस प्रकार व्यवरुद्ध कर दिया गया है कि यह स्थानांतरण गति न कर सके। किसी दृढ़ पिण्ड की स्थानांतरण गति को निरुद्ध करने की सर्व सामान्य विधि यह है कि उसे एक सरल रेखा के अनुदिश स्थिर कर दिया जाए। तब इस दृढ़ पिण्ड की एकमात्र संभावित गति *घूर्णी गति* होगी। वह सरल रेखा जिसके अनुदिश इस दृढ़ पिण्ड को स्थिर बनाया गया है इसकी *घूर्णन-अक्ष* कहलाती है। यदि आप अपने चारों ओर देखें तो आपको छत का पंखा, कुम्हार का चाक (चित्र 7.3(a) एवं (b)), विशाल चक्री-झूला (जॉयन्ट व्हील), मेरी-गो-राउण्ड जैसे अनेक ऐसे उदाहरण मिल जायेंगे जहाँ किसी अक्ष के परितः घूर्णन हो रहा हो।

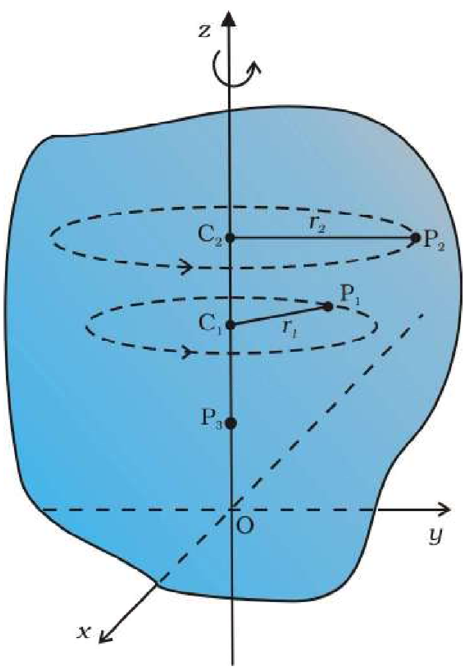


(a)

(b)

चित्र 7.3 *एक स्थिर अक्ष के परितः घूर्णन*
(a) छत का पंखा
(b) कुम्हार का चाक

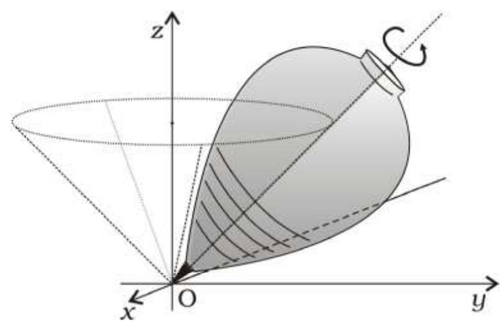
आइये, अब हम यह समझने की चेष्टा करें कि घूर्णन क्या है, और इसके क्या अभिलक्षण हैं? आप देख सकते हैं कि *एक दृढ़ पिण्ड के एक स्थिर अक्ष के परितः घूर्णन में, पिण्ड का हर कण एक वृत्त में घूमता है। यह वृत्त अक्ष के लम्बवत् तल में है और इनका केन्द्र अक्ष पर अवस्थित है।* चित्र 7.4 में एक



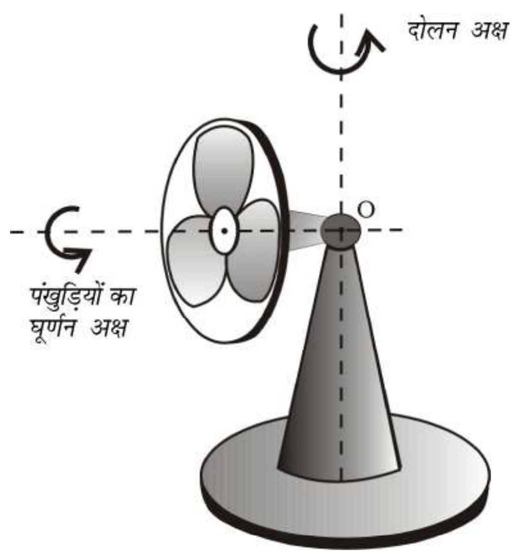
चित्र 7.4 *z-अक्ष के परितः एक दृढ़ पिण्ड का घूर्णन। पिण्ड का प्रत्येक बिन्दु P_1 या P_2 एक वृत्त पर घूमता है जिसका केन्द्र (C_1 या C_2) अक्ष पर स्थित है। वृत्त की त्रिज्या (r_1 या r_2) अक्ष से बिन्दु (P_1 या P_2) की लम्बवत् दूरी है। अक्ष पर स्थित P_3 जैसा बिन्दु स्थिर रहता है।*

स्थिर अक्ष (निर्देश फ्रेम की z-अक्ष) के परितः किसी दृढ़ पिण्ड की घूर्णन गति दर्शायी है। हम अक्ष से r_1 दूरी पर स्थित दृढ़ पिण्ड का कोई स्वेच्छ कण P_1 लें। यह कण अक्ष के परितः r_1 त्रिज्या के वृत्त पर घूमता है जिसका केन्द्र C_1 अक्ष पर स्थित है। यह वृत्त अक्ष के लम्बवत् तल में अवस्थित है। चित्र में एक दूसरा कण P_2 भी दर्शाया गया है जो स्थिर अक्ष से r_2 दूरी पर है। कण P_2, r_2 त्रिज्या के वृत्ताकार पथ पर चलता है जिसका केन्द्र अक्ष पर C_2 है। यह वृत्त भी अक्ष के लम्बवत् तल में है। ध्यान दें कि P_1 एवं P_2 द्वारा बनाये गए वृत्त अलग-अलग तलों में हैं पर ये दोनों तल स्थिर अक्ष के लम्बवत् हैं। अक्ष पर स्थित किसी बिन्दु, जैसे P_3 के लिए, $r = 0$ । ये कण, पिण्ड के घूमते समय भी स्थित रहते हैं। यह अपेक्षित भी है क्योंकि घूर्णन अक्ष स्थिर है।

तथापि, घूर्णन के कुछ उदाहरणों में, अक्ष स्थिर नहीं भी रहती। इस प्रकार के घूर्णन के मुख्य उदाहरणों में एक है, एक ही स्थान पर घूमता लट्टू (चित्र 7.5(a))। (लट्टू की गति के संबंध में हमने यह मान लिया है कि यह एक स्थान से दूसरे स्थान पर स्थानांतरित नहीं होता और इसलिए इसमें स्थानांतरण गति नहीं है।) अपने अनुभव के आधार पर हम यह जानते हैं कि इस प्रकार घूमते लट्टू की अक्ष, भूमि पर इसके सम्पर्क-बिन्दु से गुजरते अभिलम्ब के परितः एक शंकु बनाती है जैसा कि चित्र 7.5(a) में दर्शाया गया है। (ऊर्ध्वाधर के परितः लट्टू की अक्ष का इस प्रकार घूमना पुरस्सरण कहलाता है)। *ध्यान दें कि लट्टू का वह बिन्दु जहाँ यह धरातल को छूता है, स्थिर है।* किसी भी क्षण, लट्टू की घूर्णन-अक्ष, इसके सम्पर्क बिन्दु से गुजरती है। इस प्रकार की घूर्णन गति का दूसरा सरल उदाहरण घूमने वाला मेज का पंखा या पीठिका-पंखा है। आपने देखा होगा कि इस प्रकार के पंखे की अक्ष, क्षैतिज तल में, दोलन गति (इधर से उधर घूमने की) करती है और यह गति ऊर्ध्वाधर रेखा के परितः होती है जो उस बिन्दु से गुजरती है जिस पर अक्ष की धुरी टिकी होती है (चित्र 7.5(b) में बिन्दु O)।



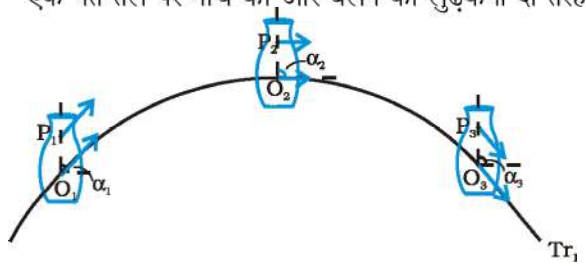
चित्र 7.5 *(a) घूमता हुआ लट्टू (इसकी टिप O का धरातल पर सम्पर्क बिन्दु स्थिर है)*



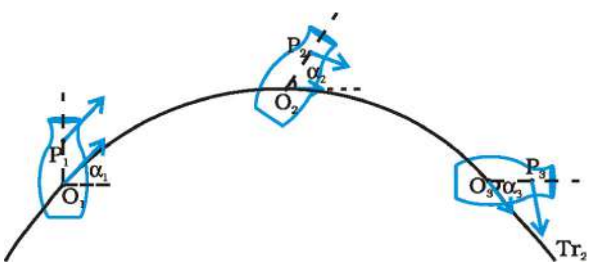
चित्र 7.5 *(b) दोलन करता हुआ मेज का पंखा जिसकी पंखुड़ियाँ घूर्णन गति में हैं। (पंखे की धुरी, बिन्दु O, स्थिर है)*

जब पंखा घूमता है और इसकी अक्ष इधर से उधर दोलन करती है तब भी यह बिन्दु स्थिर रहता है। घूर्णन गति के अधिक सार्विक मामलों में, जैसे कि लट्टू या पीठिका-पंखे के घूमने में, दृढ़ पिण्ड का एक बिन्दु स्थिर रहता है, न कि एक रेखा। इस मामले में अक्ष तो स्थिर नहीं है पर यह हमेशा एक स्थिर बिन्दु से गुजरती है। तथापि, अपने अध्ययन में, अधिकांशतः, हम ऐसी सरल एवं विशिष्ट घूर्णन गतियों तक सीमित रहेंगे जिनमें एक रेखा (यानि अक्ष) स्थिर रहती है। अतः जब तक अन्यथा न कहा जाय, हमारे लिए घूर्णी गति एक स्थिर अक्ष के परितः ही होगी।

एक नत तल पर नीचे की ओर बेलन का लुढ़कना दो तरह



चित्र 7.6(a) *एक दृढ़ पिण्ड की गति जो शुद्ध स्थानांतरीय है*



चित्र 7.6(b) दृढ़ *पिण्ड की ऐसी गति जो स्थानांतरीय और घूर्णी गतियों का संयोजन है*

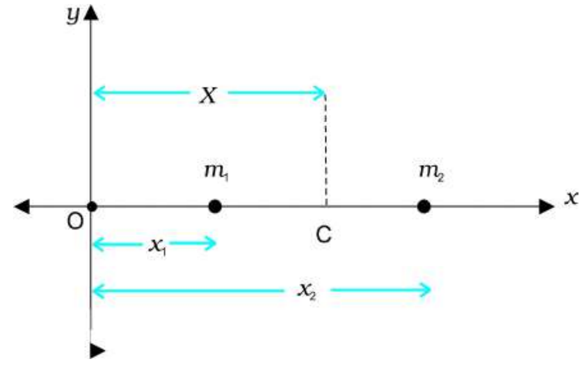
चित्र 7.6 (a) एवं 7.6 (b) एक ही पिण्ड की विभिन्न गतियाँ दर्शाते हैं। ध्यान दें, कि P पिण्ड का कोई स्वेच्छ बिन्दु है; O पिण्ड का द्रव्यमान केन्द्र है, जिसके विषय में अगले खण्ड में बताया गया है। यहाँ यह कहना पर्याप्त होगा कि बिन्दु O के गमन पथ ही पिण्ड के स्थानांतरीय गमन पथ Tr_1 एवं Tr_2 हैं। तीन अलग-अलग क्षणों पर, बिन्दुओं O एवं P की स्थितियाँ चित्र 7.6(a) एवं 7.6 (b) दोनों ही क्रमशः O_1, O_2, O_3, एवं P_1, P_2, P_3 द्वारा प्रदर्शित की गई हैं। चित्र 7.6(a) से यह स्पष्ट है कि शुद्ध स्थानांतरण की स्थिति में, पिण्ड के किन्हीं भी दो बिन्दुओं O एवं P के वेग, बराबर होते हैं। यह भी ज्ञातव्य है, कि इस स्थिति में OP, का दिग्विन्यास, यानि कि वह कोण जो OP एक नियत दिशा (माना कि क्षैतिज) से बनाता है, समान रहता है अर्थात् $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3$ । चित्र 7.6 (b) स्थानांतरण एवं घूर्णन के संयोजन से निर्मित गति दर्शाता है। इस गति में बिन्दुओं O एवं P के क्षणिक वेगों के मान अलग-अलग हो सकते हैं और कोणों α_1, α_2, α_3 के मान भी भिन्न हो सकते हैं।

की गतियों का संयोजन है- स्थानांतरण गति और एक स्थिर अक्ष के परितः घूर्णी गति। अतः, लुढ़कन गति के संदर्भ में जिस 'कुछ और अलग' का जिक्र पहले हमने किया था वह घूर्णी गति है। इस दृष्टिकोण से चित्र 7.6(a) एवं (b) को आप पर्याप्त शिक्षाप्रद पायेंगे। इन दोनों चित्रों में एक ही पिण्ड की गति, समान स्थानांतरीय गमन-पथ के अनुदिश दर्शाई गई है। चित्र 7.6(a) में दर्शाई गई गति शुद्ध स्थानांतरीय है, जबकि चित्र 7.6(b) में दर्शाई गई गति स्थानांतरण एवं घूर्णी दोनों प्रकार की गतियों का संयोजन है। (आप स्वयं भारी पुस्तक जैसा एक दृढ़ पिण्ड फेंक कर दर्शाई गई दोनों प्रकार की गतियाँ उत्पन्न करने की कोशिश कर सकते हैं।)

आइये अब हम प्रस्तुत खण्ड में वर्णित महत्वपूर्ण तथ्यों का सार फिर से आपको बतायें। **एक ऐसा दृढ़ पिण्ड जो न तो किसी चूल पर टिका हो और न ही किसी रूप में स्थिर हो, दो प्रकार की गति कर सकता है - या तो शुद्ध स्थानांतरण या स्थानांतरण एवं घूर्णन गति का संयोजन।** *एक ऐसे दृढ़ पिण्ड की गति जो या तो चूल पर टिका हो या किसी न किसी रूप में स्थिर हो, घूर्णी गति होती है।* घूर्णन किसी ऐसी अक्ष के परितः हो सकता है जो स्थिर हो (जैसे छत के पंखे में) या फिर एक ऐसी अक्ष के परितः जो स्वयं घूमती हो (जैसे इधर से उधर घूमते मेज के पंखे में)। इस अध्याय में हम एक स्थिर अक्ष के परितः होने वाली घूर्णी गति का ही अध्ययन करेंगे।

7.2 द्रव्यमान केन्द्र

पहले हम यह देखेंगे कि द्रव्यमान केन्द्र क्या है और फिर इसके महत्व पर प्रकाश डालेंगे। सरलता की दृष्टि से हम दो कणों के निकाय से शुरुआत करेंगे। दोनों कणों की स्थितियों को मिलाने वाली रेखा को हम x- अक्ष मानेंगे। (चित्र 7.7)



चित्र 7.7 *दो कणों और उनके द्रव्यमान केन्द्र की स्थिति*

माना कि दो कणों की, किसी मूल बिन्दु O से दूरियाँ क्रमशः x_1 एवं x_2 हैं। इन कणों के द्रव्यमान क्रमशः m_1 एवं m_2 हैं। इन दो कणों के निकाय का द्रव्यमान केन्द्र C एक ऐसा बिन्दु होगा जिसकी O से दूरी, X का मान हो

$$X = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \tag{7.1}$$

समीकरण (7.1) में X को हम x_1 एवं x_2 का द्रव्यमान भारित माध्य मान सकते हैं। यदि दोनों कणों का द्रव्यमान बराबर हो तो $m_1 = m_2 = m$, तब

$$X = \frac{m x_1 + m x_2}{2m} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

इस प्रकार समान द्रव्यमान के दो कणों का द्रव्यमान केन्द्र ठीक उनके बीचोंबीच है।

अगर हमारे पास n कण हों, जिनके द्रव्यमान क्रमशः m_1, m_2, ...m_n हों और सबको x- अक्ष के अनुदिश रखा गया हो, तो परिभाषा के अनुसार इन सब कणों का द्रव्यमान केन्द्र होगा

$$X = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} \tag{7.2}$$

जहाँ $x_1, x_2, \ldots x_n$ कणों की क्रमशः मूलबिन्दु से दूरियाँ हैं; X भी उसी मूलबिन्दु से मापा गया है। संकेत $\sum$ (यूनानी भाषा का अक्षर सिग्मा) संकलन को व्यक्त करता है जो इस मामले में n कणों के लिए किया गया है। संकलन फल

$$\sum m_i = M$$

निकाय का कुल द्रव्यमान है।

माना हमारे पास तीन कण हैं जो एक सरल रेखा में तो नहीं, पर एक समतल में रखे गए हैं। तब हम उस तल में जिसमें ये तीन कण रखे गए हैं x- एवं y-अक्ष निर्धारित कर सकते हैं, और इन तीन कणों की स्थितियों को क्रमशः निर्देशांकों (x_1,y_1), (x_2,y_2) एवं (x_3,y_3) द्वारा व्यक्त कर सकते हैं। मान लीजिए कि इन तीन कणों के द्रव्यमान क्रमशः m_1, m_2 एवं m_3 हैं। इन तीन कणों के निकाय का द्रव्यमान केन्द्र C निर्देशांकों (X, Y) द्वारा व्यक्त किया जायेगा जिनके मान हैं-

$$X = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3} \tag{7.3a}$$

$$Y = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3} \tag{7.3b}$$

समान द्रव्यमान वाले कणों के लिए $m = m_1 = m_2 = m_3$,

$$X = \frac{m(x_1 + x_2 + x_3)}{3m} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

$$Y = \frac{m(y_1 + y_2 + y_3)}{3m} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

अर्थात् समान द्रव्यमान वाले कणों के लिए तीन कणों का द्रव्यमान केन्द्र उनकी स्थिति बिन्दुओं को मिलाने से बने त्रिभुज के केन्द्रक पर होगा।

समीकरण (7.3a,b) के परिणामों को, सरलतापूर्वक, ऐसे n कणों के एक निकाय के लिए सार्विक किया जा सकता है जो एक समतल में न होकर, अंतरिक्ष में फैले हों। इस तरह के निकाय का द्रव्यमान केन्द्र (X, Y, Z) है, जहाँ

$$X = \frac{\sum m_i x_i}{M} \tag{7.4a}$$

$$Y = \frac{\sum m_i y_i}{M} \tag{7.4b}$$

और $$Z = \frac{\sum m_i z_i}{M} \tag{7.4c}$$

यहाँ $M = \sum m_i$ निकाय का कुल द्रव्यमान है। सूचक i का मान 1 से n तक बदलता है, m_i i वें कण का द्रव्यमान है, और i वें कण की स्थिति (x_i, y_i, z_i) से व्यक्त की गई है। यदि हम स्थिति-सदिश की अवधारणा का उपयोग करें तो समीकरण (7.4a, b, c) को संयोजित करके एकल समीकरण के रूप में लिखा जा सकता है। यदि $\mathbf{r}_i$, i वें कण का स्थिति-वेक्टर है और $\mathbf{R}$ द्रव्यमान केन्द्र का स्थिति-सदिश है:

$$\mathbf{r}_i = x_i \hat{\mathbf{i}} + y_i \hat{\mathbf{j}} + z_i \hat{\mathbf{k}}$$

एवं $$\mathbf{R} = X \hat{\mathbf{i}} + Y \hat{\mathbf{j}} + Z \hat{\mathbf{k}}$$

तब $$\mathbf{R} = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{M} \tag{7.4d}$$

समीकरण के दाहिनी ओर लिखा गया योग सदिश-योग है।

सदिशों के इस्तेमाल से समीकरणों की संक्षिप्तता पर ध्यान दीजिए। यदि संदर्भ-फ्रेम (निर्देशांक निकाय) के मूल बिन्दु को, दिए गए कण-निकाय के द्रव्यमान केन्द्र में लिया जाए तो $\sum m_i \mathbf{r}_i = 0$।

एक दृढ़ पिण्ड, जैसे कि मीटर-छड़ या फ्लाइ व्हील, बहुत पास-पास रखे गए कणों का निकाय है; अतः समीकरण (7.4a, b, c, d) दृढ़ पिण्ड के लिए भी लागू होते हैं। इस प्रकार के पिण्डों में कणों (परमाणुओं या अणुओं) की संख्या इतनी

अधिक होती है, कि इन समीकरणों में, सभी पृथक-पृथक कणों को लेकर संयुक्त प्रभाव ज्ञात करना असंभव कार्य है। पर, क्योंकि कणों के बीच की दूरी बहुत कम है, हम पिण्ड में द्रव्यमान का सतत वितरण मान सकते हैं। यदि पिण्ड को n छोटे द्रव्यमान खण्डों में विभाजित करें जिनके द्रव्यमान $\Delta m_1, \Delta m_2 \dots \Delta m_n$ हैं तथा i-वाँ खण्ड Δm_i बिन्दु (x_i, y_i, z_i) पर अवस्थित है ऐसा सोचें तो द्रव्यमान केन्द्र के निर्देशांकों के लगभग मान इस प्रकार व्यक्त करेंगे -

$$X = \frac{\sum(\Delta m_i)x_i}{\sum \Delta m_i}, Y = \frac{\sum(\Delta m_i)y_i}{\sum \Delta m_i}, Z = \frac{\sum(\Delta m_i)z_i}{\sum \Delta m_i}$$

यदि हम n को वृहत्तर करें अर्थात् Δm_i को और छोटा करें तो ये समीकरण काफी यथार्थ मान बताने लगेंगे। उस स्थिति में i-कणों के योग को हम समाकल से व्यक्त करेंगे।

$$\sum \Delta m_i \rightarrow \int \mathrm{d}m = M,$$

$$\sum(\Delta m_i)x_i \rightarrow \int x\,\mathrm{d}m,$$

$$\sum(\Delta m_i)y_i \rightarrow \int y\,\mathrm{d}m,$$

और $$\sum(\Delta m_i)z_i \rightarrow \int z\,\mathrm{d}m$$

यहाँ M पिण्ड का कुल द्रव्यमान है। द्रव्यमान केन्द्र के निर्देशांकों को अब हम इस प्रकार लिख सकते हैं

$$X = \frac{1}{M}\int x\,\mathrm{d}m,\ Y = \frac{1}{M}\int y\,\mathrm{d}m \text{ और } Z = \frac{1}{M}\int z\,dm \qquad (7.5a)$$

इन तीन अदिश व्यंजकों के तुल्य सदिश व्यंजक इस प्रकार लिख सकते हैं-

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M}\int \mathbf{r}\,\mathrm{d}m \qquad (7.5b)$$

यदि हम द्रव्यमान केन्द्र को अपने निर्देशांक निकाय का मूल-बिन्दु चुनें तो

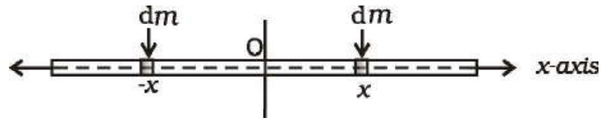
$$\mathbf{R}\ (x,y,z) = 0$$

अर्थात्, $$\int \mathbf{r}\,\mathrm{d}m = 0$$

या $$\int x\,\mathrm{d}m = \int y\,\mathrm{d}m = \int z\,\mathrm{d}m = 0 \qquad (7.6)$$

प्राय: हमें नियमित आकार के समांग पिण्डों; जैसे – वलयों, गोल-चकतियों, गोलों, छड़ों इत्यादि के द्रव्यमान केन्द्रों की गणना करनी पड़ती है। (समांग पिण्ड से हमारा तात्पर्य एक ऐसी वस्तु से है जिसमें द्रव्यमान का समान रूप से वितरण हो)। सममिति का विचार करके हम सरलता से यह दर्शा सकते हैं कि इन पिंडों के द्रव्यमान केन्द्र उनके ज्यामितीय केन्द्र ही होते हैं।

आइये, एक पतली छड़ पर विचार करें, जिसकी चौड़ाई और मोटाई (यदि इसकी अनुप्रस्थ काट आयताकार है) अथवा त्रिज्या (यदि छड़ बेलनाकार है), इसकी लम्बाई की तुलना में बहुत छोटी है। छड़ की लम्बाई x-अक्ष के अनुदिश रखें और मूल बिन्दु इसके ज्यामितीय केन्द्र पर ले लें तो परावर्तन सममिति की दृष्टि से हम कह सकते हैं कि प्रत्येक x पर स्थित प्रत्येक dm घटक के समान dm का घटक $-x$ पर भी स्थित होगा (चित्र 7.8)।



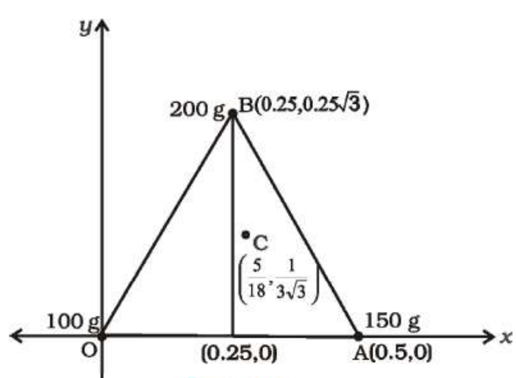
चित्र 7.8 एक पतली छड़ का द्रव्यमान केन्द्र ज्ञात करना

समाकल में हर जोड़े का योगदान शून्य है और इस कारण स्वयं $\int x\,\mathrm{d}m$ का मान शून्य हो जाता है। समीकरण (7.6) बताती है कि जिस बिन्दु के लिए समाकल शून्य हो वह पिण्ड का द्रव्यमान केन्द्र है। अत: समांग छड़ का ज्यामितीय केन्द्र इसका द्रव्यमान केन्द्र है। इसे परावर्तन सममिति के प्रयोग से समझ सकते हैं।

सममिति का यही तर्क, समांग वलयों, चकतियों, गोलों और यहाँ तक कि वृत्ताकार या आयताकार अनुप्रस्थ काट वाली मोटी छड़ों के लिए भी लागू होगा। ऐसे सभी पिण्डों के लिए आप पायेंगे कि बिन्दु (x,y,z) पर स्थित हर द्रव्यमान घटक के लिए बिन्दु $(-x,-y,-z)$ पर भी उसी द्रव्यमान का घटक लिया जा सकता है। (दूसरे शब्दों में कहें तो इन सभी पिण्डों के लिए मूल बिन्दु परावर्तन-सममिति का बिन्दु है)। परिणामत:, समीकरण (7.5 a) में दिए गए सभी समाकल शून्य हो जाते हैं। इसका अर्थ यह हुआ कि उपरोक्त सभी पिण्डों का द्रव्यमान केन्द्र उनके ज्यामितीय केन्द्र पर ही पड़ता है।

उदाहरण 7.1 एक समबाहु त्रिभुज के शीर्षों पर रखे गए तीन कणों का द्रव्यमान केन्द्र ज्ञात कीजिए। कणों के द्रव्यमान क्रमशः 100g, 150g, एवं 200g हैं। त्रिभुज की प्रत्येक भुजा की लम्बाई 0.5 m है।

हल



चित्र 7.9

x एवं y- अक्ष चित्र 7.9 में दर्शाये अनुसार चुनें तो समबाहु त्रिभुज के शीर्ष बिन्दुओं O, A एवं B के निर्देशांक क्रमशः (0,0), (0.5,0) एवं $(0.25, 0.25\sqrt{3})$ होंगे। माना कि 100g, 150g एवं 200g के द्रव्यमान क्रमशः O, A एवं B पर अवस्थित हैं। तब

$$X = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$= \frac{[100(0) + 150(0.5) + 200(0.25)] \text{ g m}}{(100 + 150 + 200) \text{ g}}$$

$$= \frac{75 + 50}{450} \text{m} = \frac{125}{450} \text{m} = \frac{5}{18} \text{m}$$

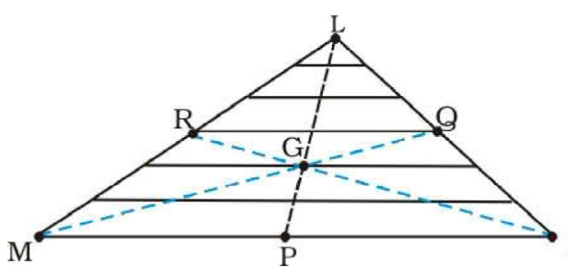
$$Y = \frac{[100(0) + 150(0) + 200(0.25\sqrt{3})] \text{ g m}}{450 \text{ g}}$$

$$= \frac{50\sqrt{3}}{450} \text{m} = \frac{\sqrt{3}}{9} \text{m} = \frac{1}{3\sqrt{3}} \text{m}$$

द्रव्यमान केन्द्र C चित्र में दर्शाया गया है। ध्यान दें कि यह त्रिभुज OAB का ज्यामितीय केन्द्र नहीं है। क्या आप बता सकते हैं कि ऐसा क्यों नही है? ◀

▶ **उदाहरण 7.2:** एक त्रिभुजाकार फलक का द्रव्यमान केन्द्र ज्ञात कीजिए।

हल फलक (ΔLMN) को आधार (MN) के समान्तर पतली पट्टियों में बांटा जा सकता है जैसा चित्र 7.10 में दर्शाया गया है।

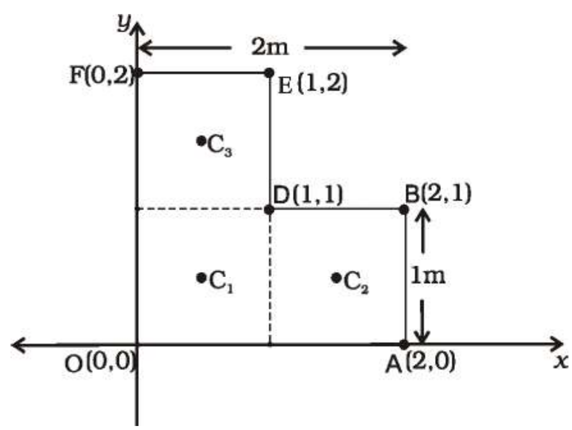


चित्र 7.10

सममिति के आधार पर हम कह सकते हैं कि हर पट्टी का द्रव्यमान केन्द्र उसका मध्य बिन्दु है। अगर हम सभी पट्टियों के मध्य बिन्दुओं को मिलाते हैं तो हमें माध्यिका LP प्राप्त होती है। इसलिए, पूरे त्रिभुज का द्रव्यमान केन्द्र इस माध्यिका LP पर कहीं अवस्थित होगा। इसी प्रकार हम तर्क कर सकते हैं कि यह माध्यिका MQ और NR पर भी अवस्थित होगा। अतः यह द्रव्यमान केन्द्र तीनों माध्यिकाओं का संगामी बिन्दु गति त्रिभुज का केन्द्रक G है। ◀

▶ **उदाहरण 7.3:** एक दिए गए L-आकृति के फलक (एक पतली चपटी प्लेट) का द्रव्यमान केन्द्र ज्ञात कीजिए, जिसका विभिन्न भुजाओं को चित्र 7.11 में दर्शाया है। फलक का द्रव्यमान 3 kg है।

हल चित्र 7.11 के अनुसार X एवं Y अक्षों को चुनें तो L-आकृति फलक के विभिन्न शीर्षों के निर्देशांक वही प्राप्त होते हैं जो चित्र में अंकित किए गए हैं। हम L-आकृति को तीन वर्गों से मिलकर बना हुआ मान सकते हैं जिनमें से प्रत्येक वर्ग की भुजा 1m है। प्रत्येक वर्ग का द्रव्यमान 1kg है, क्योंकि फलक समांग हैं। इन तीन वर्गों के द्रव्यमान केन्द्र C_1, C_2 और C_3 हैं, जो सममिति के विचार से उनके ज्यामितीय केन्द्र हैं और इनके निर्देशांक क्रमशः (1/2,1/2), (3/2,1/2), (1/2,3/2) हैं। हम कह सकते हैं कि L-आकृति का द्रव्यमान केन्द्र (X, Y) इन द्रव्यमान बिन्दुओं का द्रव्यमान केन्द्र हैं।



चित्र 7.11

अतः

$$X = \frac{[1(1/2) + 1(3/2) + 1(1/2)] \text{kg m}}{(1+1+1) \text{kg}} = \frac{5}{6} \text{m}$$

$$Y = \frac{[[1(1/2) + 1(1/2) + 1(3/2)]] \text{kg m}}{(1+1+1) \text{kg}} = \frac{5}{6} \text{m}$$

L-आकृति का द्रव्यमान केन्द्र रेखा OD पर पड़ता है। इस बात का अंदाजा हम बिना किसी गणना के लगा सकते थे। क्या आप बता सकते हैं, कैसे? यदि यह मानें कि चित्र 7.11 में दर्शाये गए L आकृति फलक के तीन वर्गों के द्रव्यमान

अलग-अलग होते तब आप इस फलक का द्रव्यमान केन्द्र कैसे ज्ञात करेंगे?

7.3 द्रव्यमान केन्द्र की गति

द्रव्यमान केन्द्र की परिभाषा जानने के बाद, अब हम इस स्थिति में हैं कि n कणों के एक निकाय के लिए इसके भौतिक महत्व की विवेचना कर सकें। समीकरण (7.4d) को हम फिर से इस प्रकार लिख सकते हैं–

$$M\mathbf{R} = \sum m_i \mathbf{r}_i = m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + \ldots + m_n\mathbf{r}_n \quad (7.7)$$

समीकरण के दोनों पक्षों को समय के सापेक्ष अवकलित करने पर–

$$M\frac{\mathrm{d}\mathbf{R}}{\mathrm{d}t} = m_1\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_1}{\mathrm{d}t} + m_2\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_2}{\mathrm{d}t} + \ldots + m_n\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_n}{\mathrm{d}t}$$

या

$$M\mathbf{V} = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 + \ldots + m_n\mathbf{v}_n \quad (7.8)$$

जहाँ, $\mathbf{v}_1 (= \mathrm{d}\mathbf{r}_1/\mathrm{d}t)$ प्रथम कण का वेग है, $\mathbf{v}_2 (= \mathrm{d}\mathbf{r}_2/\mathrm{d}t)$ दूसरे कण का वेग है, इत्यादि और $\mathbf{V} = \mathrm{d}\mathbf{R}/\mathrm{d}t$ कणों के निकाय के द्रव्यमान केन्द्र का वेग है। ध्यान दें, कि हमने यह मान लिया है कि m_1, m_2, ... आदि के मान समय के साथ बदलते नहीं हैं। इसलिए, समय के सापेक्ष समीकरणों को अवकलित करते समय हमने उनके साथ अचरांकों जैसा व्यवहार किया है।

समीकरण (7.8) को समय के सापेक्ष अवकलित करने पर–

$$M\frac{\mathrm{d}\mathbf{V}}{\mathrm{d}t} = m_1\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_1}{\mathrm{d}t} + m_2\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_2}{\mathrm{d}t} + \ldots + m_n\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_n}{\mathrm{d}t}$$

या

$$M\mathbf{A} = m_1\mathbf{a}_1 + m_2\mathbf{a}_2 + \ldots + m_n\mathbf{a}_n \quad (7.9)$$

जहाँ $\mathbf{a}_1 (= \mathrm{d}\mathbf{v}_1/\mathrm{d}t)$ प्रथम कण का त्वरण है, $\mathbf{a}_2 (= \mathrm{d}\mathbf{v}_2/\mathrm{d}t)$ दूसरे कण का त्वरण है, इत्यादि और $\mathbf{A} (= \mathrm{d}\mathbf{V}/\mathrm{d}t)$ कणों के निकाय के द्रव्यमान केन्द्र का त्वरण है।

अब, न्यूटन के द्वितीय नियमानुसार, पहले कण पर लगने वाला बल है $\mathbf{F}_1 = m_1\mathbf{a}_1$, दूसरे कण पर लगने वाला बल है $\mathbf{F}_2 = m_2\mathbf{a}_2$, आदि। तब समीकरण (7.9) को हम इस प्रकार भी लिख सकते हैं–

$$M\mathbf{A} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \ldots + \mathbf{F}_n \quad (7.10)$$

अतः कणों के निकाय के कुल द्रव्यमान को द्रव्यमान केन्द्र के त्वरण से गुणा करने पर हमें उस कण-निकाय पर लगने वाले सभी बलों का सदिश योग प्राप्त होता है।

ध्यान दें कि जब हम पहले कण पर लगने वाले बल $\mathbf{F}_1$ की बात करते हैं, तो यह कोई एकल बल नहीं है, बल्कि, इस कण पर लगने वाले सभी बलों का सदिश योग है। यही बात हम अन्य कणों के विषय में भी कह सकते हैं। प्रत्येक कण पर लगने वाले उन बलों में कुछ *बाह्य बल* होंगे जो निकाय से बाहर के पिण्डों द्वारा आरोपित होंगे और कुछ *आंतरिक बल* होंगे जो निकाय के अंदर के कण एक दूसरे पर आरोपित करते हैं। न्यूटन के तृतीय नियम से हम जानते हैं कि ये आंतरिक बल सदैव बराबर परिमाण के और विपरीत दिशा में काम करने वाले जोड़ों के रूप में पाए जाते हैं और इसलिए समीकरण (7.10) में बलों को जोड़ने में इनका योग शून्य हो जाता है। समीकरण में केवल बाह्य बलों का योगदान रह जाता है। समीकरण (7.10) को फिर इस प्रकार लिख सकते हैं

$$M\mathbf{A} = \mathbf{F}_{ext} \quad (7.11)$$

जहाँ $\mathbf{F}_{ext}$ निकाय के कणों पर प्रभावी सभी बाह्य बलों का सदिश योग है।

समीकरण (7.11) *बताती है कि कणों के किसी निकाय का द्रव्यमान केन्द्र इस प्रकार गति करता है मानो निकाय का संपूर्ण द्रव्यमान उसमें संकेन्द्रित हो और सभी बाह्य बल उसी पर आरोपित हों।*

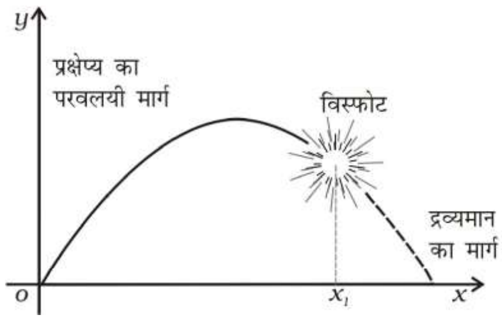
ध्यान दें कि द्रव्यमान केन्द्र की गति के विषय में जानने के लिए, कणों के निकाय के आंतरिक बलों के विषय में कोई जानकारी नहीं चाहिए, इस उद्देश्य के लिए हमें केवल बाह्य बलों को ही जानने की आवश्यकता है।

समीकरण (7.11) व्युत्पन्न करने के लिए हमें कणों के निकाय की प्रकृति सुनिश्चित नहीं करनी पड़ी। निकाय कणों का ऐसा संग्रह भी हो सकता है जिसमें तरह-तरह की आंतरिक गतियाँ हों, और शुद्ध स्थानांतरण गति करता हुआ, अथवा, स्थानांतरण एवं घूर्णी गति के संयोजन युक्त एक दृढ़ पिण्ड भी हो सकता है। निकाय कैसा भी हो और इसके अवयवी कणों में किसी भी प्रकार की गतियाँ हों, इसका द्रव्यमान केन्द्र समीकरण (7.11) के अनुसार ही गति करेगा।

परिमित आकार के पिण्डों को एकल कणों की तरह व्यवहार में लाने के बजाय अब हम उनको कणों के निकाय की तरह व्यवहार में ला सकते हैं। हम उनकी गति का शुद्ध स्थानांतरीय अवयव यानि निकाय के द्रव्यमान केन्द्र की गति ज्ञात कर सकते हैं। इसके लिए, बस, पूरे निकाय का कुल द्रव्यमान और निकाय पर लगे सभी बाह्य बलों को निकाय के द्रव्यमान केन्द्र पर प्रभावी मानना होगा।

यही कार्यविधि हमने पिण्डों पर लगे बलों के विश्लेषण और उनसे जुड़ी समस्या के हल के लिए अपनाई थी। हालांकि, इसके लिए कोई स्पष्ट कारण नहीं बताया गया था। अब हम यह समझ सकते हैं, कि पूर्व के अध्ययनों में, हमने बिन कहे ही

यह मान लिया था कि निकाय में घूर्णी गति, एवं कणों में आंतरिक गति या तो थी ही नहीं और यदि थी तो नगण्य थी। आगे से हमें यह मानने की आवश्यकता नहीं रहेगी। न केवल हमें अपनी पहले अपनाई गई पद्धति का औचित्य समझ में आ गया है, वरन्, हमने वह विधि भी ज्ञात कर ली है जिसके द्वारा (i) ऐसे दृढ़ पिण्ड की जिसमें घूर्णी गति भी हो, (ii) एक ऐसे निकाय की जिसके कणों में तरह-तरह की आंतरिक गतियाँ हों, स्थानांतरण गति को अलग करके समझा समझाया जा सकता है।



चित्र 7.12 *किसी प्रक्षेप्य के खण्डों का द्रव्यमान केन्द्र विस्फोट के बाद भी उसी परवलयाकार पथ पर चलता हुआ पाया जायेगा जिस पर यह विस्फोट न होने पर चलता।*

चित्र 7.12 समीकरण (7.11) को स्पष्ट करने वाला एक अच्छा उदाहरण है। अपने निर्धारित परवलयाकार पथ पर चलता हुआ एक प्रक्षेप्य हवा में फट कर टुकड़ों में बिखर जाता है। विस्फोट कारक बल आंतरिक बल है इसलिए उनका द्रव्यमान केन्द्र की गति पर कोई प्रभाव नहीं होता। प्रक्षेप्य और उसके खण्डों पर लगने वाला कुल बाह्य बल विस्फोट के बाद भी वही है जो विस्फोट से पहले था, यानि पृथ्वी का गुरुत्वाकर्षण बल। अत:, बाह्य बल के अंतर्गत प्रक्षेप्य के द्रव्यमान केन्द्र का परवलयाकार पथ विस्फोट के बाद भी वही बना रहता जो विस्फोट न होने की स्थिति में होता।

7.4 कणों के निकाय का रेखीय संवेग

आपको याद होगा कि रेखीय संवेग की परिभाषा करने वाला व्यंजक है

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \tag{7.12}$$

और, एकल कण के लिए न्यूटन के द्वितीय नियम को हम सांकेतिक भाषा में लिख सकते हैं

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \tag{7.13}$$

जहाँ $\mathbf{F}$ कण पर आरोपित बल है। आइये, अब हम n कणों के एक निकाय पर विचार करें जिनके द्रव्यमान क्रमश: m_1, m_2,...m_n है और वेग क्रमश: $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ...\mathbf{v}_n$ हैं। कण, परस्पर अन्योन्य क्रियारत हो सकते हैं और उन पर बाह्य बल भी लगे हो सकते हैं। पहले कण का रेखीय संवेग $m_1\mathbf{v}_1$, दूसरे कण का रेखीय संवेग $m_2\mathbf{v}_2$ और इसी प्रकार अन्य कणों के रेखीय संवेग भी हैं।

n कणों के इस निकाय का कुल रेखीय संवेग, एकल कणों के रेखीय संवेगों के सदिश योग के बराबर है।

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + ... + \mathbf{P}_n$$

$$= m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 + ... + m_n\mathbf{v}_n \tag{7.14}$$

इस समीकरण की समीकरण (7.8) से तुलना करने पर,

$$\mathbf{P} = M\mathbf{V} \tag{7.15}$$

अत: *कणों के एक निकाय का कुल रेखीय संवेग, निकाय के कुल द्रव्यमान तथा इसके द्रव्यमान केन्द्र के वेग के गुणनफल के बराबर होता है।* समीकरण (7.15) का समय के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = M\frac{d\mathbf{V}}{dt} = M\mathbf{A} \tag{7.16}$$

समीकरण (7.16) एवं समीकरण (7.11) की तुलना करने पर

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}_{ext} \tag{7.17}$$

यह गति के *न्यूटन के द्वितीय नियम का कथन है जो कणों के निकाय के लिए लागू किया गया है।*

यदि कणों के किसी निकाय पर लगे बाह्य बलों का योग शून्य हो, तो समीकरण (7.17) के आधार पर,

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = 0 \quad \text{या} \quad \mathbf{P} = \text{अचरांक} \tag{7.18a}$$

अत: जब कणों के किसी निकाय पर लगे बाह्य बलों का योग शून्य होता है तो उस निकाय का कुल रेखीय संवेग अचर रहता है। यह कणों के एक निकाय के लिए लागू होने वाला रेखीय संवेग के संरक्षण का नियम है। समीकरण (7.15) के कारण, इसका अर्थ यह भी होता है कि जब निकाय पर लगने वाला कुल बाह्य बल शून्य होता है तो इसके द्रव्यमान केन्द्र का वेग परिवर्तित नहीं होता। (इस अध्याय में कणों के निकाय का अध्ययन करते समय हम हमेशा यह मान कर चलेंगे कि निकाय का कुल द्रव्यमान अचर रहता है।)

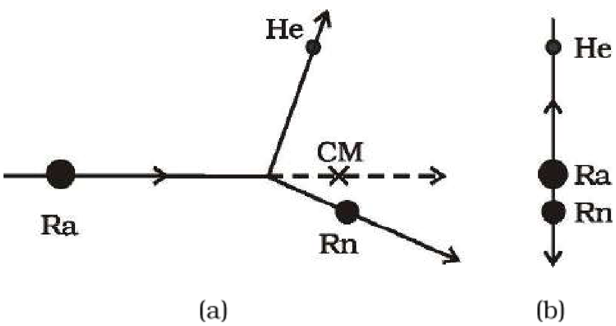
ध्यान दें, कि आंतरिक बलों के कारण, यानि उन बलों के कारण जो कण एक दूसरे पर आरोपित करते हैं, किसी विशिष्ट

कण का गमन-पथ काफी जटिल हो सकता है। फिर भी, यदि निकाय पर लगने वाला कुल बाह्य बल शून्य हो तो द्रव्यमान केन्द्र अचर-वेग से ही चलता है, अर्थात्, मुक्त कण की तरह समगति से सरल रेखीय पथ पर चलता है।

सदिश समीकरण (7.18a) जिन अदिश समीकरणों के तुल्य है, वे हैं–

$$\boldsymbol{P_x} = \boldsymbol{C_1}, \boldsymbol{P_y} = C_2 \text{ तथा } \boldsymbol{P_z} = C_3 \qquad (7.18\text{ b})$$

यहाँ P_x, P_y, P_z कुल रेखीय संवेग सदिश **P** के, क्रमश: x, y एवं z दिशा में अवयव हैं और C_1, C_2, C_3 अचरांक हैं।

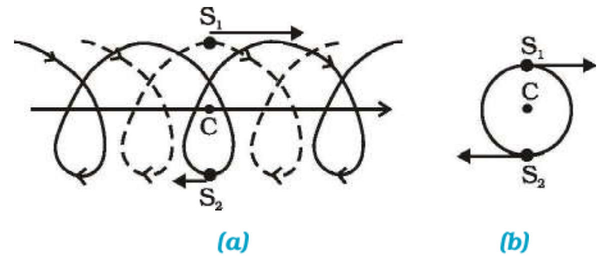


चित्र 7.13 (a) एक भारी नाभिक रेडियम (Ra) एक अपेक्षाकृत हलके नाभिक रेडॉन (Rn) एवं एक अल्फा-कण (हीलियम परमाणु का नाभिक, He) में विखंडित होता है। निकाय का द्रव्यमान केन्द्र समगति में है।

(b) द्रव्यमान केन्द्र की स्थिर अवस्था में उसी भारी कण रेडियम (Ra) का विखंडन। दोनों उत्पन्न हुए कण एक दूसरे की विपरीत दिशा में गतिमान होते हैं।

एक उदाहरण के रूप में, आइये, रेडियम के नाभिक जैसे किसी गतिमान अस्थायी नाभिक के रेडियोएक्टिव क्षय पर विचार करें। रेडियम का नाभिक एक रेडन के नाभिक और एक अल्फा कण में विखंडित होता है। क्षय-कारक बल निकाय के आंतरिक बल हैं और उस पर प्रभावी बाह्य बल नगण्य हैं। अत: निकाय का कुल रेखीय संवेग, क्षय से पहले और क्षय के बाद समान रहता है। विखंडन में उत्पन्न हुए दोनों कण, रेडन का नाभिक एवं अल्फा-कण, विभिन्न दिशाओं में इस प्रकार चलते हैं कि उनके द्रव्यमान केन्द्र का गमन-पथ वही बना रहता है जिस पर क्षयित होने से पहले मूल रेडियम नाभिक गतिमान था (चित्र 7.13(a))।

यदि हम एक ऐसे संदर्भ फ्रेम से इस क्षय प्रक्रिया को देखें जिसमें द्रव्यमान केन्द्र स्थिर हो, तो इसमें शामिल कणों की गति विशेषकर सरल दिखाई पड़ती है; उत्पन्न हुए दोनों कण एक दूसरे की विपरीत दिशा में इस प्रकार गतिमान होते हैं कि उनका द्रव्यमान केन्द्र स्थिर रहे, जैसा चित्र 7.13 (b) में दर्शाया गया है।



चित्र 7.14 (a) बायनरी निकाय बनाते दो नक्षत्रों S_1 एवं S_2 के गमन पथ, जो क्रमश: बिन्दु रेखा एवं सतत रेखा द्वारा दर्शाये गए हैं। इनका द्रव्यमान केन्द्र C समगति में है।

(b) उसी बायनरी निकाय की गति जब द्रव्यमान केन्द्र C स्थिर है।

कणों की निकाय संबंधी बहुत सी समस्याओं में जैसा ऊपर बताई गई रेडियोएक्टिव क्षय संबंधी समस्या में दर्शाया है, प्रयोगशाला के संदर्भ-फ्रेम की अपेक्षा, द्रव्यमान-केन्द्र के फ्रेम में कार्य करना आसान होता है।

खगोलिकी में युग्मित (बायनरी) नक्षत्रों का पाया जाना एक आम बात है। यदि कोई बाह्य बल न लगा हो तो किसी युग्मित नक्षत्र का द्रव्यमान केन्द्र एक मुक्त-कण की तरह चलता है जैसा चित्र 7.14 (a) में दर्शाया गया है। चित्र में समान द्रव्यमान वाले दोनों नक्षत्रों के गमन पथ भी दर्शाये गए हैं; वे काफी जटिल दिखाई पड़ते हैं। यदि हम द्रव्यमान केन्द्र के फ्रेम से देखें तो हम पाते हैं कि ये दोनों नक्षत्र द्रव्यमान केन्द्र के परित: एक वृत्ताकार पथ पर गतिमान हैं जबकि द्रव्यमान केन्द्र स्थिर है। ध्यान दें, कि दोनों नक्षत्रों को वृत्ताकार पथ के व्यास के विपरीत सिरों पर बने रहना है (चित्र 7.14(b))। इस प्रकार इन नक्षत्रों का गमन पथ दो गतियों के संयोजन से निर्मित होता है (i) द्रव्यमान केन्द्र की सरल रेखा में समांग गति (ii) द्रव्यमान केन्द्र के परित: नक्षत्रों की वृत्ताकार कक्षाएँ।

उपरोक्त दो उदाहरणों से दृष्टव्य है, कि निकाय के एकल कणों की गति को द्रव्यमान केन्द्र की गति और द्रव्यमान केन्द्र के परित: गति में अलग करके देखना एक अत्यंत उपयोगी तकनीक है जिससे निकाय की गति को समझने में सहायता मिलती है।

7.5 दो सदिशों का सदिश गुणन

हम सदिशों एवं भौतिकी में उनके उपयोग के विषय में पहले से ही जानते हैं। अध्याय 6 (कार्य, ऊर्जा, शक्ति) में हमने दो

सदिशों के अदिश गुणन की परिभाषा की थी। एक महत्वपूर्ण भौतिक राशि, कार्य, दो सदिश राशियों, बल एवं विस्थापन के अदिश गुणनफल द्वारा परिभाषित की जाती है।

अब हम दो सदिशों का एक अन्य प्रकार का गुणन परिभाषित करेंगे। यह सदिश गुणन है। घूर्णी गति से संबंधित दो महत्वपूर्ण राशियाँ, बल आघूर्ण एवं कोणीय संवेग, सदिश गुणन के रूप में परिभाषित की जाती हैं।

सदिश गुणन की परिभाषा

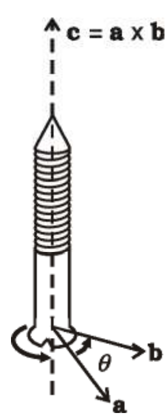
दो सदिशों **a** एवं **b** का सदिश गुणनफल एक ऐसा सदिश **c** है

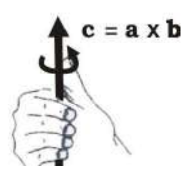
(i) जिसका परिमाण $c = ab\sin\theta$ है, जहाँ a एवं b क्रमशः **a** एवं **b** के परिमाण हैं और θ दो सदिशों के बीच का कोण है।

(ii) **c** उस तल के अभिलम्बवत् है जिसमें **a** एवं **b** अवस्थित हैं।

(iii) यदि हम एक दक्षिणावर्त्त पेंच लें और इसको इस प्रकार रखें कि इसका शीर्ष **a** एवं **b** के तल में हो और लम्बाई इस तल के अभिलम्बवत् हो और फिर शीर्ष को **a** से **b** की ओर घुमायें, तो पेंच की नोंक **c** की दिशा में आगे बढ़ेगा। दक्षिणावर्त पेंच का नियम चित्र 7.15a में दर्शाया गया है।

यदि आप सदिशों **a** एवं **b** के तल के अभिलम्बवत् रेखा के परितः अपने दाहिने हाथ की उंगलियों को इस प्रकार मोड़ें कि उनके सिरे **a** से **b** की ओर इंगित करें, तब इस हाथ का फैला हुआ अंगूठा **c** की दिशा बतायेगा जैसा चित्र 7.15b में दर्शाया गया है।





ERROR: undefined
OFFENDING COMMAND: f‘~

STACK:

अध्याय 8

गुरुत्वाकर्षण

8.1 भूमिका

हम अपने आरंभिक जीवन में ही, सभी पदार्थों के पृथ्वी की ओर आकर्षित होने की प्रकृति को जान लेते हैं। जो भी वस्तु ऊपर फेंकी जाती है वह पृथ्वी की ओर गिरती है, पहाड़ से नीचे उतरने की तुलना में पहाड़ पर ऊपर जाने में कहीं अधिक थकान होती है, ऊपर बादलों से वर्षा की बूँदें पृथ्वी की ओर गिरती हैं, तथा अन्य ऐसी ही बहुत सी परिघटनाएँ हैं। इतिहास के अनुसार इटली के भौतिक विज्ञानी गैलीलियो (1564-1642) ने इस तथ्य को मान्यता प्रदान की कि सभी पिण्ड, चाहे उनके द्रव्यमान कुछ भी हों, एकसमान त्वरण से पृथ्वी की ओर त्वरित होते हैं। ऐसा कहा जाता है कि उन्होंने इस तथ्य का सार्वजनिक निदर्शन किया था। यह कहना, चाहे सत्य भी न हो, परंतु यह निश्चित है कि उन्होंने आनत समतल पर लोटनी पिण्डों के साथ कुछ प्रयोग करके गुरुत्वीय त्वरण का एक मान प्राप्त किया था, जो बाद में किए गए प्रयोगों द्वारा प्राप्त अधिक यथार्थ मानों के काफी निकट था।

आद्य काल से ही बहुत से देशों में तारों, ग्रहों तथा उनकी गतियों के प्रेक्षण जैसी असंबद्ध प्रतीत होने वाली परिघटनाएँ ध्यानाकर्षण का विषय रही हैं। आद्य काल के प्रेक्षणों द्वारा आकाश में दिखाई देने वाले तारों की पहचान की गई, जिनकी स्थिति में सालोंसाल कोई परिवर्तन नहीं होता है। प्राचीन काल से देखे जाने वाले पिण्डों में कुछ अधिक रोचक पिण्ड भी देखे गए, जिन्हें ग्रह कहते हैं, और जो तारों की पृष्ठभूमि में नियमित गति करते प्रतीत होते हैं। ग्रहीय गतियों के सबसे प्राचीन प्रमाणित मॉडल को अब से लगभग 2000 वर्ष पूर्व टॉलमी ने प्रस्तावित किया था। यह 'भूकेन्द्री' मॉडल था, जिसके अनुसार सभी आकाशीय पिण्ड तारे, सूर्य तथा ग्रह पृथ्वी की परिक्रमा करते हैं। इस मॉडल की धारणा के अनुसार आकाशीय पिण्डों की संभावित गति केवल वृत्तीय गति ही हो सकती थी। ग्रहों की प्रेक्षित गतियों का वर्णन करने के लिए टॉलमी ने गतियों के जिस विन्यास को प्रतिपादित किया वह बहुत जटिल था। इसके अनुसार ग्रहों को वृत्तों में परिक्रमा करने वाला तथा इन वृत्तों के केन्द्रों को स्वयं एक बड़े वृत्त में गतिशील बताया गया था। लगभग 400 वर्ष के पश्चात भारतीय खगोलज्ञों ने भी इसी प्रकार के सिद्धांत प्रतिपादित किए। तथापि, आर्यभट्ट (5 वीं शताब्दी में)

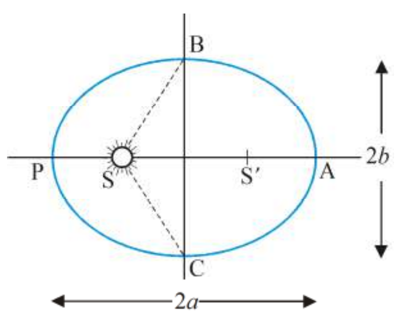
ने पहले से ही अपने शोध प्रबन्ध में एक अधिक परिष्कृत मॉडल का वर्णन किया था, जिसे **सूर्य केन्द्री मॉडल** कहते हैं जिसके अनुसार सूर्य को सभी ग्रहों की गतियों का केन्द्र माना गया है। एक हजार वर्ष के पश्चात पोलैण्ड के एक ईसाई भिक्षु, जिनका नाम निकोलस कोपरनिकस (1473–1543) था, ने एक पूर्ण विकसित मॉडल प्रस्तावित किया जिसके अनुसार सभी ग्रह, केन्द्रीय स्थान पर स्थित स्थिर सूर्य, के परितः वृत्तों में परिक्रमा करते हैं। गिरजाघर ने इस सिद्धांत पर संदेह प्रकट किया। परन्तु इस सिद्धांत के लब्ध प्रतिष्ठित समर्थकों में एक गैलीलियो थे, जिनपर शासन के द्वारा, आस्था के विरुद्ध होने के कारण, मुकदमा चलाया गया।

लगभग गैलीलियो के ही काल में डेनमार्क के एक कुलीन पुरुष टायको ब्रेह (1546–1601) ने अपना समस्त जीवन काल अपनी नंगी आंखों से सीधे ही ग्रहों के प्रेक्षणों का अभिलेखन करने में लगा दिया। उनके द्वारा संकलित आँकड़ों का बाद में उसके सहायक जोहान्नेस केप्लर (1571–1640) द्वारा विश्लेषण किया गया। उन्होंने इन आँकड़ों को सार के रूप में तीन परिष्कृत नियमों द्वारा प्रतिपादित किया, जिन्हें अब **केप्लर के नियमों** के नाम से जाना जाता है। ये नियम न्यूटन को ज्ञात थे। इन उत्कृष्ट नियमों ने न्यूटन को अपना गुरुत्वाकर्षण का सार्वत्रिक नियम प्रस्तावित करके असाधारण वैज्ञानिकों की पंक्ति में शामिल होने योग्य बनाया।

8.2 केप्लर के नियम

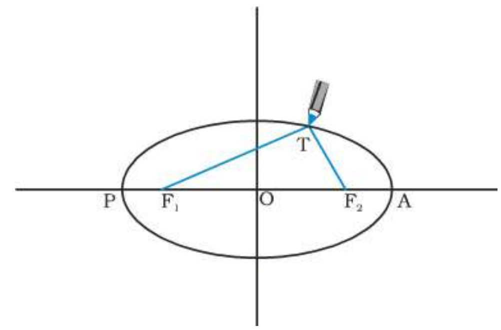
केप्लर के तीन नियमों का उल्लेख इस प्रकार किया जा सकता है:

1. कक्षाओं का नियम : *सभी ग्रह दीर्घवृत्तीय कक्षाओं में गति करते हैं तथा सूर्य इसकी, एक नाभि पर स्थित होता है* (चित्र 8.1a)।



चित्र 8.1(a) *सूर्य के परितः किसी ग्रह द्वारा अनुरेखित दीर्घवृत्त। सूर्य का निकटतम बिन्दु P तथा दूरस्थ बिन्दु A है। P को उपसौर तथा A को अपसौर कहते हैं। अर्ध दीर्घ अक्ष दूरी AP का आधा है।*

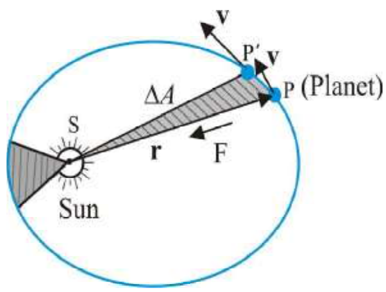
यह नियम कोपरनिकस के मॉडल से हटकर था जिसके अनुसार ग्रह केवल वृत्तीय कक्षाओं में ही गति कर सकते हैं। दीर्घवृत्त, जिसका वृत्त एक विशिष्ट प्रकरण होता है, एक बन्द वक्र होता है, जिसे बहुत सरलता से इस प्रकार खींचा जा सकता है :



चित्र 8.1(b) *एक दीर्घवृत खींचना। एक डोरी के दो सिरे F_1 तथा F_2 स्थिर हैं। पेंसिल की नोंक डोरी को तनी रखते हुए इन सिरों के परितः चलायी जाती है।*

दो बिन्दुओं F_1 तथा F_2 का चयन कीजिए। एक डोरी लेकर इसके सिरों को F_1 तथा F_2 पर पिनों द्वारा जड़िए। पेंसिल की नोंक से डोरी को तानिए और फिर डोरी को तनी हुई रखते हुए पेंसिल को चलाते हुए बन्द वक्र खींचिए (चित्र 8.1 (b)) इस प्रकार प्राप्त बन्द वक्र को दीर्घवृत्त कहते हैं। स्पष्ट है कि दीर्घवृत्त के किसी भी बिन्दु T पर F_1 तथा F_2 से दूरियों का योग अपरिवर्तित (नियत) है। बिन्दु F_1 तथा F_2 दीर्घवृत्त की नाभि कहलाती है। बिन्दु F_1 तथा F_2 को मिलाइए और इस रेखा को आगे बढ़ाइए जिससे यह दीर्घवृत्त को चित्र 8.1 (b) में दर्शाए अनुसार बिन्दुओं P तथा A पर प्रतिच्छेद करती है। रेखा PA का मध्यबिन्दु दीर्घवृत्त का केन्द्र है तथा लम्बाई PO = AO दीर्घवृत्त का अर्ध दीर्घ अक्ष कहलाती है। किसी वृत्त के लिए दोनों नाभियाँ एक दूसरे में विलीन होकर एक हो जाती हैं तथा अर्ध दीर्घ अक्ष वृत्त की त्रिज्या बन जाती है।

2. क्षेत्रफलों का नियम : *सूर्य से किसी ग्रह को मिलाने वाली रेखा समान समय अंतरालों में समान क्षेत्रफल प्रसर्प करती है* (चित्र 8.2)। यह नियम इस प्रेक्षण से प्रकट होता है कि ग्रह उस समय धीमी गति करते प्रतीत होते हैं जब वे सूर्य से अधिक दूरी पर होते हैं। सूर्य के निकट होने पर ग्रहों की गति अपेक्षाकृत तीव्र होती है।



चित्र 8.2 *ग्रह P सूर्य के परित: दीर्घवृत्तीय कक्षा में गति करता है। किसी छोटे समय अंतराल Δt में ग्रह द्वारा प्रसर्पित क्षेत्रफल ΔA को छायांकित क्षेत्र द्वारा दर्शाया गया है।*

3. आवर्त कालों का नियम

किसी ग्रह के परिक्रमण काल का वर्ग उस ग्रह द्वारा अनुरेखित दीर्घवृत्त के अर्ध-दीर्घ अक्ष के घन के अनुक्रमानुपाती होता है।

नीचे दी गयी सारणी (8.1) में सूर्य के परित: आठ* ग्रहों के सन्निकट परिक्रमण-काल उनके अर्ध-दीर्घ अक्षों के मानों सहित दर्शाए गए हैं

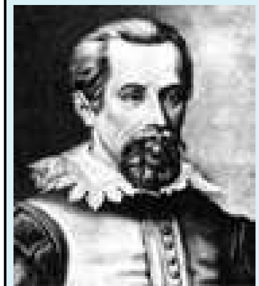
सारणी 8.1

नीचे दिए गए ग्रहीय गतियों की माप के आँकड़े केप्लर के आवर्तकालों के नियम की पुष्टि करते हैं।

a ≡ अर्ध-दीर्घ अक्ष 10^{10} m के मात्रकों में
T ≡ ग्रह का परिक्रमण-काल वर्षों (y) में
Q ≡ भागफल (T^2 / a^3)
10^{-34} y^2 m^{-3} मात्रकों में

ग्रह	a	T	Q
बुध	5.79	0.24	2.95
शुक्र	10.8	0.615	3.00
पृथ्वी	15.0	1	2.96
मंगल	22.8	1.88	2.98
बृहस्पति	77.8	11.9	3.01
शनि	143	29.5	2.98
यूरेनस	287	84	2.98
नेप्ट्यून	450	165	2.99
प्लूटो*	590	248	2.99

क्षेत्रफलों के नियम को कोणीय संवेग संरक्षण का निष्कर्ष माना जा सकता है जो सभी केन्द्रीय बलों के लिए मान्य है। किसी ग्रह पर लगने वाला केन्द्रीय बल, केन्द्रीय सूर्य तथा ग्रह को मिलाने वाले सदिश के अनुदिश कार्य करता है। मान



जोहान्नेस केप्लर (1571-1630) जर्मन मूल के वैज्ञानिक थे। उन्होंने टायको ब्रेह और उनके सहयोगियों द्वारा बहुत परिश्रमपूर्वक लिए गए प्रेक्षणों के आधार पर ग्रहों की गति के तीन नियमों का प्रतिपादन किया। केप्लर स्वयं ब्रेह के सहायक थे और उनको ग्रहों के तीन नियमों तक पहुँचने में 16 वर्षों का लंबा समय लगा। वह पहले व्यक्ति थे जिन्होंने यह बताया कि दूरदर्शी में प्रवेश करने पर प्रकाश का क्या होता है, इसलिए, वह ज्यामितीय प्रकाशिकी के संस्थापक के रूप में भी जाने जाते हैं।

लीजिए सूर्य मूल बिन्दु पर है और यह भी मानिए कि ग्रह की स्थिति तथा संवेग को क्रमशः $\mathbf{r}$ तथा $\mathbf{p}$ से दर्शाया जाता है, तब m द्रव्यमान के ग्रह द्वारा Δt समय में प्रसर्पित क्षेत्रफल $\Delta \mathbf{A}$ (चित्र 8.2) इस प्रकार व्यक्त किया जाता है

$$\Delta \mathbf{A} = ½ (\mathbf{r} \times \mathbf{v}\Delta t) \tag{8.1}$$

अत:

$$\Delta \mathbf{A} / \Delta t = ½ (\mathbf{r} \times \mathbf{p})/m, \text{ (चूँकि } \mathbf{v} = \mathbf{p}/m)$$
$$= \mathbf{L} / (2\,m) \tag{8.2}$$

यहाँ $\boldsymbol{v}$ वेग है तथा $\mathbf{L}$ कोणीय संवेग है जो $(\mathbf{r} \times \mathbf{p})$ के तुल्य है। किसी केन्द्रीय बल के लिए, जो $\mathbf{r}$ के अनुदिश निर्देशित है, $\mathbf{L}$ एक नियतांक होता है, जबकि ग्रह परिक्रमा कर रहा होता है। अत: अंतिम समीकरण के अनुसार $\Delta \mathbf{A} / \Delta t$ एक नियतांक है। यही क्षेत्रफलों का नियम है। गुरुत्वाकर्षण का बल भी केन्द्रीय बल ही है और इसलिए क्षेत्रफलों का नियम न्यूटन के नियमों के इसी लक्षण का पालन/अनुगमन करता है।

उदाहरण 8.1 मान लीजिए किसी ग्रह की उपसौर P पर (चित्र 8.1a) चाल υ_P है, तथा सूर्य व ग्रह की दूरी SP = r_P है। $\{r_P, \upsilon_P\}$ तथा अपसौर पर इन राशियों के तदनुरूपी मान $\{r_A, \upsilon_A\}$ में संबंध स्थापित कीजिए। क्या ग्रह BAC तथा CPB पथ तय करने में समान समय लेगा?

हल कोणीय संवेग का परिमाण P पर है $L_p = m_p r_p \upsilon_p$, क्योंकि निरीक्षण द्वारा यह ज्ञात होता है कि $\mathbf{r}_p$ तथा $\mathbf{v}_p$ परस्पर लम्बवत

*पृष्ठ 186 पर बॉक्स में दी गई जानकारी पर ध्यान दें।

केन्द्रीय बल

हमें ज्ञात है, कि मूल बिन्दु के परित: किसी एकल कण के कोणीय संवेग में, समय के साथ होने वाले परिवर्तन की दर

$$\frac{d\mathbf{l}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

यदि उस पर लगे बल का आघूर्ण $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ शून्य हो, तो कण का कोणीय संवेग संरक्षित रहता है, यह तभी होता है जब या तो $\mathbf{F}$ शून्य हो या बल $\mathbf{r}$ के अनुदिश हो। हम उन बलों की चर्चा करेंगे जो दूसरी शर्त पूरी करते हैं। केन्द्रीय बल उन बलों के उदाहरण हैं जो यह शर्त पूरी करते हैं।

केन्द्रीय बल, सदैव या तो एक नियत बिन्दु की ओर या इससे दूर दिशा में लगे होते हैं, यानि, नियत बिन्दु से बलारोपण बिन्दु के संगत स्थिति सदिश के अनुदिश होते हैं। (देखिए चित्र)। केन्द्रीय बल का परिमाण F , केवल नियत बिन्दु से बलारोपण बिन्दु की दूरी, r, के ऊपर निर्भर करता है $F=F(r)$।

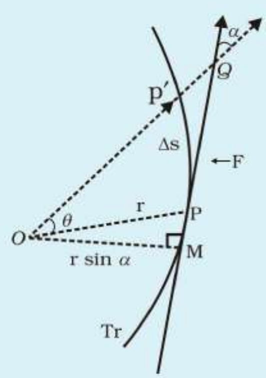
केन्द्रीय बल के तहत गति में कोणीय संवेग सदैव संरक्षित रहता है। इससे दो महत्त्वपूर्ण परिणाम सीधे प्राप्त होते हैं :

(1) केन्द्रीय बल के तहत किसी कण की गति सदैव एक समतल में सीमित रहती है।

(2) बल के केन्द्र (यानि नियत बिन्दु) से, लिए गए कण के स्थिति सदिश का क्षेत्रफलीय वेग अचर रहता है। दूसरे शब्दों में कहें तो केन्द्रीय बल के तहत गतिमान कण का स्थिति सदिश बराबर समय में बराबर क्षेत्रफल बुहारता है।

इन दोनों कथनों की उप्पत्ति की चेष्टा करें। आपके लिए शायद यह जानना जरूरी होगा कि क्षेत्रफल वेग, $dA/dt = ½\, r\, v \sin \alpha$.

उपरोक्त विवेचन का उपयोग हम सूर्य के आकर्षण बल से इसके इर्द-गिर्द घूमते किसी ग्रह की गति के संदर्भ में कर सकते हैं। सुविधा के लिए हम सूर्य को इतना भारी मान सकते हैं कि इसकी स्थिति नियत रहे। ग्रह पर सूर्य का आकर्षण बल सदैव सूर्य की दिशा में लगता है। यह बल शर्त $F = F(r)$, भी पूरी करता है, क्योंकि, $F = G\, m_1 m_2/r^2$ जहाँ m_1 एवं m_2 क्रमश: ग्रह और सूर्य के द्रव्यमान हैं, और G गुरुत्वाकर्षण का वैश्विक अचरांक। अत: ऊपर दिए गए दोनों कथन, (1) एवं (2) ग्रहों की गति के लिए लागू होते हैं। वास्तव में कथन (2) केप्लर का सुप्रसिद्ध द्वितीय नियम है।



*Tr केन्द्रीय बल के तहत, कण का गमन-पथ है। कण की किसी स्थिति P, पर बल **OP** के अनुदिश होता है। O बल का केन्द्र है जिसे मूलबिन्दु ले लिया गया है। Δt समय में कण P से P′ तक चाप $\Delta s = v\,\Delta t$ के ऊपर चलता है। गमन पथ के बिन्दु P पर खींची गई स्पर्श रेखा PQ इस बिन्दु पर वेग की दिशा दर्शाती है। Δt समय में, r, वृत्तखण्ड POP′ के क्षेत्र से गुजरता है जो $\approx (r \sin\alpha)\; PP'/2 = (r\, v \sin \alpha)\, \Delta t/2)$ है।*

हैं। इसी प्रकार, $L_A = m_p r_A \upsilon_A$. तब कोणीय संवेग संरक्षण से

$$m_p r_p \upsilon_p = m_p r_A \upsilon_A$$

अथवा $\dfrac{\upsilon_p}{\upsilon_A} = \dfrac{r_A}{r_p}$

चूँकि $r_A > r_p, \upsilon_p > \upsilon_A$.

दीर्घवृत्त तथा त्रिज्या सदिशों *SB* एवं *SC* द्वारा घेरा गया क्षेत्रफल *SBPC* की तुलना में अधिक है (चित्र 8.1a)। केप्लर के दूसरे नियम के अनुसार, समान समय अंतरालों में समान क्षेत्रफल प्रसर्प होते हैं। अत: ग्रह पथ *CPB* को तय करने की अपेक्षा पथ BAC को तय करने में अधिक समय लेगा। ◀

8.3 गुरुत्वाकर्षण का सार्वत्रिक नियम

एक दंत कथा में लिखा है पेड़ से गिरते हुए सेब का प्रेक्षण करते हुए न्यूटन को गुरुत्वाकर्षण के सार्वत्रिक नियम तक पहुँचने की प्रेरणा मिली जिससे केप्लर के नियमों तथा पार्थिव गुरुत्वाकर्षण के स्पष्टीकरण का मार्ग प्रशस्त हुआ। न्यूटन ने अपने विवेक के आधार पर यह स्पष्ट अनुभव किया कि R_m त्रिज्या की कक्षा में परिक्रमा करने वाले चन्द्रमा पर पृथ्वी के गुरुत्व के कारण एक अभिकेन्द्र त्वरण आरोपित होता है जिसका परिमाण

$$a_m = \frac{V^2}{R_m} = \frac{4\pi^2 R_m}{T^2} \qquad (8.3)$$

यहाँ V चन्द्रमा की चाल है जो आवर्तकाल T से इस प्रकार संबंधित है, $V = 2\pi R_m / T$ । आवर्त काल T का मान लगभग 27.3 दिन है तथा उस समय तक R_m का मान लगभग 3.84×10^8m ज्ञात हो चुका था। यदि हम इन संख्याओं को समीकरण (8.3) में प्रतिस्थापित करें, तो हमें a_m का जो मान प्राप्त होता है, वह पृथ्वी के गुरुत्व बल के कारण उत्पन्न पृथ्वी के पृष्ठ पर गुरुत्वीय त्वरण g के मान से काफी कम होता है। यह स्पष्ट रूप से इस तथ्य को दर्शाता है कि पृथ्वी के गुरुत्व बल का मान दूरी के साथ घट जाता है। यदि हम यह मान लें कि पृथ्वी के कारण गुरुत्वाकर्षण का मान पृथ्वी के केन्द्र से दूरी के वर्ग के व्युत्क्रमानुपाती होता है, तो हमें $a_m \propto R_m^{-2}$ और $g \propto R_E^{-2}$ प्राप्त होगा (यहाँ R_E पृथ्वी की त्रिज्या है), जिससे हमें निम्नलिखित संबंध प्राप्त होता है :

$$\frac{g}{a_m} = \frac{R_m^2}{R_E^2} \simeq 3600 \qquad (8.4)$$

जो $g \simeq 9.8 \text{ m s}^{-2}$ तथा समीकरण (8.3) से a_m के मान के साथ मेल खाता है। इस प्रेक्षण ने न्यूटन को नीचे दिए गए गुरुत्वाकर्षण के सार्वत्रिक नियम को प्रतिपादित करने में मार्गदर्शन दिया :

"इस विश्व में प्रत्येक पिण्ड हर दूसरे पिण्ड को एक बल द्वारा आकर्षित करता है जिसका परिमाण दोनों पिण्डों के द्रव्यमानों के गुणनफल के अनुक्रमानुपाती तथा उनके बीच की दूरी के वर्ग के व्युत्क्रमानुपाती होता है।"

यह उद्धरण तत्वत: न्यूटन के प्रसिद्ध शोध प्रबन्ध "प्राकृतिक दर्शन के गणितीय सिद्धांत" (Mathematical Principles of Natural Philosophy) जिसे संक्षेप में प्रिंसिपिया (Principia) कहते हैं, से प्राप्त होता है।

गणितीय रूप में न्यूटन के गुरुत्वाकर्षण नियम को इस प्रकार कहा जा सकता है : किसी बिंदु द्रव्यमान m_2 पर किसी अन्य बिंदु द्रव्यमान m_1 के कारण बल $\mathbf{F}$ का परिमाण

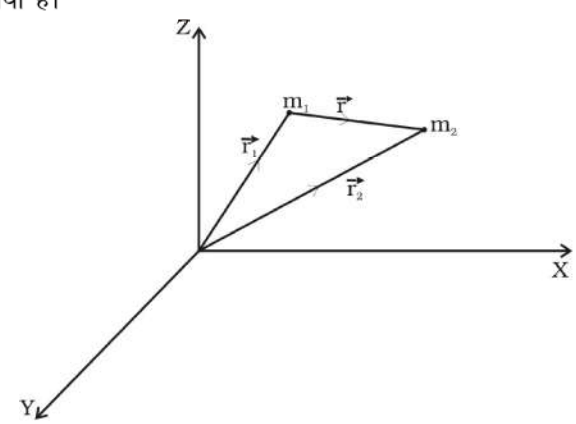
$$|\mathbf{F}| = G \times \frac{m_1 \times m_2}{r^2} \qquad (8.5)$$

सदिश रूप में समीकरण (8.5) को इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है

$$\mathbf{F} = G \times \frac{m_1 \times m_2}{r^2}\left(-\hat{\mathbf{r}}\right) = -G \times \frac{m_1 \times m_2}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

$$= -G \times \frac{m_1 \times m_2}{|\mathbf{r}|^3}\hat{\mathbf{r}}$$

यहाँ G सार्वत्रिक गुरुत्वीय नियतांक, $\hat{\mathbf{r}}$ m_1 से m_2 तक एकांक सदिश तथा $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ है जैसा कि चित्र 8.3 में दर्शाया गया है।



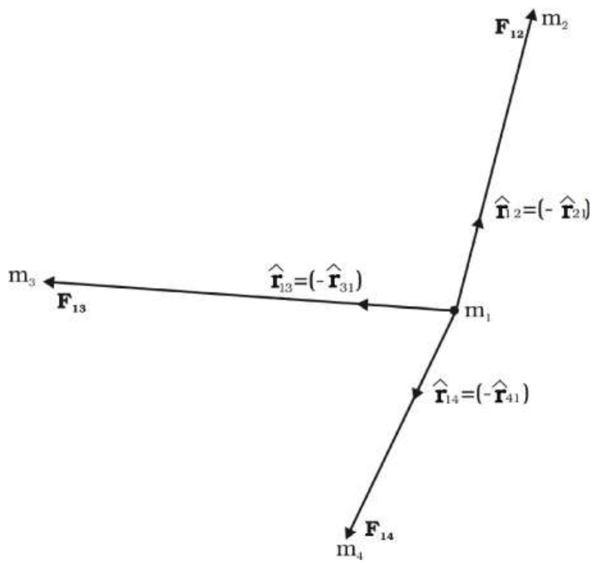
चित्र 8.3 m_2 *के कारण* m_1 *पर गुरुत्वीय बल* $\mathbf{r}$ *के अनुदिश है, यहाँ* $\mathbf{r}$, $(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$ *है।*

गुरुत्वीय बल आकर्षी बल है, अर्थात् m_2 पर m_1 के कारण लगने वाला बल $\mathbf{F}$, $-\mathbf{r}$ के अनुदिश है। न्यूटन के गति के तीसरे नियम के अनुसार, वास्तव में बिन्दु द्रव्यमान m_1 पर m_2 के कारण बल $-\mathbf{F}$ है। इस प्रकार m_1 पर m_2 के कारण

लगने वाले गुरुत्वाकर्षण बल $\mathbf{F}_{12}$ एवं m_2 पर m_1 के कारण लगने वाले बल $\mathbf{F}_{21}$ का परस्पर संबंध है,

$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$

समीकरण (8.5) का अनुप्रयोग, अपने पास उपलब्ध पिण्डों पर कर सकने से पूर्व हमें सावधान रहना होगा, क्योंकि यह नियम बिन्दु द्रव्यमानों से संबंधित है, जबकि हमें विस्तारित पिण्डों, जिनका परिमित आमाप होता है, पर विचार करना है। यदि हमारे पास बिन्दु द्रव्यमानों का कोई संचयन है, तो उनमें से किसी एक पर बल अन्य बिन्दु द्रव्यमानों के कारण गुरुत्वाकर्षण बलों के सदिश योग के बराबर होता है जैसा कि चित्र 8.4 में दर्शाया गया है।



चित्र 8.4 बिन्दु द्रव्यमान m_1 पर बिन्दु द्रव्यमानों m_2, m_3 और m_4 के द्वारा आरोपित कुल गुरुत्वाकर्षण बल इन द्रव्यमानों द्वारा m_1 पर लगाए गए व्यष्टिगत बलों के सदिश योग के बराबर है।

m_1 पर कुल बल है

$$\mathbf{F}_1 = \frac{Gm_2\, m_1}{r_{21}^2}\,\hat{\mathbf{r}}_{21} + \frac{Gm_3\, m_1}{r_{31}^2}\,\hat{\mathbf{r}}_{31} + \frac{Gm_4\, m_1}{r_{41}^2}\,\hat{\mathbf{r}}_{41}$$

उदाहरण 8.2 किसी समबाहु त्रिभुज ABC के प्रत्येक शीर्ष पर m kg के तीन समान द्रव्यमान रखे हैं।
(a) इस त्रिभुज के केन्द्रक G पर रखे $2m$ kg के द्रव्यमान पर कितना बल आरोपित हो रहा है?
(b) यदि शीर्ष A पर रखे द्रव्यमान को दो गुना कर दिया जाए, तो कितना बल आरोपित होगा?
AG = BG = CG = 1m लीजिए (देखिए चित्र 8.5)

न्यूटन की प्रिंसिपिया

सन् 1619 तक केप्लर अपना तृतीय नियम प्रतिपादित कर चुके थे। उनमें अंतर्निहित गुरुत्वाकर्षण के सार्वत्रिक नियम की घोषणा, 1687 में, इसके लगभग 70 वर्ष बाद हुई, जब न्यूटन ने अपनी श्रेष्ठ कृति 'फिलोसिफिया नेचुरलिस प्रिंसिपिया मैथेमेटिका' जिसे आमतौर पर 'प्रिंसिपिया' कहा जाता है, प्रकाशित की।

सन् 1685 के लगभग, एडमण्ड हेली (जिनके नाम के आधार पर प्रसिद्ध हेली धूमकेतु का नाम रखा गया है) कैम्ब्रिज में न्यूटन से मिलने आए और उन्होंने प्रतिलोम वर्ग नियम प्रभाव के तहत गतिमान किसी पिण्ड के गमन पथ की प्रकृति के बारे में पूछा। न्यूटन ने बिना झिझक तुरंत उत्तर दिया कि यह दीर्घवृत्ताकार होना चाहिए और बताया कि इस तथ्य का पता उन्होंने बहुत पहले 1665 में ही उस समय लगा लिया था जब उन्हें प्लेग फैलने के कारण कैम्ब्रिज से वापस अपने फार्म हाउस पर आकर रहना पड़ा था। दुर्भाग्य से न्यूटन ने अपने तत्संबंधी कागजात खो दिए थे। हेली ने न्यूटन को पुस्तक के रूप में उनकी धारणाओं को प्रस्तुत करने के लिए मना लिया और उसके प्रकाशन पर होने वाले कुल खर्च को स्वयं वहन करने की सहमति दी। न्यूटन ने अतिमानवीय प्रयत्नों द्वारा 18 महीने के अल्पकाल में यह महान कार्य पूरा कर दिखाया। प्रिंसिपिया, विशिष्ट वैज्ञानिक कृति है और लैग्रेंजे के शब्दों में कहें तो, "मानवीय मस्तिष्क का सर्वश्रेष्ठ उत्पादन है"। भारतीय मूल के, नोबेल पुरस्कार विजेता खगोल-भौतिकीविद् डा. एस. चंद्रशेखर ने दस वर्ष की मेहनत से 'प्रिंसिपिया' की टीका लिखी। उनकी पुस्तक, "आम आदमी के लिए प्रिंसिपिया" न्यूटन की विधियों के सौंदर्य, स्पष्टता एवं अदभुत संक्षिप्तता को बहुत अच्छी तरह उभार कर प्रस्तुत करती है।

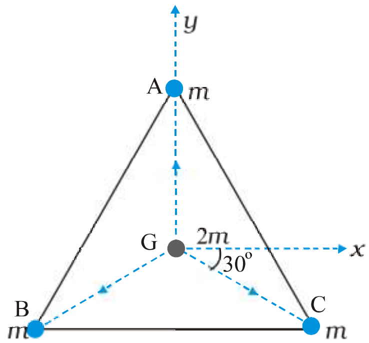
हल (a) धनात्मक x-अक्ष तथा GC के बीच का कोण 30° है और इतना ही कोण ऋणात्मक x-अक्ष तथा GB के बीच बनता है। सदिश संकेत पद्धति में व्यष्टिगत बल इस प्रकार हैं

$$\mathbf{F}_{GA} = \frac{Gm\,(2m)}{1}\,\hat{\mathbf{j}}$$

$$\mathbf{F}_{GB} = \frac{Gm\,(2m)}{1}\left(-\hat{\mathbf{i}}\cos 30^o - \hat{\mathbf{j}}\sin 30^o\right)$$

$$\mathbf{F}_{GC} = \frac{Gm\,(2m)}{1}\left(+\hat{\mathbf{i}}\cos 30^o - \hat{\mathbf{j}}\sin 30^o\right).$$

अध्यारोपण सिद्धांत तथा सदिश योग नियम के अनुसार (2m) पर परिणामी गुरुत्वाकर्षण बल



चित्र 8.5 *तीन समान द्रव्यमान त्रिभुज ABC के तीन शीर्षों पर स्थित हैं। इसके केंद्रक G पर कोई द्रव्यमान 2m रखा गया है।*

$$\mathbf{F}_R = \mathbf{F}_{GA} + \mathbf{F}_{GB} + \mathbf{F}_{GC}$$

$$\mathbf{F}_R = 2Gm^2\,\hat{\mathbf{j}} + 2Gm^2\left(-\hat{\mathbf{i}}\cos 30^\circ - \hat{\mathbf{j}}\sin 30^\circ\right)$$

$$+\,2Gm^2\left(\hat{\mathbf{i}}\cos 30^\circ - \hat{\mathbf{j}}\sin 30^\circ\right) = 0$$

विकल्प के रूप में, सममिति के आधार पर यह अपेक्षा की जा सकती है कि परिणामी बल शून्य होना चाहिए।

(b) यदि शीर्ष A पर द्रव्यमान 2m हो तो,

$$\mathbf{F}^1_{GA} = G.2m.2m\hat{\mathbf{j}} = 4Gm^2\hat{\mathbf{j}}$$

$$\mathbf{F}^1_{GB} = \mathbf{F}_{GB} \text{ and } \mathbf{F}^1_{GC} = \mathrm{F}_{GC}$$

$$\mathbf{F}'_R = \mathbf{F}^1_{GA} + \mathbf{F}^1_{GB} + \mathbf{F}^1_{GC} = 2.Gm^2\hat{\mathbf{j}}$$ ◀

किसी विस्तारित पिण्ड (जैसे पृथ्वी) तथा बिन्दु द्रव्यमान के बीच गुरुत्वाकर्षण बल के लिए समीकरण (8.5) का सीधे ही अनुप्रयोग नहीं किया जा सकता। विस्तारित पिण्ड का प्रत्येक बिन्दु द्रव्यमान दिए गए बिन्दु द्रव्यमान पर बल आरोपित करता है तथा इन सभी बलों की दिशा समान नहीं होती। हमें इन बलों का सदिश रीति द्वारा योग करना होता है ताकि विस्तारित पिण्ड के प्रत्येक बिन्दु द्रव्यमान के कारण आरोपित कुल बल प्राप्त हो जाए। ऐसा हम आसानी से कलन (कैलकुलस) के उपयोग द्वारा कर सकते हैं। जब हम ऐसा करते हैं तो हमे दो विशिष्ट प्रकरणों में सरल परिणाम प्राप्त होते हैं

(1) **किसी एकसमान घनत्व के खोखले गोलीय खोल तथा खोल के बाहर स्थित किसी बिन्दु द्रव्यमान के बीच आकर्षण बल ठीक-ठाक उतना ही होता है जैसा कि खोल के समस्त द्रव्यमान को उसके केन्द्र पर संकेन्द्रित मान कर ज्ञात किया जाता है।**

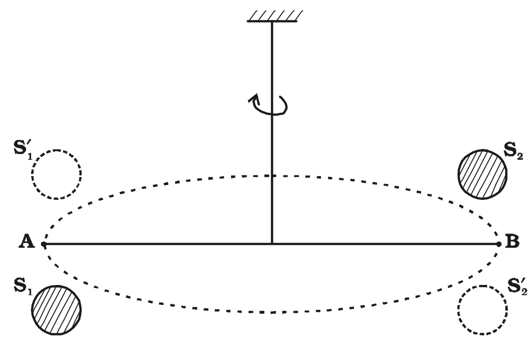
गुणात्मक रूप से इसे इस प्रकार समझा जा सकता है। खोल के विभिन्न क्षेत्रों के कारण गुरुत्वीय बलों के, खोल के केन्द्र को बिन्दु द्रव्यमान से मिलाने वाली रेखा के अनुदिश तथा इसके लंबवत्, दोनों दिशाओं में घटक होते हैं। खोल के सभी क्षेत्रों के बलों के घटकों का योग करते समय इस रेखा के लंबवत् दिशा के घटक निरस्त हो जाते हैं तथा केवल खोल के केन्द्र से बिन्दु द्रव्यमान को मिलाने वाली रेखा के अनुदिश परिणामी बल बचा रहता है। इस परिणामी बल का परिमाण भी ऊपर वर्णन की गई विधि द्वारा ज्ञात किया जा सकता है।

(2) **एकसमान घनत्व के किसी खोखले गोले के कारण उसके भीतर स्थित किसी बिन्दु द्रव्यमान पर आकर्षण बल शून्य होता है।**

गुणात्मक रूप में, हम फिर से इस परिणाम को समझ सकते हैं। गोलीय खोल के विभिन्न क्षेत्र खोल के भीतर स्थित बिन्दु द्रव्यमान को विभिन्न दिशाओं में आकर्षित करते हैं। ये बल परस्पर एक दूसरे को पूर्णतः निरस्त कर देते हैं।

8.4 गुरुत्वीय नियतांक

गुरुत्वाकर्षण के सार्वत्रिक नियम में प्रयुक्त गुरुत्वीय स्थिरांक G के मान को प्रायोगिक आधार पर ज्ञात किया जा सकता है तथा इस प्रकार के प्रयोग को सर्वप्रथम अंग्रेज वैज्ञानिक हेनरी कैवेन्डिश ने 1798 में किया था। उनके द्वारा उपयोग किए गए उपकरण को व्यवस्था चित्र 8.6 में दर्शाया गया है।



चित्र 8.6 *कैवेन्डिश प्रयोग का योजनावत आरेखन। S_1 तथा S_2 दो विशाल गोले हैं (छायांकित दर्शाए गए हैं) जिन्हें A और B पर स्थिति द्रव्यमानों के दोनों ओर रखा जाता है। जब विशाल द्रव्यमानों (बिन्दुकित वृत्तों द्वारा दर्शाए) को दूसरी ओर ले जाते हैं, तो छड़ AB थोड़ा घूर्णन करती है, क्योंकि अब बल आघूर्ण की दिशा व्युत्क्रमित हो जाती है। घूर्णन कोण को प्रयोगों द्वारा ज्ञात किया जा सकता है।*

छड़ AB के दोनों सिरों पर दो छोटे सीसे के गोले जुड़े होते हैं। इस छड़ को एक पतले तार द्वारा किसी दृढ़ टेक से निलंबित किया जाता है। सीसे के दो विशाल गोलों को चित्र में दर्शाए अनुसार छोटे गोलों के निकट परन्तु विपरीत दिशाओं में लाया जाता है। बड़े गोले चित्र में दर्शाए अनुसार अपने निकट के छोटे गोलों को समान तथा विपरीत बलों से आकर्षित करते हैं। छड़ पर कोई नेट बल नहीं लगता, परन्तु केवल एक बल आघूर्ण कार्य करता है जो स्पष्ट रूप से छड़ की लम्बाई का F-गुना

होता है, जबकि यहाँ F विशाल गोले तथा उसके निकट वाले छोटे गोले के बीच परस्पर आकर्षण बल है। इस बल आघूर्ण के कारण, निलंबन तार में तब तक ऐंठन आती है जब तक प्रत्यानयन बल आघूर्ण गुरुत्वीय बल आघूर्ण के बराबर नहीं होता। यदि निलंबन तार का व्यावर्तन कोण θ है, तो प्रत्यानयन बल आघूर्ण θ के अनुक्रमानुपाती तथा $\tau\theta$ के बराबर हुआ, यहाँ τ प्रत्यानयन बल युग्म प्रति एकांक व्यावर्तन कोण है। τ की माप अलग प्रयोग द्वारा की जा सकती है, जैसे कि ज्ञात बल आघूर्ण का अनुप्रयोग करके तथा व्यावर्तन कोण मापकर। गोल गेदों के बीच गुरुत्वाकर्षण बल उतना ही होता है जितना कि गेदों के द्रव्यमानों को उनके केन्द्रों पर संकेंन्द्रित मान कर ज्ञात किया जाता है। इस प्रकार यदि विशाल गोले तथा उसके निकट के छोटे गोले के केन्द्रों के बीच की दूरी d है, M तथा m इन गोलों के द्रव्यमान हैं, तो बड़े गोले तथा उसके निकट के छोटे गोले के बीच गुरुत्वाकर्षण बल

$$F = G\frac{Mm}{d^2} \tag{8.6}$$

यदि छड़ AB की लम्बाई L है, तो F के कारण उत्पन्न बल आघूर्ण F तथा L का गुणनफल होगा। संतुलन के समय यह बल आघूर्ण प्रत्यानयन बल आघूर्ण के बराबर होता है। अत:

$$G\frac{Mm}{d^2}L = \tau\,\theta \tag{8.7}$$

इस प्रकार θ का प्रेक्षण करके इस समीकरण की सहायता से G का मान परिकलित किया जा सकता है।

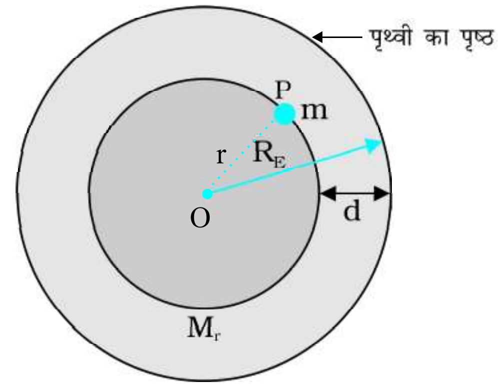
कैवेन्डिश प्रयोग के बाद G के मापन में परिष्करण हुए तथा अब G का प्रचलित मान इस प्रकार है

$$G = 6.67\text{x}10^{-11}\ \text{N m}^2/\text{kg}^2 \tag{8.8}$$

8.5 पृथ्वी का गुरुत्वीय त्वरण

पृथ्वी को गोल होने के कारण बहुत से संकेन्द्री गोलीय खोलों का मिलकर बना माना जा सकता है जिनमें सबसे छोटा खोल केन्द्र पर तथा सबसे बड़ा खोल इसके पृष्ठ पर है। पृथ्वी के बाहर का कोई भी बिन्दु स्पष्ट रूप से इन सभी खोलों के बाहर हुआ। इस प्रकार सभी खोल पृथ्वी के बाहर किसी बिन्दु पर इस प्रकार गुरुत्वाकर्षण बल आरोपित करेंगे जैसे कि इन सभी खोलों के द्रव्यमान पिछले अनुभाग में वर्णित परिणाम के अनुसार उनके उभयनिष्ठ केन्द्र पर संकेन्द्रित हैं। सभी खोलों के संयोजन का कुल द्रव्यमान पृथ्वी का ही द्रव्यमान हुआ। अत:, पृथ्वी के बाहर किसी बिन्दु पर, गुरुत्वाकर्षण बल को यही मानकर ज्ञात किया जाता है कि पृथ्वी का समस्त द्रव्यमान उसके केन्द्र पर संकेन्द्रित है।

पृथ्वी के भीतर स्थित बिन्दुओं के लिए स्थिति भिन्न होती है। इसे चित्र 8.7 में स्पष्ट किया गया है।



चित्र 8.7 M_E पृथ्वी का द्रव्यमान तथा R_E पृथ्वी की त्रिज्या है, पृथ्वी के पृष्ठ के नीचे d गहराई पर स्थित किसी खान में कोई द्रव्यमान m रखा है। हम पृथ्वी को गोलत: सममित मानते हैं।

पहले की ही भांति अब फिर पृथ्वी को संकेन्द्री खोलों से मिलकर बनी मानिए और यह विचार कीजिए कि पृथ्वी के केन्द्र से r दूरी पर कोई द्रव्यमान m रखा गया है। बिन्दु P, r त्रिज्या के गोले के बाहर है। उन सभी खोलों के लिए जिनकी त्रिज्या r से अधिक है, बिन्दु P उनके भीतर है। अत: पिछले भाग में वर्णित परिणाम के अनुसार ये सभी खोल P पर रखे द्रव्यमानों पर कोई गुरुत्वाकर्षण बल आरोपित नहीं करते। त्रिज्या $\leq r$ के खोल मिलकर r त्रिज्या का गोला निर्मित करते हैं तथा बिन्दु P इस गोले के पृष्ठ पर स्थित है। अत: r त्रिज्या का यह छोटा गोला P पर स्थित द्रव्यमान m पर इस प्रकार गुरुत्वाकर्षण बल आरोपित करता है जैसे इसका समस्त द्रव्यमान M_r इसके केन्द्र पर संकेन्द्रित है। इस प्रकार P पर स्थित द्रव्यमान m पर आरोपित बल का परिमाण

$$F = \frac{Gm\,(M_r)}{r^2} \tag{8.9}$$

हम यह मानते हैं कि समस्त पृथ्वी का घनत्व एकसमान है अत: इसका द्रव्यमान $M_E = \frac{4\pi}{3}R^3_E\,\rho$ है। यहाँ R_E पृथ्वी की त्रिज्या तथा ρ इसका घनत्व है। इसके विपरीत r त्रिज्या के गोले का द्रव्यमान $\frac{4\pi}{3}\rho r^3$ होता है। इसलिए

$$F = Gm\left(\frac{4\pi}{3}\rho\right)\frac{r^3}{r^2} = Gm\left(\frac{M_E}{R_E^3}\right)\frac{r^3}{r^2}$$

$$= \frac{G\,m\,M_E}{{R_E}^3}r \tag{8.10}$$

यदि द्रव्यमान m पृथ्वी के पृष्ठ पर स्थित है, तो $r = R_E$ तथा समीकरण (8.10) से इस पर गुरुत्वाकर्षण बल

$$F = G\,\frac{M_E m}{R_E^2} \tag{8.11}$$

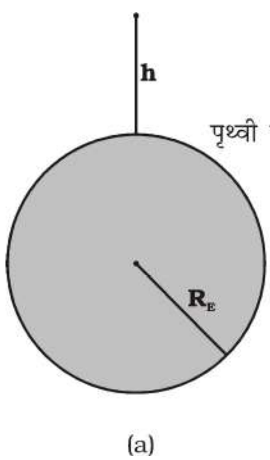
यहाँ M_E तथा R_E क्रमशः पृथ्वी का द्रव्यमान तथा त्रिज्या है। द्रव्यमान m द्वारा अनुभव किया जाने वाला त्वरण जिसे प्रायः प्रतीक g द्वारा निर्दिष्ट किया जाता है, न्यूटन के द्वितीय नियम द्वारा बल F से संबंध $F = mg$ द्वारा संबंधित होता है। इस प्रकार

$$g = \frac{F}{m} = \frac{GM_E}{R_E^2} \tag{8.12}$$

g सहज ही मापन योग्य है। R_E एक ज्ञात राशि है। कैवेन्डिश-प्रयोग द्वारा अथवा दूसरी विधि से प्राप्त G की माप g तथा R_E के ज्ञान को सम्मिलित करने पर M_E का आकलन समीकरण (8.12) की सहायता से किया जा सकता है। यही कारण है कि कैवेन्डिश के बारे में एक प्रचलित कथन यह है कि "कैवेन्डिश ने पृथ्वी को तोला"।

8.6 पृथ्वी के पृष्ठ के नीचे तथा ऊपर गुरुत्वीय त्वरण

चित्र में दर्शाए अनुसार पृथ्वी के पृष्ठ से ऊँचाई h पर स्थित किसी बिन्दु द्रव्यमान m पर विचार कीजिए (चित्र 8.8(a))।



चित्र 8.8(a) पृथ्वी के पृष्ठ से किसी ऊँचाई h पर g

पृथ्वी की त्रिज्या को R_E द्वारा निर्दिष्ट किया जाता है। चूंकि यह बिन्दु पृथ्वी से बाहर है, इसकी पृथ्वी के केन्द्र से दूरी $(R_E + h)$ है। यदि बिन्दु द्रव्यमान m पर बल के परिमाण को $F(h)$ द्वारा निर्दिष्ट किया गया है, तो समीकरण (8.5) से हमें निम्नलिखित संबंध प्राप्त होता है

$$F(h) = \frac{GM_E m}{(R_E + h)^2} \tag{8.13}$$

बिन्दु द्रव्यमान द्वारा अनुभव किया जाने वाला त्वरण $F(h)/m \equiv g(h)$ तथा इस प्रकार हमें प्राप्त होता है

$$g(h) = \frac{F(h)}{m} = \frac{GM_E}{(R_E + h)^2} \tag{8.14}$$

स्पष्ट रूप से यह मान पृथ्वी के पृष्ठ पर g के मान से कम है : $g = \dfrac{GM_E}{R_E^2}$ जबकि $h << R_E$, हम समीकरण (8.14) के दक्षिण पक्ष को इस प्रकार भी लिख सकते हैं :

$$g(h) = \frac{GM}{R_E^2(1 + h/R_E)^2} = g\left(1 + h/R_E\right)^{-2}$$

$\dfrac{h}{R_E} << 1$ के लिए द्विपद व्यंजक का उपयोग करने पर

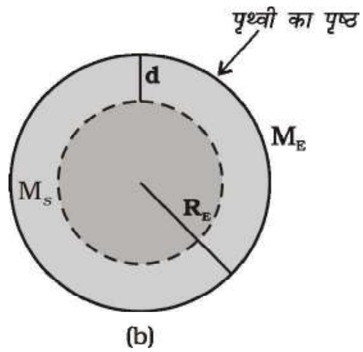
$$g(h) \cong g\left(1 - \frac{2h}{R_E}\right) \tag{8.15}$$

इस प्रकार समीकरण (8.15) से हमें प्राप्त होता है कि कम ऊँचाई h के लिए g का मान गुणक $(1 - 2h/R_E)$ द्वारा घटता है।

अब हम पृथ्वी के पृष्ठ के नीचे गहराई d पर स्थित किसी बिन्दु द्रव्यमान m के विषय में विचार करते हैं। ऐसा होने पर चित्र 8.8(b) में दर्शाए अनुसार इस द्रव्यमान की पृथ्वी के केन्द्र से दूरी $(R_E - d)$ त्रिज्या के छोटे गोले तथा d मोटाई के एक गोलीय खोल से मिलकर बनी मान सकते हैं। तब द्रव्यमान m पर d मोटाई की बाह्य खोल के कारण आरोपित बल पिछले अनुभाग में वर्णित परिणाम के कारण शून्य होगा। जहाँ तक $(R_E - d)$ त्रिज्या के छोटे गोले के कारण आरोपित बल का संबंध है तो पिछले अनुभाग में वर्णित परिणाम के अनुसार, इस छोटे गोले के कारण बल इस प्रकार लगेगा जैसे कि छोटे गोले का समस्त द्रव्यमान उसके केन्द्र पर संकेन्द्रित है। यदि छोटे गोले का द्रव्यमान M_s है, तो

$$M_s \,/\, M_E = (R_E - d)^3 \,/\, R_E^3 \tag{8.16}$$

क्योंकि, किसी गोले का द्रव्यमान उसकी त्रिज्या के घन के अनुक्रमानुपाती होता है।



चित्र 8.8 (b) *किसी गहराई d पर g इस प्रकरण में केवल $(R_E - d)$ त्रिज्या का छोटा गोला ही g के लिए योगदान देता है।*

अतः बिन्दु द्रव्यमान पर आरोपित बल

$$F(d) = G\,M_s\,m\,/\,(R_E - d)^2 \qquad (8.17)$$

ऊपर से M_s का मान प्रतिस्थापित करने पर, हमें प्राप्त होता है

$$F(d) = G\,M_E\,m\,(R_E - d)\,/\,R_E^3 \qquad (8.18)$$

और इस प्रकार गहराई d पर गुरुत्वीय त्वरण,

$$g(d) = \frac{F(d)}{m}$$

अर्थात् $g(d) = \dfrac{F(d)}{m} = \dfrac{GM_E}{R_E^3}\,(R_E - d)$

$$= g\frac{R_E - d}{R_E} = g(1 - d/R_E) \qquad (8.19)$$

इस प्रकार जैसे-जैसे हम पृथ्वी से नीचे अधिक गहराई तक जाते हैं, गुरुत्वीय त्वरण का मान गुणक $(1 - d/R_E)$ द्वारा घटता जाता है। पृथ्वी के गुरुत्वीय त्वरण से संबंधित यह एक आश्चर्यजनक तथ्य है कि पृष्ठ पर इसका मान अधिकतम है तथा चाहे हम पृष्ठ से ऊपर जाएँ अथवा नीचे यह मान सदैव घटता है।

8.7 गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा

पहले हमने स्थितिज ऊर्जा की धारणा की चर्चा किसी वस्तु की दी हुई स्थिति पर उसमें संचित ऊर्जा के रूप में दी थी। यदि किसी कण की स्थिति उस पर कार्यरत बल के कारण परिवर्तित हो जाती है तो उस कण की स्थितिज ऊर्जा में परिवर्तन आरोपित बल द्वारा उस कण पर किए गए कार्य के परिमाण के ठीक-ठीक बराबर होगा। जैसा कि हम पहले चर्चा कर चुके हैं जिन बलों द्वारा किया गया कार्य चले गए पथों पर निर्भर नहीं करता, वे बल **संरक्षी बल** होते हैं तथा केवल ऐसे बलों के लिए ही किसी पिण्ड की स्थितिज ऊर्जा की कोई सार्थकता होती है।

गुरुत्व बल एक संरक्षी बल है तथा हम किसी पिण्ड में इस बल के कारण उत्पन्न स्थितिज ऊर्जा, जिसे गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा कहते हैं, का परिकलन कर सकते हैं। पहले पृथ्वी के पृष्ठ के निकट के उन बिन्दुओं पर विचार कीजिए जिनकी पृष्ठ से दूरियाँ पृथ्वी की त्रिज्या की तुलना में बहुत कम हैं। जैसा कि हम देख चुके हैं ऐसे प्रकरणों में गुरुत्वीय बल व्यावहारिक दृष्टि से नियत रहता है तथा यह mg होता है तथा इसकी दिशा पृथ्वी के केन्द्र की ओर होती है। यदि हम पृथ्वी के पृष्ठ से h_1 ऊँचाई पर स्थित किसी बिन्दु तथा इसी बिन्दु के ठीक ऊर्ध्वाधर ऊपर h_2 ऊँचाई पर स्थित किसी अन्य बिन्दु पर विचार करें तो m द्रव्यमान के किसी कण को पहली स्थिति से दूसरी स्थिति तक ऊपर उठाने में किया गया कार्य, जिसे W_{12} द्वारा निर्दिष्ट करते हैं,

$$W_{12} = \text{बल} \times \text{विस्थापन}$$
$$= mg\,(h_2 - h_1)\,. \qquad (8.20)$$

यदि हम पृथ्वी के पृष्ठ से h ऊँचाई के बिन्दु से कोई स्थितिज ऊर्जा $W(h)$ संबद्ध करें जो इस प्रकार है कि

$$W(h) = mg\,h + W_o \qquad (8.21)$$

(यहाँ W_o = नियतांक) ;

तब यह स्पष्ट है कि

$$W_{12} = W(h_2) - W(h_1) \qquad (8.22)$$

कण को स्थानांतरित करने में किया गया कार्य ठीक इस कण की अंतिम तथा आरंभिक स्थितियों की स्थितिज ऊर्जाओं के अंतर के बराबर है। ध्यान दीजिए कि समीकरण (8.22) में W_o निरस्त हो जाता है। समीकरण (8.21) में $h = 0$ रखने पर हमें $W(h=0) = W_o$ प्राप्त होता है। $h = 0$ का अर्थ यह है कि दोनों बिन्दु पृथ्वी के पृष्ठ पर स्थित हैं। इस प्रकार W_o कण की पृथ्वी के पृष्ठ पर स्थितिज ऊर्जा हुई।

यदि हम पृथ्वी के पृष्ठ से यादृच्छिक दूरियों के बिन्दुओं पर विचार करें तो उपरोक्त परिणाम प्रामाणिक नहीं होते क्योंकि तब यह मान्यता कि गुरुत्वाकर्षण बल mg अपरिवर्तित रहता है वैध नहीं है। तथापि, अपनी अब तक की चर्चा के आधार पर हम जानते हैं कि पृथ्वी के बाहर के किसी बिन्दु पर स्थित किसी कण पर लगे गुरुत्वीय बल की दिशा पृथ्वी के केन्द्र की ओर निदेशित होती है तथा इस बल का परिमाण है,

$$F = \frac{G M_E\, m}{r^2} \qquad (8.23)$$

यहाँ M_E = पृथ्वी का द्रव्यमान, m = कण का द्रव्यमान तथा

r इस कण की पृथ्वी के केन्द्र से दूरी है। यदि हम किसी कण को $r = r_1$ से $r = r_2$ तक (जबकि $r_2 > r_1$) ऊर्ध्वाधर पथ के अनुदिश ऊपर उठाने में किए गए कार्य का परिकलन करें तो हमें समीकरण (8.20) के स्थान पर यह संबंध प्राप्त होता है

$$W_{12} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{GMm}{r^2} dr$$

$$= -G M_E m \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \qquad (8.24)$$

इस प्रकार समीकरण (8.21) के बजाय, हम किसी दूरी r पर स्थितिज ऊर्जा $W(r)$ को इस प्रकार संबद्ध कर सकते हैं :

$$W(r) = -\frac{G M_E m}{r} + W_1, \qquad (8.25)$$

जो कि $r > R$ के लिए वैध है।

अतः एक बार फिर $W_{12} = W(r_2) - W(r_1)$ । अंतिम समीकरण में $r = \infty$ रखने पर हमें $W(r = \infty) = W_1$ प्राप्त होता है। इस प्रकार W_1 अनन्त पर स्थितिज ऊर्जा हुई। हमें यह ध्यान देना चाहिए कि समीकरणों (8.22) तथा (8.24) के अनुसार केवल दो बिन्दुओं के बीच स्थितिज ऊर्जाओं में अंतर की ही कोई निश्चित सार्थकता है। हम प्रचलित मान्य परिपाटी के अनुसार W_1 को शून्य मान लेते हैं जिसके कारण *किसी बिन्दु पर किसी कण की स्थितिज ऊर्जा उस कण को अनन्त से उस बिन्दु तक लाने में किए जाने वाले कार्य के ठीक बराबर होती है।*

हमने, किसी बिन्दु पर किसी कण की स्थितिज ऊर्जा का परिकलन उस कण पर लगे पृथ्वी के गुरुत्वीय बलों के कारण, जो कि कण के द्रव्यमान के अनुक्रमानुपाती होता है, किया है। पृथ्वी के गुरुत्वीय बल के कारण किसी *बिन्दु पर गुरुत्वीय विभव* की परिभाषा *"उस बिन्दु पर किसी कण के एकांक द्रव्यमान की स्थितिज ऊर्जा"* के रूप में की जाती है।

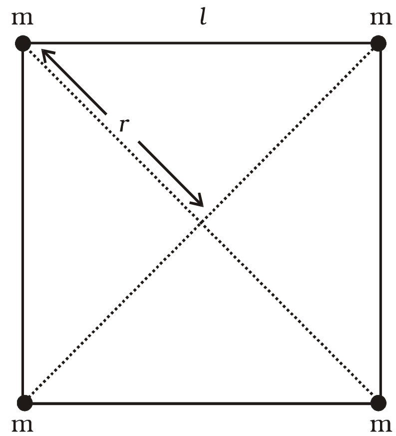
पूर्व विवेचन के आधार पर, हम जानते हैं कि m_1 एवं m_2 द्रव्यमान के एक दूसरे से r दूरी पर रखे दो कणों की गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा है,

$$V = -\frac{G m_1 m_2}{r} \quad (\text{यदि हम } r = \infty \text{ पर } V = 0 \text{ लें})$$

यह भी ध्यान दिया जाना चाहिए कि कणों के किसी सभी वियुक्त निकाय की कुल स्थितिज ऊर्जा, अवयवों/कणों के सभी संभावित युग्मों की ऊर्जाओं (उपरोक्त समीकरण द्वारा परिकलित) के योग के बराबर होती है। यह अध्यारोपण सिद्धांत के एक अनुप्रयोग का उदाहरण है।

उदाहरण 8.3 *l भुजा के किसी वर्ग के शीर्षों पर स्थित चार कणों के निकाय की स्थितिज ऊर्जा ज्ञात कीजिए। वर्ग के केन्द्र पर विभव भी ज्ञात कीजिए।*

उत्तर मान लीजिए प्रत्येक कण का द्रव्यमान m है, तथा वर्ग की भुजा l है। हमारे पास l दूरी वाले 4 द्रव्यमान युगल तथा $\sqrt{2}\,l$ दूरी वाले 2 द्रव्यमान युगल हैं। अतः निकाय की स्थितिज ऊर्जा



चित्र 8.9

$$W(r) = -4\frac{Gm^2}{l} - 2\frac{Gm^2}{\sqrt{2}\,l}$$

$$= -\frac{2Gm^2}{l}\left(2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -5.41\frac{Gm^2}{l}$$

वर्ग के केन्द्र $\left(r = \sqrt{2}\,l/2\right)$ पर गुरुत्वीय विभव,

$$U(r) = -4\sqrt{2}\,\frac{Gm}{l}$$

8.8 पलायन चाल

यदि हम अपने हाथों से किसी पत्थर को फेंकते हैं, तो हम यह पाते हैं कि वह फिर वापस पृथ्वी पर गिर जाता है। निस्संदेह मशीनों का उपयोग करके हम किसी पिण्ड को अधिकाधिक तीव्रता तथा प्रारंभिक वेगों से शूट कर सकते हैं जिसके कारण पिण्ड अधिकाधिक ऊँचाइयों तक पहुँच जाते हैं। तब स्वाभाविक रूप से हमारे मस्तिष्क में यह विचार उत्पन्न होता है "क्या हम किसी पिण्ड को इतने अधिक आरंभिक चाल से ऊपर फेंक सकते हैं कि वह फिर पृथ्वी पर वापस न गिरे?"

इस प्रश्न का उत्तर देने में ऊर्जा संरक्षण नियम हमारी सहायता करता है। मान लीजिए फेंका गया पिण्ड अनन्त तक पहुंचता है और वहाँ उसकी चाल V_f है। किसी पिण्ड की ऊर्जा स्थितिज तथा गतिज ऊर्जाओं का योग होती है। पहले की ही भांति W_1 पिण्ड की अनन्त पर गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा को निर्दिष्ट करता है। तब प्रक्षेप्य की अनन्त पर कुल ऊर्जा

$$E(\text{अनन्त}) = W_1 + \frac{mV_f^2}{2} \qquad (8.26)$$

यदि पिण्ड को पृथ्वी (R_E = पृथ्वी की त्रिज्या) के केन्द्र से ($h + R_E$) ऊँचाई पर स्थित किसी बिन्दु से आरंभ में चाल V_i से फेंका गया था, तो इस पिण्ड की आरंभिक ऊर्जा थी

$$E(h + R_E) = \frac{1}{2}mV_i^2 - \frac{GmM_E}{(h + R_E)} + W_1 \qquad (8.27)$$

ऊर्जा संरक्षण नियम के अनुसार समीकरण (8.26) तथा (8.27) बराबर होने चाहिए। अत:

$$\frac{mV_i^2}{2} - \frac{GmM_E}{(h + R_E)} = \frac{mV_f^2}{2} \qquad (8.28)$$

समीकरण (8.28) का दक्षिण पक्ष एक धनात्मक राशि है जिसका न्यूनतम मान शून्य है, अत: वाम पक्ष भी ऐसा ही होना चाहिए। अत: कोई पिण्ड अनन्त तक पहुंच सकता है जब V_i इतना हो कि

$$\frac{mV_i^2}{2} - \frac{GmM_E}{(h + R_E)} \geq 0 \qquad (8.29)$$

V_i का न्यूनतम मान उस प्रकरण के तदनुरूपी है जिसमें समीकरण (8.29) का वाम पक्ष शून्य के बराबर है। इस प्रकार, किसी पिण्ड को अनन्त तक पहुंचने के लिए (अर्थात् पृथ्वी से पलायन के लिए) आवश्यक न्यूनतम चाल इस संबंध के तदनुरूपी होती है

$$\frac{1}{2}m\left(V_i^2\right)_{\text{न्यूनतम}} = \frac{GmM_E}{h + R_E} \qquad (8.30)$$

यदि पिण्ड को पृथ्वी के पृष्ठ से छोड़ा जाता है, तो $h = 0$ और हमें प्राप्त होता है

$$\left(V_i\right)_{\text{न्यूनतम}} = \sqrt{\frac{2GM_E}{R_E}} \qquad (8.31)$$

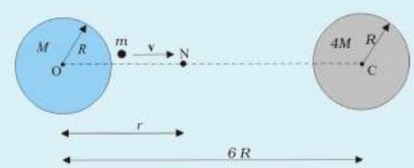
संबंध $g = GM_E / R_E^2$ का उपयोग करने पर हमें निम्न मान प्राप्त होता है

$$\left(V_i\right)_{\text{न्यूनतम}} = \sqrt{2gR_E} \qquad (8.32)$$

समीकरण (8.32) में g और R_E के आंकिक मान रखने पर हमें $(V_i)_{\text{न्यूनतम}} \approx 11.2$ km/s प्राप्त होता है। उसे **पलायन चाल** कहते हैं। कभी-कभी लापरवाही में इसे हम पलायन वेग भी कह देते हैं।

समीकरण (8.32) का उपयोग भली भांति समान रूप से चन्द्रमा से फेंके जाने वाले पिण्डों के लिए भी किया जा सकता है, ऐसा करते समय हम g के स्थान पर चन्द्रमा के पृष्ठ पर चन्द्रमा के गुरुत्वीय त्वरण तथा R_E के स्थान पर चन्द्रमा की त्रिज्या का मान रखते हैं। इन दोनों ही राशियों के चन्द्रमा के लिए मान पृथ्वी पर इनके मानों से कम हैं तथा चन्द्रमा के लिए पलायन चाल का मान 2.3 km/s प्राप्त होता है। यह मान पृथ्वी की तुलना में लगभग 1/5 गुना है। यही कारण है कि चन्द्रमा पर कोई वातावरण नहीं है। यदि चन्द्रमा के पृष्ठ पर गैसीय अणु बनें, तो उनकी चाल इस पलायन चाल से अधिक होगी तथा वे चन्द्रमा के गुरुत्वीय खिंचाव के बाहर पलायन कर जाएंगे।

उदाहरण 8.4 समान त्रिज्या R परन्तु M तथा $4\,M$ द्रव्यमान के दो एकसमान ठोस गोले इस प्रकार रखे हैं कि इनके केन्द्रों के बीच पृथकन (चित्र 8.10 में दर्शाए अनुसार) $6\,R$ है। दोनों गोले स्थिर रखे गए हैं। m द्रव्यमान के किसी प्रक्षेप्य को M द्रव्यमान के गोले के पृष्ठ से $4M$ द्रव्यमान के गोले के केन्द्र की ओर सीधे प्रक्षेपित किया जाता है। प्रक्षेप्य की उस न्यूनतम चाल के लिए व्यंजक प्राप्त कीजिए जिससे फेंके जाने पर वह दूसरे गोले के पृष्ठ पर पहुंच जाए।



चित्र 8.10

हल प्रक्षेप्य पर दो गोलों के परस्पर विरोधी गुरुत्वीय बल कार्य करते हैं। उदासीन बिन्दु N (चित्र 8.10 देखिए) की परिभाषा एक ऐसे बिन्दु (स्थिति) के रूप में की जाती है जहाँ दो बल यथार्थत: एक दूसरे को निरस्त करते हैं। यदि ON = r है, तो

$$\frac{G\,M\,m}{r^2} = \frac{4\,G\,M\,m}{(6R-r)^2}$$

$$(6R - r)^2 = 4r^2$$

$$6R - r = \pm 2r$$

$r = 2R$ या $-6R$

इस उदाहरण में उदासीन बिन्दु $r = -6R$ हमसे संबंधित नहीं है। इस प्रकार, ON = $r = 2R$। कण को उस चाल से प्रक्षेपित करना पर्याप्त है जो उसे N तक पहुंचने योग्य बना दे। इसके पश्चात् वहाँ पहुंचने पर 4 M द्रव्यमान के गोले का गुरुत्वीय बल कण को अपनी ओर खींचने के लिए पर्याप्त होगा। M द्रव्यमान के गोले के पृष्ठ पर यांत्रिक ऊर्जा

$$E_i = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{G M m}{R} - \frac{4 G M m}{5 R}$$

उदासीन बिन्दु N पर कण की चाल शून्य मान की ओर प्रवृत्त होती है। अत: N पर यांत्रिक ऊर्जा शुद्ध रूप से स्थितिज ऊर्जा होती है। अत:

$$E_N = -\frac{G M m}{2 R} - \frac{4 G M m}{4 R}$$

यांत्रिक ऊर्जा संरक्षण नियम के अनुसार

$$\frac{1}{2} v^2 - \frac{GM}{R} - \frac{4GM}{5R} = -\frac{GM}{2R} - \frac{GM}{R}$$

अथवा

$$v^2 = \frac{2 G M}{R}\left(\frac{4}{5} - \frac{1}{2}\right)$$

$$v = \left(\frac{3 G M}{5 R}\right)^{1/2}$$

यहाँ यह ध्यान देने का विषय है कि N पर प्रक्षेप्य की चाल शून्य है, परन्तु जब यह 4 M द्रव्यमान के गोले से टकराता तब इसकी चाल शून्येत्तर होती है। जिस चाल से प्रक्षेप्य 4M द्रव्यमान के गोले से टकराता है, उसे ज्ञात करना छात्रों के अभ्यास के लिए छोड़ा जा रहा है। ◀

8.9 भू उपग्रह

भू उपग्रह वह पिण्ड है जो पृथ्वी के परित: परिक्रमण करते हैं। इनकी गतियां, ग्रहों की सूर्य के परित: गतियों के बहुत समान होती हैं, अत: केप्लर के ग्रहीय गति नियम इन पर भी समान रूप से लागू होते हैं। विशेष बात यह है कि इन उपग्रहों की पृथ्वी के परित: कक्षाएं वृत्ताकार अथवा दीर्घवृत्ताकार है। पृथ्वी का एकमात्र प्राकृतिक उपग्रह चन्द्रमा है जिसकी लगभग वृत्ताकार कक्षा है और लगभग 27.3 दिन का परिक्रमण काल है जो चन्द्रमा के अपनी अक्ष के परित: घूर्णन काल के लगभग समान है। वर्ष 1957 के पश्चात् विज्ञान तथा प्रौद्योगिकी में उन्नति के फलस्वरूप भारत सहित कई देश दूर संचार, भू भौतिकी, मौसम विज्ञान के क्षेत्र में व्यावहारिक उपयोगों के लिए मानव-निर्मित भू उपग्रहों को कक्षाओं में प्रमोचित करने योग्य बन गए हैं।

अब हम पृथ्वी के केन्द्र से $(R_E + h)$ दूरी पर स्थित वृत्तीय कक्षा में गतिमान उपग्रह पर विचार करेंगे, यहाँ R_E = पृथ्वी की त्रिज्या है। यदि उपग्रह का द्रव्यमान m तथा V इसकी चाल है, तो इस कक्षा के लिए आवश्यक अभिकेन्द्र बल

$$F(\text{अभिकेन्द्र}) = \frac{mV^2}{(R_E + h)} \tag{8.33}$$

तथा यह बल कक्षा के केन्द्र की ओर निदेशित है। अभिकेन्द्र बल गुरुत्वाकर्षण बल द्वारा प्रदान किया जाता है, जिसका मान

$$F(\text{गुरुत्वाकर्षण}) = \frac{G m M_E}{(R_E + h)^2} \tag{8.34}$$

यहाँ M_E पृथ्वी का द्रव्यमान है।

समीकरणों (8.33) तथा (8.34) के दक्षिण पक्षों को समीकृत तथा m का निरसन करने पर हमें प्राप्त होता है

$$V^2 = \frac{G M_E}{(R_E + h)} \tag{8.35}$$

इस प्रकार h के बढ़ने पर V घटता है। समीकरण (8.35) के अनुसार जब $h = 0$ है, तो उपग्रह की चाल V है

$$V^2 \;(h = 0) = GM_E / R_E = gR_E \tag{8.36}$$

यहाँ हमने संबंध $g = G M_E / R_E^{\,2}$ का उपयोग किया है। प्रत्येक कक्षा में उपग्रह $2\pi(R_E + h)$ दूरी चाल V से तय करता है। अत: इसका आवर्तकाल T है

$$T = \frac{2\pi(R_E + h)}{V} = \frac{2\pi(R_E + h)^{3/2}}{\sqrt{G M_E}} \tag{8.37}$$

यहाँ हमने समीकरण (8.35) से V का मान प्रतिस्थापित किया है। समीकरण (8.37) के दोनों पक्षों का वर्ग करने पर हमें प्राप्त होता है

$$T^2 = k\,(R_E + h)^3 \;(\text{जहाँ } k = 4\pi^2 / G M_E), \tag{8.38}$$

और यही केप्लर का आवर्तकालों का नियम है जिसका अनुप्रयोग पृथ्वी के परित: उपग्रहों की गतियों के लिए किया जाता है।

उन भू उपग्रहों के लिए, जो पृथ्वी के पृष्ठ के अति निकट होते हैं, h के मान को पृथ्वी की त्रिज्या R_E की तुलना में समीकरण (8.38) में नगण्य मान लेते हैं। अत: इस प्रकार के

भू उपग्रहों के लिए T ही T_o होता है, यहाँ

$$T_0 = 2\pi\sqrt{R_E / g} \qquad (8.39)$$

यदि हम समीकरण (8.39) में g तथा R_E के आंकिक मानों ($g \simeq 9.8 \text{ ms}^{-2}$ तथा $R_E = 6400$ km.) को प्रतिस्थापित करें, तो हमें प्राप्त होता है

$$T_o = 2\pi\sqrt{\frac{6.4\times10^6}{9.8}} \text{ s}$$

जो लगभग 85 मिनट के बराबर हैं।

उत्तर 8.5 मंगल ग्रह के फोबोस तथा डेल्मोस नामक दो चन्द्रमा हैं। (i) यदि फोबोस का आवर्तकाल 7 घंटे 39 मिनट तथा कक्षीय त्रिज्या 9.4×10^3 km है तो मंगल का द्रव्यमान परिकलित कीजिए। (ii) यह मानते हुए कि पृथ्वी तथा मंगल सूर्य के परितः वृत्तीय कक्षाओं में परिक्रमण कर रहे हैं तथा मंगल की कक्षा की त्रिज्या पृथ्वी की कक्षा की त्रिज्या की 1.52 गुनी है तो मंगल–वर्ष की अवधि दिनों में क्या है?

हल (i) यहाँ पर समीकरण (8.38) का उपयोग पृथ्वी के द्रव्यमान M_E को मंगल के द्रव्यमान M_m से प्रतिस्थापित करके करते हैं

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_m}R^3$$

$$M_m = \frac{4\pi^2}{G}\frac{R^3}{T^2}$$

$$= \frac{4\times(3.14)^2\times(9.4)^3\times10^{18}}{6.67\times10^{-11}\times(459\times60)^2}$$

$$M_m = \frac{4\times(3.14)^2\times(9.4)^3\times10^{18}}{6.67\times(4.59\times6)^2\times10^{-5}}$$

$$= 6.48 \times 10^{23} \text{ kg}$$

(ii) केप्लर के आवर्तकालों के नियम का उपयोग करने पर

$$\frac{T_M^2}{T_E^2} = \frac{R_{MS}^3}{R_{ES}^3}$$

यहाँ R_{MS} एवं R_{ES} क्रमशः मंगल-सूर्य तथा पृथ्वी-सूर्य के बीच की दूरियां हैं।

$$\therefore \quad T_M = (1.52)^{3/2} \times 365$$

$$= 684 \text{ दिन}$$

ध्यान देने योग्य तथ्य यह है कि बुध, मंगल तथा प्लूटो* के अतिरिक्त सभी ग्रहों की कक्षाएं लगभग वृत्ताकार हैं। उदाहरण के लिए, हमारी पृथ्वी के अर्ध लघु अक्ष तथा अर्ध दीर्घ अक्ष का अनुपात $b/a = 0.99986$ है।

उत्तर 8.6 पृथ्वी को तोलना : आपको निम्नलिखित आंकड़े दिए गए हैं: $g = 9.81 \text{ m s}^{-2}$, $R_E = 6.37\times10^6$m, पृथ्वी से चन्द्रमा की दूरी $R = 3.84\times10^8$ m पृथ्वी के परितः चन्द्रमा के परिक्रमण का आवर्त काल = 27.3 दिन। दो भिन्न विधियों द्वारा पृथ्वी का द्रव्यमान प्राप्त कीजिए।

हल ***(i)* पहली विधि** : समीकरण (8.12) से

$$M_E = \frac{g R_E^2}{G}$$

$$= \frac{9.81\times\left(6.37\times10^6\right)^2}{6.67\times10^{-11}}$$

$$= 5.97\times 10^{24} \text{ kg}$$

***(ii)* दूसरी विधि** : चन्द्रमा पृथ्वी का उपग्रह है। केप्लर के आवर्तकालों के नियम की व्युत्पत्ति में (समीकरण (8.38) देखिए)]

$$T^2 = \frac{4\pi^2R^3}{G M_E}$$

$$M_E = \frac{4\pi^2R^3}{G T^2}$$

$$= \frac{4\times3.14\times3.14\times(3.84)^3\times10^{24}}{6.67\times10^{-11}\times(27.3\times24\times60\times60)^2}$$

$$= 6.02\times10^{24} \text{ kg}$$

दोनों विधियों द्वारा लगभग समान उत्तर प्राप्त होते हैं, जिनमें 1% से भी कम का अंतर है। ◀

उदाहरण 8.7 समीकरण (8.38) में स्थिरांक k को दिनों तथा किलोमीटरों में व्यक्त कीजिए। $k = 10^{-13} \text{ s}^2 \text{ m}^{-3}$ है। चन्द्रमा पृथ्वी से 3.84×10^5 km दूर है। चन्द्रमा के परिक्रमण के आवर्तकाल को दिनों में प्राप्त कीजिए।

हल हम जानते हैं कि

$$k = 10^{-13} \text{ s}^2 \text{ m}^{-3}$$

$$= 10^{-13}\left[\frac{1}{(24\times60\times60)^2}\text{d}^2\right]\left[\frac{1}{(1/1000)^3\text{km}^3}\right]$$

$$= 1.33 \times10^{-14} \text{ d}^2 \text{ km}^{-3}$$

*पृष्ठ 186 पर बॉक्स में दी गई जानकारी पर ध्यान दें।

समीकरणों (8.38) तथा k के दिए गए मान का उपयोग करने पर चन्द्रमा के परिक्रमण का आवर्तकाल

$T^2 = (1.33 \times 10^{-14})(3.84 \times 10^5)^3$

$T = 27.3$ d ◀

ध्यान दीजिए, यदि हम (R_E+h) को दीर्घवृत्त के अर्ध दीर्घ अक्ष (a) द्वारा प्रतिस्थापित करें तो समीकरण (8.38) को दीर्घवृत्तीय कक्षाओं पर भी लागू किया जा सकता है, तब पृथ्वी इस दीर्घवृत्त की एक नाभि पर होगी।

8.10 कक्षा में गतिशील उपग्रह की ऊर्जा

समीकरण (8.35) का उपयोग करने पर वृत्ताकार कक्षा में चाल v से गतिशील उपग्रह की गतिज ऊर्जा

$$K.E = \frac{1}{2} m v^2 \,;$$

v^2 का मान समीकरण (8.35) से रखने पर

$$= \frac{G m M_E}{2(R_E + h)}, \qquad (8.40)$$

ऐसा मानें कि अनन्त पर गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा शून्य है तब पृथ्वी के केन्द्र से (R_e+h) दूरी पर उपग्रह की स्थितिज ऊर्जा

$$P.E = -\frac{G m M_E}{(R_E + h)} \qquad (8.41)$$

K.E धनात्मक है जबकि P.E ऋणात्मक होती है। तथापि परिमाण में K.E = $\frac{1}{2}$ P.E, अतः उपग्रह की कुल ऊर्जा

$$E = K.E + P.E = -\frac{G m M_E}{2(R_E + h)} \qquad (8.42)$$

इस प्रकार वृत्ताकार कक्षा में गतिशील किसी उपग्रह की कुल ऊर्जा ऋणात्मक होती है, स्थितिज ऊर्जा का ऋणात्मक तथा परिमाण में धनात्मक गतिज ऊर्जा का दो गुना होता है।

जब किसी उपग्रह की कक्षा दीर्घवृत्तीय होती है तो उसकी K.E तथा P.E दोनों ही पथ के हर बिन्दु पर भिन्न होती हैं। वृत्तीय कक्षा के प्रकरण की भांति ही उपग्रह की कुल ऊर्जा नियत रहती है तथा यह ऋणात्मक होती है और यही हम अपेक्षा भी करते हैं क्योंकि जैसा हम पहले चर्चा कर चुके हैं कि यदि कुल ऊर्जा धनात्मक अथवा शून्य हो तो पिण्ड अनन्त की ओर पलायन कर जाता है। उपग्रह सदैव पृथ्वी से परिमित दूरियों पर परिक्रमण करते हैं, अतः उनकी ऊर्जाएँ धनात्मक अथवा शून्य नहीं हो सकतीं।

उदाहरण 8.8 400 kg द्रव्यमान का कोई उपग्रह पृथ्वी के परित $2R_E$ त्रिज्या की वृत्तीय कक्षा में परिक्रमण कर रहा है। इसे $4R_E$ की वृत्तीय कक्षा में स्थानांतरित करने के लिए आवश्यक ऊर्जा परिकलित कीजिए। इसकी गतिज तथा स्थितिज ऊर्जा में कितने परिवर्तन होंगे?

हल आरंभ में

$$E_i = -\frac{G M_E m}{4 R_E}$$

जबकि, अंत में

$$E_f = -\frac{G M_E m}{8 R_E}$$

कुल ऊर्जा में परिवर्तन

$$\Delta E = E_f - E_i$$

$$= \frac{G M_E m}{8 R_E} = \left(\frac{G M_E}{R_E^2}\right)\frac{m R_E}{8}$$

$$\Delta E = \frac{g m R_E}{8} = \frac{9.81 \times 400 \times 6.37 \times 10^6}{8} = 3.13 \times 10^9 \text{ J}$$

गतिज ऊर्जा घट जाती है और यह ΔE की अनुहारक है, अर्थात् $\Delta K = K_f - K_i = -3.13 \times 10^9$ J।

स्थितिज ऊर्जा में होने वाला परिवर्तन कुल ऊर्जा का दो गुना है, अर्थात्

$\Delta V = V_f - V_i = -6.25 \times 10^9$ J ◀

8.11 तुल्यकाली तथा ध्रुवीय उपग्रह

यदि हम समीकरण (8.37) में $(R_E + h)$ के मान में इस तरह समायोजन करें कि आवर्तकाल T का मान 24 घन्टे हो जाए, तो एक अत्यन्त रोचक परिघटना उत्पन्न हो जाती है। यदि वृत्तीय कक्षा पृथ्वी के विषुवत वृत्त के तल में है, तो इस प्रकार का उपग्रह, जिसका आवर्तकाल पृथ्वी के अपने अक्ष पर घूर्णन करने के आवर्तकाल के बराबर हो, पृथ्वी के किसी बिन्दु से देखने पर स्थिर प्रतीत होगा। इस उद्देश्य के लिए परिकलन करने पर $(R_E + h)$ का मान R_E की तुलना में काफी अधिक आता है :

$$R_E + h = \left(\frac{T^2 G M_E}{4\pi^2}\right)^{1/3} \qquad (8.43)$$

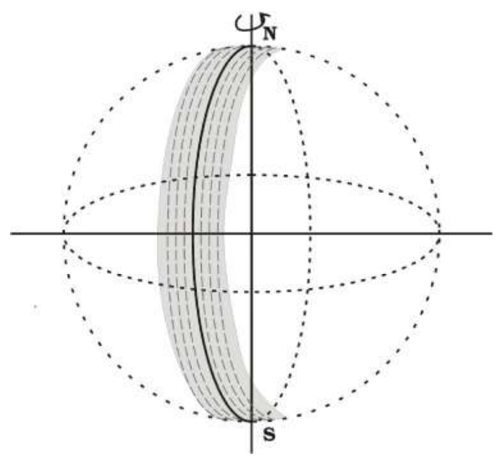
$T = 24$ घन्टे के लिए, परिकलन करने पर, $R_E + h = 35800$ km, जो कि पृथ्वी की त्रिज्या R_E से काफी अधिक है। वे

अंतरिक्ष में भारत की छलाँग

सन् 1962 में भारत सरकार द्वारा भारतीय राष्ट्रीय अंतरिक्ष अनुसंधान समिति (INCOSPAR) के गठन के साथ भारत के अंतरिक्ष कार्यक्रम प्रारम्भ हुए। सन् 1969 में गठित भारतीय अंतरिक्ष अनुसंधान संगठन (ISRO) ने तत्कालीन INCOSPAR का अधिक्रमण किया। इसरो ने देश के विकास में अंतरिक्ष प्रौद्योगिकी की भूमिका और महत्व को पहचानते हुए आम जनता के लिए अंतरिक्ष विज्ञान के उपयोग का ध्येय बनाए रखा है। भारत ने अपना पहला निम्न-कक्षा उपग्रह आर्यभट्ट 1975 में तत्कालीन सोवियत संघ के प्रमोचक रॉकेट द्वारा प्रक्षेपित किया। सन् 1979 में, रोहिणी श्रृंखला के उपग्रहों को अंतरिक्ष में भेजने के साथ ही इसरो ने अपने मुख्य प्रक्षेपण स्थल सतीश धवन अंतरिक्ष केन्द्र, श्रीहरिकोटा, आंध्र प्रदेश से देशज प्रमोचक रॉकेटों का उपयोग प्रारम्भ किया। भारत के अंतरिक्ष कार्यक्रम में अपनी अद्‌भुत सफलताओं से इसरो विश्व की छठी वृहत्तम अंतरिक्ष एजेंसी बन गई है। इसरो प्रसारण, संचार, मौसम पूर्वानुमान, आपदा प्रबंधन उपकरण, भौगोलिक सूचना प्रणाली, मानचित्र कला, नौवहन, टेलीचिकित्सा, समर्पित दूरस्थ शिक्षा संबधी उपग्रह आदि के लिए विशिष्ट उपग्रह उत्पादों और उपकरणों का विकास करती है। इन उपयोगों के संबंध में सम्पूर्ण आत्मनिर्भरता प्राप्त करने के लिए लागत प्रभावी एवम् विश्वसनीय ध्रुवीय उपग्रह प्रमोचक प्रणाली (पी.एस.एल.वी.) का विकास 1990 के दशक के प्रारम्भ में हुआ। इन विशेषताओं के कारण पी.एस.एल.वी. विभिन्न देशों के उपग्रहों के लिए सबसे प्रिय वाहक बन गया है। इससे अंतराष्ट्रीय सहयोग में भी अभूर्तपूर्व रूप से वृद्धि हुई है। सन् 2001 में अधिक भारी और अधिक माँग वाले भूतुल्यकाली संचार उपग्रहों के लिए भूतुल्यकाली उपग्रह प्रमोचक रॉकेट (जी.एस.एल.वी.) को विकसित किया गया। भारत सरकार के अंतरिक्ष विभाग के तत्वाधान में सुदूर संवेदन, खगोलिकी और खगोल भौतिकी, वायुमंडलीय विज्ञान और अंतरिक्ष अनुसंधान के क्षेत्रों में विभिन्न अनुसंधान केन्द्र और स्वायत्त संस्थान कार्यरत हैं। वैज्ञानिक परियोजनाओं सहित चन्द्र (चन्द्रयान) तथा अंतरग्रहीय (मंगलयान) मिशनों की सफलताएँ इसरो की उल्लेखनीय उपलब्धियाँ है। इसरो के भविष्य के प्रयासों में समानव अंतरिक्ष उड़ान परियोजनाएँ, भारी वाहक प्रमोचकों, पुनरूपयोगी प्रमोचक रॉकेटों, सेमी-क्रायोजेनिक इंजन, एकल तथा द्वि-चरणी कक्षा (SSTO तथा TSTO) रॉकेटों, अंतरिक्ष उपयोगों के लिए सम्मिश्र सामग्री का विकास एवम् उपयोग इत्यादि शामिल हैं। 1984 में राकेश शर्मा सोवियत अंतरिक्षयान में जाने वाले प्रथम भारतीय अंतरिक्ष यात्री बने।

उपग्रह जो पृथ्वी के विषुवत वृत्त के तल (अर्थात निरक्षीय समतल) में पृथ्वी के परितः वृत्तीय कक्षा में, $T = 24$ घन्टे के आवर्तकाल से, परिक्रमण करते हैं, **तुल्यकाली उपग्रह** कहलाते हैं। स्पष्ट है कि क्योंकि पृथ्वी समान आवर्तकाल से अपने अक्ष पर घूर्णन करती है अतः यह उपग्रह पृथ्वी के किसी भी बिन्दु से स्थिर प्रतीत होगा। पृथ्वी के पृष्ठ से इतनी अधिक ऊँचाई तक ऊपर फेंकने के लिए अत्यन्त शक्तिशाली रॉकेटों की आवश्यकता होती है। परन्तु, बहुत से व्यावहारिक अनुप्रयोगों को ध्यान में रखकर इनका प्रबन्ध किया गया है।

हम जानते हैं कि एक निश्चित आवृत्ति से अधिक आवृत्ति की विद्युत चुम्बकीय तरंगें आयनमंडल द्वारा परावर्तित नहीं होतीं। रेडियो-प्रसारण में उपयोग होने वाली रेडियो तरंगें जिनका आवृत्ति परिसर $2MH_z$ से $10MH_z$ है क्रांतिक आवृत्ति से कम है, इसलिए ये तरंगें आयनमंडल से परिवर्तित हो जाती हैं। इस प्रकार किसी ऐन्टेना द्वारा किया गया रेडियो तरंग प्रसारण उन स्थानों पर भी ग्रहण किया जा सकता है जो बहुत दूर है तथा पृथ्वी की वक्रता के कारण जहाँ तरंगें सीधे नहीं पहुँच पातीं। दूरदर्शन-प्रसारण अथवा अन्य प्रकार के संचार में उपयोग होने वाली तरंगों की आवृत्तियाँ अत्यधिक उच्च होती हैं, अतः इन्हें सीधे ही दृष्टि-रेखा से बाहर ग्रहण नहीं किया जा सकता। प्रसारण केन्द्र के ऊपर स्थापित कोई तुल्यकाली उपग्रह जो स्थिर प्रतीत होता है, इन सिगनलों को ग्रहण करके उन्हें, पृथ्वी के बड़े क्षेत्र पर वापस प्रसारित कर सकता है। भारत द्वारा अन्तरिक्ष में भेजा गया इनसैट उपग्रह समूह ऐसा ही तुल्यकाली उपग्रह समूह है जिसका विस्तृत उपयोग दूरसंचार के लिए भारत में किया जा रहा है।



चित्र 8.11 ध्रुवीय उपग्रह। एक चक्कर में उपग्रह से दिखाई देने वाली पृथ्वी के पृष्ठ की एक पट्टी (छायांकित दर्शायी गयी है)। उपग्रह के अगले परिक्रमण के लिए पृथ्वी अपने अक्ष पर कुछ घूर्णन कर गयी है, जिससे संलग्न पट्टी दिखाई देने लगती है।

उपग्रह की अन्य श्रेणी को **ध्रुवीय उपग्रह** कहते हैं। ये निम्न तुंगता ($h \approx 500$ से 800 km) उपग्रह हैं। परन्तु ये पृथ्वी के ध्रुवों के परित: उत्तर दक्षिण दिशा में गमन करते हैं जबकि पृथ्वी अपने अक्ष पर पश्चिम से पूर्व की ओर घूर्णन करती है। (देखिए चित्र 8.11)। चूंकि इन उपग्रहों का आवर्तकाल लगभग 100 मिनट होता है, अत: ये किसी भी अक्षांश से दिन में कई बार गुजरते हैं। तथापि, क्योंकि इन उपग्रहों की पृथ्वी के पृष्ठ से ऊँचाई h लगभग 500-800 km होती है, अत: इस पर लगे किसी कैमरे द्वारा किसी एक कक्षा में केवल पृथ्वी की एक छोटी पट्टी का ही दृश्य लिया जा सकता है। संलग्न पट्टियों को अगली कक्षा में देखा जाता है। इस प्रकार प्रभावी रूप में पूरे एक दिन में पट्टी दर पट्टी पूरी पृथ्वी का सर्वेक्षण किया जा सकता है। ये उपग्रह निकट से, अच्छे विभेदन के साथ, विषुवतीय तथा ध्रुवीय क्षेत्रों का सर्वेक्षण कर सकते हैं। इस प्रकार के उपग्रहों द्वारा एकत्र सूचनाएँ सुदूर संवेदन, मौसम विज्ञान के साथ पृथ्वी के पर्यावरणीय अध्ययनों के लिए भी अत्यन्त उपयोगी हैं।

8.12 भारहीनता

किसी पिण्ड का भार वह बल है जिससे पृथ्वी उसे अपने केन्द्र की ओर आकर्षित करती है। जब हम किसी पृष्ठ पर खड़े होते हैं तो हमें अपने भार का बोध होता है क्योंकि वह पृष्ठ हमारे भार के विपरीत बल आरोपित करके हमें विराम की स्थिति में रखता है। यही सिद्धान्त उस समय लागू होता है जब हम किसी स्थिर बिन्दु, जैसे छत से लटकी किसी कमानीदार तुला से किसी पिण्ड का भार मापते हैं। यदि गुरुत्व बल के विरुद्ध पिण्ड पर कोई बल आरोपित न हो तो वह नीचे गिर जाएगा। कमानी भी यथार्थ रूप में पिण्ड पर इसी प्रकार बल आरोपित करती है। ऐसा इसलिए है क्योंकि पिण्ड के गुरुत्वीय खिंचाव के कारण कमानी नीचे की ओर कुछ खिंच जाती है और क्रम से ऊर्ध्वाधर ऊपर दिशा में कमानी पिण्ड पर एक बल आरोपित करती है।

अब कल्पना कीजिए कि कमानीदार तुला का ऊपरी सिरा कमरे की छत से जुड़ कर स्थिर नहीं है। तब कमानी के दोनों सिरों के साथ-साथ पिण्ड भी सर्वसम त्वरण g से गति करेंगे। इस स्थिति में कमानी में कोई खिंचाव नहीं होगा तथा वह उस पिण्ड पर, जो गुरुत्व बल के कारण g त्वरण से नीचे की ओर गतिशील है, कोई बल आरोपित नहीं करेगी। कमानीदार तुला का इस स्थिति में पाठ्यांक कमानी में कोई खिंचाव न होने के कारण शून्य होगा। यदि उस पिण्ड के रूप में कोई स्त्री अथवा पुरुष है, तो वह इस स्थिति में अपने भार का अनुभव नहीं करेगी/

सारांश

1. न्यूटन का गुरुत्वाकर्षण का सार्वत्रिक नियम यह उल्लेख करता है कि दूरी r से पृथकन वाले m_1 तथा m_2 द्रव्यमान के किन्ही दो कणों के बीच लगे गुरुत्वीय आकर्षण बल का परिमाण

$$F \quad G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

यहाँ G सार्वत्रिक गुरुत्वीय स्थिरांक है जिसका मान $6.672 \quad 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2} है।

2. यदि हमें $M_1, M_2, M_3 \ldots M_n$ आदि बहुत से कणों के कारण m द्रव्यमान के किसी कण पर लगे परिणामी गुरुत्वाकर्षण बल को ज्ञात करना है, तो इसके लिए हम अध्यारोपण सिद्धान्त का उपयोग करते हैं। मान लीजिए गुरुत्वाकर्षण नियम द्वारा $M_1, M_2, \ldots M_n$ में प्रत्येक द्वारा m पर आरोपित व्यष्टिगत बल $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots \mathbf{F}_n$ हैं। तब बलों के अध्यारोपण सिद्धान्त के अनुसार प्रत्येक बल अन्य पिण्डों द्वारा प्रभावित हुए बिना स्वतंत्रतापूर्वक कार्य करता है। तब इनका परिणामी बल $\mathbf{F}_R$ सदिशों के योग द्वारा ज्ञात किया जाता है।

ERROR: stackunderflow
OFFENDING COMMAND: ~

STACK:

परिशिष्ट

परिशिष्ट A 1

ग्रीक वर्णमाला

एल्फा	A	α	न्यू	N	ν
बीटा	B	β	ज़ाई	Ξ	ξ
गामा	Γ	γ	ओमीक्रॉन	O	o
डेल्टा	Δ	δ	पाई	Π	π
एप्सिलॉन	E	ε	र्हो	P	ρ
जीटा	Z	ζ	सिग्मा	Σ	σ
ईटा	H	η	टॉअ	T	τ
थीटा	Θ	θ	अपसिलॉन	Y	υ
आयोटा	I	ι	फाइ	Φ	ϕ, φ
कप्पा	K	κ	काइ	X	χ
लैम्डा	Λ	λ	साइ	Ψ	ψ
म्यू	M	μ	ओमेगा	Ω	ω

परिशिष्ट A 2

सामान्य SI पूर्वलग्न तथा अपवर्त्यों और अपवर्तकों के प्रतीक

अपवर्त्य			अपवर्तक		
गुणक	पूर्वलग्न	प्रतीक	गुणक	पूर्वलग्न	प्रतीक
10^{18}	एक्जा	E	10^{-18}	एटो	a
10^{15}	पेटा	P	10^{-15}	फैम्टो	f
10^{12}	टेरा	T	10^{-12}	पीको	p
10^{9}	गीगा	G	10^{-9}	नैनो	n
10^{6}	मेगा	M	10^{-6}	माइक्रो	μ
10^{3}	किलो	k	10^{-3}	मिली	m
10^{2}	हेक्टो	h	10^{-2}	सेंटी	c
10^{1}	डेका	da	10^{-1}	डेसि	d

परिशिष्ट A 3

कुछ महत्त्वपूर्ण नियतांक

नाम	प्रतीक	मान
निर्वात में प्रकाश की चाल	c	$2.9979 \times 10^{8}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$
इलेक्ट्रॉन का आवेश	e	$1.602 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$
गुरुत्वीय नियतांक	G	$6.673 \times 10^{-11}\,\mathrm{N\,m^2kg^{-2}}$
प्लांक नियतांक	h	$6.626 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$
बोल्ट्ज़मान नियतांक	k	$1.381 \times 10^{-23}\,\mathrm{J\,K^{-1}}$
आवोगाद्रो संख्या	N_A	$6.022 \times 10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}}$
सार्वत्रिक गैस नियतांक	R	$8.314\,\mathrm{J\,mol^{-1}\,K^{-1}}$
इलेक्ट्रॉन का द्रव्यमान	m_e	$9.110 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$
न्यूट्रॉन का द्रव्यमान	m_n	$1.675 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$
प्रोटॉन का द्रव्यमान	m_p	$1.673 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$
इलेक्ट्रॉन-आवेश व द्रव्यमान अनुपात	e/m_e	$1.759 \times 10^{11}\,\mathrm{C/kg}$
फैराडे नियतांक	F	$9.648 \times 10^{4}\,\mathrm{C/mol}$
रिडबर्ग नियतांक	R	$1.097 \times 10^{7}\,\mathrm{m^{-1}}$
बोहर त्रिज्या	a_0	$5.292 \times 10^{-11}\,\mathrm{m}$
स्टेफॉन-बोल्ट्ज़मान नियतांक	σ	$5.670 \times 10^{-8}\,\mathrm{W\,m^{-2}K^{-4}}$
वीन नियतांक	b	$2.898 \times 10^{-3}\,\mathrm{m\,K}$
मुक्त आकाश का परावैद्युतांक	ε_0 $1/4\pi\,\varepsilon_0$	$8.854 \times 10^{-12}\,\mathrm{C^2N^{-1}m^{-2}}$ $8.987 \times 10^{9}\,\mathrm{N\,m^2\,C^{-2}}$
मुक्त आकाश की चुंबकशीलता	μ_0	$4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{T\,m\,A^{-1}}$ $\cong 1.257 \times 10^{-6}\,\mathrm{Wb\,A^{-1}m^{-1}}$

अन्य उपयोगी नियतांक

नाम	प्रतीक	मान
ऊष्मा का यांत्रिक तुल्यांक	J	$4.186\,\mathrm{J\,cal^{-1}}$
मानक वायुमंडलीय दाब	1 atm	$1.013 \times 10^{5}\,\mathrm{Pa}$
परम शून्य	0 K	–273.15 °C
इलेक्ट्रॉन वोल्ट	1 eV	$1.602 \times 10^{-19}\,\mathrm{J}$
परमाण्वीय द्रव्यमान मात्रक	1 u	$1.661 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$
इलेक्ट्रॉन विराम ऊर्जा	mc^2	0.511 MeV
1u का ऊर्जा तुल्यांक	$u\,c^2$	931.5 MeV
आदर्श गैस का आयतन (0°C तथा 1 atm)	V	$22.4\,\mathrm{L\,mol^{-1}}$
गुरुत्वीय त्वरण (समुद्र तल, विषुवत वृत्त पर)	g	$9.78049\,\mathrm{m\,s^{-2}}$

परिशिष्ट A 4

रूपांतरण गुणक

सरलता के लिए रूपांतरण गुणकों को समीकरण के रूप में लिखा गया है।

लंबाई

1 km = 0.6215 mi

1mi = 1.609 km

1m = 1.0936 yd = 3.281 ft = 39.37 in

1 in = 2.54 cm

1 ft = 12 in = 30.48 cm

1 yd = 3ft = 91.44 cm

1 (light year) प्रकाश वर्ष = 1 ly = 9.461×10^{15}m

1 Å = 0.1nm

क्षेत्रफल

1 $m^2 = 10^4$ cm^2

1km^2 = 0.3861 mi^2 = 247.1 एकड़ (acres)

1 in^2 = 6.4516 cm^2

1ft^2 = $9.29 \times 10^{-2} m^2$

1 m^2 = 10.76 ft^2

1 एकड़ (acre) = 43,560 ft^2

1 mi^2 = 460 (acres) एकड़ = 2.590 km^2

आयतन

1m^3 = $10^6 cm^3$

1 L = 1000 cm^3 = 10^{-3} m^3

1 gal = 3.786 L

1 gal = 4 qt = 8 pt = 128 oz = 231 in^3

1 in^3 = 16.39 cm^3

1ft^3 = 1728 in^3 = 28.32 L = 2.832×10^4 cm^3

चाल

1 km h^{-1} = 0.2778 m s^{-1} = 0.6215 mi h^{-1}

1mi h^{-1} = 0.4470 m s^{-1} = 1.609 km h^{-1}

1mi h^{-1} = 1.467 ft s^{-1}

चुंबकीय क्षेत्र

1 G = 10^{-4} T

1 T = 1 Wb m^{-2} = 10^4 G

कोण तथा कोणीय चाल

π rad = 180°

1 rad = 57.30°

1° = 1.745×10^{-2} rad

1 rev min^{-1} = 0.1047 rad s^{-1}

1 rad s^{-1} = 9.549 rev min^{-1}

द्रव्यमान

1 kg = 1000 g

1 टन (tonne) = 1000 kg = 1 Mg

1 u = 1.6606×10^{-27} kg

1 kg = 6.022×10^{26} u

1 स्लग (slug) = 14.59 kg

1 kg = 6.852×10^{-2} स्लग (slug)

1 u = 931.50 MeV/c^2

घनत्व

1 g cm^{-3} = 1000 kg m^{-3} = 1 kg L^{-1}

बल

1 N = 0.2248 lbf = 10^5 dyn

1 lbf = 4.4482 N

1 kgf = 2.2046 lbf

समय

1 h = 60 min = 3.6 ks

1 d = 24 h = 1440 min = 86.4 ks

1y = 365.24 d = 31.56 Ms

दाब

1 Pa = 1 N m^{-2}

1 bar = 100 kPa

1 atm = 101.325 kPa = 1.01325 bar

1atm = 14.7 lbf/in^2 = 760 mm Hg

= 29.9 in Hg = 33.8 ft H_2O

1 lbf in^{-2} = 6.895 kPa

ऊर्जा

1 kW h = 3.6 MJ

1 cal = 4.186 J

1 ft lbf = 1.356 J = 1.286×10^{-3} Btu

1 L atm = 101.325 J

1 L atm = 24.217 cal

1 Btu = 778 ft lb = 252 cal = 1054.35 J

1 eV = 1.602×10^{-19} J

1 u c^2 = 931.50 MeV

1 erg = 10^{-7} J

1 torr = 1mm Hg = 133.32 Pa

शक्ति

1 अश्वशक्ति (horse power, hp) = 550 ft lbf/s
= 745.7 W

1 Btu $\min^{-1}$ = 17.58 W

1 W = 1.341×10^{-3} hp
= 0.7376 ft lbf/s

ऊष्मा चालकता

1 W m^{-1} K^{-1} = 6.938 Btu in/hft^2 °F

1 Btu in/hft^2 °F = 0.1441 W/m K

परिशिष्ट A 5

गणितीय सूत्र

ज्यामिति

r त्रिज्या का वृत्त : परिधि $= 2\pi r$; क्षेत्रफल $= \pi r^2$

r त्रिज्या का गोला : क्षेत्रफल $= 4\pi r^2$; आयतन $= \frac{4}{3}\pi r^3$

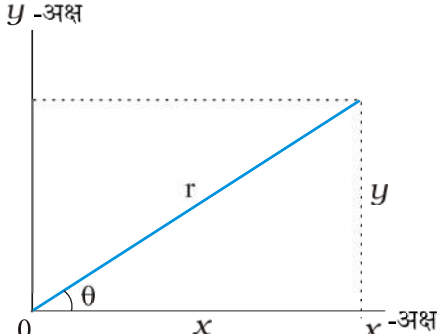
r त्रिज्या तथा h ऊँचाई का लंब वृत्तीय शंकु :
क्षेत्रफल $= 2\pi r^2 + 2\pi rh$; आयतन $= \pi r^2 h$

a आधार तथा h शीर्षलंब का त्रिभुज : क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} a h$

द्विघाती सूत्र

यदि $ax^2 + bx + c = 0$ है, तब $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

कोण θ के त्रिकोणमितीय फलन



चित्र A 5.1

$\sin\theta = \frac{y}{r}$ $\cos\theta = \frac{x}{r}$

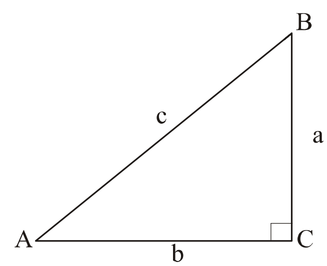
$\tan\theta = \frac{y}{x}$ $\cot\theta = \frac{x}{y}$

$\sec\theta = \frac{r}{x}$ $\operatorname{cosec}\theta = \frac{r}{y}$

पाइथागोरीय प्रमेय

इस समकोण त्रिभुज में,

$a^2 + b^2 = c^2$



चित्र A 5.2

त्रिभुज

A, B, C कोण हैं,

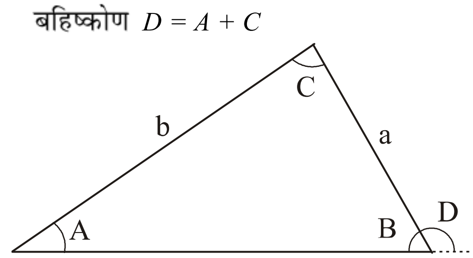
a, b, c सम्मुख भुजाएँ हैं,

कोण A + B + C = 180°

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

बहिष्कोण $D = A + C$



चित्र A 5.3

गणितीय चिह्न एवं प्रतीक

$=$ बराबर

$\cong$ सन्निकटत: बराबर

$\sim$ परिमाण की कोटि है

$\neq$ बराबर नहीं है

$\equiv$ के सर्वसम है, इस प्रकार परिभाषित किया जाता है

$>$ अधिक है ($>>$ बहुत अधिक है)

$<$ कम है ($<<$ बहुत कम है)

$\geq$ अधिक है अथवा बराबर है (अथवा, कम नहीं है)

$\leq$ कम है अथवा बराबर है (अथवा, अधिक नहीं है)

$\pm$ धन अथवा ऋण

$\propto$ समानुपाती है

$\sum$ का योग

$\bar{x}$ अथवा $<x>$ अथवा x_{av}, x का औसत मान

त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएँ

$\sin(90° - \theta) = \cos\theta$

$\cos(90° - \theta) = \sin\theta$

$\sin\theta / \cos\theta = \tan\theta$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$

$\operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$$

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \pm \tan\alpha\tan\beta}$$

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{1}{2}(\alpha \pm \beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha \pm \beta)$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

द्विपद प्रमेय

$$(1 \pm x)^n = 1 \pm \frac{nx}{1!} + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + ...(x^2 < 1)$$

$$(1 \pm x)^{-n} = 1 \pm \frac{nx}{1!} + \frac{n(n+1)x^2}{2!} + ...(x^2 < 1)$$

चरघातांकी प्रसरण

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...$$

लघुगणकीय प्रसरण

$$\ln(1 + x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - ..... \quad (|x| < 1)$$

त्रिकोणमितीय प्रसरण

(θ रेडियनों में)

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - .....$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - .....$$

$$\tan\theta = \theta + \frac{\theta^3}{3} + \frac{2\theta^5}{15} - .....$$

सदिशों का गुणनफल

मान लीजिए $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}$ तथा $\hat{\mathbf{k}}$ x-, y- तथा z- दिशाओं में एकांक सदिश हैं, तो

$$\hat{\mathbf{i}}\cdot\hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}}\cdot\hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{k}} = 1, \; \hat{\mathbf{i}}\cdot\hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{j}}\cdot\hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{i}} = 0$$

$$\hat{\mathbf{i}}\times\hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}}\times\hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{k}} = 0, \; \hat{\mathbf{i}}\times\hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{j}}\times\hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}}$$

कोई सदिश **a** जिसके x-, y- तथा z-अक्ष के अनुदिश घटक a_x, a_y तथा a_z हैं, उन्हें इस प्रकार लिख सकते हैं,

$$\mathbf{a} = a_x\hat{\mathbf{i}} + a_y\hat{\mathbf{j}} + a_z\hat{\mathbf{k}}$$

मान लीजिए **a, b** तथा **c** स्वेच्छ सदिश हैं, जिनके परिमाण a, b तथा c हैं, तब

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{a} \times \mathbf{c})$$

$(s\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (s\mathbf{b}) = s(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ (s कोई अदिश है)

मान लीजिए **a** तथा **b** के बीच के दो कोणों में θ लघुतर कोण है, तब

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = a_x\, b_x + a_y\, b_y + a_z\, b_z = ab \cos\theta$

$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = ab \sin\theta$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\,\mathbf{b} \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$= (a_y b_z - b_y a_z)\,\hat{\mathbf{i}} + (a_z b_x - b_z a_x)\,\hat{\mathbf{j}} + (a_x b_y - b_x a_y)\,\hat{\mathbf{k}}$$

$\mathbf{a} \,.\, (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}. (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c}. (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$

$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \,.\, \mathbf{c})\, \mathbf{b} - (\mathbf{a} \,.\, \mathbf{b})\, \mathbf{c}$

परिशिष्ट A 6

A 6.1 SI मूल मात्रकों के पदों में व्यक्त कुछ SI व्युत्पन्न मात्रक

भौतिक राशि	SI मात्रक	
	नाम	प्रतीक
क्षेत्रफल	वर्गमीटर	m^2
आयतन	घनमीटर	m^3
चाल, वेग	मीटर प्रति सेकंड	m/s या $m\ s^{-1}$
कोणीय वेग	रेडियन प्रति सेकंड	rad/s या $rad\ s^{-1}$
त्वरण	मीटर प्रतिवर्ग सेकंड	m/s^2 या $m\ s^{-2}$
कोणीय त्वरण	रेडियन प्रतिवर्ग सेकंड	rad/s^2 या $rad\ s^{-2}$
तरंग संख्या	प्रति मीटर	m^{-1}
घनत्व, द्रव्यमान घनत्व	किलोग्राम प्रति घनमीटर	kg/m^3 या $kg\ m^{-3}$
विद्युत् धारा घनत्व	ऐम्पियर प्रति वर्गमीटर	A/m^2 या $A\ m^{-2}$
चुंबकीय क्षेत्र की तीव्रता, चुंबकीय तीव्रता, चुंबकीय आघूर्ण घनत्व	ऐम्पियर प्रति मीटर	A/m या $A\ m^{-1}$
सांद्रता (पदार्थ की मात्रा की)	मोल प्रति घनमीटर	mol/m^3 या $mol\ m^{-3}$
विशिष्ट आयतन	घन मीटर प्रति किलोग्राम	m^3/kg या $m^3\ kg^{-1}$
ज्योति-तीव्रता	कैंडेला प्रति वर्गमीटर	cd/m^2 या $cd\ m^{-2}$
शुद्धगतिक श्यानता	वर्गमीटर प्रति सेकंड	m^2/s या $m^2\ s^{-1}$
संवेग	किलोग्राम मीटर प्रति सेकंड	kg m/s या $kg\ m\ s^{-1}$
जड़त्व आघूर्ण	किलोग्राम वर्गमीटर	$kg\ m^2$
परिभ्रमण त्रिज्या	मीटर	m
रेखीय/क्षेत्रीय (पृष्ठीय)/आयतन प्रसरणीयता	प्रति केल्विन	K^{-1}
प्रवाह दर	घनमीटर प्रति सेकंड	m^3/s या $m^3\ s^{-1}$

A 6.2 विशेष नाम वाले SI व्युत्पन्न मात्रक

भौतिक राशि	SI मात्रक			
	नाम	प्रतीक	अन्य मात्रकों के पदों में व्युत्पन्न मात्रक	SI मूल मात्रकों के पदों में व्युत्पन्न मात्रक
आवृत्ति	हर्ट्ज	Hz	—	s^{-1}
बल	न्यूटन	N	—	$kg\ m/s^2$ या $kg\ m\ s^{-2}$
दाब, प्रतिबल	पास्कल	Pa	N/m^2 या $N\ m^{-2}$	$kg\ m^{-1}s^{-2}$ या kg/s^2m
कार्य, ऊर्जा, ऊष्मा की मात्रा	जूल	J	N m	$kg\ m^2/s^2$ या $kg\ m^2\ s^{-2}$
शक्ति, विकिरण फलक्स	वाट	W	J/s या $J\ s^{-1}$	$kg\ m^2/s^3$ या $kg\ m^2s^{-3}$
विद्युत आवेश	कूलॉम	C	—	A s
विद्युत विभव, विभवान्तर, विद्युतवाहक बल	वोल्ट	V	W/A या $W\ A^{-1}$	$kg\ m^2/s^3A$ या $kg\ m^2s^{-3}A^{-1}$
धारिता	फैरड	F	C/V या $C\ V^{-1}$	$A^2s^4/kg\ m^2$ या $kg^{-1}\ m^{-2}s^4A^2$
विद्युत प्रतिरोध	ओम	Ω	V/A या VA^{-1}	$kg\ m^2/s^3A^2$ या $kg\ m^2\ s^{-3}A^{-2}$
विद्युत चालकता	सीमेन्स	S	A/V या VA^{-1}	$s^3A^2/kg\ m^2$ या $kg^{-1}m^{-2}\ s^3\ A^2$
चुंबकीय अभिवाह	वेबर	Wb	V s या (J/A या JA^{-1})	$kg\ m^2/s^2A$ या $kg\ m^2\ s^{-2}A^{-1}$
चुंबकीय क्षेत्र, चुंबकीय अभिवाह घनत्व, चुंबकीय प्रेरण	टेस्ला	T	Wb/m^2 या $Wb\ m^{-2}$	kg/s^2A या $kg\ s^{-2}A^{-1}$
प्रेरकत्व	हेनरी	H	$Wb\ /A$ या $Wb\ A^{-1}$	$kg\ m^2/s^2A^2$ या $kg\ m^2\ s^{-2}\ A^{-2}$
ज्योति फलक्स, दीप्त शक्ति	ल्यूमेन	lm	—	cd/sr या $cd\ sr^{-1}$
प्रदीप्त घनत्व	लक्स	lx	lm/m^2 या $lm\ m^{-2}$	$cd/sr\ m^2$ या $m^{-2}\ cd\ sr^{-1}$
सक्रियता (रेडियो न्यूक्लाइड/रेडियोएक्टिव स्रोत की)	बेकेरल	Bq	—	s^{-1}
अवशोषित मात्रा, अवशोषित मात्रा सूचकांक	ग्रे	Gy	J/kg या $J\ kg^{-1}$	m^2/s^2 या $m^2\ s^{-2}$

A 6.3 विशेष नाम वाले SI मात्रकों के पदों में व्यक्त SI व्युत्पन्न मात्रक

भौतिक राशि	SI मात्रक		
	नाम	प्रतीक	SI मूल मात्रकों के पदों में व्युत्पन्न मात्रक
चुंबकीय आघूर्ण	जूल प्रति टेस्ला	$J\ T^{-1}$	$m^2\ A$
द्विध्रुव आघूर्ण	कूलॉम मीटर	C m	m A s
गतिक श्यानता	पायसल अथवा पास्कल सेकंड अथवा न्यूटन सेकंड प्रति वर्ग मीटर	Pl या Pa s या $N\ s\ m^{-2}$	$kg\ m^{-1}\ s^{-1}$
युग्म, बल आघूर्ण	न्यूटन मीटर	N m	$kg\ m^2\ s^{-1}$
पृष्ठ तनाव	न्यूटन प्रति मीटर	N/m या $N\ m^{-1}$	$kg\ s^{-2}$
शक्ति घनत्व, किरणीत मान, ऊष्मीय फ्लक्स घनत्व	वाट प्रति वर्ग मीटर	W/m^2	$kg\ s^{-3}$
ऊष्मा धारिता, एन्ट्रॉपी	जूल प्रति केल्विन	J/K	$kg\ m^2\ s^{-2}\ K^{-1}$
विशिष्ट ऊष्मा, विशिष्ट एन्ट्रॉपी	जूल प्रति किलोग्राम केल्विन	J/kg K	$m^2\ s^{-2}\ K^{-1}$
विशिष्ट ऊर्जा, गुप्त ऊष्मा	जूल प्रति किलोग्राम	J/kg या $J\ kg^{-1}$	$m^2\ s^{-2}$
विकिरण तीव्रता	वाट प्रति स्टिरेडियन	W/sr या $W\ sr^{-1}$	$kg\ m^2\ s^{-3}\ sr^{-1}$
ऊष्मीय चालकता	वाट प्रति मीटर केल्विन	W/m K या $W\ m^{-1}K^{-1}$	$kg\ m\ s^{-3}\ K^{-1}$
ऊर्जा घनत्व	जूल प्रति घन मीटर	J/m^3 या $J\ m^{-3}$	$kg\ m^{-1}\ s^{-2}$
विद्युत क्षेत्र तीव्रता	वोल्ट प्रति मीटर	V/m या $V\ m^{-1}$	$kg\ m\ s^3 A^{-1}$
विद्युत आवेश घनत्व	कूलॉम प्रति घन मीटर	C/m^3 या $C\ m^{-3}$	$m^{-3}\ s\ A$
विद्युत फ्लक्स घनत्व	कूलॉम प्रति वर्ग मीटर	C/m^2 या $C\ m^{-2}$	$m^{-2}\ s\ A$
परावैद्युतांक	फैरड प्रति मीटर	F/m या $F\ m^{-1}$	$kg^{-1}m^{-3}\ s^4A^2$
चुंबकशीलता	हेनरी प्रति मीटर	H/m या $H\ m^{-1}$	$kg\ m\ s^{-2}\ A^{-2}$
मोलर ऊर्जा	जूल प्रति मोल	J/mol या $J\ mol^{-1}$	$kg\ m^2\ s^{-2}\ mol^{-1}$
कोणीय संवेग, प्लांक नियतांक	जूल सेकंड	J s	$kg\ m^2\ s^{-1}$
मोलर एन्ट्रॉपी, मोलर ऊष्मा धारिता	जूल प्रति मोल केल्विन	J/mol K या $J\ mol^{-1}K^{-1}$	$kg\ m^2\ s^{-2}\ K^{-1}\ mol^{-1}$
उद्भासन (exposure) (X-तथा γ-किरणें)	कूलॉम प्रति किलोग्राम ग्रे प्रति सेकंड	C/kg या $C\ kg^{-1}$ Gy/s या $Gy\ s^{-1}$	$kg^{-1}\ s\ A$ $m^2\ s^{-3}$
संपीड्यता	प्रति पास्कल	Pa^{-1}	$kg^{-1}\ m\ s^2$
प्रत्यास्थता गुणांक	न्यूटन प्रति वर्गमीटर	N/m^2 या $N\ m^{-2}$	$kg\ m^{-1}\ s^{-2}$
दाब प्रवणता	पास्कल प्रति मीटर	Pa/m या $N\ m^{-3}$	$kg\ m^{-2}\ s^{-2}$
पृष्ठ विभव	जूल प्रति किलोग्राम	J/kg या $J\ kg^{-1}$; N m/kg या $N\ m\ kg^{-1}$	$m^2\ s^{-2}$
दाब ऊर्जा	पास्कल घन मीटर	$Pa\ m^3$ या N m	$kg\ m^2\ s^{-2}$
आवेग	न्यूटन सेकंड	N s	$kg\ m\ s^{-1}$
कोणीय आवेग	न्यूटन मीटर सेकंड	Nm s	$kg\ m^2\ s^{-1}$
विशिष्ट प्रतिरोध	ओम मीटर	Ω m	$kg\ m^3\ s^{-3}\ A^{-2}$
पृष्ठ ऊर्जा	जूल प्रति वर्गमीटर	J/m^2 या $J\ m^{-2}$; N/m या $N\ m^{-1}$	$kg\ s^{-2}$

परिशिष्ट A 7

भौतिक राशियों, रासायनिक तत्वों तथा न्यूक्लाइडों के प्रतीकों के उपयोग के लिए सामान्य मार्गदर्शन

- भौतिक राशियों को प्रतीक रूप में सामान्यत: अंग्रेजी वर्णमाला के किसी अक्षर से निरूपित करते हैं तथा इन्हें तिरछे (अथवा ढालू) टाइप में छपवाया जाता है। तथापि जिस राशि के लिए दो अक्षरीय प्रतीक आवश्यक हों तो उन्हें दो प्रतीकों के गुणनफल के रूप में दर्शाना होता है, पर इन प्रतीकों को पृथक् दर्शाने के लिए कुछ स्थान छोड़ना आवश्यक होता है।
- नामों अथवा व्यंजकों के संक्षिप्त रूपों, जैसे–potential energy के लिए p.e. का उपयोग भौतिक समीकरणों में नहीं किया जाता। पाठ्य सामग्री में इन संक्षिप्त रूपों को साधारण रोमन (सीधे) टाइप में छपवाया जाता है।
- सदिश राशियों को मोटे टाइप में तथा सीधे छपवाया जाता है। तथापि कक्षा में सदिश राशियों को प्रतीक के शीर्ष पर तीर द्वारा निर्दिष्ट किया जा सकता है।
- दो भौतिक राशियों के गुणनफल को उनके बीच कुछ स्थान छोड़कर लिखा जाता है। एक भौतिक राशि को दूसरी भौतिक राशि से विभाजित करना एक क्षैतिज दंड खींचकर अथवा सॉलिडस (अथवा तिरछी रेखा /) के साथ निर्दिष्ट किया जा सकता है; अथवा अंश तथा हर के प्रथम घात के व्युत्क्रम के गुणनफल के रूप में लिखा जा सकता है (इस गुणनफल में अंश तथा हर में स्पष्ट पहचान के लिए उचित स्थानों पर कोष्ठकों का उपयोग किया जाता है)।
- रासायनिक तत्वों के प्रतीकों को रोमन (सीधे) टाइप में लिखा जाता है। प्रतीक के अंत में विराम चिह्न अथवा बिंदु (.) नहीं लगाया जाता।

  उदाहरण के लिए, Ca, C, H, He, U, आदि।
- किसी न्यूक्लाइड से जुड़े अंकों का उल्लेख उन्हें बाएं अधोलिखित (परमाणु क्रमांक) तथा बाएं उपरिलिखित (द्रव्यमान संख्या) के रूप में लिखकर किया जाता है।

  उदाहरण के लिए, U-235 न्यूक्लाइड को $^{235}_{92}\mathrm{U}$ लिखकर व्यक्त किया जाता है (यहां 235 द्रव्यमान संख्या तथा 92 परमाणु क्रमांक को व्यक्त करता है तथा U यूरेनियम का रासायनिक प्रतीक है)।
- यदि आवश्यक हो, तो दाईं उपरिलिखित स्थिति का उपयोग आयनीकरण की अवस्था (आयनों के प्रकरण में) निर्दिष्ट करने के लिए किया जाता है।

  उदाहरण के लिए, Ca^{2+}, PO_4^{3-}

परिशिष्ट A 8

SI मात्रकों, कुछ अन्य मात्रकों तथा SI पूर्वलग्नों के प्रतीकों के उपयोग के लिए सामान्य मार्गदर्शन

- भौतिक राशियों के मात्रकों के प्रतीकों को रोमन (सीधे टाइप) में छापा/लिखा जाता है।
- मात्रकों के मानक तथा अनुमोदित प्रतीकों को अंग्रेजी वर्णमाला के छोटे अक्षरों से आरंभ करके रोमन (सीधे टाइप) में लिखा जाता है। मात्रकों के लघु उल्लेखों, जैसे kg, m, s, cd आदि को प्रतीकों के रूप में लिखा जाता है, संक्षिप्त रूप में नहीं। मात्रकों के नाम को कभी भी बड़े अक्षरों में नहीं लिखते। तथापि, मात्रक के प्रतीक को केवल तभी बड़े अक्षर में लिखा जाता है, जब मात्रक के प्रतीक को किसी वैज्ञानिक के नाम से व्युत्पन्न किया गया हो, ऐसी स्थिति में मात्रक का आरंभ बड़े रोमन अक्षर से किया जाता है।

  उदाहरण के लिए : मात्रक मीटर ('metre') के लिए 'm', "दिन" ("day") के लिए d, मात्रक वायुमंडलीय दाब ('atmospheric pressure') के लिए atm, मात्रक हर्ट्ज़ ('hertz') के लिए Hz, मात्रक वेबर ('weber') के लिए Wb, मात्रक जूल ('joule') के लिए J, मात्रक ऐम्पियर ('ampere') के लिए A, मात्रक वोल्ट ('volt') के लिए V, आदि का प्रयोग प्रतीकों के रूप में किया जाता है। इसका केवल एक ही अपवाद है L, जो कि मात्रक लीटर (litre) का प्रतीक है। ऐसा अरबी संख्यांक 1 तथा लोअर केस रोमन के अक्षर l को छापने अथवा लिखने में होने वाली भ्रांति से बचने के लिए किया गया है।

- मात्रकों के प्रतीकों को उनके लिए अनुमोदित अक्षरों में लिखने के पश्चात् उनके अंत में पूर्ण विराम नहीं लगाया जाता तथा मात्रकों के प्रतीकों को केवल एकवचन में ही लिखा जाता है बहुवचन में नहीं, अर्थात् किसी मात्रक का प्रतीक बहुवचन में अपरिवर्तित रहता है ।
  उदाहरण के लिए : लंबाई 25 सेंटीमीटर (centimetres) के लिए मात्रक का प्रतीक 25 cm के रूप में लिखा जाता है, 25 cms अथवा 25 cm. अथवा 25 cms., आदि नहीं लिखा जाता ।
- सॉलिडस (solidus) अर्थात् (/) के उपयोग का अनुमोदन केवल एक अक्षर के मात्रक प्रतीक के अन्य मात्रक प्रतीक द्वारा विभाजन का संकेतन करने के लिए किया गया है। एक से अधिक सॉलिडस का उपयोग नहीं किया जाता।
  उदाहरण के लिए, m/s^2 अथवा $m\ s^{-2}$ (m तथा s^{-2} के बीच कुछ स्थान छोड़ते हुए) लिख सकते हैं परंतु m/s/s नहीं;
  $1\ Pl = 1\ N\ s\ m^{-2} = 1\ N\ s/m^2 = 1\ kg/s\ m = 1\ kg\ m^{-1}s^{-1}$ परंतु 1 kg/m/s नहीं;
  J/K mol अथवा $J\ K^{-1}\ mol^{-1}$, परंतु J/K/mol नहीं; आदि ।
- पूर्वलग्न के प्रतीकों को रोमन (सीधे) टाइप में छापा जाता है तथा पूर्वलग्न के प्रतीक तथा मात्रक के प्रतीक के बीच कोई स्थान नहीं छोड़ा जाता। इस प्रकार मात्रक प्रतीकों के बहुत निकट लिखी कुछ दशमलव भिन्न या गुणज, जब वे इतने छोटे हों या बड़े हों, कि उनका लिखना असुविधाजनक हो तो उनको लिखने के लिए कुछ मान्य पूर्वलग्नों का उपयोग किया जाता है।
  उदाहरण के लिए :
  मेगावाट ($1\ MW = 10^6 W$); नेनो सेकंड ($1\ ns = 10^{-9} s$);
  सेंटीमीटर ($1\ cm = 10^{-2} m$); पीकोफैरड ($1\ pF = 10^{-12} F$);
  किलोमीटर ($1\ km = 10^3 m$); माइक्रोसेकंड ($1\ \mu s = 10^{-6} s$);
  मिलीवोल्ट ($1\ mV = 10^{-3}\ V$); गीगा हर्ट्ज़ ($1\ GHz = 10^9\ Hz$);
  किलोवाट-घंटा ($1\ kWh) = 10^3\ Wh = 3.6\ MJ = 3.6 \times 10^6 J$);
  माइक्रो ऐम्पियर ($1\ \mu A = 10^{-6}\ A$); माइक्रॉन ($1\ \mu m = 10^{-6} m$)
  एंगस्ट्रॉम ($1 Å = 0.1\ nm = 10^{-10}\ m$); आदि ।
  मात्रक 'माइक्रॉन' जो कि 10^{-6} m अर्थात् 1 माइक्रो मीटर के बराबर है, मात्र एक नाम है जो मीटर के अपवर्तक को सुविधाजनक बनाने के लिए है। इसी प्रकार मात्रक फर्मी ('fermi') जो फेम्टोमीटर अथवा 10^{-15} m के बराबर है, का उपयोग नाभिकीय अध्ययनों में लंबाई के सुविधाजनक मात्रक की भांति किया जाता है । इसी प्रकार, एक अन्य मात्रक "बार्न" (barn) जो $10^{-28} m^2$ के बराबर है, का उपयोग अवपरामाण्विक कण संघट्टों में अनुप्रस्थ काट के क्षेत्रफलों की मापों के सुविधाजनक मात्रक के रूप में किया जाता है। तथापि 'माइक्रॉन' मात्रक को "micrometre" की तुलना में प्राथमिकता दी जाती है। इसका कारण 'micrometre' मात्रक तथा "micrometer" जो कि लंबाई मापने का यंत्र है, के बीच भ्रांति से बचना है। SI मात्रकों मीटर तथा सेकंड के ये नए बने अपवर्त्य तथा अपवर्तक (cm, km, μm, μs, ns) इन मात्रकों के नए संयुक्त, अपृथक्करणीय प्रतीकों का निर्माण करते हैं।
- जब कोई पूर्वलग्न किसी मात्रक के प्रतीक से पहले लगाया जाता है, तो पूर्वलग्न तथा प्रतीक का संयोजन उस मात्रक का एक नया प्रतीक माना जाता है, जिस पर कोष्ठक का उपयोग किए बिना ही कोई धनात्मक अथवा ऋणात्मक घात लगाई जा सकती है। इन्हें अन्य मात्रकों के प्रतीकों के साथ संयोजित करके संयुक्त मात्रक बनाए जा सकते हैं। घातांकों के बंधन के नियम साधारण बीजगणित की भांति नहीं होते।
  उदाहरण के लिए:
  cm^3 का सदैव अर्थ $(cm)^3 = (0.01\ m)^3 = (10^{-2} m)^3 = 10^{-6} m^3$, परंतु $0.01\ m^3$ अथवा $10^{-2} m^3$ अथवा $1\ c\ m^3$ (यहां पूर्वलग्न c तथा m^3 के बीच स्थान अर्थहीन है, क्योंकि पूर्वलग्न को मात्रक के प्रतीक के साथ जोड़ा जाना है। किसी पूर्वलग्न का कोई भौतिक महत्त्व अथवा अपना स्वतंत्र अस्तित्व नहीं होता जब तक कि उसे किसी मात्रक के प्रतीक से जोड़ा न जाए)। इसी प्रकार, mA^2 का सदैव ही अर्थ है $(mA)^2 = (0.001\ A)^2 = (10^{-3}\ A)^2 = 10^{-6} A^2$, परंतु $0.001\ A^2$ अथवा mA^2 कभी नहीं।
  $1\ cm^{-1} = (10^{-2} m)^{-1} = 10^2\ m^{-1}$ परंतु $1\ cm^{-1}$ अथवा $10^{-2}\ m^{-1}$ कभी नहीं;
  $1\ \mu s^{-1}$ का सदैव अर्थ है $(10^{-6}\ s)^{-1} = 10^6\ s^{-1}$, परंतु $1 \times 10^{-6}\ s^{-1}$ नहीं;

1 km^3 का सदैव अर्थ है $(km)^3 = (10^3\ m)^3 = 10^9\ m^3$, परंतु $10^3\ m^3$ कभी नहीं;

1 mm^2 का सदैव अर्थ है $(mm)^2 = (10^{-3}\ m)^2 = 10^{-6}\ m^2$ परंतु $10^{-3}\ m^2$ कभी नहीं, आदि।

- किसी पूर्वलग्न का अकेले उपयोग नहीं होता। इसे सदैव ही किसी मात्रक के प्रतीक के साथ संलग्न किया जाता है तथा इसे मात्रक के प्रतीक से पहले (पूर्व-लग्न) लिखा अथवा लगाया जाता है।

  उदाहरण के लिए :

  $10^3/m^3$ का अर्थ $1000/m^3$ अथवा $1000\ m^{-3}$ परंतु k/m^3 अथवा $k\ m^{-3}$ नहीं;

  $10^6/m^3$ का अर्थ है $10,00,000/m^3$ अथवा $10,00,000\ m^{-3}$ परंतु M/m^3 अथवा $M\ m^{-3}$ नहीं।

- पूर्वलग्न के प्रतीक को मात्रक के प्रतीक के साथ बीच में बिना कोई स्थान छोड़े लिखा जाता है, जबकि मात्रकों को आपस में गुणा करते समय मात्रकों के प्रतीकों को पृथक्-पृथक् उनके बीच कुछ स्थान छोड़कर लिखा जाता है।

  उदाहरण के लिए :

  $m\ s^{-1}$ (प्रतीक m तथा s^{-1} लोअर केस में, छोटे अक्षर m तथा s पृथक् तथा स्वतंत्र मात्रक-प्रतीक हैं जिनमें m मीटर के लिए तथा s सेकंड के लिए है तथा उनके बीच कुछ स्थान छोड़कर लिखा गया है) का अर्थ है मीटर प्रति सेकंड परंतु "मिली प्रति सेकंड" नहीं।

  इसी प्रकार, ms^{-1} [प्रतीक m तथा s एक-दूसरे के बहुत पास-पास सटाकर लिखे गए हैं, जिनमें पूर्वलग्न-प्रतीक m (पूर्वलग्न 'मिली' के लिए) तथा लोअर केस में छोटे अक्षर के साथ मात्रक प्रतीक s (मात्रक 'सेकंड' के लिए) बीच में बिना कोई स्थान छोड़े ms को एक नया संयुक्त मात्रक बनाकर] का अर्थ है "प्रति मिली सेकंड" परंतु "मीटर प्रति सेकंड" कभी नहीं।

  mS^{-1} [प्रतीक m तथा S एक-दूसरे के बहुत पास सटाकर लिखे गए हैं, जिनमें पूर्वलग्न-प्रतीक m (पूर्वलग्न 'मिली' के लिए) तथा मात्रक-प्रतीक S बड़े रोमन अक्षर S मात्रक साइमेंस (siemens) के लिए बीच में बिना कोई स्थान छोड़े mS को एक नया संयुक्त मात्रक बनाकर] का अर्थ 'प्रति मिली-साइमेंस' है, परंतु 'प्रति मिली सेकंड' कदापि नहीं है।

  C m [प्रतीक C तथा m पृथक्-पृथक् लिखे गए हैं, जो मात्रक प्रतीकों C (मात्रक कूलॉम के लिए) तथा m (मात्रक मीटर के लिए) को उनके बीच कुछ स्थान छोड़कर निरूपित करते हैं।] का अर्थ "कूलॉम मीटर" है, परंतु सेंटीमीटर कदापि नहीं, आदि।

- जब तक एक पूर्वलग्न उपलब्ध है, दुहरे पूर्वलग्नों का उपयोग वर्जित है।

  उदाहरण के लिए :

  $10^{-9}\ m = 1\ nm$ (नैनोमीटर) है, परंतु 1 $m\mu m$ (मिलीमाइक्रोमीटर) नहीं है।

  $10^{-6}\ m = 1\ \mu m$ (माइक्रॉन) है, परंतु 1 mmm (मिलीमिलीमीटर) नहीं है।

  $10^{-12}\ F = 1\ pF$ (पीको फैरड) है, परंतु 1 $\mu\mu F$ (माइक्रोमाइक्रो फैरड) नहीं है।

  $10^9\ W = 1\ GW$ (गीगावाट) है, परंतु 1 kMW (किलोमेगावाट) नहीं है, आदि।

- जब कोई भौतिक राशि दो या अधिक मात्रकों के संयोजन द्वारा व्यक्त की जाती है, तब मात्रक तथा मात्रकों के प्रतीकों के किसी संयोजन के उपयोग को वर्जित माना जाता है।

  उदाहरण के लिए :

  जूल प्रति मोल केल्विन को J/mol K अथवा $J\ mol^{-1}\ K^{-1}$ के रूप में लिखा जाता है, परंतु joule/mole K अथवा J/mol kelvin अथवा J/mole K, आदि नहीं लिखते।

  जूल प्रति टेसला को J/T अथवा JT^{-1} के रूप में लिखा जाता है, परंतु joule/T अथवा J per tesla अथवा J/tesla, आदि नहीं लिखते।

  न्यूटन मीटर सेकंड को N m s के रूप में लिखा जाता है, परंतु newton m second अथवा N m second अथवा N metre s अथवा newton metre s नहीं लिखते।

  जूल प्रति किलोग्राम केल्विन को J/kg K अथवा $J\ kg^{-1}\ K^{-1}$ के रूप में लिखा जाता है, परंतु J/kilog K अथवा joule/kg K अथवा J/kg kelvin अथवा J/kilogram K आदि नहीं लिखते।

- परिकलन की सुविधा के लिए, पूर्वलग्न के प्रतीक को मात्रक के प्रतीक के साथ अंश में लगाया जाता है हर में नहीं उदाहरण के लिए :

  को लिखने की अपेक्षा के रूप में लिखा जाना अधिक सुविधाजनक है।

  उन संख्याओं जिनमें अपवर्त्यों अथवा अपवर्तकों जिनमें के गुणक सम्मिलित हों, वहाँ इन संख्याओं को पूर्णांक है) के रूप में लिखने को प्राथमिकता दी जाती है।

  उन प्रकरणों में अत्यंत सावधानी की आवश्यकता होती है जिनमें भौतिक राशियों तथा भौतिक राशियों के मात्रकों के प्रतीक समान होते हैं।

  उदाहरण के लिए :

  भौतिक राशि भार को द्रव्यमान तथा गुरुत्वीय त्वरण के गुणनफल के रूप में व्यक्त किया जाता है। इसे प्रतीकों के पदों में तिरछे टाइप में के रूप में छापा जाता है तथा लिखते समय तथा के बीच कुछ स्थान छोड़ देते हैं। इसे मात्रकों तथा के मात्रक प्रतीकों के साथ भ्रम में नहीं पड़ना चाहिए। तथापि, समीकरण में, प्रतीक भार को व्यक्त करता है जिसका मात्रक-प्रतीक है; द्रव्यमान को व्यक्त करता है जिसका मात्रक-प्रतीक है तथा गुरुत्वीय त्वरण को व्यक्त करता है जिसका मात्रक-प्रतीक है।

  इसी प्रकार, समीकरण में प्रतीक बल को व्यक्त करता है जिसका मात्रक-प्रतीक है, द्रव्यमान को व्यक्त करता है जिसका मात्रक-प्रतीक है तथा त्वरण को व्यक्त करता है जिसका मात्रक-प्रतीक है। भौतिक राशियों के इन प्रतीकों को मात्रकों तथा के साथ भ्रमित नहीं होना चाहिए।

  प्रतीकों [पूर्वलग्न हेक्टो तथा मात्रक घंटा], [पूर्वलग्न सेंटी तथा मात्रक कैरट], [पूर्वलग्न डेसी तथा मात्रक दिन], (पूर्वलग्न टेरा तथा मात्रक टेसला [पूर्वलग्न एट्टो तथा मात्रक ऑर] [पूर्वलग्न डेका तथा मात्रक डेसिऑर] आदि का उपयोग करते समय यथोचित भिन्नता दर्शानी चाहिए।

  मात्रकों की प्रणाली का द्रव्यमान का मूल मात्रक "किलोग्राम" मात्रकों की प्रणाली के द्रव्यमान के मूल मात्रक 'ग्राम' के साथ पूर्वलग्न 'किलो' (एक गुणज जो के बराबर है) को जोड़कर बनता है, जो देखने में असामान्य-सा

ERROR: stackunderflow
OFFENDING COMMAND: ~

STACK: