9

ગુણોત્તર-શ્રેણી

(Geometric Progression)

કોઈ વિશિષ્ટ ક્રમમાં આવતી સંખ્યાઓને શ્રેણી કહેવાય છે. શ્રેણીનાં કોઈ પણ બે ક્રમિક પદો વચ્ચે એક ચોક્કસ પ્રકારનો સંબંધ હોય છે. જેમ સમાંતર શ્રેણીના કોઈ પણ બે ક્રમિક પદો વચ્ચેનો તફાવત સમાન હોય છે તેમ ગુણોત્તર શ્રેણીના કોઈ પણ બે ક્રમિક પદોનો ગુણોત્તર સમાન હોય છે. જુદી-જુદી ગુણોત્તર શ્રેણીઓ તથા તેનાં પદોના સરવાળા વિશેનો ખ્યાલ આપણે આ પ્રકરણમાં મેળવેલ છે.

સૂત્રોની યાદી

- nમું પદ $T_n = ar^{n-1}$ (જ્યાં $n \geq 1$)
- $\frac{T_{n+1}}{T_n} = r$ = સામાન્ય ગુણોત્તર, અહીં n ધન પૂર્ણાંક છે.
- $T_{n+1} = S_{n+1} - S_n$; $n = 1, 2, 3, ...$
- જ્યારે $r = 1$ હોય ત્યારે $S_n = na$
- જ્યારે $r \neq 1$ હોય ત્યારે $S_n = \frac{a(r^n - 1)}{(r-1)}$
- જ્યારે $r \neq 1$ હોય ત્યારે $S_n = \frac{rT_n - a}{r-1}$
- ગુણોત્તર-શ્રેણીનાં ત્રણ ક્રમિક પદોની ધારણા : $\frac{a}{r}, a, ar$

વિભાગ A

નીચે આપેલ બહુવિકલ્પ પ્રશ્નો માટે સાચો વિકલ્પ પસંદ કરી પ્રશ્નની સામે આપેલ ખાનામાં લખો :

1. ગુણોત્તર-શ્રેણી 0.4, 2, 10, ... નું પાંચમું પદ કેટલું થાય ?

(a) 625 (b) 50 (c) 1250 (d) 250

2. ગુણોત્તર-શ્રેણી 0.5, 0.05, 0.005,... નો સામાન્ય ગુણોત્તર કેટલો થાય ?

(a) 0.5 (b) 0.1 (c) 0.01 (d) 10

3. એક ગુણોત્તર-શ્રેણીનું nમું પદ 5×2^n હોય, તો ચોથું પદ કેટલું થાય ?

(a) 96 (b) 16 (c) 80 (d) 40

4. એક ગુણોત્તર-શ્રેણીનું પ્રથમ પદ a અને સામાન્ય ગુણોત્તર b છે, તો $(n + 2)$મું પદ શોધો.

(a) ab^n (b) ab^{n+1} (c) ba^{n+1} (d) ab^{n-1}

5. ગુણોત્તર-શ્રેણી 1, $\sqrt{2}$, 2, ... માટે સાતમું પદ શોધો.

(a) 8 (b) $4\sqrt{2}$ (c) $8\sqrt{2}$ (d) 16

6. ગુણોત્તર-શ્રેણી $\frac{1}{16}, \frac{1}{4}, 1,...$ નું છઠ્ઠું પદ શોધો.

(a) 16 (b) 64 (c) 1024 (d) $\frac{1}{64}$

7. ગુણોત્તર-શ્રેણી 5, 10, 20,... નું કેટલામું પદ 1280 થાય ?

(a) સાતમું (b) આઠમું (c) નવમું (d) છઠ્ઠું

8. એક ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં $T_1 = a$, $T_3 = \frac{1}{a}$, જ્યાં $a > 0$ હોય, તો પાંચમું પદ મેળવો.

(a) a^3 (b) $\frac{1}{a^3}$ (c) 1 (d) $\frac{1}{a}$

9. ગુણોત્તર-શ્રેણી –250, –50, –10,... માટે સામાન્ય ગુણોત્તર શોધો.

(a) 5 (b) $\frac{1}{5}$ (c) $-\frac{1}{5}$ (d) –5

10. જો ગુણોત્તર-શ્રેણીનું પ્રથમ પદ 4 હોય અને સામાન્ય ગુણોત્તર 2 હોય, તો S_1 શોધો. ☐

(a) 4 (b) 8 (c) 2 (d) $\frac{1}{4}$

11. જો 8, G, 32 ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં હોય, તો G ની કિંમત શોધો. ☐

(a) 254 (b) 20 (c) $\pm$ 16 (d) 4

12. જો x, 4.5, 13.5 ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં હોય, તો x ની કિંમત શોધો. ☐

(a) 9 (b) 20.25 (c) 3 (d) 1.5

13. એક ગુણોત્તર-શ્રેણી માટે $a = r = 5$ હોય, તો T_5ની કિંમત શોધો. ☐

(a) 5^6 (b) 5^5 (c) 5^4 (d) 125

14. ab, ab^2, ab^3 ... ગુણોત્તર-શ્રેણીનું nમું પદ મેળવો. ☐

(a) ab^{n-1} (b) ab^{n+1} (c) ab^n (d) $a(b^n-1)$

15. ગુણોત્તર-શ્રેણી 4, 2, 1, ... માટે 5 પદોનો સરવાળો શોધો. ☐

(a) $\frac{1}{4}$ (b) $\frac{31}{4}$ (c) 4 (d) $\frac{31}{2}$

16. એક ગુણોત્તર-શ્રેણી માટે જો $r = 1$ અને $S_5 = 625$ હોય, તો પ્રથમ પદ જણાવો. ☐

(a) 25 (b) 125 (c) 625 (d) 5

વિભાગ B

નીચેના પ્રશ્નોના એક વાક્યમાં જવાબ લખો : (જરૂરી હોય ત્યાં ગણતરી કરવી.)

1. ગુણોત્તર-શ્રેણીની વ્યાખ્યા લખો.

2. ગુણોત્તર-શ્રેઢીની વ્યાખ્યા લખો.

3. ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં સામાન્ય ગુણોત્તર એટલે શું ?

4. ગુણોત્તર-શ્રેણી a, ar, ar^2, ar^3 ... નું nમું પદ શું થશે ?

5. જો $r = 1$ હોય, તો S_n મેળવવાનું સૂત્ર લખો.

6. જો ગુણોત્તર-શ્રેણીનું nમું પદ $T_n = 4^{n+1}$ હોય, તો સામાન્ય ગુણોત્તર શોધો.

7. ''જો a, b, c, d, e ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં હોય, તો $ae = bd$ થશે.'' આ વિધાન સાચું છે ?

8. એક ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં પ્રથમ પદ 2 અને સામાન્ય ગુણોત્તર 5 હોય, તો ચોથું પદ શોધો.

9. ગુણોત્તર-શ્રેણી $\frac{1}{64}, \frac{1}{32}, \frac{1}{16}, \ldots$ નું આઠમું પદ શોધો.

10. જો કોઈ ગુણોત્તર-શ્રેણીનું બીજું પદ 5 હોય, તો પ્રથમ ત્રણ પદોનો ગુણાકાર શોધો.

11. એક ગુણોત્તર-શ્રેણીનું પાંચમું પદ 81 અને સામાન્ય ગુણોત્તર 3 છે, તો તેનું પ્રથમ પદ શોધો.

12. એક ગુણોત્તર-શ્રેણીનું પ્રથમ પદ 100 અને સામાન્ય ગુણોત્તર $\frac{1}{4}$ છે. જો શ્રેણીનું nમું પદ $\frac{25}{16}$ હોય, તો n શોધો.

13. $\frac{1}{8}$, 1, m ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં હોય, તો m ની કિંમત શોધો.

14. એક ગુણોત્તર-શ્રેણી માટે $T_n = 20^n$ હોય, તો S_2 શોધો.

15. $\frac{a}{r^3}, \frac{a}{r}, ar, \ldots$ નું પાંચમું પદ શોધો.

16. $S_n = 3\ (2^n - 1)$ હોય, તો S_8 શોધો.

17. $a = \frac{1}{3}$ અને $r = 1$ હોય તેવી ગુણોત્તર-શ્રેણીનાં પ્રથમ 15 પદોનો સરવાળો કેટલો થાય ?

18. એક ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં $S_8 = 35$ અને $S_7 = 30$ હોય, તો આઠમું પદ શોધો.

વિભાગ C

નીચેના પ્રશ્નોના ટૂંકમાં જવાબ લખો :

1. ગુણોત્તર-શ્રેણી $\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \ldots$ નું બારમું પદ શોધો.

2. ગુણોત્તર-શ્રેણી $7, -\frac{7}{2}, \frac{7}{4}, \ldots$ નું અગિયારમું પદ શોધો.

3. ગુણોત્તર-શ્રેણી $-2, -2\sqrt{2}, -4, \ldots$ નું સાતમું પદ શોધો.

4. એક ગુણોત્તર-શ્રેણી માટે $T_7 = 96$ અને $r = 2$ હોય, તો T_5 શોધો.

5. જો એક ગુણોત્તર-શ્રેણી માટે $a = \frac{81}{32}$ અને $r = -\frac{2}{3}$ હોય, તો T_6 શોધો.

6. ગુણોત્તર-શ્રેણી 2, 6, 18, ... નાં પ્રથમ પાંચ પદોનો સરવાળો શોધો.

7. એક ગુણોત્તર-શ્રેણીનું પ્રથમ પદ 5 અને પ્રથમ ત્રણ પદોનો ગુણાકાર 1000 હોય, તો સામાન્ય ગુણોત્તર શોધો.

8. જો ગુણોત્તર-શ્રેણીનું પ્રથમ પદ અને પ્રથમ ત્રણ પદોનો ગુણાકાર અનુક્રમે 3 અને 729 છે, તો શ્રેણીનું પાંચમું પદ શોધો.

9. જો સંખ્યાઓ 2, G, 200 ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં છે, તો Gની કિંમત શોધો અને તેનો સામાન્ય ગુણોત્તર શોધો.

10. ગુણોત્તર-શ્રેણી 625, –125, 25, ... નું છઠ્ઠું પદ શોધો.

11. એક ગુણોત્તર-શ્રેણીનું પ્રથમ પદ અને સામાન્ય ગુણોત્તર અનુક્રમે 4 અને –3 છે. જો શ્રેણીનું nમું પદ –972 હોય, તો n ની કિંમત શોધો.

12. જો એક ગુણોત્તર-શ્રેણીનો સામાન્ય ગુણોત્તર 4 હોય, તો આઠમા અને ચોથા પદનો ગુણોત્તર શોધો.

13. ગુણોત્તર-શ્રેણી 1, 3, 9, ... નાં કેટલાં પદોનો સરવાળો 1093 થશે ?

વિભાગ D

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ લખો :

1. એક ગુણોત્તર-શ્રેણી માટે $T_3 = 18$ અને $T_6 = 486$ હોય, તો T_9 શોધો.

2. એક ગુણોત્તર-શ્રેણી માટે $T_2 = 6$ અને $T_5 = 48$ હોય, તો S_6 શોધો.

3. એક ગુણોત્તર-શ્રેણી માટે $r = \frac{1}{3}$, $S_4 = \frac{80}{27}$ હોય, તો a અને T_6 શોધો.

4. ગુણોત્તર-શ્રેણી 6, 2, $\frac{2}{3}$, ... માટે S_4 શોધો.

5. જો એક ગુણોત્તર-શ્રેણી માટે $a = 3$, $r = 3$, $S_n = 363$ હોય, તો n શોધો.

6. એક ગુણોત્તર-શ્રેણી માટે $r = \frac{1}{3}$, $S_3 = \frac{585}{4}$ હોય, તો પ્રથમ પદ શોધો.

7. એક ગુણોત્તર-શ્રેણી માટે $S_n = 189$, $a = 27$ અને $n = 3$ હોય, તો r ની કિંમત શોધો.

8. જો $S_n = \frac{5}{3}(4^n - 1)$ હોય, તો T_{n+1} અને T_3 શોધો.

9. જો એક ગુણોત્તર-શ્રેણીનું ત્રીજું પદ તે શ્રેણીના પ્રથમ પદનો વર્ગ હોય અને ચોથું પદ 3125 હોય, તો તે શ્રેણી શોધો.

10. જો એક ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં $T_n = -1.44$, $S_n = -2.79$ અને $r = 2$ હોય, તો a અને n શોધો.

11. જો 15, x, 60, y ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં હોય, તો x અને y ની કિંમત શોધો.

12. 25, $(x - 6)$, $(x - 12)$ ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં હોય, તો x ની કિંમત શોધો.

13. ત્રણ ધન સંખ્યાઓ $k + 2$, $k + 7$, $k + 17$ ગુણોત્તર શ્રેણીમાં છે, તો k શોધો.

14. એક ગુણોત્તર શ્રેણીમાં કોઈ પણ બે ક્રમિક પદોનો સરવાળો શૂન્ય હોય, તો પાંચમું પદ શોધો.

15. એક વ્યક્તિ વર્ષના પ્રથમ મહિના જાન્યુઆરીમાં ₹ 300 દાન કરે છે. ત્યાર બાદ પછીના દરેક મહિને - અગાઉના મહિના કરતાં બમણી રકમનું દાન કરે છે, તો વર્ષના અંતે તેણે કુલ કેટલી રકમનું દાન કર્યું હશે ?

વિભાગ E

નીચેના પ્રશ્નોના ઉકેલ લખો :

1. ગુણોત્તર-શ્રેણી 1, 4, 4^2, 4^3,... નાં પ્રથમ n પદોનો સરવાળો 345 થી વધે નહિ તેવી nની મહત્તમ કિંમત શોધો.

2. એક ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં $S_{16} = 17S_4$ હોય, તો સામાન્ય ગુણોત્તર શોધો.

3. એક ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં $S_4 = 26S_2$ હોય, તો સામાન્ય ગુણોત્તર શોધો.

4. ગુણોત્તર-શ્રેણીના ચોથા અને બીજા પદનો સરવાળો તથા તફાવત 17 : 15 ના પ્રમાણમાં હોય, તો સામાન્ય ગુણોત્તર શોધો.

5. જો એક ગુણોત્તર-શ્રેણી માટે $\frac{T_7 + T_4}{T_7 - T_4} = \frac{9}{7}$ હોય, તો r^2 શોધો.

6. એક ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં ત્રણ ક્રમિક પદોનો સરવાળો 21 અને ગુણાકાર –125 છે, તો શ્રેણીનાં તે ત્રણ પદો શોધો.

7. એક ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં ત્રણ ક્રમિક પદોનો સરવાળો 10.5 અને ગુણાકાર 8 હોય, તો શ્રેણીનાં તે ત્રણ પદો શોધો.

8. કુશ એક મોટરસાઈકલ ₹ 70,000 માં ખરીદે છે. જો દર વર્ષે તેની કિંમતમાં 15 % ઘટાડો થતો હોય, તો ચોથા વર્ષના અંતે મોટરસાઇકલની કિંમત કેટલી થશે ?

9. રેફ્રિજરેટર બનાવતી એક કંપની રેફ્રિજરેટર જથ્થાબંધ વેપારીને, જથ્થાબંધ વેપારી છૂટક વેપારીને અને છૂટક વેપારી ગ્રાહકને વેચે છે. દરેક વખતે કિંમત 10 % વધારવામાં આવે છે. જો ગ્રાહક રેફ્રિજરેટરની કિંમત ₹ 26,620 ચૂકવતો હોય, તો કંપનીની પડતર કિંમત કેટલી ?

10. રાજવી પ્રથમ અઠવાડિયે ₹ 50 બચાવે છે. ત્યાર બાદ દર અઠવાડિયે અગાઉના અઠવાડિયા કરતાં દોઢગણી બચત કરે છે. જો nમા અઠવાડિયે તેની કુલ બચત ₹ 406.25 થઈ હોય, તો n શોધો.